Allgemeine Topologie

WS 2003/04
(Vers. 17.12.2003)

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Topologische Räume

1.1 Offene Mengen, Umgebungen

1.1.1 Definition. Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Erfüllt $\mathcal{T}$ die Eigenschaften

(01) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(02) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, so folgt $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$,

(03) Ist I eine Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}, i \in I$, so folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

so heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*, und man spricht von $(X, \mathcal{T})$ als *topologischen Raum*.

1.1.2 Beispiel.

(i) Sei $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$. Klarerweise sind (01)-(03) erfüllt, also ist $(X, \mathcal{P}(X))$ ein topologischer Raum. Man spricht von der *diskreten Topologie*.

(ii) Sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. Wieder sind (01)-(03) trivialerweise erfüllt. Man spricht von der *Klumpentopologie*

1.1.3 Beispiel (Metrische Räume). Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Dann heißt d eine *Metrik* auf X (und damit (X, d) *metrischer Raum*), wenn gilt $(x, y, z \in X)$

(M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Dreicksungleichung*)

Sei nun ein metrischer Raum (X, d) gegeben. Wir definieren ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X. Es ist $O \in \mathcal{T}$ wenn $O \subseteq X$ die folgende Eigenschaft hat: Zu jedem $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ sodaß

$$U_\epsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\} \subseteq O\,.$$

Die Menge $U_\epsilon(x)$ nennt man auch *ϵ-Kugel* um x. Wir weisen nach, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. Zunächst gilt trivialerweise $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Sind $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ und ist $x \in O_1 \cap \dots \cap O_n$, so existieren $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ mit

$$U_{\epsilon_i}(x) \subseteq O_i, i = 1, \dots, n\,.$$

Setze $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, dann ist $\epsilon > 0$ und es gilt $U_\epsilon(x) \subseteq U_{\epsilon_i}(x) \subseteq O_i$, $i = 1, \dots, n$, also

$$U_\epsilon(x) \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n\,.$$

Damit haben wir erhalten das $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$. Seien $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, und $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in O_{i_0}$, und daher ein $\epsilon > 0$ mit

$$U_\epsilon(x) \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i\,.$$

Also gilt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Man sagt $\mathcal{T}$ ist die *von der Metrik d induzierte Topologie*.

1.1.4 Beispiel.

(*i*) Sei $X = \mathbb{R}^n$ oder $X = \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, eine Metrik auf X. Man hat also eine von dieser Metrik induzierte Topologie auf X, die *euklidische Topologie*.

(*ii*) Sei $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Definiere $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ wie folgt. Es ist $O \in \mathcal{T}$ wenn $O \subseteq X$ die folgenden Eigenschaften hat: Ist $x \in O \cap \mathbb{R}$, so gibt es $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \epsilon\} \subseteq O$. Ist $+\infty \in O$, so gibt es $N \in \mathbb{R}$ mit $U_N(+\infty) := \{y \in \mathbb{R} : y > N\} \subseteq O$. Ist $-\infty \in O$, so gibt es $N \in \mathbb{R}$ mit $U_N(-\infty) := \{y \in \mathbb{R} : y < -N\} \subseteq O$.

Man weist genauso wie in Beispiel 1.1.3 nach, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. De facto kommt diese Topologie auch von einer Metrik, z.B. von

$$d(x, y) := \Big| \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y \Big|, \; x, y \in X\,,$$

wobei wir definieren

$$\operatorname{Arctan}(+\infty) := \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arctan}(-\infty) := -\frac{\pi}{2}\,.$$

1.1.5 Beispiel. Sei X eine Menge und sei $F(X) := \mathbb{R}^X$, d.h. die Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Wir sagen $O \in \mathcal{T}$ für ein $O \subseteq F(X)$ wenn gilt: Zu jedem $f \in O$ existiert $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ sodaß

$$U^{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}_{n_j x_1, \dots, x_n}(f) := \Big\{ g \in F(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon_i, i = 1, \dots, n \Big\} \subseteq O.$$

Man zeigt genauso wie in Beispiel 1.1.3 das $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $F(X)$ ist, die *Topologie der punktweisen Konvergenz*. Sie ist gerade die Produkttopologie von $F(X) = \prod_{x \in X} \mathbb{R}$, siehe später. Ist X überabzählbar, so kommt diese nicht von einer Metrik (siehe später : sie erfüllt dann nicht das 1-te Abzählbarkeitsaxiom).

Die obigen Beispiele verwendeten zur Definition der Topologie die Vorgangsweise: "O ist offen wenn es zu jedem Punkt $x \in O$ eine ganze Menge U von gewisser Gestalt gibt mit $x \in U \subseteq O$". Man stellt sich dabei vor das U "zu X sehr nahe" Punkte y enthält, daß also eine Menge offen ist wenn sie mit jedem Punkt auch alle hinreichend nahen Punkte enthält. Diese Vorstellung wird formalisiert durch den Begriff der Umgebung.

1.1.6 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subseteq U$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x, den *Umgebungsfilter von x*.

1.1.7 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $O \subseteq X$. Dann sind äquivalent:*

(i) O ist offen.

(ii) O ist eine Umgebung jedes ihrer Punkte.

(iii) Zu jedem $x \in O$ gibt es $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \subseteq O$.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Sei O offen und $x \in O$. Dann ist $O \in \mathfrak{U}(x)$ denn für die in der Definition verlangte Menge wähle O selbst.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Wähle stets $U = O$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Zu $x \in O$ sei $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ sodaß $U_x \subseteq O$. Sei O_x offen mit $x \in O_x \subseteq U_x$. Dann ist also auch

$$x \in O_x \subseteq O, x \in O\,,$$

und daher $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ offen.

$\square$

1.1.8 Satz. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und bezeichnet $\mathfrak{U}(x)$ den Umgebungsfilter von x so gilt*

(U1) $X \in \mathfrak{U}(x), x \in X$.

(U2) *Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so gilt $x \in U$.*

(U3) *Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \supseteq U$, so folgt $V \in \mathfrak{U}(x)$.*

(U4) *Ist $U, V \in \mathfrak{U}(x)$, so auch $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$.*

(U5) *Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ so existiert $V \in \mathfrak{U}(x), V \subseteq U$, mit*

$$V \in \mathfrak{U}(y) \text{ für alle } y \in V\,.$$

Ist umgekehrt jedem $x \in X$ ein System $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X zugeordnet, sodaß (U1) - (U5) erfüllt sind, so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodaß für alle x die Menge $\mathfrak{U}(x)$ gerade der Umgebungsfilter von x bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ ist.

Beweis.
·) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x. Die Eigenschaften (U1) - (U3) folgenden unmittelbar aus der Definition der Umgebung. Seien $U, V \in \mathfrak{U}(x)$ und O_1, O_2 offen mit $x \in O_1 \subseteq U$, $x \in O_2 \subseteq V$. Dann ist $O_1 \cap O_2$ offen und es gilt $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U \cap V$, also folgt $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$, d.h. (U4) gilt. Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ und wähle O offen mit $x \in O \subseteq U$. Wegen Lemma 1.1.7 ist $O \in \mathfrak{U}(x)$ und sogar $O \in \mathfrak{U}(y)$ für alle $y \in O$, d.h. (U5) gilt.

·) Sei nun X gegeben und zu jedem Punkt $x \in X$ sei $\mathfrak{U}(x)$ ein System von Teilmengen von X sodaß die Eigenschaften (U1) - (U5) erfüllt sind. Wir definieren $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ wie folgt. Es ist $O \in \mathcal{T}$ falls gilt: Zu jedem $x \in O$ gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \subseteq O$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X: Zunächst gilt (01), da $\mathfrak{U}(x)$ wegen (U1) nicht leer ist. Weiters gilt (02), denn ist $x \in O_1 \cap \ldots \cap O_n$ und sind $U_i \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U_i \subseteq O_i$, so folgt wegen (U4) das $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathfrak{U}(x)$ und es gilt

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_n .$$

Die Eigenschaft (03) ist klar, denn ist $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, so ist $x \in O_{i_0}$ und es existiert $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit

$$U \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i .$$

·) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und $\mathfrak{U}(x)$ die Umgebungsfilter. Ausgehend von den $\mathfrak{U}(x)$ konstruieren wir wie im letzten Schritt eine Topologie $\mathcal{T}'$. Dann gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$: Denn nach Definition gilt $O \in \mathcal{T}'$ genau dann, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq O$. Das ist wegen Lemma 1.1.7 genau dann erfüllt, wenn $O \in \mathcal{T}$.

·) Seien Systeme $\mathfrak{U}(x)$ gegeben und sei $\mathcal{T}$ die daraus konstruierte Topologie. Weiters seien $\mathfrak{U}'(x)$ die Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}$. Wir zeigen $\mathfrak{U}'(x) = \mathfrak{U}(x)$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Wähle nach (U5) ein $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $V \in \mathfrak{U}(y), y \in V$. Dann ist $V \in \mathcal{T}$ nach Definition von $\mathcal{T}$. Wir erhalten wegen $x \in V \subseteq U$ also $U \in \mathfrak{U}'(x)$. Sei umgekehrt $U \in \mathfrak{U}'(x)$. Wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Nach Definition von $\mathcal{T}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U_1 \subseteq O \subseteq U$. Wegen (U3) folgt $U \in \mathfrak{U}(x)$.

□

1.2 Basis, Umgebungsbasis

Betrachtet man zum Beispiel einen metrischen Raum (X, d), so haben wir die Topologie definiert mit Hilfe der ϵ-Kugeln

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\} .$$

Diese Konstruktion hat genauso funktioniert wie jene von Satz 1.1.8, obwohl

$$\mathfrak{W}(x) := \{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$$

offenbar im allgemeinen nicht alle Axiome (U1) - (U5) erfüllt, z.B. werden im allgemeinen (U1), (U3), (U5) verletzt sein.

1.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $x \in X$, und sei $\mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$. Dann heißt $\mathfrak{W}(x)$ eine *Umgebungsbasis* von x, wenn es zu jedem $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $V \in \mathfrak{W}(x)$ gibt mit $V \subseteq U$.

1.2.2 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $\mathfrak{U}(x)$ die Umgebungsfilter und sei $\mathfrak{W}(x)$ eine Umgebungsbasis. Dann gilt*

$$\mathfrak{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(X) : \exists W \in \mathfrak{W}(x) \textit{ mit } W \subseteq U\}.$$

Beweis. Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ dann existiert nach Definition 1.2.1 ein $W \in \mathfrak{W}(x)$ mit $W \subseteq U$. Sei umgekehrt $U \in \mathcal{P}(x)$ und $W \in \mathfrak{W}(x)$ mit $W \subseteq U$. Wegen $\mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ und (U3) folgt $U \in \mathfrak{U}(x)$.

□

1.2.3 Satz. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und ist für jedes $x \in X$ das System $\mathfrak{W}(x)$ von Teilmengen von X eine Umgebungsbasis von x, so gilt*

(UB1) $\mathfrak{W}(x) \neq \emptyset$.

(UB2) *Ist $V \in \mathfrak{W}(x)$, so ist $x \in V$.*

(UB3) *Sind $U, V \in \mathfrak{W}(x)$, so existiert $W \in \mathfrak{W}(x)$ mit $W \subseteq U \cap V$.*

(UB4) *Ist $U \in \mathfrak{W}(x)$ so existiert $V \in \mathcal{P}(X)$ mit $x \in V \subseteq U$ und sodaß zu jedem $y \in V$ ein $W \in \mathfrak{W}(y)$ existiert mit $W \subseteq V$.*

Sind umgekehrt Systeme $\mathfrak{W}(x)$ gegeben die den Axinomen (UB1) - (UB4) genügen, so existiert genau eine Topologie auf X sodaß $\mathfrak{W}(x)$ für jedes x Umgebungsbasis ist.

Beweis.
·) Sei $\mathcal{T}$ gegeben. Da $\mathfrak{U}(x) \neq \emptyset$ ist kann auch $\mathfrak{W}(x)$ nicht leer sein. Wegen $\mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ ist $x \in U$ für alle $U \in \mathfrak{W}(x)$. Sind $U, V \in \mathfrak{W}(x)$, so ist $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$ und daher gibt es $W \in \mathfrak{W}(x)$ mit $W \subseteq U \cap V$. Ist $U \in \mathfrak{W}(x)$, so ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ und es existiert $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq U$. Ist $y \in V$, so gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U_1 \subseteq V$ und daher $W \in \mathfrak{W}(y)$ mit $W \subseteq U_1 \subseteq V$.

·) Seien Systeme $\mathfrak{W}(x)$ gegeben die (UB1) - (UB4) erfüllen. Definiere

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \in \mathcal{P}(X) : \exists\, W \in \mathfrak{W}(x) \text{ mit } W \subseteq U\}.$$

Dann sind für die $\mathfrak{U}(x)$ die Axiome (U1) - (U5) erfüllt. Es wird also eine Topologie $\mathcal{T}$ definiert die $\mathfrak{U}(x)$ als Umgebungsfilter hat. Offenbar ist $\mathfrak{W}(x)$ eine Umgebungsbasis.

·) Sei $\mathcal{T}$ gegeben und sei $\mathfrak{W}(x)$ Umgebungsbasis. Definiert man wie im letzten Schritt eine Topologie $\mathcal{T}'$, so gilt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Denn wegen Lemma 1.2.2 bestimmt eine Umgebungsbasis die Topologie eindeutig.

□

In analoger Weise wie man durch eine Umgebungsbasis alle Umgebungen aus einem Teilsystem rekonstruiert, kann man auch versuchen die offenen Mengen aus einem Teilsystem zu rekonstruieren.

1.2.4 Definition. Sei $X, \mathcal{T}$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{U}$ *Basis* für die Topologie $\mathcal{T}$ wenn sich jede offene Menge $O \in \mathcal{T}$ schreiben läßt als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$.

Anders ausgedrückt ist ein System $\mathcal{U}$ offener Mengen eine Basis wenn gilt: Für alle $O \in \mathcal{T}$ ist
$$O = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \subseteq O\}.$$
Oder wenn gilt: Für alle $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq O$.

1.2.5 Satz. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und ist $\mathcal{U}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, so gilt*

(B1) $\emptyset \in \mathcal{U}$.

(B2) *Ist $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $x \in U_1 \cap U_2$, so existiert $U_3 \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.*

(B3) $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$.

Ist umgekehrt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sodaß (B1) - (B3) erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie auf X für die $\mathcal{U}$ Basis ist.

Beweis.
·) Sei $\mathcal{U}$ Basis von $\mathcal{T}$. Wegen $\emptyset \in \mathcal{T}$ folgt (B1) und wegen $X \in \mathcal{T}$ folgt (B3). Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Wegen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ und es gilt daher
$$U_1 \cap U_2 = \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}, U \subseteq U_1 \cap U_2\}$$
Zu $x \in U_1 \cap U_2$ existiert also $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

·) Sei $\mathcal{U}$ gegeben mit (B1) - (B3). Wir zeigen induktiv das gilt: Ist $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$, so existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n$. Der Induktionsanfang $n = 2$ ist gerade die Bedingung (B2). Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Seien $U_1, \dots, U_n, U_{n+1} \in \mathcal{U}$ und $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n \cap U_{n+1}$ gegeben. Dann existiert $U' \in \mathcal{U}$ mit $x \in U' \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n$. Axiom (B2) angewandt auf $x \in U' \cap U_{n+1}$ liefert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq U' \cap U_{n+1} \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n \cap U_{n+1}$.

·) Wir definieren
$$\mathcal{T} := \Big\{ \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \Big\} \subseteq \mathcal{P}(X), \tag{1.1}$$
und zeigen daß $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist. Zunächst ist
$$\emptyset = \bigcup_{U \in \emptyset} U \in \mathcal{T},$$
und wegen (B3)
$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T},$$
also gilt (O1). Die Bedingung (O3) ist klar, denn
$$\bigcup_{i \in I} \Big(\bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U \Big) = \bigcup_{U \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i} U.$$

Es bleibt (O2) zu zeigen. Seien also $O_i = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben. Ist $x \in O_1 \cap \ldots \cap O_n$, so ist also $x \in O_i$ und daher existiert $U_i \in \mathcal{V}_i$ mit $x \in U_i$. Der obige Schritt zeigt das er ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $x \in U \subseteq U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_n$. Wir erhalten

$$O_1 \cap \ldots \cap O_n = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$$

wobei $\mathcal{V} := \{U \in \mathcal{U} : U \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_n\}$, also $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$.

·) Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie und $\mathcal{U}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, so gilt stets (1.1), also ist $\mathcal{T}$ durch $\mathcal{U}$ eindeutig bestimmt.

□

1.2.6 Lemma. *Sei $X, \mathcal{T}$ topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Dann ist $\mathcal{U}$ Basis für $\mathcal{T}$ genau dann wenn für jedes $x \in X$ die Menge*

$$\mathfrak{W}(x) := \{U \in \mathcal{U} : x \in T\}$$

eine Umgebungsbasis bei x ist.

Beweis.
·) Sei $\mathcal{U}$ Basis, $x \in X$ und $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann existiert $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ und daher ein $U' \in \mathcal{U}$ mit $x \in U' \subseteq O \subseteq U$. Da $U' \in \mathcal{T}$ ist auch $U' \in \mathfrak{U}(x)$ und wir haben erhalten das $\mathfrak{W}(x)$ eine Umgebungsbasis bei x ist.

·) Sei $\mathfrak{W}(x)$ Umgebungsbasis. Ist $O \in \mathcal{T}$, $x \in O$, so ist $O \in \mathfrak{U}(x)$. Also existiert $U \in \mathfrak{W}(x) \subseteq \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq O$. Daher ist $\mathcal{U}$ Basis.

□

1.2.7 Definition. Sei $X, \mathcal{T}$ topologischer Raum und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{V}$ *Subbasis* für $\mathcal{T}$ wenn

$$\mathcal{U} := \{\emptyset, X\} \cup \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} V_i : V_i \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N} \Big\} \tag{1.2}$$

eine Basis für $\mathcal{T}$ ist.

Offenbar ist jede Basis für $\mathcal{T}$ auch eine Subbasis für $\mathcal{T}$. Weiters ist eine Topologie durch eine Subbasis eindeutig bestimmt.

1.2.8 Lemma. *Sei X eine Menge und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodaß $\mathcal{V}$ Subbasis für $\mathcal{T}$ ist.*

Beweis. Betrachte die durch (1.2) definierte Menge $\mathcal{U}$. Diese erfüllt klarerweise (B1) und (B3). Wegen

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} V_1 \Big) \cap \Big(\bigcap_{i=n+1}^{N} V_i \Big) = \bigcap_{i=1}^{N} V_i$$

erfüllt sie insbesondere auch (B2). Nach Satz 1.2.5 gibt es eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X welche $\mathcal{U}$ als Basis hat und daher $\mathcal{V}$ als Subbasis.

□

Die in Lemma 1.2.8 aus $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ konstruierte Topologie $\mathcal{T}$ besteht also aus allen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{V}$.

1.3 Abgeschlossene Mengen

1.3.1 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A\subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn A^c offen ist.

1.3.2 Lemma. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen in $(X,\mathcal{T})$, so gilt*

(A1) $\emptyset\in\mathfrak{A}, X\in\mathfrak{A}$.

(A2) $A_1,\dots,A_n\in\mathfrak{A}$, $n\in\mathbb{N}$, *so folgt* $A_1\cup\ldots\cup A_n\in\mathfrak{A}$.

(A3) $A_i\in\mathfrak{A}$, $i\in I$, *so folgt* $\bigcap_{i\in I}A_i\in\mathfrak{A}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ sodaß (A1) - (A3) gilt so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodaß $\mathfrak{A}$ genau das System der abgeschlossenen Mengen von $(X,\mathcal{T})$ ist, nämlich

$$\mathcal{T}:=\left\{A^c:\,A\in\mathfrak{A}\right\}.$$

Beweis. Die Axiome (A1) - (A3) geben bei Komplementbildung genau in die Axiome (O1) - (O3) über. □

1.3.3 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $B\subseteq X$. Die Menge

$$\overline{B}:=\bigcap\left\{A\subseteq X:A \text{ abgeschlossen, } A\supseteq B\right\} \tag{1.3}$$

heißt der *Abschluss* von B.

1.3.4 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum, $B\subseteq X$. Dann ist $\overline{B}$ die kleinste abgeschlossene Menge die B umfasst.*

Beweis. Wegen (A1) ist die Menge über die in (1.3) der Durchschnitt gebildet wird nicht leer. Wegen (A3) ist $\overline{B}$ abgeschlossen. Ist A abgeschlossen und $A\supseteq B$, so kommt A auf der rechten Seite von (1.3) vor, also gilt $A\supseteq\overline{B}$. □

1.3.5 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum. Dann gilt:*

(*i*) *Ist $A\subseteq B$, so folgt $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.*

(*ii*) *Eine Menge $A\subseteq X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A=\overline{A}$.*

(*iii*) *Sei $A\subseteq X, x\in X$. Dann gilt $x\in\overline{A}$ genau dann, wenn jede Umgebung von x die Menge A schneidet.*

(*iv*) *Sei $U\subseteq X, x\in X$. Dann gilt $U\in\mathfrak{U}(x)$ genau dann, wenn $x\notin\overline{U^c}$.*

Beweis.
ad(i): Ist C abgeschlossen und $C\supseteq B$, so ist auch $C\supseteq A$.

ad(ii): Folgt mit Lemma 1.3.4.

ad(iii): Sei $x\notin\overline{A}$, dann ist $x\in\overline{A}^c$. Da $\overline{A}^c$ offen ist, haben wir eine Umgebung von x die A nicht schneidet. Umgekehrt sei angenommen das es eine Umgebung U von x gibt mit $U\cap A=\emptyset$. Sei O offen mit $x\in O\subseteq U$. Dann ist O^c abgeschlossen und $O^c\supseteq U^c\supseteq A$, also auch $O^c\supseteq\overline{A}$. Es folgt $x\notin\overline{A}$.

ad(iv): Sei $x \notin \overline{U^c}$, d.h. $x \in \overline{U^c}^c =: O$. Die Menge O ist offen und $O^c = \overline{U^c} \supseteq U^c$, also $O \subseteq U$. Damit ist $U \in \mathfrak{U}(x)$. Umgekehrt sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Wähle O offen mit $x \in O \subseteq U$. Dann folgt $O^c \supseteq U^c$ und da O^c abgeschlossen ist auch $O^c \supseteq \overline{U^c}$. Wir erhalten $x \in O \subseteq \overline{U^c}^c$, d.h. $x \notin \overline{U^c}$.

□

1.3.6 Satz. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $\bar{.} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ der* Abschlußoperator *$A \mapsto \overline{A}$, so gilt*

(C1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(C2) *Für jedes $A \subseteq X$, ist $\overline{A} \supseteq A$.*

(C3) *Für $A, B \subseteq X$ gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

(C4) *Für $A \subseteq X$ gilt $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

Ist umgekehrt $\bar{.} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung die die Eigenschaften (C1) - (C4) hat, so gibt es genau eine Topologie auf X sodaß diese Abbildung der Abschlußoperator ist.

Beweis.
·) Sei $\mathcal{T}$ Topologie auf X und $A \mapsto \overline{A}$ der entsprechende Abschlußoperator. Da $\emptyset$ abgeschlossen ist, folgt (C1). Aus der Definition (1.3) enthält man sofort (C2). Seien nun $A, B \subseteq X$. Dann ist $\overline{A} \cup \overline{B}$ eine abgeschlossene Menge die $A \cup B$ umfasst, denn $A \subseteq \overline{A}, B \subseteq \overline{B}$. Also folgt $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Wegen Lemma 1.3.5,$(i)$, folgt aus $A \subseteq A \cup B$ das $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ und genauso $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Damit gilt auch $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Wir haben (C3) nachgewiesen. Die Menge $\overline{A}$ ist abgeschlossen, also gilt mit Lemma 1.3.5,(ii), das $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

·) Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Angenommen ihre Abschlußoperatoren $\bar{.}^1, \bar{.}^2 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sind gleich. Dann gilt für eine Menge $A \subseteq X$ das $A = \overline{A}^1$ genau dann, wenn $A = \overline{A}^2$ denn es ist ja $\overline{A}^1 = \overline{A}^2$. Wegen Lemma 1.3.5,$(ii)$, haben die Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ daher die gleichen abgeschlossenen Mengen und sind damit gleich, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

·) Sei nun eine Abbildung $\bar{.} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, die den Axiomen (C1) - (C4) genügt, gegeben. Wir leiten zunächst aus (C1) - (C4) her das gilt

$(i)A_1, \ldots, A_n \subseteq X$, so ist $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$.

(ii)Ist $A \subseteq B$, so folgt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Um (i) zu zeigen verwenden wir Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 2$ ist gerade (C3). Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Seien $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \subseteq X$. Dann ist nach (C3) und der Induktionsvoraussetzung

$$\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}} = \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \cup \overline{A_{n+1}} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n} \cup \overline{A_{n+1}}$$

Die Behauptung (ii) folgt einfach aus (C3): Sei $A \subseteq B$, dann ist also $B = A \cup (B \setminus A)$. Damit folgt $\overline{B} = \overline{A \cup (B \setminus A)} = \overline{A} \cup \overline{(B \setminus A)} \supseteq \overline{A}$.

·) Wir definieren ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von X als

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq X : \overline{A} = A\}.$$

und zeigen das $\mathfrak{A}$ den Axiomen (A1) - (A3) genügt. Wegen (C1) gilt $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Wegen (C2) ist $X \subseteq \overline{X}$, und da $\overline{X} \in \mathcal{P}(X)$ ist muß $\overline{X} = X$ gelten, d.h. es ist $X \in \mathfrak{A}$. Also gilt (A1). Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, dann folgt mit (i) aus dem letzten Schritt

$$\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n} = A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

also $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathfrak{A}$ und wir haben (A2). Seien $A_i \in \mathfrak{A}, i \in I$. Wegen $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$ für jedes $j \in I$ folgt mit (ii) aus dem letzten Schritt, das

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \overline{A_j} = A_j,\ j \in I,$$

und damit $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{j\in I} \overline{A_j} = \bigcap_{j\in I} A_j$. Mit (C2) folgt $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathfrak{A}$. Mit Lemma 1.3.2 erhält man eine Topologie $\mathcal{T}$ die genau $\mathfrak{A}$ als System abgeschlossener Mengen hat.

·) Sei $\tilde{\cdot} : \mathcal{P}(X)$ der Abschlußoperator der oben definierten Topologie. Dann gilt also für $B \subseteq X$

$$\tilde{B} = \bigcap\{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen }, A \supseteq B\} = \bigcap\{A \subseteq X : \overline{A} = A, A \supseteq B\}, \tag{1.4}$$

und mit (ii) folgt

$$\tilde{B} = \bigcap\{A \subseteq X : \overline{A} = A, A \supseteq \overline{B}\}.$$

Daher ist $\tilde{B} \supseteq \overline{B}$.

Wegen (C4) ist stets $\overline{B} \in \mathfrak{A}$, also kommt $\overline{B}$ auf der rechten Seite von (1.4) vor und wir erhalten $\tilde{B} \subseteq \bar{B}$, insgesamt also $\tilde{B} = \bar{B}$. D.h. der Abschlußoperator der oben definierten Topologie ist gerade jene Abbildung $\bar{\cdot}$ von der wir ausgegangen sind.

□

1.3.7 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

(i) Ist $A \subseteq X$ und $x \in X$ so heißt x *innerer Punkt* von A wenn $A \in \mathfrak{U}(x)$. Die Menge aller inneren Punkte von A bezeichnen wir mit A°, das *Innere* von A.

(ii) Ist $A \subseteq X, x \in X$, so heißt x *äußerer Punkt* von A, wenn x innerer Punkt von A^c ist.

(iii) Ist $A \subseteq X$ und $x \in X$, so heißt x *Randpunkt* von A, wenn x weder innerer noch äußerer Punkt von A ist. Die Menge aller Randpunkte von A heißt der *Rand* von A und wird bezeichnet als ∂A. Ist es nötig zu spezifizieren bezüglich welcher Topologie der Abschluß, das Innere bzw. der Rand zu bilden ist, so schreiben wir auch

$$\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}} A, \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} A \text{ bzw. } \mathrm{Bd}_{\mathcal{T}} A.$$

1.3.8 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und sei $A \subseteq X, x \in X$. Dann gilt:*

(*i*) *Es gilt $x \in A^\circ$ genau dann, wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq A$. Es ist $A^\circ \subseteq A$.*

(*ii*) *Die Mengen $A^\circ, \partial A, (A^c)^\circ$ sind paarweise disjunkt und es gilt $X = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ$.*

(*iii*) *$x \in \partial A$ genau dann, wenn jede Umgebung U von x sowohl A als auch A^c schneidet.*

(*iv*) *Es gilt $A^\circ = \bigcup\{O \in \mathcal{T} : O \subseteq A\}$, insbesondere ist A° offen. Die Menge A ist offen genau dann, wenn $A = A^\circ$. Der Rand ∂A ist abgeschlossen.*

(*v*) *Es gilt $\overline{A} = A \cup \partial A = A^\circ \cup \partial A$ sowie $A^\circ = (\overline{A^c})^c$.*

(*vi*) *Es gilt $x \in \overline{A}$ genau dann wenn jede Umgebung von x die Menge A schneidet.*

Beweis.
ad(*i*): Ist $x \in A^\circ$, so ist nach Definition $A \in \mathfrak{U}(x)$. Gibt es umgekehrt ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \subseteq A$, so ist auch $A \in \mathcal{U}(x)$ also $x \in A^\circ$. Ist $x \in A^\circ$, also $A \in \mathcal{U}(x)$, so folgt insbesondere $x \in A$.

ad(*ii*): Sei $x \in X$. Wegen $A^\circ \subseteq A$ und $(A^c)^\circ \subseteq A^c$ sind A° und $(A^c)^\circ$ disjunkt. Nach Definition ist $\partial A = (A^\circ \cup (A^c)^\circ)^c$, also ist $\partial A \cap A^\circ = \partial A \cup (A^c)^\circ = \emptyset$ und $X = \partial A \cup A^\circ \cup (A^c)^\circ$.

ad(*iii*): Sei $x \notin \partial A$, dann ist entweder $x \in A^\circ$ oder $x \in (A^c)^\circ$. Im ersten Fall gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq A$, d.h. $U \cap A^c = \emptyset$, im zweiten Fall gibt es $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \subseteq A^c$, d.h. $U \cap A = \emptyset$. Umgekehrt existiere $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \cap A = \emptyset$ oder $U \cap A^c = \emptyset$. Im ersten Fall ist x im Äußeren von A, im zweiten Fall im Inneren, also $x \notin \partial A$.

ad(*iv*): Sei O offen, $O \subseteq A$, $x \in O$. Dann ist $O \in \mathfrak{U}(x)$ und daher $A \in \mathfrak{U}(x)$, also $x \in A^\circ$. Sei umgekehrt $x \in A^\circ$, dann ist also $A \in \mathfrak{U}(x)$. Daher existiert eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq A$. Da $\partial A = (A^\circ \cup (A^c)^\circ)^c$, ist ∂A abgeschlossen.

ad(*v*): Sei $x \in \overline{A}^c$. Da $\overline{A}^c$ offen ist, folgt $\overline{A}^c \in \mathfrak{U}(x)$ und wegen $A \subseteq \overline{A}$ ist $\overline{A}^c \cap A = \emptyset$ und daher $x \notin \partial A$. Wegen $A \subseteq \overline{A}$ ist $x \notin A$, insgesamt also $x \in (A \cup \partial A)^c$. Wir haben also

$$\overline{A} \supseteq A \cup \partial A\,.$$

Trivialerweise ist $A \cup \partial A \supseteq A^\circ \cup \partial A$. Wegen (*ii*) ist $(A^\circ \cup \partial A)^c = (A^c)^\circ$ und damit $A^\circ \cup \partial A$ abgeschlossen. Ist $x \in A$, so ist sicher $x \notin (A^c)^\circ$ denn $(A^c)^\circ \subseteq A^c$, also ist $A \subseteq A^\circ \cup \partial A$. Es folgt $\overline{A} \subseteq A^\circ \cup \partial A$.

Wegen (*ii*) folgt $A^\circ = (\overline{A^c})^c$.

ad(*vi*): Wegen $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ ist $x \notin \overline{A}$ genau dann wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq A^c$, d.h. $U \cap A = \emptyset$.

$\square$

1.3.9 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Ist $A \subseteq X$ und $x \in X$, so heißt x ein *Häufungspunkt* von A, wenn gilt $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Ist $x \in A$ und x kein Häufungspunkt von A, so heißt x *isolierter Punkt* von A. Seien $A, B \subseteq X$. Gilt $B \subseteq \overline{A}$ so heißt A *dicht in* B. Ist A dicht in X, so sagt man A ist *dicht*.

1.3.10 Lemma.

(*i*) *Es ist x Häufungspunkt von A genau dann, wenn für jede Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

(*ii*) *Es ist x isolierter Punkt von A genau dann, wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $A \cap U = \{x\}$.*

(*iii*) *Es gilt $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn entweder x Häufungspunkt von A oder isolierter Punkt von A ist.*

(*iv*) *Sei $A \subseteq X$ und $\mathcal{V}$ eine Basis für $\mathcal{T}$. Dann ist A dicht genau dann wenn gilt: Für jedes $V \in \mathcal{V}$ ist $A \cap V \neq \emptyset$.*

Beweis.
ad(i): Es ist $A \cap (U \setminus \{x\}) = (A \setminus \{x\}) \cap U$. Die Behauptung folgt aus Lemma 1.3.8,(vi).

ad(ii): Es ist x nicht Häufungspunkt von A, wenn es $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $(A \setminus \{x\}) \cap U = \emptyset$, d.h. mit $A \cap U \subseteq \{x\}$. Dabei ist $x \in A$ genau dann, wenn $A \cap U = \{x\}$.

ad(iii): Ist x isolierter Punkt von A, so ist $x \in A \subseteq \overline{A}$. Ist x Häufungspunkt von A und $U \in \mathcal{U}(x)$ so ist $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ also auch $A \cap U \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{A}$. Sei umgekehrt $x \in \overline{A}$ und $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann ist $A \cap U \neq \emptyset$. Gibt es ein U mit $A \cap U = \{x\}$, so ist x isolierter Punkt von A. Anderenfalls gibt es zu jedem U ein y mit $y \neq x, y \in A \cap U$, d.h. es ist $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ und wir erhalten das x Häufungspunkt von A ist.

ad(iv): Sei A dicht. Ist $V \in \mathcal{V}$, so ist V offen. Für ein $x \in V$ ist also $V \in \mathfrak{U}(x)$. Wegen $x \in \overline{A}$ folgt $A \cap V \neq \emptyset$. Umgekehrt habe A die Eigenschaft aus (iv). Sei $x \in X$ und $U \in \mathfrak{U}(x)$. Da $\mathcal{V}$ eine Basis ist, gibt es ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in V \subseteq U$. Es folgt $U \cap A \supseteq V \cap A \neq \emptyset$, also ist $x \in \overline{A}$.

□

1.4 Filter und Konvergenz

1.4.1 Definition. Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{F}$ ein *Filter*, wenn gilt

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2) Ist $A \in \mathcal{F}$ und $B \supseteq A$, so folgt $B \in \mathcal{F}$.

(F3) Ist $A, B \in \mathcal{F}$, so folgt $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{F}$ ein Filter der maximal in der Halbordnung $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist, so heißt $\mathcal{F}$ *Ultrafilter*.

1.4.2 Beispiel. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$, so ist $\mathfrak{U}(x)$ ein Filter, der Umgebungsfilter von x (vgl. Definition 1.1.6 sowie Satz 1.1.8).

1.4.3 Lemma. *Sei X eine Menge.*

(*i*) *Ist $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der Eigenschaft (*endliche Durchschnittseigenschaft*), das für $n \in \mathbb{N}$, $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}'$, gilt $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$, so existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$.*

(*ii*) *Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter genau dann, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist: Ist $A \subseteq X$ und gilt $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so folgt $A \in \mathcal{F}$.*

Beweis.
`ad`(i): Betrachte die Menge

$$\Phi := \Big\{ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}', \mathcal{F} \text{ hat die endliche Durchschnittseigenschaft } \Big\}.$$

Dann ist Φ mit der normalen Inklusion $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ eine geordnete Menge. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von Φ. Setze $\mathcal{F} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Dann ist $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$. Sind $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, so existieren $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $F_l \in \mathcal{F}_{i_l}$. Sei obdA $\mathcal{F}_{i_1} \subseteq \mathcal{F}_{i_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{i_n}$, dann ist also $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{i_n}$ und daher ist $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$. Also hat $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft und gehört daher zu Φ. Klarerweise ist $\mathcal{F} = \sup_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es in Φ maximale Elemente.

Sei $\mathcal{F} \in \Phi$ maximal. Dann gilt (F1). Sei $A \in \mathcal{F}$ und $B \supseteq A$, dann ist $\{B\} \cup \mathcal{F} \in \Phi$ und $\{B\} \cup \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}$, also $\{B\} \cup \mathcal{F} = \mathcal{F}$,d.h. $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Daher gilt (F2). Genauso sieht man (F3): Seien $A, B \in \mathcal{F}$, dann ist $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{A \cap B\} \in \Phi$, denn mit $\mathcal{F}$ hat auch $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Es folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$, d.h. $A \cap B \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$. Da jeder Filter $\mathcal{F}_1$ mit $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$ in Φ liegt und $\mathcal{F}$ maximal in Φ ist, ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

`ad`(ii): Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Ist $A \subseteq X$ und gilt $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so hat

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{A\}$$

die endliche Durchschnittseigenschaft. Also existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}_1$ mit $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ selbst Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, also auch $A \in \mathcal{F}$, also gilt die behauptete Eigenschaft.

Ist $\mathcal{F}$ nicht Ultrafilter, so wähle einen Ultrafilter $\mathcal{F}_1$ mit $\mathcal{F}_1 \supsetneq \mathcal{F}$ und eine Menge $A \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. Dann gilt sicher $A \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Also gilt die Eigenschaft des Lemmas nicht.

□

1.4.4 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Filter und $x \in X$. Wir sagen $\mathcal{F}$ *konvergiert* nach x, $\mathcal{F} \to x$, wenn gilt $\mathcal{F} \supseteq \mathfrak{U}(x)$. Wir sagen x ist ein *Häufungspunkt von* $\mathcal{F}$, wenn $x \in \overline{A}$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

1.4.5 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $\mathcal{F}$ Filter, $x \in X$. Ist $\mathcal{F} \to x$, so ist x ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{F}$ Ultrafilter und x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, so folgt $\mathcal{F} \to x$.*

Beweis.
·) Sei $\mathcal{F} \to x$ und sei $A \in \mathcal{F}$. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist auch $U \in \mathcal{F}$, also gilt $A \cap U \neq \emptyset$. D.h. es ist $x \in \bar{A}$.

·) Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter und x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $A \in \mathcal{F}$, so gilt also $A \cap U \neq \emptyset$. Nach Lemma 1.4.3,(ii), folgt $U \in \mathcal{F}$.

□

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X. Eine Teilmenge $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ heißt *Filterbasis* von $\mathcal{F}$, wenn gilt: Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ gibt es ein $F' \in \mathcal{F}'$ mit $F' \subseteq F$.

1.4.6 Lemma. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $\mathcal{F}'$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$, so gilt*

(FB1) $\emptyset \notin \mathcal{F}'$.

(FB2) *Zu $F_1, F_2 \in \mathcal{F}'$ gibt es $F_3 \in \mathcal{F}'$ mit $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.*

Ist umgekehrt $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften (FB1), (FB2), so existiert ein eindeutiger Filter $\mathcal{F}$ der $\mathcal{F}'$ als Filterbasis hat. Dabei gilt

$$\mathcal{F} = \Big\{F \subseteq X : \exists F' \in \mathcal{F}' \text{ mit } F' \subseteq F\Big\}. \tag{1.5}$$

Beweis.
·) Sei $\mathcal{F}$ Filter und $\mathcal{F}'$ Filterbasis. Wegen $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}'$. Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, so ist auch $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ und daher existiert $F_3 \in \mathcal{F}'$ mit $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.

·) Erfülle $\mathcal{F}'$ die Axiome (FB1), (FB2) und definiere $\mathcal{F}$ wie in (1.5). Wir zeigen das $\mathcal{F}$ Filter ist. Wegen (FB1) gilt $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ist $A \in \mathcal{F}$ und $B \supseteq A$, so wähle $F' \in \mathcal{F}'$ mit $F' \subseteq A$, dann ist auch $F' \subseteq B$, also $B \in \mathcal{F}$. Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Wähle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}'$ mit $F_1 \subseteq A, F_2 \subseteq B$ und $F_3 \in \mathcal{F}'$ mit $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$. Dann gilt $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2 \subseteq A \cap B$, also ist $A \cap B \in \mathcal{F}$.

·) Ist $\mathcal{F}_1$ ein Filter der $\mathcal{F}'$ als Filterbasis hat, so folgt wegen $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_1$ und (F2) das $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$. Ist $F \in \mathcal{F}_1$ so gibt es $F' \in \mathcal{F}'$ mit $F \supseteq F'$ da $\mathcal{F}'$ Filterbasis von $\mathcal{F}'$ ist und daher gilt $F \in \mathcal{F}$.

□

Ist $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit (FB1), (FB2) gegeben und $\mathcal{F}$ der Filter (1.5) der $\mathcal{F}'$ als Filterbasis hat, so sagen wir das $\mathcal{F}$ *von $\mathcal{F}'$ erzeugt* wird. Ist zusätzlich $x \in X$, so sagen wir $\mathcal{F}'$ *konvergiert gegen x*, $\mathcal{F}' \to x$, wenn gilt: Zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es $F \in \mathcal{F}'$ mit $F \subseteq U$. Offenbar gilt $\mathcal{F}' \to x$ genau dann wenn der von $\mathcal{F}'$ erzeugte Filter gegen x konvergiert.

Ist $\triangle$ eine Menge und $\leq$ eine Relation auf $\triangle$ mit den Eigenschaften

(G1) $a \leq b$ und $b \leq c$ impliziert $a \leq c$. Es gilt stets $a \leq a$.

(G2) Zu je zwei $a, b \in \triangle$ gibt es $c \in \triangle$ mit $a \leq c, b \leq c$,

so sprechen wir von einer *gerichteten Menge* $(\triangle, \leq)$.

1.4.7 Definition. Sei eine X Menge und $(\triangle, \leq)$ eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $\varphi : \triangle \to X$ heißt ein *Netz* auf $\triangle$ in X.

Ist zusätzlich $A \subseteq X$ so sagen wir das φ ***schließlich in A liegt***, wenn gilt: Es existiert ein $\delta_0 \in \triangle$ sodaß für alle $\delta \geq \delta_0$ gilt $\varphi(\delta) \in A$. Wir sagen φ ***ist cofinal in A***, wenn gilt: Für jedes $\delta_0 \in \triangle$ gibt es ein $\delta \geq \delta_0$ mit $\varphi(\delta) \in A$.

Das Netz φ heißt *Ultranetz*, wenn gilt: Für jedes $A \subseteq X$ ist φ entweder schließlich in A oder schließlich in A^c.

1.4.8 Beispiel.

(i) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$ sind eine gerichtete Menge. Ein Netz auf $\mathbb{N}$ ist gerade eine Folge.

(ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X. Definiert man für $A, B \in F$

$$A \leq B :\iff A \supseteq B\,,$$

so ist $(\mathcal{F}, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein Netz $\varphi : \mathcal{F} \to X$ mit der Eigenschaft $\varphi(A) \in A$ heißt ein von $\mathcal{F}$ ***abgeleitetes Netz***.

1.4.9 Lemma. *Sei X eine Menge, $(\triangle, \leq)$ eine gerichtete Menge, und $\varphi : \triangle \to X$ ein Netz. Dann ist*

$$\mathcal{F} := \Big\{ A \subseteq X : \varphi \textit{ liegt schließlich in } A \Big\}$$

ein Filter, der Endstückfilter *von φ. Die Menge*

$$\mathcal{F}' := \Big\{ \{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_0\} : \delta_0 \in \triangle \Big\}$$

ist eine Filterbasis von $\mathcal{F}$.

Beweis. Wir zeigen das $\mathcal{F}'$ die Eigenschaften (FB1), (FB2) hat: Zunächst ist $\varphi(\delta_0) \in \{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_0\}$, also ist diese Menge nicht leer. Ist $\delta_0, \delta_1 \in \triangle$ so wähle δ' mit $\delta' \geq \delta_0, \delta_1$. Dann gilt

$$\{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta'\} \subseteq \{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_0\} \cap \{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_1\}\,.$$

Sei $\mathcal{F}_1$ der von $\mathcal{F}'$ erzeugte Filter. Wir zeigen $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$: Ist φ schließlich in A, so gilt es δ_0 mit $\varphi(\delta) \in A$, $\delta \geq \delta_0$, d.h. es gilt

$$\{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_0\} \subseteq A\,.$$

Ist umgekehrt $\{\varphi(\delta) : \delta \geq \delta_0\} \subseteq A$, so folgt das φ schließlich in A liegt. $\square$

1.4.10 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $(A, \geq)$ eine gerichtete Menge und φ ein Netz auf $\triangle$ in X. Weiters sei $x \in X$. Wir sagen φ ***konvergiert gegen x***, wenn für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ das Netz φ schließlich in U liegt. Man schreibt in diesem Fall $\varphi \to x$. Der Punkt x heißt Häufungspunkt von φ, wenn für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ das Netz φ cofinal in U ist.

1.4.11 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und sei $x \in X$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\mathcal{F}$ Filter auf X, so gilt $\mathcal{F} \to x$ genau dann, wenn jedes von $\mathcal{F}$ abgeleitete Netz gegen x konvergiert.*

(*ii*) *Ist $\varphi : \triangle \to X$ Netz, so gilt $\varphi \to x$ genau dann, wenn der Endstückfilter von φ gegen x konvergiert.*

Beweis.
`ad`(i): Sei $\mathcal{F} \to x$, d.h. $\mathcal{F} \supseteq \mathfrak{U}(x)$, und sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Weiters sei $\varphi : \mathcal{F} \to X$ ein abgeleitetes Netz. Dann gilt also $\varphi(F) \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, insbesondere ist $\varphi(F) \in U$ für alle $F \subseteq U$, d.h. φ liegt schließlich in U. Insgesamt folgt $\varphi \to x$. Umgekehrt sei $\mathcal{F} \not\to x$, dann gibt es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $F \not\subseteq U$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to X$ eine Funktion mit $\varphi(F) \in F \setminus U$. Dann ist φ ein abgeleitetes Netz, aber $\varphi \not\to x$.

`ad`(ii): Sei $\varphi : \triangle \to X$ ein Netz und $\mathcal{F}$ der Endstückfilter von φ. Gilt $\varphi \to x$, so ist also φ schließlich in U für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$. Nach Lemma 1.4.9 gilt $U \in \mathcal{F}$ und es folgt $\mathcal{F} \to x$. Umgekehrt gelte $\mathcal{F} \to x$, dann ist $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ und daher wieder wegen Lemma 1.4.9, φ schließlich in U für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$. Also gilt $\varphi \to x$.

□

1.5 Stetige Abbildungen

1.5.1 Definition. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Weiters sei f eine Abbildung, $f : X \to X'$. Ist $x \in X$ so heißt F *stetig im Punkt* x wenn gilt:

(C_x) Für alle $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ existiert ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$.

Die Abbildung f heißt *stetig* wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

1.5.2 Beispiel.

(*i*) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Die Abbildung $\mathrm{id}_x : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig. Denn ist $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}(\mathrm{id}_x\, x) = \mathfrak{U}(x)$, so wähle $U := V \in \mathfrak{U}(x)$ dann gilt $\mathrm{id}_x(U) = V \subseteq V$.

(*ii*) Seien $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ topologische Räume und sei $a \in X'$. Die Abbildung

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \to & (X', \mathcal{T}') \\ x & \mapsto & a \end{array} \right.$$

ist stetig. Denn ist $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}(f_a(x)) = \mathfrak{U}(a)$, so wähle $U := X \in \mathfrak{U}(x)$, dann gilt $f_a(U) = \{a\} \subseteq V$.

(*iii*) Sei X versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, sei $(X', \mathcal{T}')$ topologischer Raum und sei $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X', \mathcal{T}')$ irgendeine Abbildung. Dann ist f stetig. Denn sei $x \in X, V \in \mathfrak{U}(f(x))$. Da $\{x\}$ offen in der diskreten Topologie ist, ist $\{x\} \in \mathfrak{U}(x)$. Wähle $U := \{x\}$, dann gilt $f(U) = \{f(x)\} \subseteq V$.

1.5.3 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ topologische Räume, $f : X \to X', x \in X$ und seinen $\mathfrak{W}(x)$ bzw. $\mathfrak{W}(f(x))$ Umgebungsbasen von x in $(X, \mathcal{T})$ bzw. von $f(x)$ in $(X', \mathcal{T}')$. Dann f genau dann stetig im Punkt x wenn gilt*

(C'_x) *Für jedes $V \in \mathfrak{W}(f(x))$ ist $f^{-1}(V) \in \mathfrak{U}(x)$,* *sowie genau dann wenn gilt*

(C_x'') *Für jedes* $V \in \mathfrak{W}(f(x))$ *existiert ein* $U \in \mathfrak{W}(x)$ *mit* $f(U) \subseteq V$.

Beweis. Wir zeigen $(C_x) \Rightarrow (C_x') \Rightarrow (C_x'') \Rightarrow (C_x)$.
$\cdot$) Sei $V \in \mathfrak{W}(f(x))$. Dann ist auch $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ und daher gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Es folgt $f^{-1}(V) \supseteq U$ und daher$f^{-1}(V) \in \mathfrak{U}(x)$.

$\cdot$) Sei $V \in \mathfrak{W}(f(x))$. Dann ist $f^{-1}(V) \in \mathfrak{U}(x)$, also gilt es $U \in \mathfrak{W}(x)$ mit $U \subseteq f^{-1}(V)$, d.h. mit $f(U) \subseteq V$.

$\cdot$) Sei $V \in \mathfrak{U}(f(x))$. Wähle $V' \in \mathfrak{W}(f(x))$ mit $V' \subseteq V$. Dann gibt es $U \in \mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V' \subseteq V$.

□

Sind X, X' Mengen, $f : X \to X'$, und ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, so schreiben wir $f(\mathcal{B})$ für das Mengensystem

$$f(\mathcal{B}) := \Big\{ f(B) : B \in \mathcal{B} \Big\} \subseteq \mathcal{P}(X') .$$

1.5.4 Satz. *Seien* $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ *topologische Räume und sei* $f : X \to X'$. *Dann sind äquivalent:*

(C) *f ist stetig.*

(C_1) $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$

(C_2) *Seien* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{A}'$ *die Systeme der abgeschlossenen Mengen in* $(X, \mathcal{T})$ *bzw.* $(X', \mathcal{T}')$. *Dann gilt* $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$.

(C_3) *Für jede Teilmenge* $A \subseteq X$ *gilt* $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(C_4) *Ist* $\mathcal{F}$ *eine Filterbasis,* $x \in X$, *und gilt* $\mathcal{F} \to x$, *so folgt* $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Beweis. Wir zeigen $(C) \Rightarrow (C_1) \Rightarrow (C_2) \Rightarrow (C_3) \Rightarrow (C_4) \Rightarrow (C)$.
$\cdot$) Sei $O' \in \mathcal{T}'$. Ist $x \in O := f^{-1}(O')$, so gilt also $f(x) \in O'$. Da O' offen ist, ist $O' \in \mathfrak{U}(f(x))$ und daher gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq O'$, d.h. $U \subseteq O$. Es folgt O offen.

$\cdot$) Sei $A' \in \mathfrak{A}'$ und setze $A := f^{-1}(A')$. Dann gilt

$$A^c = \Big[f^{-1}(A') \Big]^c = f^{-1}(A'^c) \in f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T} ,$$

also $A \in \mathfrak{A}$.

$\cdot$) Sei B' abgeschlossen in $(X', \mathcal{T}')$ und sei $B' \supseteq f(A)$. Dann gilt also $f^{-1}(B') \supseteq A$. Da $f^{-1}(B')$ abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist folgt $f^{-1}(B') \supseteq \overline{A}$ und daher $B' \supseteq f(\overline{A})$. Damit ist auch

$$\overline{f(A)} = \bigcap \Big\{ B' \subseteq X' : B' \supseteq f(A), B' \text{ abgeschlossen} \Big\} \supseteq f(\overline{A}) .$$

$\cdot$) Sei $\mathcal{F}$ eine Filterbasis in X und $\mathcal{F} \to x$. Es ist $f(\mathcal{F})$ ebenfalls eine Filterbasis, denn: Ist $F \in \mathcal{F}$, so ist $F \neq \emptyset$ und daher auch $f(F) \neq \emptyset$, also gilt (FB1). Ist $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, so gibt es $F_3 \in \mathcal{F}$ mit $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$. Es folgt $f(F_3) \subseteq f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$, also erfüllt $f(\mathcal{F})$ auch (FB2).

Sei nun $V \in \mathfrak{U}(f(x))$. Wähle $O' \in \mathfrak{U}(f(x))$ offen mit $O' \subseteq V$. Dann ist $A' := O'^c$ abgeschlossen. Setze $A := f^{-1}(A')$ und betrachte $O := \overline{A}^c$. Dann ist O offen. Es gilt

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{A'} = A'$$

und wegen $f(x) \notin A'$ also auch $f(x) \notin f(\overline{A})$ und daher $x \notin \overline{A}$. Also ist $x \in O$ und damit $O \in \mathfrak{U}(x)$. Da $\mathcal{F} \to x$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq O$. Es ist $f^{-1}(O')^c = f^{-1}(O'^c) = A \subseteq \overline{A}$ und damit erhalten wir

$$F \subseteq O = \overline{A}^c \subseteq f^{-1}(O') \subseteq f^{-1}(V)\,,$$

d.h. $f(F) \subseteq V$. Es folgt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

$\cdot$) Sei $x \in X$. Wegen $\mathfrak{U}(x) \to x$ folgt $f(\mathfrak{U}(x)) \to f(x)$. Ist nun $V \in \mathfrak{U}(f(x))$, so gibt es also $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$.

$\square$

1.5.5 Lemma. *Seien $(X,\mathcal{T}),(X',\mathcal{T}'),(X'',\mathcal{T}'')$ topologische Räume und $f : X \to X', g : X' \to X''$. Weiters sei $x \in X$. Dann gilt: Ist f stetig im Punkt x und g stetig im Punkt $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig im Punkt x. Insbesondere folgt: Sind f, g stetig, so auch $g \circ f$.*

Beweis. Sei $W \in \mathfrak{U}((g \circ f)(x))$. Da g stetig im Punkt $f(x)$ ist, gibt es $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ mit $g(V) \subseteq W$. Da f stetig im Punkt x ist, gibt es $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Insgesamt erhalten wir

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W\,.$$

$\square$

1.5.6 Definition. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(X',\mathcal{T}')$ topologische Räume und sei $f : X \to X'$. Dann heißt f ein *Homöomorphismus* von $(X,\mathcal{T})$ nach $(X',\mathcal{T}')$, wenn f bijektiv ist und wenn gilt $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$.

Zwei topologische Räume $(X,\mathcal{T})$ und $(X',\mathcal{T}')$ heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus von $(X,\mathcal{T})$ nach $(X',\mathcal{T}')$ gibt.

1.5.7 Lemma.

(*i*) *Sei $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ eine bijektive Abbildung. Dann ist f genau dann Homöomorphismus wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig ist.*

(*ii*) *Sind $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}'), g : (X',\mathcal{T}') \to (X'',\mathcal{T}'')$ Homöomorphismen, so ist auch $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (X'',\mathcal{T}'')$ ein Homöomorphismus.*

(*iii*) *Die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis.

$\mathtt{ad}\,(i)$: Ist f bijektiv, so ist $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$ genau dann wenn $f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}'$ und $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.

$\mathtt{ad}\,(ii)$: Es gilt $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$ und $g(\mathcal{T}') = \mathcal{T}''$, also ist $(g \circ f)(\mathcal{T}) = g(f(\mathcal{T})) = g(\mathcal{T}') = \mathcal{T}''$.

$\mathtt{ad}\,(iii)$: Es gilt $\mathrm{id}_X(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

□

1.6 Vergleich von Topologien

1.6.1 Definition. Sei X eine Menge und seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X. Wir nennen $\mathcal{T}'$ *feiner* als $\mathcal{T}$ (bzw. $\mathcal{T}$ *gröber* als $\mathcal{T}'$) wenn gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ und schreiben dafür $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$.

Klarerweise ist die Relation $\prec$ auf der Menge aller Topologien auf X eine Ordnungsrelation.

1.6.2 Lemma. *Sei X eine Menge. Betrachte die Menge aller Topologien auf X mit der Ordnung $\prec$. Dann gilt:*

(i) *$\mathcal{P}(X)$ ist größtes Element, $\{\emptyset, X\}$ ist kleinstes Element.*

(ii) *Ist $\mathcal{T}_i, i \in I$, eine Familie von Topologien, so existiert ein Infinum. Nämlich ist*
$$\inf_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i\,.$$

(iii) *Ist $\mathcal{T}_i, i \in I$, eine Familie von Topologien und ist $\mathcal{T} := \sup_{i\in I} \mathcal{T}_i$, so hat $\mathcal{T}$ das Mengensystem $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ als Subbasis.*

Beweis.
$\mathtt{ad}\,(i)$: Klarerweise gilt für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X das $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$\mathtt{ad}\,(ii)$: Wir zeigen das $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie ist: Es gilt $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}_i$, also auch $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}$, d.h. es gilt (O1). Seien $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, dann sind $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$, also auch $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}_i, i \in I$, und daher gilt $O_1 \cap, \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$, d.h. (O2). Die Richtigkeit von (O3) sieht man genauso.

Ist $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}_i, i \in I$, so folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_i, i \in I$, und damit $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, d.h. $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$. Also ist $\mathcal{T}$ die größte untere Schranke der Familie $\mathcal{T}_i, i \in I$.

$\mathtt{ad}\,(iii)$: Zunächst bemerke das wegen $(i), (ii)$ stets Suprema existieren. Nämlich
$$\mathcal{T} := \sup_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap \left\{ \mathcal{T}' : \mathcal{T}_i \prec \mathcal{T}', i \in I \right\}$$

Ist $\mathcal{T}_i \prec \mathcal{T}', i \in I$, so folgt $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}'$, also gilt auch $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}$. Bezeichnet $\mathcal{T}_1$ die nach Lemma 1.2.8 von der Subbasis $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ erzeugte Topologie, dann gilt $\mathcal{T}_i \prec \mathcal{T}_1$, also $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}_1$. Umgekehrt besteht $\mathcal{T}_1$ aus allen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Da $\mathcal{T}$ als Topologie unter Bildung endlicher Durchschnitte sowie Vereinigungen abgeschlossen ist, folgt also $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}$. Insgesamt ist $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$.

□

1.6.3 Lemma. *Sei X eine Menge, $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ Topologien auf X. Bezeichne mit $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$ sowie $\mathfrak{U}(x)$ bzw. $\mathfrak{U}'(x)$ die entsprechenden Systeme abgeschlossenen Mengen sowie die Umgebungsfilter. Es sind äquivalent:*

(*i*) $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$.

(*ii*) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$.

(*iii*) *Für alle $x \in X$ ist $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{U}'(x)$.*

(*iv*) *Ist $\mathcal{F}$ eine Filterbasis auf $X, x \in X$, und gilt $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}'} x$ so folgt $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.*

(*v*) *Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt $\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}} A \supseteq \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}'} A$.*

(*vi*) *Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}} A \subseteq \mathrm{Int}_{\mathcal{T}'} A$*

Beweis. Wir zeigen $(i) \iff (ii), (iii) \iff (iv), (v) \iff (vi), (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v), (vi) \Rightarrow (i)$
$(i) \iff (ii)$ Klar da $\mathfrak{A} = \{O^c : O \in \mathcal{T}\}$.

$(iii) \iff (iv)$ Sei $\mathfrak{U}(x) \supseteq \mathfrak{U}'(x)$ und $\mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{T}'} x$. Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ so ist auch $U \in \mathfrak{U}'(x)$ und daher gibt es $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq U$. Umgekehrt gelte (iv). Wegen $\mathfrak{U}'(x) \xrightarrow{\mathcal{T}'} x$ folgt also $\mathfrak{U}'(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ d.h. zu jedem $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es $U' \in \mathfrak{U}'(x)$ mit $U' \subseteq U$, also ist $U \in \mathfrak{U}'(x)$.

$(v) \iff (vi)$ Klar wegen $A^\circ = (\overline{A^c})^c$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Es ist auch $O \in \mathcal{T}'$, also $U \in \mathfrak{U}'(x)$.

$(iii) \Rightarrow (v)$ Sei $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}'} A$ und sei $U \in \mathfrak{U}(x)$. Dann ist auch $U \in \mathfrak{U}(x)$, also $U \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}} A$.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Sei $O \in \mathcal{T}$. Dann gilt $O = \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} O \subseteq \mathrm{Int}_{\mathcal{T}'} O \subseteq O$, also ist $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}'} O = O$ und daher $O \in \mathcal{T}'$.

□

1.6.4 Lemma. *Sei X eine Menge und seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X. Dann sind äquivalent:*

(*i*) $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$.

(*ii*) $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ *ist stetig.*

(*iii*) *Ist $(Y, \mathcal{V})$ topologischer Raum und $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig, so ist auch $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{V})$ stetig.*

(*iv*) *Ist $(Y, \mathcal{V})$ topologischer Raum und $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig, so ist auch $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.*

Beweis.
·) Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar da $\mathrm{id}_X^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

·) Es gelte (ii). Dann ist sowohl

$$f \circ \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{V})$$

als auch

$$\mathrm{id}_X \circ f : (Y, \mathcal{V}) \xrightarrow{f} (X, \mathcal{T}') \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T})$$

stetig. D.h. es gilt (iii) und (iv).

·) Es gelte (iii). Die Funktion $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig, also auch $\mathrm{id}_x : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$. Es gelte (iv). Die Funktion $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ ist stetig also auch $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$.

□

1.6.5 Korollar. *Seien X, Y Mengen, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X und $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ Topologien auf Y. Es gelte $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ und $\mathcal{V}' \prec \mathcal{V}$. Ist $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig, so ist auch $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{V}')$ stetig.*

Beweis. Wende Lemma 1.6.4,(iii) sowie (iv) an.

□

1.7 Initiale - und finale - Topologien

1.7.1 Satz. *Sei X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ Abbildungen. Dann existiert (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft*

(IN_1) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X sodaß alle Abbildungen $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, stetig sind.*

Diese Topologie heißt initiale Topologie *bezüglich der f_i. Sie ist gegeben als*

(IN_2) *$\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ ist eine Subbasis für $\mathcal{T}$,*

und wird auch charakterisiert durch die Eigenschaft

(IN_3) *Ist $(Y, \mathcal{V})$ topologischer Raum und $f : Y \to X$, so ist $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig genau dann wenn alle Abbildungen*

$$f_i \circ f : (Y, \mathcal{V}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i), i \in I\,,$$

stetig sind.

Beweis.
·) Es gibt eine Topologie auf X mit der Eigenschaft das alle f_i stetig sind, z.B. $\mathcal{T}' := \mathcal{P}(X)$. Betrachte die Topologie

$$\mathcal{T} := \inf \Big\{ \mathcal{T}' \text{ Topologie auf } X : \ f_i : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}_i) \text{ stetig }, i \in I \Big\} \qquad (1.6)$$

Dann gilt also $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{T}' : f_i : (X,\mathcal{T}') \to (Y,\mathcal{T}_i) \text{ stetig }, i \in I\}$, und wir schließen das $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig ist: Kommt $\mathcal{T}'$ in der Menge auf der rechten Seite von (1.6) vor so gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$. Daher ist auch $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \bigcap \mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Da nach der Definition $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ für alle Topologien mit $f_i : (X,\mathcal{T}') \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig gilt, ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft. D.h. es gibt eine Topologie die (IN_1) erfüllt. Sie ist durch (IN_1) eindeutig bestimmt, denn erfüllt auch $\tilde{\mathcal{T}}$ diese Bedingung, ist einerseits $\tilde{\mathcal{T}} \prec \mathcal{T}$ da $f_i : (X,\tilde{\mathcal{T}}) \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig sind und (IN_1) für $\mathcal{T}$ gilt. Andererseits ist auch $\tilde{\mathcal{T}} \prec \mathcal{T}$ da $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig sind und (IN_1) für $\tilde{\mathcal{T}}$ gilt.

$\cdot$) Sei $\tilde{\mathcal{T}}$ die Topologie die von der Subbasis $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ erzeugt wird. Wegen $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}$ und daher $\tilde{\mathcal{T}} \prec \mathcal{T}$. Andererseits ist $f_i : (X,\tilde{\mathcal{T}}) \to (Y,\mathcal{T}_i)$ stetig da $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$, also folgt wegen (IN_1) das $\mathcal{T} \prec \tilde{\mathcal{T}}$. Wir haben also das die initiale Topologie $\mathcal{T}$ die Eigenschaft (IN_2) hat. Da eine Subbasis die Topologie eindeutig bestimmt charakterisiert (IN_2) die initiale Topologie.

$\cdot$) Sei $f : (Y,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{T})$ wobei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie der $f_i, i \in I$, ist. Ist f stetig, sind auch alle $f_i \circ f : (Y,\mathcal{V}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Seien umgekehrt alle $f_i \circ f$ stetig, d.h. sei $(f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{V}$. Es folgt das $f^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{V}$ und damit $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{V}$. Da das vollständige Urbild f^{-1} mit der Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen verträglich ist und $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist folgt $f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{V}$, d.h. f ist stetig. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ hat also die Eigenschaft (IN_3).

$\cdot$) Sei $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf X mit der Eigenschaft (IN_3). Sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie und betrachte die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\tilde{\mathcal{T}})$. Dann ist $f_i \circ \mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ stetig, also folgt $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\tilde{\mathcal{T}})$ stetig. D.h. es ist $\tilde{\mathcal{T}} \prec \mathcal{T}$. Betrachte die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\tilde{\mathcal{T}}) \to (X,\tilde{\mathcal{T}})$. Diese ist stetig, also sind alle $f_i \circ \mathrm{id}_X : (X,\tilde{\mathcal{T}}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ stetig. Es folgt $\mathcal{T} \prec \tilde{\mathcal{T}}$. Insgesamt ist $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.

□

1.7.2 Beispiel. Sei $(Y,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X \subseteq Y$. Weiters sei $\iota : X \to Y$ die kanonische Einbettung, $\iota(x) = x$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildung ι heißt die *Spurtopologie* von $\mathcal{T}$ auf X und wird bezeichnet als $\mathcal{T}|_X$. Man spricht von $(X,\mathcal{T}|_X)$ als einem *Teilraum* von $(Y,\mathcal{T})$. Wegen Satz 1.7.1 ist

$$\iota^{-1}(\mathcal{T}) = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

eine Subbasis für $\mathcal{T}|_X$. Nun erfüllt diese Menge selbst schon $(O1) - (O3)$, d.h. es gilt

$$\mathcal{T}|_X = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}.$$

Damit erhält man auch daß das System $\mathfrak{A}|_X$ der in $(X,\mathcal{T}|_X)$ abgeschlossenen Mengen gegeben ist durch

$$\mathfrak{A}|_X = \{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\},$$

und das der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}|_X(x)$ eines Elementes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$

$$\mathfrak{U}|_X(x) = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}(x)\}$$

ist. Weiters gilt für $A \subseteq X$ das

$$\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}|_X} A = (\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}} A) \cap X \,,$$

und eine Funktion $f : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}|_X)$ ist genau dann stetig wenn $f : (X', \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T})$ stetig ist.

1.7.3 Beispiel. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\pi_i : X \to X_i$ der kanonischen Projektionen

$$\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$$

heißt die *Produkttopologie* der $\mathcal{T}_i$ auf X und wird bezeichnet mit $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Es gilt für ein $O \subseteq X_i$

$$\pi_i^{-1}(O) = \prod_{j \in I} O_j$$

wobei $O_j = X_j, j \neq i$, und $O_i = O$ ist. Wieder mit (IN_2) erhält man das die Mengen der Gestalt

$$\prod_{j \in I} O_j$$

wobei $O_j \in \mathcal{T}_j, j \in I$, und für alle j bis auf endlich viele $O_j = X_j$ gilt, eine Basis für $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ bilden. Weiters folgt, das für einen Punkt $(x_i)_{i \in I}$ die Mengen

$$\prod_{j \in I} U_j$$

wobei $U_j \in \mathfrak{U}(x_j), j \in I$ und $U_j = X_j$ für alle bis auf endlich viele j, eine Umgebungsbasis bezüglich $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

1.7.4 Lemma. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, topologische Räume und seien $A_i \subseteq X_i, i \in I$. Dann gilt*

$$\mathrm{Cl}_{\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i}(\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_i} A_i \,.$$

Insbesondere ist $\prod_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in der Produkttopologie genau dann, wenn alle A_i abgeschlossen in $\mathcal{T}_i$ sind.

Beweis. Sei $(a_i)_{i \in I} \in \mathrm{Cl}_{\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i}(\prod_{i \in I} A_i)$. Da π_j stetig ist folgt $a_j = \pi_j((a_i)_{i \in I}) \in \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_j} A_j$. Also ist $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_i} A_i$. Umgekehrt sei $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_i} A_i$. Ist $\prod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathfrak{U}_{\mathcal{T}_i}(a_i)$, so ist also $U_i \cap A_i \neq \emptyset$. Wähle $x_i \in U_i \cap A_i$, dann folgt

$$(x_i)_{i \in I} \in (\prod_{i \in I} U_i) \cap (\prod_{i \in I} A_i) \neq \emptyset \,.$$

Es folgt $(a_i)_{i \in I} \in \mathrm{Cl}_{\prod_{i \in I \mathcal{T}_i}}(\prod_{i \in I} A_i)$.

□

1.7.5 Lemma. *Seien $(X,\mathcal{T}_i)$ topologische Räume und sei $(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i$ festgehalten. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{D}:=\{(x_i)_{i\in I}: x_i=a_i \text{ für alle bis auf endlich viele } i\in I\}$$

dicht in $\prod_{i\in I}X_i$ bezüglich der Produkttopologie.

Beweis. Seien $O_j\in\mathcal{T}_j$ und sei $O_j=X_i$ für alle bis auf endlich viele $j\in I$. Seien $j_1,\dots,j_n\in I$ jene j mit $O_j\neq X_j$. Wähle $x_{j_k}\in O_{j_k}, k=1,\dots,n$, und setze $x_j:=a_j$ für $j\notin\{j_1,\dots,j_n\}$. Dann ist

$$(x_j)_{j\in I}\in\mathcal{D}\cap\prod_{j\in I}O_j\neq\emptyset$$

Da die Mengen $\prod_{j\in I}O_j$ dieser Gestalt eine Basis der Produkttopologie bilden, folgt das $\mathcal{D}$ bezüglich dieser dicht ist.

□

1.7.6 Satz. *Sei X eine Menge, $(Y_i,\mathcal{T}_i), i\in I$, topologische Räume und $f_i: Y_i\to X, i\in I$, Abbildungen. Dann existiert (genau) eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft*

(FI_1) *$\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie auf X sodaß alle Abbildungen $f_i:(Y_i,\mathcal{T}_i)\to(X,\mathcal{T})$, $i\in I$, stetig sind.*

Diese Topologie heißt finale Topologie *bezüglich der f_i. Sie ist gegeben als*

(FI_2) $\mathcal{T}=\{O\subseteq X: f_i^{-1}(O)\in\mathcal{T}_i \text{ für alle } i\in I\}$,

und wird auch charakterisiert durch die Eigenschaft

(FI_3) *Ist $(Y,\mathcal{V})$ topologischer Raum und $f:X\to Y$, so ist $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{V})$ stetig genau dann wenn alle Abbildungen*

$$f\circ f_i:(Y_i,\mathcal{T}_i)\to(Y,\mathcal{V}), i\in I,$$

stetig sind.

Beweis.
·) Wir betrachten die durch (FI_2) definierte Menge $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Es gilt

$$f_i^{-1}(O_1\cap\ldots\cap O_n)=f_i^{-1}(O_1)\cap\ldots\cap f_i^{-1}(O_n)$$

und

$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J}O_j\Big)=\bigcup_{j\in J}f_i^{-1}(O_j),$$

sind also $O_1,\dots,O_n\in\mathcal{T}$ bzw. $O_j\in\mathcal{T}, j\in J$, so folgt da die $\mathcal{T}_i$ Topologien sind, das $O_1\cap\ldots\cap O_n\in\mathcal{T}$ und $\bigcup_{j\in J}O_j\in\mathcal{T}$. D.h. $\mathcal{T}$ erfüllt (O2), (O3). Wegen $f_i^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ und $f_i^{-1}(X)=Y_i$ gilt auch (O1) für $\mathcal{T}$.

Da nach Definition $f_i^{-1}(\mathcal{T})\subseteq\mathcal{T}_i$ gilt sind alle $f_i:(Y_i,\mathcal{T}_i)\to(X,\mathcal{T})$ stetig. Ist $\mathcal{T}'$ Topologie auf X sodaß alle f_i stetig sind, so folgt $f_i^{-1}(O)\in\mathcal{T}_i$ für alle $O\in\mathcal{T}'$, also $O\in\mathcal{T}$. D.h. es ist $\mathcal{T}'\prec\mathcal{T}$. Die durch ($FI_2$) definierte Topologie erfüllt also (FI_1) und klarerweise gibt es höchstens eine Topologie mit der Eigenschaft (FI_1).

·) Sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie bezüglich der f_i und sei $f : X \to Y$. Ist f stetig, so ist auch $f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Sei umgekehrt $f \circ f_i$ stetig für alle i. Dann gilt also

$$f_i^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V})) = (f \circ f_i)^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{T}_i, i \in I\,,$$

und wir erhalten $f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{T}$, d.h. f stetig.

·) Sei nun $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X mit der Eigenschaft (FI_3) und sei $\mathcal{T}$ wieder die finale Topologie. Da $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ stetig ist, sind $f_= \mathrm{id}_X \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig, und es folgt $f_i^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}_i, i \in I$. D.h. es gilt $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$. Andererseits sind

$$\mathrm{id}_X \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{f_i} (X, \mathcal{T}') \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X, \mathcal{T})$$

stetig und wegen (FI_3) daher auch $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$. D.h. es ist $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ und insgesamt also $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

□

1.7.7 Beispiel. Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Weiters sei $\pi : Y \to Y/_\sim$ die kanonische Projektion, $\pi(x) = [x]_\sim$. Die finale Topologie auf $Y/_\sim$ bezüglich π heißt *Quotiententopologie* und wird bezeichnet als $\mathcal{T}/_\sim$.

Ist $A \subseteq Y$ so heißt A *saturiert* bezüglich $\sim$, wenn gilt: $x \in A$ impliziert $[x]_\sim \subseteq A$. D.h. es besteht A aus ganzen Äquivalenzklassen, $A = \bigcup_{x \in A}[x]_\sim$. Eine Menge $O' \subseteq Y/_\sim$ ist offen (bzw. abgeschlossen) in $(Y/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ wenn gilt $\pi^{-1}(O')$ ist offen (bzw. abgeschlossen) in $(Y, \mathcal{T})$. Es steht also $\mathcal{T}/_\sim$ in bijektiver Beziehung zu den saturierten offenen Mengen.

1.7.8 Lemma. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ eine stetige Abbildung. Bezeichne mit $\sim$ die Äquivalenzrelation $x \sim y :\iff f(x) = f(y)$, und seien $\pi : X \to X/_\sim$, $\iota : f(X) \to Y$, die kanonische Projektion bzw. Einbettung. Weiters sei $g : X/_\sim \to f(X)$ die Bijektion mit $\iota \circ g \circ \pi = f$. Wir haben also*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[r, "g"'] & f(X) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist $g : (X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Es sind äquivalent

(*i*) *g ist ein Homöomorphismus von $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ auf $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(*ii*) *Für jede bezüglich $\sim$ saturierte offene Menge $O \subseteq X$ gilt $f(O)$ offen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(*iii*) *Für jede bezüglich $\sim$ saturierte abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ gilt $f(A)$ abgeschlossen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

Beweis.

·) Es ist $c \circ (g \circ \pi) = f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig, also ist auch $g \circ \pi : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig (Satz 1.7.1, (IN_3)). Dann ist auch $g : (X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig (Satz 1.7.6, (FI_3)).

·) Die Funktion g ist also genau dann Homöomorphismus wenn noch g^{-1} stetig ist, d.h. wenn $g(\mathcal{T}/_\sim) = (g^{-1})^{-1}(\mathcal{T}/_\sim) \subseteq \mathcal{V}|_{f(X)}$. Es gelte (ii). Sei $O' \in \mathcal{T}/_\sim$, dann ist $O := \pi^{-1}(O')$ offen in $(X, \mathcal{T})$ und saturiert, also ist

$$g(O') = g(\pi(O)) = f(O)\,,$$

offen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$. Umgekehrt sei g Homöomorphismus. Sei $O \subseteq X$ offen und saturiert. Dann ist

$$O = \pi^{-1}(\pi(O))\,.$$

Also ist $\pi(O)$ offen in $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$. Es folgt $f(O) = g(\pi(O))$ offen in $\mathcal{V}|_{f(X)}$. Die Äquivalenz $(i) \iff (iii)$ zeigt man genauso.

□

1.8 Abzählbarkeitseigenschaften

1.8.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(i) $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *1-te Abzählbarkeitsaxiom*, wenn gilt: Für jedes $x \in X$ besitzt $\mathfrak{U}(x)$ eine abzählbare Basis.

(ii) $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *2-te Abzählbarkeitsaxiom*, wenn gilt: $\mathcal{T}$ besitzt eine abzählbare Basis.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ heißt *separabel*, wenn es eine (höchstens) abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Wir bemerken das ein Raum dem 2-ten Abzählbarkeitsaxiom genügt genau dann wenn es eine abzählbare Subbasis für die Topologie gibt.

1.8.2 Lemma. *Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle das 2-te Abzählbarkeitsaxiom. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ auch das 1-te Abzählbarkeitsaxiom und ist separabel.*

Beweis. Sei $\mathcal{V}$ eine abzählbare Basis offener Mengen.
·) Wir zeigen das für jedes $x \in X$ das Mengensystem

$$\mathfrak{W}(x) := \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$$

eine Umgebungsbasis bei x ist. Da alle $V \in \mathcal{V}$ offen sind gilt $\mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$. Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$, und wähle O offen mit $x \in O \subseteq U$. Dann gilt es ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in V \subseteq O$.

·) Wähle aus jeder Menge $V \in \mathcal{V}$ einen Punkt x_v. Dann ist wegen Lemma 1.3.10, (i), die abzählbare Menge

$$D := \{x_v : V \in \mathcal{V}\}$$

dicht.

□

1.8.3 Lemma. *Es gilt:*

(i) *Sei $(Y, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $X \subseteq Y$. Erfüllt $(Y, \mathcal{T})$ das 1-te (2-te) Abzählbarkeitsaxiom, so hat auch $(X, \mathcal{T}|_X)$ die entsprechende Eigenschaft.*

(ii) *Ist $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, eine abzählbare Familie topologischer Räume und erfüllen alle $(X_i, \mathcal{T}_i)$ das 1-te (2-te) Abzählbarkeitsaxiom, so hat auch $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ die entsprechende Eigenschaft.*

(iii) *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i = 1, \ldots, n$, separabel. Dann ist auch $(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i)$ separabel.*

Beweis.
ad(i): Die offenen Mengen von $(X, \mathcal{T}|_X)$ sind gegeben als $O \cap X$ wobei $O \in \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{V}$ eine abzählbare Basis offener Mengen in $(Y, \mathcal{T})$, so ist $\{V \cap X : V \in \mathcal{V}\}$ eine abzählbare Basis von $(X, \mathcal{T}|_X)$. Genauso erhält man aus einer Basis von $\mathfrak{U}(x)$ bezüglich $\mathcal{T}$ eine von $\mathfrak{U}'(x)$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$, vgl. Beispiel 1.7.2.

ad(ii): Sei $\mathcal{V}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}_i$. Dann sind die Mengen der Gestalt

$$\prod_{j\in I} O_j$$

wobei $O_j \in \mathcal{V}_i$ und $O_j = X_j$ für alle bis auf endlich viele j, eine Basis $\mathcal{V}$ von $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$, vgl. Beispiel 1.7.3. Dieses Mengensystem $\mathcal{V}$ läßt sich schreiben als $(I = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\})$

$$\mathcal{V} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\prod_{j=1}^{k} O_j \times \prod_{j=k}^{\infty} X_{i_j} : O_{i_j} \in \mathcal{V}_{i_j}\},$$

ist also abzählbar.

Genauso sieht man, das sich auch das 1-te Abzählbarkeitsaxiom vererbt.

ad(iii): Sei $D_i \subseteq X_i$ abzählbar und dicht, $i = 1, \ldots, n$. Genauso wie in Lemma 1.7.5 sieht man das die Menge

$$D' := \{(x_i)_{i=1}^n : x_i \in D_i, i = 1, \ldots, n\}$$

dicht in $\prod_{i=1}^n X_i$ bezüglich $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ ist.

□

1.8.4 Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum und bezeichne $\mathcal{T}$ die von der Metrik d induzierte Topologie, vgl. Beispiel 1.1.3. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das 1-te Abzählbarkeitsaxiom. Denn für jedes $x \in X$ ist $\mathfrak{W}(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $U_{\frac{1}{n}}(x) := \{y \in X : d(y, x) < \frac{1}{n}\}$, eine Umgebungsbasis. Ist $(X, \mathcal{T})$ separabel, so erfüllt $(X, \mathcal{T})$ auch das 2-te Abzählbarkeitsaxiom.

Denn ist $D = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X, so ist

$$\mathcal{V} := \left\{U_{\frac{1}{n}}(x_i) : n, i \in \mathbb{N}\right\}$$

eine (abzählbare) Basis von $\mathcal{T}$: Sei $O \in \mathcal{T}$ gegeben und sei $x \in O$. Wähle $U_\epsilon(x) \subseteq O$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n} < \epsilon$. Da D dicht ist gibt es ein x_i mit $d(x_i, x) < \frac{1}{n}$. Es folgt wegen der Dreiecksungleichung

$$x \in U_{\frac{1}{n}}(x_i) \subseteq U_\epsilon(x) \subseteq O\,.$$

Kapitel 2

Trennungsaxiome

2.1 T_1 - und T_2 - (Hausdorff-) Räume

2.1.1 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *T_1-Raum*, wenn gilt

(T_1) zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \in \mathfrak{U}(y)$, sodaß
$$y \notin U, x \notin V\,.$$

Er heißt *T_2-Raum* (oder *Hausdorff-Raum*), wenn gilt

(T_2) zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \in \mathfrak{U}(y)$, sodaß
$$U \cap V = \emptyset\,.$$

2.1.2 Bemerkung. Die Axiome (T_1) bzw. (T_2) besagen daß verschiedene Punkte des Raumes durch ganze Umgebungen voneinander getrennt werden können. Dabei gilt offenbar "$(T_2) \mapsto (T_1)$".

Anders betrachtet besagen diese Axiome das es hinreichend viele offene Mengen gibt, denn ist $\mathcal{T}'$ feiner als $\mathcal{T}$ und erfüllt $(X, \mathcal{T})$ die Bedingung (T_1) bzw. (T_2) so hat auch $(X, \mathcal{T})$ diese Eigenschaft.

2.1.3 Beispiel. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie sind Hausdorff. Denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, dann ist also $d(x,y) = |x-y| > 0$. Sezte $\epsilon := \frac{1}{3}d(x,y)$ und betrachte die Umgebungen
$$U := U_\epsilon(x), V := U_\epsilon(y)\,.$$

Angenommen es wäre $z \in U \cap V$, dann wäre
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{1}{3}d(x,y) + \frac{1}{3}d(x,y) = \frac{2}{3}d(x,y)\,,$$
ein WS!.

Wir haben eigentlich bewiesen: Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist (X, d) Hausdorff.

2.1.4 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent* (*i*) $(X, \mathcal{T})$ *ist* T_1*-Raum.*

(*ii*) *Für jeden Punkt* $x \in X$ *gilt* $\{x\}$ *ist abgeschlossen.*

(*iii*) *Für jeden Punkt* $x \in X$ *gilt*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U = \{x\}\,.$$

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $O := X \setminus \{x\}$ und sei $y \in O$. Dann gibt es $V \in \mathfrak{U}(y)$ mit $x \notin V$, also $V \subseteq X \setminus \{x\} = O$. Daher ist O offen und also $\{x\}$ abgeschlossen.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Klarerweise ist $\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U$. Sei $y \neq x$, dann ist $\{y\}$ abgeschlossen und daher $U_0 := X \setminus \{y\}$ offen. Daher ist $U_0 \in \mathfrak{U}(x)$ und wegen $y \notin U_0$ also

$$y \notin \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U\,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Wegen $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U = \{x\}$ gibt es eine Umgebung U von x mit $y \notin U$. Genauso erhält man eine Umgebung V von y mit $x \notin V$.

□

2.1.5 Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent :*

(*i*) $(X, \mathcal{T})$ *ist Hausdorff-Raum.*

(*ii*) *Für jeden Punkt* $x \in X$ *gilt*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x), U = \overline{U}} U = \{x\}\,.$$

(*iii*) *Die Diagonale* $\triangle_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ *ist abgeschlossen in der Produkttopologie auf* $X \times X$.

(*iv*) *Ein Filter* $\mathcal{F}$ *auf* X *konvergiert zu höchstens einem Punkt.*

(*v*) *Sei* $\mathcal{F} \to x$, *dann ist* x *der einzige Häufungspunkt von* $\mathcal{F}$.

Beweis.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x \neq y$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Also ist $y \notin \overline{U}$. Da mit U auch $\overline{U}$ in $\mathfrak{U}(x)$ liegt folgt

$$y \notin \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x), U = \overline{U}} U\,.$$

$(ii) \Rightarrow (v)$: Sei $y \neq x$. Dann existiert eine abgeschlossene Umgebung U von x mit $y \notin U$. Wegen $\mathcal{F} \to x$ ist $U \in \mathcal{F}$. Da $y \notin U = \overline{U}$ kann y kein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ sein.

$(v) \Rightarrow (iv)$: Jeder Grenzwert von $\mathcal{F}$ ist auch Häufungspunkt.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $x \neq y$ und sei angenommen das für alle $U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y)$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{M \supseteq U \cap V : U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y)\}$$

ein Filter mit $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$, ein WS!.

(i) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $(x, y) \notin \triangle_X$, d.h. $x \neq y$. Seien $U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y)$, offen mit $U \cap V = \emptyset$. Dann ist $U \times V$ offen in der Produkttopologie auf $X \times X$ und es gilt $(U \times V) \cap \triangle_X = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei $x \neq y$, also $(x, y) \notin \triangle_X$. Dann gibt es eine Umgebung $W \in \mathfrak{U}((x, y))$ mit $W \cap \triangle_X = \emptyset$. Da die Mengen $U \times V$ mit $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(y)$ eine Umgebungsbasis von $\mathfrak{U}((x, y))$ bilden, folgt das es $U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y)$, gibt mit $(U \times V) \cap \triangle_X \subseteq W \cap \triangle_X = \emptyset$, also $U \cap V = \emptyset$.

□

2.1.6 Korollar. *Sei X ein topologischer Raum und Y ein Hausdorff-Raum. Dann gilt:*

(*i*) *Sind $f, g : X \to Y$ stetig, so ist*

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen.

(*ii*) *Sind $f, g : X \to Y$ stetig und gilt $f(x) = g(x)$ für alle Punkte x einer dichten Teilmenge von X, so ist $f = g$.*

(*iii*) *Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist*

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

abgeschlossen bezüglich derProdukttopologie auf $X \times Y$.

Beweis.
`ad`(*i*): Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} X & \to & Y \times Y \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$$

ist stetig. Also ist

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \varphi^{-1}(\triangle_Y)$$

abgeschlossen.

`ad`(*ii*): Die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen und dicht, also gleich X.

`ad`(*iii*): Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} X \times Y & \to & Y \times Y \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{cases}$$

ist stetig und es gilt

$$\operatorname{graph} f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} = \varphi^{-1}(\triangle_Y)\,.$$

□

2.1.7 Lemma. *Sei X ein topologischer Raum und sei angenommen das es zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ in einen Hausdorff-Raum Y gibt mit $f(x) \neq f(y)$ (f sowie Y kann dabei von x, y abhängen). Dann ist X Hausdorff. Die gleiche Aussage gilt wenn man überall "Hausdorff" durch "T_1" ersetzt.*

Beweis. Seien $x, y \in X$, $x \neq y$, und seien f, Y wie in der Voraussetzung des Lemmas. Weiters seien $U' \in \mathfrak{U}(f(x))$ und $V' \in \mathfrak{U}(f(y))$ mit $U' \cap V' = \emptyset$. Dann folgt $U := f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}(x), V := f^{-1}(V') \in \mathfrak{U}(y)$, und $U \cap V = \emptyset$.

Im "T_1"-Fall gilt $f(y) \notin U', f(x) \notin V'$ und daher $y \notin U, x \notin V$. □

2.1.8 Proposition. *Es gilt:*

(i) *Sei $(X, \mathcal{T})$ T_1 bzw. T_2 und sei $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie. Dann hat auch Y die entsprechende Eigenschaft.*

(ii) *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Dann ist $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie Hausdorff (bzw. T_1) genau dann, wenn jedes $X_i, i \in I$, diese Eigenschaft hat.*

Beweis.
`ad`(i): Die kanonische Einbettung $\iota : Y \hookrightarrow X$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 2.1.7 (für beliebige $x, y \in Y$).

`ad`(ii): Sei angenommen das X Hausdorff (bzw. T_1) ist. Da für jedes feste $i \in I$ der Raum X_i homöomorph zu einem Teilraum von X ist, ist nach (i) jedes X_i Hausdorff /bzw. T_1).

Seien umgekehrt alle X_i Hausdorff (bzw. alle T_1). Sind $x, y \in X, x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$, und $x \neq y$, so gibt es einen Index $i \in I$ mit $x_i \neq y_i$. Die kanonische Projektion $\pi_i : X \to X_i$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 2.1.7.

□

2.2 Reguläre und vollständig reguläre Räume

2.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ *regulär*, wenn er T_1 ist und wenn gilt

(T_3) Ist $x \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X, U \cap V = \emptyset$, mit $x \in U$ und $A \subseteq V$.

Es heißt *vollständig regulär*, wenn er T_1 ist und wenn gilt

($T_{3.5}$) Ist $x \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit

$$f(x) = 0, f(A) = \{1\}.$$

2.2.2 Bemerkung. Die Bedingungen (T_3) bzw. $(T_{3.5})$ drücken wieder Möglichkeiten aus gewisse Teilmengen von X voneinander zu trennen.

Es gilt "$(T_{3.5}) \Rightarrow (T_3)$", denn $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ sind offene Mengen mit der in (T_3) geforderten Eigenschaft. Weiters gilt "regulär $\Rightarrow (T_2)$", denn in T_1-Räumen sind Punkte abgeschlossen.

Die Bedingung $(T_{3.5})$ ist von wesentlich verschiedenem Typ wie die vorhergegangenen. Denn sie benützt das externe Objekt der reellen Zahlen.

Es gibt einen Raum X mit Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ sodaß $\mathcal{T}'$ feiner ist als $\mathcal{T}$, $(X, \mathcal{T})$ regulär aber $(X, \mathcal{T}')$ nicht regulär.

2.2.3 Lemma. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt (T_3) genau dann, wenn gilt: Für jeden Punkt $x \in X$ bilden die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis.*

Beweis. Es gelte (T_3). Sei $x \in X$ und $W \in \mathfrak{U}(x)$ offen. Dann ist $A := W^c$ abgeschlossen und $x \notin A$. Also gibt es offene Mengen $U, V, U \cap V = \emptyset$ mit $x \in U$ und $V \supseteq A$. Es folgt $\overline{U} \cap V = \emptyset$, und daher $\overline{U} \subseteq W$. Nun ist $\overline{U} \supseteq U$ und daher in $\mathfrak{U}(x)$.

Erfülle umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ die Bedingung des Lemmas. Sei A abgeschlossen und $x \notin A$. Dann ist $A^c \in \mathfrak{U}(x)$, also gibt es eine abgeschlossene Umgebung $B \in \mathfrak{U}(x)$ mit $B \subseteq A^c$. Daher ist B^c offen und $B^c \supseteq A$. Wähle eine offene Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $V \subseteq B$, dann gilt $x \in V$, $A \subseteq B^c$, und $V \cap B^c = \emptyset$. □

2.2.4 Proposition. *Es gilt:*

(*i*) *$(X, \mathcal{T})$ erfülle (T_3) bzw. $(T_{3.5})$ und $Y \subseteq X$ sei mit der Spurtopologie versehen. Dann hat auch Y die entsprechende Eigenschaft.*

(*ii*) *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Dann ist X (T_3) (bzw. $(T_{3.5})$) genau dann, wenn jeder Raum X_i die entsprechende Eigenschaft hat.*

Beweis.
ad(*i*): Sei $(X, \mathcal{T})$ (T_3), $x \in Y$, $A \subseteq Y$ abgeschlossen in der Spurtopologie. Dann gibt es eine in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossene Menge A' mit $A' \cap Y = A$. Daher ist $x \notin A'$ und es existieren $U', V' \in \mathcal{T}$ sodaß $x \in U'$, $A' \subseteq V'$, $U' \cap V' = \emptyset$. Dann sind $U := U' \cap Y$ und $V := V' \cap Y$ offen in Y und es gilt $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $A \subseteq V$.

Sei $(X, \mathcal{T})$ $(T_{3.5})$, $x \in Y$, $A \subseteq Y$ abgeschlossen in Y. Wieder existiert A' abgeschlossen in X mit $A' \cap Y = A$. Sei $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 0, f(A') = \{1\}$. Ist $\iota : Y \hookrightarrow X$ die kanonische Einbettung, so ist $f \circ \iota : Y \to [0,1]$ stetig und $(f \circ \iota)(x) = 0, (f \circ \iota)(A) = \{1\}$.

ad(*ii*): Sei X (T_3) bzw. $(T_{3.5})$. Da X homöomorph zu einem Teilraum von X ist, ist nach (*i*) auch X_i (T_3) bzw. $(T_{3.5})$.

Betrachte umgekehrt den Raum X. Ist $x \in X$, $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $U := A^c \in \mathfrak{U}(x)$ offen. Also existiert eine Menge der Gestalt $V = \prod_{i \in I} V_i \subseteq U$ mit $V_i \in \mathfrak{U}(\pi_i(x))$ offen wobei $V_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$. Seien $i_1, \dots, i_n$ jene mit $V_{i_k} \neq X_{i_k}$.

Seien nun alle X_i $(T_{3.5})$. Dann gibt es stetige Funktionen $f_{i_k} : X_{i_k} \to [0,1], k = 1, \dots, n$, mit $f_{i_k}(\pi_{i_k}(x)) = 0$ und $f_{i_k}(V_{i_k}^c) = \{1\}$. Dann sind die

Funktionen $f_{i_k} \circ \pi_{i_k} : X \to [0,1]$ stetig. Daher ist auch die Abbildung ($[0,1]^n$ ist mit der Produkttopologie versehen)

$$\begin{cases} X & \to & [0,1]^n \\ y & \mapsto & (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}(y))_{i=1}^{n} \end{cases}$$

stetig. Da

$$\max : \begin{cases} [0,1]^n & \to & [0,1] \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & \max_{l=1,\dots,n} t_l \end{cases}$$

stetig ist, folgt daß

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow & [0,1] \\ y & \longmapsto & \max_{k=1,\dots,n} f_{i_k} \circ \pi_{i_k}(y) \end{cases}$$

stetig ist. Nun gilt

$$f(x) = \max_{k=1,\dots,n} f_{i_k}(\pi_{i_k}(x)) = 0\,.$$

Ist $y \in A$, so folgt $y \notin V$ und daher muß für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ gelten daß $\pi_{i_k}(y) \notin V_{i_k}$, d.h. $\pi_{i_k}(y) \in V_{i_k}^c$ und daher$f_{i_k}(\pi_{i_k}(y)) = 1$. Es folgt $f(y) = 1$.

Seien nun alle X_i (T_3). Dann gibt es in X_{i_k} offene Mengen $W_{i_k}, W'_{i_k}, W_{i_k} \cap W'_{i_k} = \emptyset$, sodaß $\pi_{i_k}(x) \in W_{i_k}$ und $V_{i_k}^c \subseteq W'_{i_k}$. Betrachte die in X offenen Mengen

$$W := \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(W_{i_k}), W' := \bigcup_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(W'_{i_k})\,.$$

Es gilt $x \in W$, denn $\pi_{i_k}(x) \in W_{i_k}$. Ist $y \in A$, so gibt es genauso wie oben ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\pi_{i_k}(y) \in V_{i_k}^c$ und daher $\pi_{i_k}(y) \in W'_{i_k}$. Also folgt $y \in W'$, d.h. $A \subseteq W'$. Weiters gilt

$$W \cap W' = \bigcup_{k=1}^{n} \left[\pi_{i_k}^{-1}(W'_{i_k}) \cap \bigcap_{l=1}^{n} \pi_{i_l}^{-1}(W_{i_l})\right] \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\pi_{i_k}^{-1}(W'_{i_k}) \cap \pi_{i_k}^{-1}(W_{i_k})\right]}_{=\emptyset} = \emptyset\,.$$

□

2.2.5 Satz (Einbettungssatz von Tychonoff). *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn er homöomorph zu einem Teilraum eines Produktes $[0,1]^I$ ist.*

Beweis. Betrachte den Raum $[0,1], x \in [0,1], A \subseteq [0,1]$ abgeschlossen. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ sodaß

$$U_\epsilon(x) \cap A = \Big((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [0,1]\Big) \cap A = \emptyset\,.$$

Betrachte die Funktion $(d(x,y) = |x - y|)$

$$\varphi \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ y & \mapsto & d(x,y) \end{cases}$$

Dann ist φ stetig, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) \geq \epsilon$ für alle $y \in A$. Also ist

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \max\{\frac{1}{\epsilon}\varphi(y), 1\} \end{cases}$$

stetig und erfüllt $f(x) = 0$, $f(A) = \{1\}$. Also ist $[0,1]$ vollständig regulär. Wegen der letzten Proposition ist daher auch jeder Teilraum eines direkten Produktes $[0,1]^I$ vollständig regulär.

Sei nun umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Sei I die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to [0,1]$.

·) Die Familie I ist punktetrennend, d.h. zu je zwei $x, y \in X, x \neq y$ existiert $f \in I$ mit $f(x) \neq f(y)$. Denn wegen (T_1) ist jeder Punkt abgeschlossen und wegen $(T_{3.5})$ existiert $f \in I$ mit $f(x) = 0$, $f(\{y\}) = \{1\}$.

Die Abbildung $\Phi : X \to [0,1]^I$ die definiert ist als

$$\Phi(x) := (f(x))_{f \in I}$$

ist also injektiv.

·) Da $[0,1]^I$ mit der Produkttopologie versehen ist und (per definitionem)

$$\pi_f \circ \Phi : \begin{cases} X & \to & [0,1] \\ & & \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}, \quad f \in I,$$

stetig ist, folgt daß Φ stetig ist.

·) Sei $x' \in \Phi(X)$, $x := \Phi^{-1}(x')$, und $U \in \mathfrak{U}(x)$ offen. Da $(X, \mathcal{T})$ $T_{3.5}$ ist existiert eine Funktion $f \in I$ mit $f(x) = 0$, $f(U^c) = \{1\}$. Setze $V := \pi_f^{-1}([0,1))$, dann ist V offen in $[0,1]^I$. Es gilt $x' \in V$, denn $f(x) = 0 \in [0,1)$. Ist $y' \in V \cap \Phi(X)$, so ist $f(\Phi^{-1}(y')) \in [0,1)$, also $\Phi^{-1}(y') \notin U^c$, d.h. $\Phi^{-1}(y') \in U$. Wir haben erhalten

$$\Phi^{-1}(V \cap \Phi(X)) \subseteq U\,,$$

und $V \cap \Phi(X)$ ist offene Umgebung von x' in der Spurtopologie von $[0,1]^I$ auf $\Phi(X)$. Also ist $\Phi^{-1} : \Phi(X) \to X$ stetig.

$\square$

2.2.6 Bemerkung. Im ersten Beweisteil von Satz 2.2.5 haben wir eigentlich gezeigt: Jeder metrische Raum ist vollständig regulär.

2.3 Normale Räume

2.3.1 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *normal*, wenn er T_1 ist und dem folgenden Gesetz genügt:

(T_4) Für je zwei abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$ gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U, B \subseteq V$.

2.3.2 Bemerkung. Offenbar gilt "normal $\Rightarrow$ regulär". Wir werden sehen (Korollar 2.3.5) das sogar gilt "normal $\Rightarrow$ vollständig regulär". Ist $(X, \mathcal{T})$ normal und Y ein abgeschlossener Teilraum, so ist Y normal.

Ist $(X, \mathcal{T})$ normal und $Y \subseteq X$ ein beliebiger Teilraum, so muß Y nicht notwendig normal sein. Genauso muß für zwei normale Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deren Produkt $X_1 \times X_2$ nicht notwendig normal sein.

2.3.3 Lemma. *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt (T_4) genau dann, wenn gilt: Sind $A, W \subseteq X$, A abgeschlossen, W offen, $A \subseteq W$, dann existiert eine offene Menge U mit*

$$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W .$$

Beweis.
$\cdot$) Sei $(X, \mathcal{T})$ (T_4). Es sind A, W^c disjunkte abgeschlossene Mengen, also existieren $U, V \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq U$, $W^c \subseteq V$, und $U \cap V = \emptyset$. Daher ist $\overline{U} \cap V = \emptyset$ d.h. $W^c \cap \overline{U} = \emptyset$ oder $\overline{U} \subseteq W$.

$\cdot$) Sei umgekehrt die Bedingung des Lemmas erfüllt. Seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Dann folgt $A \subseteq B^c$. Also existiert U offen mit $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B^c$. Setze $V := \overline{U}^c$, dann ist V offen, $U \cap V = \emptyset$, und $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

$\square$

2.3.4 Satz (Lemma von Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ T_4 genau dann, wenn gilt: Sind A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in X, so existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(A) = 0, f(B) = 1$.*

Beweis.
$\cdot$) Erfülle $(X, \mathcal{T})$ die Bedingung des Satzes und seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Ist f wie in der Bedingung, so setze $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2})), V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$. Dann ist U, V offen, $U \cap V = \emptyset$, und $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Also ist für $(X, \mathcal{T})$ das Axiom (T_4) erfüllt.

$\cdot$) Sei umgekehrt (T_4) erfüllt und seinen A, B abgeschlossen und disjunkt. Wir konstruieren eine Familie $(U(t))_{t \in [0,1]}$ offener Mengen mit den Eigenschaften

(i) $A \subseteq U(0)$, $U(1) \subseteq B^c$,

(ii) Ist $t, t' \in [0, 1], t < t'$, so gilt $\overline{U(t)} \subseteq U(t')$.

Setze $U(1) := B^c$. Wegen $A \subseteq U(1)$ existiert $U(0)$ offen mit

$$A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1) .$$

Angenommen wir haben bereits Mengen $U(t)$ mit der verlangten Eigenschaft konstruiert für alle $t = \frac{k}{2^n}, k = 0, \ldots, 2^n$. Dann gilt also $\overline{U(\frac{k}{2^n})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^n})$ und daher existiert eine offene Menge $U(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}})$ sodaß

$$\overline{U\Big(\frac{k}{2^n}\Big)} \subseteq U\Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\Big) \subseteq \overline{U\Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\Big)} \subseteq U\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big) .$$

Wir haben also eine Familie $U(t)$ mit den verlangten Eigenschaften für alle t von der Gestalt $t = \frac{l}{2^{n+1}}, l = 0, \ldots, 2^{n+1}$, gefunden.

Durch vollständige Induktion (nach n) erhält man also eine Familie $U(t)$ mit den Eigenschaften $(i),(ii)$ wobei t alle Zahlen der Gestalt $\frac{k}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0,\ldots,2^n$, durchläuft. Ist $t \in [0,1]$, so setze

$$U(t) := \bigcup_{s \le t,\, s = \frac{k}{2^n}} U(s)\,.$$

Ist t selbst gleich $\frac{l}{2^m}$, so ist

$$\bigcup_{s \le \frac{l}{2^m},\, s = \frac{k}{2^n}} U(s) = U\Big(\frac{l}{2^m}\Big)\,,$$

d.h. diese Definition stimmt mit der obigen überein. Sind nun $0 \le t < t' \le 1$, so existieren s, s' von der Gestalt $\frac{k}{2^n}, \frac{k'}{2^n}$ mit $t < s < s' < t'$ und es folgt

$$\overline{U(t)} \subseteq \overline{U(s)} \subseteq U(s') \subseteq U(t')\,.$$

·) Definiere eine Funktion $g : X \to [0,1]$ durch

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x \notin U(1) \\ \inf\{t : x \in U(t)\}, & x \in U(1) \end{cases}$$

Dann gilt $g(A) = \{0\}, g(B) = \{1\}$.

Sei $x \in X$ und $g(x) = a \in [0,1]$, und sei $\epsilon > 0$. Dann ist $U(a+\epsilon) \cap \overline{U(a-\epsilon)}^c$ eine offene Umgebung von x, denn $x \in U(a+\epsilon)$ und $x \notin U(a - \frac{\epsilon}{2})$ und daher $x \notin \overline{U(a-\epsilon)}$. Hier setzen wir $U(t) = X$ für $t > 1$ und $U(t) = \emptyset$ für $t < 0$. Ist $y \in U(a+\epsilon) \cap \overline{U(a-\epsilon)}^c$, so folgt $g(y) \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$. Also ist g stetig.

□

2.3.5 Korollar. *Sei $(X,\mathcal{T})$ normal. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ auch vollständig regulär.*

Beweis. Da in T_1-Räumen Punkte abgeschlossen sind impliziert nach dem Lemma von Urysohn normal $(T_{3.5})$.

□

2.3.6 Satz (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ erfüllt (T_4) genau dann, wenn gilt: Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung.*

$$g : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},\ g|_A = f\,.$$

Ist dabei $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, so kann g so gewählt werden das ebenfalls $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma:

2.3.7 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ T_4. Sei $u : A \to [-1,1]$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, sodaß $|u(x) - v(x)| \le \frac{2}{3}, x \in A$.*

Beweis. Sei $H := \{x \in A : -1 \le u(x) \le -\frac{1}{3}\}$ und $K := \{x \in A : \frac{1}{3} \le u(x) \le 1\}$. Dann sind H, K abgeschlossen in A (bzgl. der Spurtopologie) und da A abgeschlossen in X ist, sind H, K auch abgeschlossen in X. Klarerweise gilt

$H \cap K = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit $v(H) = \{-\frac{1}{3}\}, v(K) = \{\frac{1}{3}\}$. Diese hat die gewünschte Eigenschaft.

$\square$

Beweis. (Satz 2.3.6)
·) $(X, \mathcal{T})$ erfülle die genannte Fortsetzungseigenschaft. Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt. Dann ist $C := A \cup B$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und in der Spurtopologie auf C sind A, B offen und abgeschlossen. Daher ist die Funktion $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ -1 & , \quad x \in B \end{cases}$$

stetig. Sei g eine stetige Fortsetzung auf X. Setze

$$U := g^{-1}((0, +\infty]), V := g^{-1}([-\infty, 0))\,.$$

Dann sind U, V offen in X, disjunkt, und es gilt

$$A \subseteq U, B \subseteq V\,.$$

·) Sei nun umgekehrt T_4 erfüllt. Da $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ homöomorph zu $[-1, 1]$ ist, genügt es zu zeigen, daß sich jedes $f : A \to [-1, 1]$ auf X fortsetzen läßt. Seien also $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to [-1, 1]$ stetig, gegeben.

·) Wir konstruieren eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stetiger Funktionen $g_n : X \to [-1, 1]$.

Wendet man Lemma 2.3.7 an auf die Funktion f, so erhält man $g_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], |f(x) - g_0(x)| \leq \frac{2}{3}, x \in A$. Angenommen es ist eine stetige Funktion $g_n : X \to [-1+(\frac{2}{3})^{n+1}, 1-(\frac{2}{3})^{n+1}]$ gegeben sodaß $|f(x)-g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}, x \in A$. Wendet man Lemma 2.3.7 an mit der Funktion

$$u(x) := \Big(\frac{3}{2}\Big)^{n+1} \Big(f(x) - g_n(x)\Big)\,,$$

so erhält man eine Funktion $h_{n+1} : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}]$ sodaß

$$\Big|\Big(f(x) - g_n(x)\Big) - h_{n+1}(x)\Big| \leq \frac{2}{3} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1}, x \in A\,,$$

Setze $g_{n+1} := g_n + h_{n+1}$, dann ist

$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+2}, x \in A\,,$$

und

$$|g_{n+1}(x)| \leq 1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} + \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} = 1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+2}\,.$$

·) Sind nun $n, m \geq N, m > n$, so folgt für $x \in X$

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_{m-1}(x)| + \cdots + |g_{n+1}(x) - g_n(x)| =$$

$$= |h_m(x)| + \cdots + |h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \sum_{k=n+1}^{m} \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{N} .$$

Also ist insbesondere für jedes feste x die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und daher konvergent zu einer Zahl $g(x) \in [-1,1]$. Weiters ist g eine Fortsetzung von f, denn für $x \in A$ gilt

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \to 0,\ n \to \infty .$$

Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n so groß daß

$$|g_n(y) - g(y)| \leq \epsilon,\ y \in X .$$

Wähle eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ in X sodaß

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leq \epsilon,\ y \in U .$$

Dann folgt

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - g_n(y)| + |g_n(y) - g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq 3\epsilon,\ y \in U ,$$

also ist g stetig.

$\cdot$) Sei nun $f(A) \subseteq \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, daß g mit $g(X) \subseteq \mathbb{R}$ existiert

Betrachte zunächst den Fall das zusätzlich $f(x) \geq 0, x \in A$. Sei $g_1 : X \to [0,+\infty]$ eine stetige Fortsetzung von f. Setze $B := g_1^{-1}(\{+\infty\})$, dann ist B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Daher ist die Funktion $h : A \cup B \to [0,+\infty]$

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in B \end{cases}$$

stetig. Sei $g_2 : X \to [0,+\infty]$ stetige Fortsetzung von h. Dann bildet die Funktion

$$g := \min\{g_1, g_2\}$$

X nach $[0,+\infty)$ ab, ist stetig, und eine Fortsetzung von f.

Im allgemeinen schreibe $f = f^+ - f^-$ mit

$$f^+(x) := \max\{f(x),0\}, f^-(x) := -\min\{f(x),0\} .$$

Dann ist $f^+, f^- : A \to [0,+\infty)$ stetig. Nach dem bereits bewiesenen existieren $g^+, g^- : X \to [0,\infty)$ stetige Fortsetzungen von f^+ bzw. f^-. Es folgt das $g := g^+ - g^-$ in $\mathbb{R}$ abbildet, stetig ist, und f fortsetzt.

$\square$

Kapitel 3

Überdeckungseigenschaften

3.1 Überdeckungen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir nennen eine Familie von Teilmengen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kurz eine *Familie*. Ist $\mathcal{U}$ eine Familie und gilt

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X ,$$

so nennen wir $\mathcal{U}$ eine *Überdeckung*.

Besteht eine Familie bzw. eine Überdeckung aus endlich vielen (abzählbar vielen) Mengen, so nennen wir sie *endliche* (*abzählbare*) *Familie* bzw. *endliche* (*abzählbare*) *Überdeckung*.

Ist $\mathcal{U}$ eine Familie bzw. Überdeckung so daß jedes $U \in \mathcal{U}$ offen (abgeschlossen) ist, so heißt $\mathcal{U}$ eine *offene* (*abgeschlossene*) *Familie* bzw. *Überdeckung*.

3.1.1 Definition. Sei $\mathcal{U}$ eine Familie (Überdeckung). Dann heißt $\mathcal{U}$ eine *lokal endliche Familie* (*Überdeckung*), wenn gilt: Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $W \in \mathfrak{U}(x)$ die mit nur endlich vielen Elementen von $\mathcal{U}$ nichtleeren Schnitt hat.

$\mathcal{U}$ heißt *σ-lokal endliche Familie* (*Überdeckung*), wenn gilt: Es gibt abzählbar viele lokal endliche Familien $\mathcal{U}_i$, $i \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_i .$$

3.1.2 Lemma. *Sei $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Familie. Dann gilt*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U} .$$

Beweis. Sei $x \notin \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$. Es existiert eine Umgebung V von x die nur mit endlich vielen Mengen $U \in \mathcal{U}$ nichtleeren Schnitt hat, seien diese $U_1, \dots, U_n$. Da $x \notin \overline{U_i}$, ist $\overline{U_i}^c$ eine offene Umgebung von x. daher ist auch

$$W := V \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}^c \in \mathfrak{U}(x) .$$

Nun gilt $W \cap U_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, denn $\overline{U_i}^c \cap U_i = \emptyset$. Ist $U \in \mathcal{U}$, $U \notin \{U_1, \dots, U_n\}$, so gilt $V \cap U = \emptyset$, also folgt auch in diesem Fall $W \cap U = \emptyset$. Insgesamt ist

$$W \cap \bigcup_{u \in \mathcal{U}} U = \emptyset \,,$$

und daher

$$x \notin \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U} \,.$$

Wir haben die Inklusion "$\supseteq$" der behaupteten Gleichheit erhalten. Die umgekehrte Inklusion folgt da für jedes $U_0 \in \mathcal{U}$ gilt

$$\overline{U_0} \subseteq \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U} \,.$$

□

3.1.3 Korollar. *Sie $\mathcal{U}$ eine lokal endliche abgeschlossene Familie. Dann ist die Menge*

$$A := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

abgeschlossen.

Beweis. Folgt aus dem obigen Lemma, denn für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $\overline{U} = U$. □

3.1.4 Lemma. *Sei $\{U_i : i = 1, 2, \dots\}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Dann existiert eine lokal endliche Überdeckung $\{A_i : i = 1, 2, \dots\}$ mit*

$$A_i \subseteq U_i, \; i \in \mathbb{N} \,.$$

Beweis. Setze $A_1 := U_1$ und

$$A_i := U_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j, \; i = 2, 3 \dots \,.$$

Dann gilt $A_i \subseteq U_i$, $i \in \mathbb{N}$, und

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = X \,.$$

Sei $x \in X$, dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein i_0. Da U_{i_0} offen ist, gibt es eine Umgebung $W \in \mathfrak{U}(x)$ mit $W \subseteq U_{i_0}$. Dann ist

$$W \cap A_i = \emptyset, i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots \,.$$

□

3.1.5 Definition. Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ Überdeckungen. Dann heißt $\mathcal{V}$ eine *Teilüberdeckung* von $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Es heißt $\mathcal{V}$ eine *Verfeinerung* von $\mathcal{U}, \mathcal{V} < \mathcal{U}$, wenn gilt: Ist $V \in \mathcal{V}$, so existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$.

Offenbar gilt "$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V} < \mathcal{U}$" sowie "$\mathcal{W} < \mathcal{V}, \mathcal{V} < \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{W} < \mathcal{U}$".
Sei $\mathcal{U}$ eine Familie und $x \in X, A \subseteq X$. Dann bezeichnen wir:

$$S(x,\mathcal{U}) := \bigcup\{U : x \in U \in \mathcal{U}\}\,,$$

$$S(A,\mathcal{U}) := \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}, A \cap U \neq \emptyset\}\,.$$

$$\overline{\mathcal{U}} := \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}\,,$$

$$\mathcal{U}^{\triangle} := \{S(x,\mathcal{U}) : x \in X\}\,,$$

$$\mathcal{U}^{*} := \{S(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Die Menge $S(x,\mathcal{U})$ bzw. $S(A,\mathcal{U})$ heißt der *Stern von x* bzw. *Stern von A bezüglich $\mathcal{U}$*.

3.1.6 Lemma. *Sei $\mathcal{U}$ eine Familie, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\mathcal{U} < \mathcal{U}^{\triangle} < \mathcal{U}^{*} < (\mathcal{U}^{\triangle})^{\triangle}\,.$$

Beweis.
·) Sei $U \in \mathcal{U}$, $U \neq \emptyset$. Wähle $x \in U$, dann ist $U \subseteq S(x,\mathcal{U})$. Also gilt $\mathcal{U} < \mathcal{U}^{\triangle}$. Sei $S(x,\mathcal{U})$ gegeben, $S(x,\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Es gilt $S(x,\mathcal{U}) \subseteq S(U,\mathcal{U})$. Also gilt $\mathcal{U}^{\triangle} < \mathcal{U}^{*}$.

·) Wir müssen zeigen $\mathcal{U}^{*} < \mathcal{U}^{\triangle\triangle}$. Sei $S(U,\mathcal{U})$ gegeben und wähle $x \in U$. Ist $U' \in \mathcal{U}$ sodaß $U \cap U' \neq \emptyset$ dann existiert $y \in U \cap U'$. Es folgt $U' \subseteq S(y,\mathcal{U})$ und $x \in U \subseteq S(y,\mathcal{U})$. Also ist $S(y,\mathcal{U})$ ein Element von $\mathcal{U}^{\triangle}$ welches x enthält und daher gilt

$$S(y,\mathcal{U}) \subseteq (x,\mathcal{U}^{\triangle})\,.$$

Insgesamt folgt $U' \subseteq S(x,\mathcal{U}^{\triangle})$ und daher

$$S(U,\mathcal{U}) = \bigcup\left\{U' \in \mathcal{U} : U' \cap U \neq \emptyset\right\} \subseteq S(x,\mathcal{U}^{\triangle}) \in \mathcal{U}^{\triangle\triangle}\,.$$

d.h. $\mathcal{U}^{*} < \mathcal{U}^{\triangle\triangle}$.

□

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ Überdeckungen. Wir sagen $\mathcal{V}$ ist eine *Sternverfeinerung* von $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{V}^{*} < \mathcal{U}$. Analog ist $\mathcal{V}$ eine *Delta-Verfeinerung*, wenn $\mathcal{V}^{\triangle} < \mathcal{U}$.

3.1.7 Lemma. *Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ Überdeckungen und gelte $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Dann folgt $\mathcal{V}^{\triangle} < \mathcal{U}^{\triangle}$, $\mathcal{V}^{*} < \mathcal{U}^{*}$ und $\overline{\mathcal{V}} < \overline{\mathcal{U}}$.*

Beweis.
·) Sei $x \in X$ und betrachte die Menge $S(x,\mathcal{V})$. Ist $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in V$ gegeben, so wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$. Dann ist $x \in U$, also gilt

$$V \subseteq U \subseteq S(x,\mathcal{U})\,.$$

und wir erhalten

$$S(x,\mathcal{V}) = \bigcup\{V \in \mathcal{V} : x \in V\} \subseteq S(x,\mathcal{U})\,.$$

d.h. $\mathcal{V}^{\triangle} < \mathcal{U}^{\triangle}$.

·) Sei $V_0 \in \mathcal{V}$ und betrachte die Menge $S(V_0, \mathcal{V})$. Wähle $U_0 \in \mathcal{U}$ sodaß $V_0 \subseteq U_0$. Ist $V \in \mathcal{V}$ mit $V \cap V_0 \neq \emptyset$, so wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $U \supseteq V$. Dann folgt $U \cap U_0 \supseteq V \cap V_0 \neq \emptyset$, also

$$V \subseteq U \subseteq S(U_0, \mathcal{U}) .$$

und daher

$$S(V_0, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap V_0 \neq \emptyset\} \subseteq S(U_0, \mathcal{U}) .$$

·) Ist $V \in \mathcal{V}$ wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$. Dann ist auch $\overline{V} \subseteq \overline{U}$.

□

3.1.8 Lemma. *Sei $\mathcal{V}$ eine Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$, und sei $A \subseteq X$. Dann gilt*

$$S(S(A, \mathcal{V}), \mathcal{V}) \subseteq S(A, \mathcal{U}) .$$

Beweis. Es gilt $S(A, \mathcal{V}) = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset\}$ und

$$S(S(A, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = \bigcup \{V' \in \mathcal{V} : S(A, \mathcal{V}) \cap V' \neq \emptyset\} =$$

$$= \bigcup \{V' \in \mathcal{V} : \exists V \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset, V \cap V' \neq \emptyset\}$$

Kommt V' in dieser Vereinigung vor wähle $V \in \mathcal{V}$ mit $A \cap V \neq \emptyset, V \cap V' \neq \emptyset$. Wegen $\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $S(V, \mathcal{V}) \subseteq U$. Es gilt $V' \subseteq S(V, \mathcal{V}) \subseteq U$ und $U \cap A \supseteq S(V, \mathcal{V}) \cap A \supseteq V \cap A \neq \emptyset$, also folgt $U \subseteq S(A, \mathcal{U})$ und daher auch $V' \subseteq S(A, \mathcal{U})$. Insgesamt folgt die Behauptung.

□

3.1.9 Lemma. *Sei $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine Überdeckung. Ist $\mathcal{U}$ lokal endlich, so ist auch $\overline{\mathcal{U}}$ lokal endlich. Ist $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ eine weitere Überdeckung mit $V_i \subseteq U_i$, so ist auch $\mathcal{V}$ lokal endlich.*

Beweis. Sei $x \in X$, dann gibt es eine offene Umgebung W von x die nur endlich viele der U_i schneidet, seien diese $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$.
·) Sei $i \in I$ mit $\overline{U_i} \cap W \neq \emptyset$. Da W offen ist folgt $W \cap U_i \neq \emptyset$, also $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$.

·) Gilt $V_i \cap W \neq \emptyset$ folgt $U_i \cap W \supseteq V_i \cap W \neq \emptyset$ und wieder $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$.

□

3.2 Parakompakt und fully normal

3.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$

(*i*) *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(*ii*) *Lindelöf*, wenn jede offene Überdeckung eine (höchstens) abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

(*iii*) *parakompakt*, wenn zu jeder offenen Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung existiert.

(*iv*) *fully normal*, wenn er T_1 ist und zu jeder offenen Überdeckung eine offene Sternverfeinerung existiert.

3.2.2 Bemerkung. Der stärkste, und wohl auch "wichtigste" der obigen Begriffe ist die Kompaktheit. Diesem ist das gesamte Kapitel IV gewidmet. Wir erwähnen nur hier die Definition, da sie sich in die anderen "Überdeckungsaxiome" gut einfügt.

Der Begriff "fully normal" wird oft auch als Trennungsaxiom angesehen. Offensichtlich gilt "kompakt $\Rightarrow$ Lindelöf" sowie "kompakt $\Rightarrow$ parakompakt".

In (*i*) und (*ii*) könnte man äquivalent statt "...Teilüberdeckung besitzt" auch "...Verfeinerung besitzt" schreiben.

3.2.3 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ separabel. Dann gilt sogar "parakompakt $\Rightarrow$ Lindelöf".*

Beweis.
$\cdot$) Sei $\mathcal{V}$ eine lokal endliche Familie offener Mengen. Sei $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Zu jedem d_i gibt es nur endliche viele Elemente von $\mathcal{V}$ die d_i enthalten, $U_{i,1}, \ldots, U_{i,n_i}$. Ist $U \in \mathcal{V}$ gibt es ein d_i mit $d_i \in U$ da U offen und D dicht. Also ist

$$U \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{U_{i,1}, \ldots, U_{i,n_i}\} .$$

Es folgt das $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{U_{i,1}, \ldots, U_{i,n_i}\}$ und daher abzählbar ist.

$\cdot$) Sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Wähle eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V}$. Diese ist abzählbar, $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots\}$. Wähle $U_i \in \mathcal{V}$ mit $U_i \supseteq V_i$, dann ist $\{U_1, U_2, \ldots\}$ eine abzählbare Teilüberdeckung.

□

3.2.4 Lemma. *Ein T_1-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann fully normal, wenn jede offene Überdeckung eine offene Delta-Verfeinerung besitzt.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ fully normal. Ist $\mathcal{U}$ offene Überdeckung und $\mathcal{V}$ eine offene Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$, so folgt

$$\mathcal{V}^{\triangle} < \mathcal{V}^{*} < \mathcal{U} .$$

Umgekehrt sei die Bedingung des Lemmas erfüllt und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Sei $\mathcal{V}$ eine offene Delta-Verfeinerung von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ eine offene Delta-Verfeinerung von $\mathcal{V}$. Dann gilt $\mathcal{W}^{\triangle} < \mathcal{V}$ und daher

$$\mathcal{W}^{*} < \mathcal{W}^{\triangle\triangle} < \mathcal{V}^{\triangle} < \mathcal{U} .$$

□

3.2.5 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ fully normal, dann ist $(X, \mathcal{T})$ auch normal.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ fully normal und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann ist $\mathcal{U} := \{A^c, B^c\}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{V}$ eine offene Sternverfeinerung von $\mathcal{U}$ und setze

$$U := S(A, \mathcal{V}), V := S(B, \mathcal{V}) .$$

Dann sind U, V offen und es gilt $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

Angenommen $U \cap V \neq \emptyset, x \in U \cap V$. Dann gibt es $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ mit

$$V_1 \cap A \neq \emptyset, V_2 \cap B \neq \emptyset, x \in V_1, x \in V_2$$

Es folgt $V_1 \cup V_2 \subseteq S(x, \mathcal{V})$ und daher $S(x, \mathcal{V}) \cap A \neq \emptyset$, $S(x, \mathcal{V}) \cap B \neq \emptyset$. Also ist $S(x, \mathcal{V})$ in keinem der Elemente von $\mathcal{U}$ enthalten. Ein WS! denn da $\mathcal{V}^* < \mathcal{U}$ ist auch $\mathcal{V}^\triangle < \mathcal{U}$.

□

3.2.6 Lemma. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist X fully normal.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Zu $x \in X$ wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und $\epsilon(x) \leq 1$ sodaß $U_{\epsilon(x)}$ in U enthalten ist. Dann ist

$$\mathcal{V} := \left\{ U_{\epsilon(x)}(x) : x \in X \right\}$$

eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Betrachte die offene Überdeckung

$$\mathcal{W} := \left\{ U_{\frac{\epsilon(x)}{4}}(x) : x \in X \right\} .$$

Wir zeigen, daß $\mathcal{W}^\triangle < \mathcal{U}$: Sei $x \in X$ festgehalten. Setze

$$\eta := \sup \left\{ \epsilon(y) : x \in U_{\frac{\epsilon(y)}{4}}(y) \right\} .$$

Sei $z \in X$ sodaß $x \in U_{\frac{\epsilon(z)}{4}}(z)$ und $\epsilon(z) > \frac{3}{4}\eta$. Sei $y \in X$ sodaß $x \in U_{\frac{\epsilon(y)}{4}}(y)$. Für $v \in U_{\frac{\epsilon(y)}{4}}(y)$ gilt dann

$$d(z, v) \leq d(z, x) + d(x, y) + d(y, v) <$$

$$< \frac{\epsilon(z)}{4} + 2 \cdot \frac{\epsilon(y)}{4} \leq \frac{3}{4}\eta < \epsilon(z) .$$

Es folgt $v \in U_{\epsilon(z)}(z)$, d.h.

$$U_{\frac{\epsilon(y)}{4}}(y) \subseteq U_{\epsilon(z)}(z) .$$

Insgesamt erhalten wir

$$S(x, \mathcal{W}) \subseteq U_{\epsilon(z)}(z) \in \mathcal{V} .$$

und damit

$$\mathcal{W}^\triangle < \mathcal{V} < \mathcal{U} .$$

Es folgt mit Lemma 3.2.4 daß X fully normal ist denn T_1 ist sowieso erfüllt.

□

3.2.7 Proposition. *Sei $(X,\mathcal{T})$ regulär. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ parakompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat (die nicht notwendigerweise offen sein muß).*

Beweis. Das parakompakt die Bedingung des Lemmas impliziert ist klar. Sei umgekehrt die Bedingung erfüllt und sei eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben.
·) Wir konstruieren mehrere Überdeckungen: Zunächst existiert nach Voraussetzung eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} < \mathcal{U}$. Da $\mathcal{A}$ lokal endlich ist gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $W(x)$ die nur endliche viele Elemente von $\mathcal{A}$ schneidet. Also ist

$$\mathcal{P} := \{W(x) : x \in X\}$$

eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft daß jedes ihrer Elemente nur endlich viele Elemente von $\mathcal{A}$ schneidet.

Da $(X,\mathcal{T})$ regulär ist gibt es stets $Q(x)$ offen sodaß $x \in Q(x) \subseteq \overline{Q(x)} \subseteq W(x)$, denn die abgeschlossenen Umgebungen bilden eine Basis. Dann ist

$$\mathcal{Q} := \{Q(x) : x \in X\}$$

eine offene Überdeckung mit $\overline{\mathcal{Q}} < P$. Nach Voraussetzung existiert eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} < \mathcal{Q}$. Es folgt das $\overline{\mathcal{B}}$ eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung ist mit $\overline{\mathcal{B}} < \overline{\mathcal{Q}} < \mathcal{P}$. Insbesondere wird ein $C \in \overline{\mathcal{B}}$ nur von endlich vielen Elementen von $\mathcal{A}$ geschnitten.

·) Für eine Menge $A \in \mathcal{A}$ definieren wir nun

$$A' := X \setminus \bigcup \Big\{C \in \overline{\mathcal{B}} : C \cap A = \emptyset\Big\}, \mathcal{A}' := \{A' : A \in \mathcal{A}\}\,. \tag{3.1}$$

Es gilt $A \subseteq A'$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also $\mathcal{A} < \mathcal{A}'$. Weiters gilt für ein $C \in \overline{\mathcal{B}}$ das $C \cap A \neq \emptyset$ genau dann wenn $C \cap A' \neq \emptyset$, denn : Einerseits ist $C \cap A' \supseteq C \cap A$ also $C \cap A \neq \emptyset$ impliziert $C \cap A' \neq \emptyset$. Andererseits sei $C \cap A = \emptyset$, dann kommt C in der Vereinigung in (3.1) vor und es folgt $C \cap A' = \emptyset$. Es folgt insbesondere das jedes Element $C \in \overline{\mathcal{B}}$ nur von endlich vielen der A' geschnitten wird. Da $\overline{\mathcal{B}}$ lokal endlich ist und aus abgeschlossenen Mengen besteht ist die Vereinigung in (3.1) ebenfalls abgeschlossen, also ist A' offen. Sei $x \in X$ und $W \in \mathcal{U}(x)$ die nur endlich viele der Elemente von $\overline{\mathcal{B}}$ schneidet. Da $\overline{\mathcal{B}}$ Überdeckung ist folgt

$$W \subseteq C_1 \cup \ldots \cup C_n$$

für gewisse, endlich viele, $C_1 \in \overline{\mathcal{B}}$. Ist $A' \in \mathcal{A}'$ mit $A' \cap W \neq \emptyset$ so muß also $A' \cap C_i \neq \emptyset$ für ein $i \in \{1,\ldots,n\}$. Da es für jedes feste i nur endlich viele A' mit $A' \cap C_i \neq \emptyset$ gibt, existieren insgesamt nur endlich viele A' mit $A' \cap W \neq \emptyset$. Wir schließen daß $\mathcal{A}'$ eine offene lokal endliche Überdeckung ist.

·) Da $\mathcal{A} < \mathcal{U}$ ist können wir zu jedem $A \in \mathcal{A}$ eine Menge $U(A) \in \mathcal{U}$ wählen, sodaß $A \subseteq U(A)$. Betrachte

$$\mathcal{V} := \{A' \cap U(A) : A \in \mathcal{A}\}\,.$$

Es gilt $\mathcal{A} < \mathcal{V}$ insbesondere ist $\mathcal{V}$ Überdeckung. Weiters ist $\mathcal{V}$ offen und es gilt $\mathcal{V} < \mathcal{A}'$, also ist $\mathcal{V}$ lokal endlich. Schließlich gilt $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

□

3.2.8 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf und regulär. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$. Wegen Lemma 3.1.4 gibt es eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{U}_1$. Es ist also

$$\mathcal{A} < \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$$

und daher $\mathcal{A} < \mathcal{U}$. Proposition 3.2.7 zeigt das X parakompakt ist. □

3.2.9 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ regulär. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung hat.*

Beweis. Wieder ist die Notwendigkeit der gegebenen Bedingung klar. Sei also die Bedingung erfüllt und sei eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben. Sei $\mathcal{V}$ eine σ-lokal endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$$

mit lokal endlichen Familien $\mathcal{V}_i$.

Betrachte die Familie $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ wobei

$$V_i := \bigcup \left\{ V : V \in \mathcal{V}_i \right\}.$$

Dann ist $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Daher existiert (Lemma 3.1.4) eine lokal endliche Überdeckung $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ mit $A_i \subseteq V_i$. Setze

$$\mathcal{W} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ A_i \cap V : V \in \mathcal{V}_i \right\}.$$

Wegen

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{V \in \mathcal{V}_i} A_i \cap V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{A_i \cap V_i}_{=A_i} = X .$$

ist $\mathcal{W}$ eine Überdeckung. Wegen $A_i \cap V \subseteq V \in \mathcal{V}_i$ gilt

$$\mathcal{W} < \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i = \mathcal{V} < \mathcal{U} .$$

Sei $x \in X$, dann existiert eine $W \in \mathcal{U}(x)$ sodaß für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt $W \cap A_i \neq \emptyset$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele $V \in \mathcal{V}_i$ mit $W \cap V \neq \emptyset$. Insgesamt gibt es also nur endlich viele Mengen $A_i \cap V$ ($V \in \mathcal{V}_i$ mit dem gleichen i) sodaß $(A_i \cap V) \cap W \neq \emptyset$. D.h. $\mathcal{W}$ ist lokal endlich.

Wir schließen mittels Proposition 3.2.7 daß $(X, \mathcal{T})$ parakompakt ist. □

3.3 Das Coincidence-Theorem von Stone

3.3.1 Satz (Stone). *Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ ist genau dann T_2 und parakompakt wenn er fully normal ist.*

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Zunächst:
Beweis. (fully normal $\Rightarrow T_2$, parakompakt): Nach Lemma 3.2.5 ist $(X,\mathcal{T})$ normal und wegen der Resultate von Kapitel II daher auch T_2.
$\cdot$) Sei eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X gegeben. Wir schreiben

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$$

mit einer wohlgeordneten Indexmenge $(I,\leq)$. Da $(X,\mathcal{T})$ fully normal ist, können wir induktiv offene Überdeckungen $\mathcal{U}_i, i \in \mathbb{N}$, konstruieren mit

$$\mathcal{U} > \mathcal{U}_1^* > \mathcal{U}_1^\triangle > \mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2^\triangle > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3^* > \dots$$

$\cdot$) Definiere die folgenden Mengen ($\alpha \in I$):

$$V_\alpha^1 := X \setminus S(X \setminus U_\alpha, \mathcal{U}_1)\,,$$

$$V_\alpha^n := S(V_\alpha^{n-1}, \mathcal{U}_n),\ n = 2,3\dots$$

Wir zeigen

(*i*) $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha^1 = X$

(*ii*) $V_\alpha^n, n = 2,3,\dots,$ sind offen. Ist $x \notin U_\alpha$, so folgt

$$S(x,\mathcal{U}_n) \cap V_\alpha^n = \emptyset,\ n = 1,2,3,\dots \tag{3.2}$$

Insbesondere ist $V_\alpha^n \subseteq U_\alpha$.

ad(i):Sei $x \in X$ gegeben. Da $\mathcal{U}_1^\triangle < \mathcal{U}$ gibt es ein $\alpha \in I$ mit

$$S(x,\mathcal{U}_1) \subseteq U_\alpha\,.$$

Angenommen $x \notin V_\alpha^1$, d.h. $x \in S(X \setminus U_\alpha, \mathcal{U}_1)$. Dann gibt es also $U^1 \in \mathcal{U}_1$ mit $U^1 \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \emptyset$ und $x \in U^1$. Es ist andererseits wegen $x \in U^1$ auch $U^1 \subseteq S(x,\mathcal{U}_1) \subseteq U_\alpha$, ein WS!.

ad(ii):Da die $\mathcal{U}_n$ offene Überdeckungen sind, sind alle $V_\alpha^n, n = 2,3,\dots,$ offen. Um (3.2) zu zeigen verwenden wir Induktion nach n. Sei also $x \notin U_\alpha$ gegeben.

Es ist $x \in X\setminus U_\alpha$ und daher $S(x,\mathcal{U}_1) \subseteq S(X\setminus U_\alpha,\mathcal{U}_1)$, d.h. $S(x,\mathcal{U}_1)\cap V_\alpha^1 = \emptyset$. Sei angenommen das $(n \geq 2)$

$$S(x,\mathcal{U}_n) \cap V_\alpha^n \neq \emptyset\,.$$

Nun ist $V_\alpha^n = S(V_\alpha^{n-1},\mathcal{U}_n)$, also existieren Mengen $U^n, \tilde{U}^n \in \mathcal{U}_n$ mit $x \in U^n$, $\tilde{U}^n \cap V_\alpha^{n-1} \neq \emptyset$, $U^n \cap \tilde{U}^n \neq \emptyset$. Es folgt

$$x \in S(U^n,\mathcal{U}_n),\ V_\alpha^{n-1} \cap S(U^n,\mathcal{U}_n) \neq \emptyset\,.$$

Nun ist $\mathcal{U}_n^* < \mathcal{U}_{n-1}$, also existiert eine Menge $U^{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}$ mit $S(U^n,\mathcal{U}_n) \subseteq U^{n-1}$. Damit ist auch $x \in U^{n-1}$ und wir erhalten

$$S(x,\mathcal{U}_{n-1}) \cap V_\alpha^{n-1} \supseteq U^{n-1} \cap V_\alpha^{n-1} \supseteq S(U^n,\mathcal{U}_n) \cap V_\alpha^{n-1} \neq \emptyset\,.$$

·) Als nächstes setze

$$V_\alpha := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_\alpha^n, \ \alpha \in I,$$

sodaß also $V_\alpha \subseteq U_\alpha, \alpha \in I$, und $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = X$. Definiere die Mengen

$$W_\alpha^n := V_\alpha^n \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{n+1}}, \ \alpha \in I, \ n = 2, 3, \ldots .$$

Alle W_α^n sind offen. Wir zeigen:

(i)

$$\bigcup_{\alpha \in I, n \geq 2} W_\alpha^n = X .$$

(ii)Sei $n \geq 2$ festgehalten. Ist $U^{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$, so gibt es höchstens ein $\alpha \in I$ mit $W_\alpha^n \cap U^{n+1} \neq \emptyset$.

ad(i):Sei $x \in X$ und setze $\alpha := \min\{\beta : x \in V_\beta\}$. Dann ist $x \in V_\alpha$ und daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in V_\alpha^n$. Da für jedes $\beta < \alpha$ sicher $x \notin V_\beta$ liegt gilt insbesondere $x \notin V_\beta^{n+2}$, $\beta < \alpha$. Wegen $V_\beta^{n+2} = S(V_\beta^{n+1}, \mathcal{U}_{n+2})$ gibt es also keine Menge $U^{n+2} \in \mathcal{U}_{n+2}$ mit $U^{n+2} \cap V_\beta^{n+1} \neq \emptyset$ und $x \in U^{n+2}$. Man hat daher

$$S(x, \mathcal{U}_{n+2}) \cap V_\beta^{n+1} = \emptyset .$$

Insgesamt ist also

$$S(x, \mathcal{U}_{n+2}) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{n+1} = \emptyset .$$

und da $S(x, \mathcal{U}_{n+2})$ eine offene Umgebung von x ist, folgt

$$x \notin \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{n+1}} .$$

Wir haben erhalten daß $x \in W_\alpha^n$.

ad(ii):Sei n und $U^{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ gegeben. Gibt es kein $\alpha \in I$ mit $W_\alpha^n \cap U^{n+1} \neq \emptyset$, so ist ($ii$) richtig. Anderenfalls sei

$$\beta := \min\{\alpha : W_\alpha^n \cap U^{n+1} \neq \emptyset\} .$$

Da $U^{n+1} \cap W_\beta^n \neq \emptyset$ folgt $U^{n+1} \cap V_\beta^n \neq \emptyset$, und daher

$$U^{n+1} \subseteq S(V_\beta^n, \mathcal{U}_{n+1}) = V_\beta^{n+1} .$$

Ist nun $\alpha > \beta$, so erhält man $U^{n+1} \cap W_\alpha^n = \emptyset$. D.h. W_β^n ist das einzige das mit U^{n+1} nichtleeren Schnitt hat.

·) Wir haben erhalten, daß

$$\mathcal{W} := \{W_\alpha^n : \alpha \in I, n = 2, 3, \ldots\}$$

eine offene Überdeckung von X ist. Wegen $W_\alpha^n \subseteq V_\alpha^n \subseteq V_\alpha \subseteq U_\alpha$ ist

$$\mathcal{W} < \mathcal{U}\,.$$

Wir schreiben $\mathcal{W} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{W}_n$ wobei

$$\mathcal{W}_n := \{W_\alpha^n : \alpha \in I\}\,.$$

Ist $x \in X$ gibt es eine Menge $U^{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ sodaß $x \in U^{n+1}$. Da U^{n+1} offen ist, ist U^{n+1} eine Umgebung von x. Nun scheidet höchstens ein W_α^n die Menge U^{n+1}, insbesondere ist $\mathcal{W}_n$ lokal endlich. Die offene Verfeinerung $\mathcal{W}$ von $\mathcal{U}$ ist also σ-lokal endlich.

Da X auch regulär ist, zeigt Proposition 3.2.9, daß X parakompakt ist.

□

Für den Beweis der Umkehrung benützen wir das folgende Lemma.

3.3.2 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ normal und $\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ eine lokal endliche offene Überdeckung. Dann gilt es eine offene Überdeckung $\mathcal{W} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ mit $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.*

Beweis. Die Indexmenge I werde wohlgeordnet, $(I, \leq)$, und bezeichne $i_0 := \min I$. Wir definieren induktiv offene Mengen V_α mit

$$X \setminus \Big[\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \cup \bigcup_{\gamma>\alpha} U_\gamma\Big] \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha\,. \tag{3.3}$$

·) Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ist, ist $X \setminus \bigcup_{\gamma>i_0} U_\gamma$ eine abgeschlossene Menge und enthalten in U_{i_0}. Da X normal ist existiert eine offene Menge V_{i_0} mit

$$X \setminus \bigcup_{\gamma>i_0} U_\gamma \subseteq V_{i_0} \subseteq \overline{V_{i_0}} \subseteq U_{i_0}\,.$$

·) Sei $\alpha \in I$ und für alle $\beta < \alpha$ sei V_β bereits konstruiert. Wir zeigen daß

$$\mathcal{U}' := \{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{U_\gamma : \gamma > \alpha\} \cup \{U_\alpha\}$$

eine Überdeckung ist. Sei also $x \in X$ gegeben. Ist $x \in U_\gamma$ mit einem $\gamma \geq \alpha$ sind wir fertig. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung ist muß x in einem U_β enthalten sein. Da $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, ist insbesondere x nur in endlich vielen U_β enthalten. Sei $\beta_0 := \max\{\beta : x \in U_\beta\}$. Dann ist $\beta_0 < \alpha$. Ist $x \in V_\beta$ für ein $\beta < \beta_0$, sind wir fertig. Anderenfalls gilt

$$x \in X \setminus \Big[\bigcup_{\beta<\beta_0} V_\beta \cup \bigcup_{\gamma>\beta_0} U_\gamma\Big]$$

und nach Induktionsvoraussetzung (3.3) $x \in V_{\beta_0}$.

·) Es ist $X \setminus (\bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{U_\gamma : \gamma > \alpha\})$ eine abgeschlossene Menge und enthalten in U_α. Also existiert eine offene Menge V_α die (3.3) erfüllt. Wir zeigen daß $\mathcal{W} := \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ eine Überdeckung ist. Sei $x \in X$ und sei $\beta_0 := \max\{\alpha : x \in U_\alpha\}$. Dann gilt also $x \notin \bigcup_{\gamma>\beta_0} U_\gamma$. Ist $x \in V_\beta$ für ein $\beta < \beta_0$ sind wir fertig. Anderenfalls gilt wegen (3.3) $x \in V_{\beta_0}$.

□

Beweis. *(T_2, parakompakt $\Rightarrow$ fully normal)*
·) Wir zeigen daß $(X,\mathcal{T})$ regulär ist. Wegen T_2 gilt auch T_1. Sei eine abgeschlossene Menge F und $x \notin F$ gegeben. Zu jedem Punkt $y \in F$ existieren offene Umgebungen $V(y) \in \mathcal{U}(y)$ und $U_y \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_y \cap V(y) = \emptyset$. Insbesondere ist also $x \notin \overline{V(y)}$. Betrachte die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} := \{X \setminus F, V(y) : y \in F\},$$

und wähle eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$.

Sei $W := S(F,\mathcal{V})$, dann ist W offen und $F \subseteq W$. Ist $V \in \mathcal{V}$ mit $V \cap F \neq \emptyset$, so muß wegen $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ ein $y \in F$ existieren mit $V \subseteq V(y)$. Für solche V gilt also $\overline{V} \subseteq \overline{V(y)}$ und damit $x \notin \overline{V}$. Da $\mathcal{V}$ lokal endlich ist folgt

$$x \notin \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ V \cap F \neq \emptyset}} \overline{V} = \overline{\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ V \cap F \neq \emptyset}} V} = \overline{S(F,\mathcal{V})}.$$

Also ist $X \setminus \overline{S(F,\mathcal{V})}$ eine offene Umgebung von x.

·) Wir zeigen daß $(X,\mathcal{T})$ normal ist. Seien dazu F,G disjunkte abgeschlossene Mengen. Zu jedem Punkt $y \in F$ gibt es eine offene Umgebung $V(y) \in \mathcal{U}(y)$ mit $\overline{V(y)} \cap G = \emptyset$ denn X ist regulär. Betrachte die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} := \{X \setminus F, V(y) : y \in F\},$$

und wähle eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V}$. Setze wieder

$$W = S(F,\mathcal{V}),$$

dann ist W offen und $F \subseteq W$. Ist $V \in \mathcal{V}$ mit $F \cap V \neq \emptyset$, so gibt es ein $y \in F$ mit $V \subseteq V(y)$ und daher ist $\overline{V} \subseteq \overline{V(y)}$ und also $\overline{V} \cap G = \emptyset$. Es folgt wieder, da $\mathcal{V}$ lokal endlich ist,

$$\overline{S(F,\mathcal{V})} = \overline{\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ V \cap F \neq \emptyset}} V} = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ V \cap F \neq \emptyset}} \overline{V} \subseteq X \setminus G,$$

d.h. $X \setminus \overline{S(F,\mathcal{V})} \supseteq G$.

·) Wir zeigen, daß $(X,\mathcal{T})$ fully normal ist. Dazu sei eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben. Da $(X,\mathcal{T})$ parakompakt ist, gibt es eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Schreibe

$$\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in I\},$$

dann gibt es nach Lemma 3.3.2 eine offene Überdeckung

$$\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in I\}$$

mit $\overline{W_\alpha} \subseteq V_\alpha, \alpha \in I$. Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ definiere

$$N(J) := \Big[\bigcap_{\alpha \in J} V_\alpha\Big] \cap \Big[\bigcap_{\alpha \in I \setminus J} \overline{W_\alpha}^c\Big].$$

Wir zeigen daß $N(J)$ offen ist: Da $\mathcal{V}$ lokal endlich ist, hat auch $\overline{\mathcal{W}}$ diese Eigenschaft. Daher ist

$$\bigcup_{\alpha \in I \setminus J} \overline{W_\alpha}$$

abgeschlossen und damit

$$\bigcap_{\alpha \in I \setminus J} \overline{W_\alpha}^c = \Big[\bigcup_{\alpha \in I \setminus J} \overline{W_\alpha} \Big]^c$$

offen. Da $\mathcal{V}$ lokal endlich ist, ist $\bigcap_{\alpha \in J} V_\alpha = \emptyset$ falls J unendlich ist. In diesem Fall ist also $N(J) = \emptyset$ und daher offen. Ist J endlich, so ist $\bigcap_{\alpha \in J} V_\alpha$, und damit auch $N(J)$, offen denn jedes V_α ist offen.

Sei nun $x \in X$ und setze $J := \{\alpha \in I : x \in \overline{W_\alpha}$. Dann ist $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{W_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$. Da für $\alpha \in I \setminus J$ gilt $x \notin \overline{W_\alpha}$, folgt auch $x \in \bigcap_{\alpha \in I \setminus J} \overline{W_\alpha}^c$ und daher $x \in N(J)$. Wir sehen also daß

$$\mathcal{N} := \{N(J) : J \subseteq I\}$$

eine offene Überdeckung ist.

Wir zeigen $\mathcal{N}^\triangle < \mathcal{U}$ und damit wegen Lemma 3.2.4 daß $(X, \mathcal{T})$ fully normal ist. Sei $x \in X$ und wähle $\alpha_0 \in I$ mit $x \in W_{\alpha_0}$. Sei $x \in N(J)$, dann muß $\alpha_0 \in J$ gelten. Damit folgt $N(J) \subseteq V_{\alpha_0}$ und insgesamt

$$S(x, \mathcal{N}) \subseteq V_{\alpha_0} .$$

□

3.3.3 Korollar. *Sei X kompakt und T_2. Dann ist X normal.*

Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Stone den Einbettungssatz von Urysohn. Davor noch ein Lemma:

3.3.4 Lemma. *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle das 2-te Abzählbarkeitsaxiom, dann ist $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf. Ist $\mathcal{T}$ die von einer Metrik (X, d) induzierte Topologie, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis.
·) Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$. Sei weiteres eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ gegeben. Zu $x \in X$ wähle ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist gibt es ein $B(x) \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in B(x) \subseteq U .$$

Es ist $\{B(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung und diese ist abzählbar denn es gibt nur abzählbar viele verschiedene Mengen in $\mathcal{B}$. Schreibe

$$\{B(x) : x \in X\} = \{B(x_1), B(x_2), \dots\} .$$

Wegen der Wahl von $B(x)$ existiert stets ein $U_n \in \mathcal{U}$ mit $B(x_n) \subseteq U_n$. Dann ist $\{U_1, U_2, \dots\}$ eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

·) Sei (X,d) metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die von d induzierte Topologie, vgl. Beispiel 1.1.3. Sei $(X,\mathcal{T})$ Lindelöf. Es ist $(n \in \mathbb{N})$

$$\mathcal{U}_n := \left\{ U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X \right\}$$

eine offene Überdeckung von X, also gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung

$$\left\{ U_{\frac{1}{n}}(x_{n,i}) : i = 1, 2 \ldots \right\}$$

Wir zeigen das die Menge $D := \{x_{n,i} : n, i = 1, 2, 3, \ldots\}$ dicht ist: Sei $U_\epsilon(x)$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$ und $x_{n,i}$ sodaß $x \in U_{\frac{1}{n}}(x_{n,i})$. Dann ist also $d(x, x_{n,i}) < \frac{1}{n} < \epsilon$ und daher $x_{n,i} \in U_\epsilon(x)$. Wegen Beispiel 1.8.4 erfüllt $(X,\mathcal{T})$ das 2-te Abzählbarkeitsaxiom.

□

3.3.5 Satz (Einbettungssatz von Urysohn). *Der topologische Raum $(X,\mathcal{T})$ ist regulär und erfüllt das 2-te Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn er homöomorph zu einem Teilraum von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist.*

Beweis.
·) Sei $X \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$, dann ist X nach dem Einbettungssatz von Tychonoff vollständig regulär. Da sich das 2-te Abzählbarkeitsaxiom auf abzählbare Produkte und auf die Teilräume vererbt, ist es auch für X erfüllt.

·) Sei also $(X,\mathcal{T})$ regulär und erfülle das 2-te Abzählbarkeitsaxiom. Nach Lemma 3.3.4 ist X Lindelöf und wegen Korollar 3.2.8 parakompakt. Der Satz von Stone zeigt das X fully normal ist und daher insbesondere normal.

Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Betrachte die Menge $\mathcal{P} := \{(U,V) : U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subseteq V\}$. Da mit $\mathcal{B}$ auch $\mathcal{P}$ abzählbar ist können wir $\mathcal{P}$ schreiben als $\mathcal{P} = \{P_i : i = 1, 2, \ldots\}$, $P_i = (U_i, V_i)$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $f_i : X \to [0,1]$ mit

$$f_i(U_i) = 0, f_i(V_i^c) = 1\,.$$

Betrachte die Abbildung

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \to & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & (f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \frac{1}{3}f_3(x), \ldots) \end{array} \right.$$

Da $[0,1]^{\mathbb{N}}$ die Produkttopologie trägt, ist f stetig.

Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Wähle eine offene Umgebung V von x die y nicht enthält, oBdA sei $V \in \mathcal{B}$. Da X regulär ist gibt es eine offene Umgebung U von x mit $\overline{U} \subseteq V$, oBdA sei $U \in \mathcal{B}$. Also ist $(U,V) = P_i$ für ein i und wir erhalten $f_i(x) \in f_i(U) = 0$, $f_i(y) \in f_i(V^c) = 1$. Es folgt daß f injektiv ist.

Sei nun $x \in X$ und $W \in \mathcal{U}(x)$ offen gegeben. Wie oben wähle $U, V \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V \subseteq W\,.$$

und sei $(U,V) = P_i$. Dann gilt

$$\frac{1}{i} f_i(x) = 0, \frac{1}{i} f_i(y) = \frac{1}{i}, y \in W^c\,,$$

und wir schließen

$$d\Big(\pi_i(f(x)), \pi_i(f(y))\Big) \geq \frac{1}{i}, y \in W^c .$$

D.h. es ist

$$f^{-1}\Big[\pi_i^{-1}\Big(U_{\frac{1}{i}}(\pi_i f(x))\Big) \cap f(X)\Big] \subseteq W ,$$

also ist f^{-1} stetig.

□

3.4 Partitionen der Eins

Sei $f : X \to \mathbb{R}$. Die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

heißt der *Träger* von f.

3.4.1 Lemma. *Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie stetiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Ist $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ eine lokal endliche Familie, so ist die Funktion*

$$f := \sum_{i \in I} f_i : X \to \mathbb{R}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ sodaß nur endlich viele der Mengen $\operatorname{supp} f_i, i \in I$, mit U nichtleeren Schnitt haben, seien diese $\operatorname{supp} f_{i_1}, \dots, \operatorname{supp} f_{i_n}$. Dann gilt für jedes $y \in U$

$$\sum_{i \in I} f_i(y) = \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(y) ,$$

also ist f für alle $y \in U$ wohldefiniert, insbesondere bei x selbst, und ist stetig im Punkt x.

□

3.4.2 Definition. Eine Familie$(f_i)_{i \in I}$ stetiger Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ heißt *Partition der Eins*, wenn $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ lokal endlich ist, $f_i(x) \geq 0, x \in X$, und

$$\sum_{i \in I} f_i \equiv 1$$

gilt.

3.4.3 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ normal und sei $(A_i)_{i \in I}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von X. Dann gilt es eine Partition der Eins $(g_i)_{i \in I}$ mit $\operatorname{supp} g_i \subseteq A_i$.*

Beweis. Wähle eine offene Überdeckung $(B_i)_{i\in I}$ mit $\overline{B_i} \subseteq A_i$. Dann ist auch $(B_i)_{i\in I}$ lokal endlich. Wähle C_i offen mit $\overline{B_i} \subseteq C_i \subseteq \overline{C_i} \subseteq A_i$, und stetige Funktionen $f_i : X \to [0,1]$ mit $f(\overline{B_i}) = \{1\}, f(C_i^c) = \{0\}$. Dann ist also supp $f_i \subseteq A_i$, also ist $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ lokal endlich. Ist $x \in X$, so existiert ein i mit $x \in B_i$. Für dieses ist $f_i(x) = 1$. Also ist die Funktion $\sum_{i\in I} f_i$ wohldefiniert, stetig, und stets $\neq 0$. Daher sind

$$g_i(x) := \frac{f_i(x)}{\sum_{i\in I} f_i(x)} \quad : X \to \mathbb{R}$$

stetig. Offenbar gilt $\sum_{i\in I} g_i \equiv 1$. Schließlich ist supp $g_i = \operatorname{supp} f_i \subseteq A_i$. □

3.4.4 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ parakompakter T_2-Raum und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine Partition der Eins, $(f_i)_{i\in I}$, sodaß zu jedem $i \in I$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit* supp $f_i \subseteq U$.

Beweis. Wähle eine lokal endliche offene Verfeinerung $(V_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{U}$. Da nach dem Satz von Stone $(X, \mathcal{T})$ fully normal und daher normal ist, gibt es nach dem obigen Satz eine Partition der Eins $(f_i)_{i\in I}$ mit supp $f_i \subseteq V_i$. □

3.4.5 Bemerkung. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft stetiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Will man beweisen das $\mathcal{E}$ global gilt so genügt es also bei parakompaktem X lokale Versionen von $\mathcal{E}$ zu zeigen, denn dann kann man $\mathcal{E}$ mit einer Partition der Eins "liften".

Kapitel 4

Kompakte Räume

4.1 Eigenschaften kompakter Räume

4.1.1 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist äquivalent:*

(K_1) *$(X, \mathcal{T})$ ist kompakt.*

(K_2) *Jede Familie abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.*

(K_2') *Ist $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Mengen und ist $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$, so gibt es endlich viele $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.*

(K_3) *Jeder Filter auf X hat einen Häufungspunkt.*

(K_4) *Jeder Ultrafilter auf X ist konvergent.*

Beweis. Zuerst bemerken wir das (K_2) und (K_2') äquivalent sind, denn sie sind nur indirekte Formulierungen voneinander. In den folgenden Schritten zeigen wir $(K_1) \Rightarrow (K_2')$, $(K_2) \Rightarrow (K_3) \Rightarrow (K_4) \Rightarrow (K_1)$.
·) Sei $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Mengen und gelte $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} = \emptyset$. Dann folgt

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = X$$

und F^c offen. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung, $F_1^c \cup \ldots \cup F_n^c = X$. Wir erhalten $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.

·) Sei $\mathcal{F}$ Filter auf X und betrachte die Familie $\overline{\mathcal{F}} := \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Da $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, hat auch $\overline{\mathcal{F}}$ diese. Also folgt $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ und dieser Durchschnitt ist gerade die Menge aller Häufungspunkte von $\mathcal{F}$.

·) Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter. Dann gibt es einen Häufungspunkt von $\mathcal{F}$. Wegen Lemma 1.4.5 gilt $\mathcal{F} \to x$.

·) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Dann hat also die Menge

$$\mathcal{F}' := \{O^c : O \in \mathcal{U}\}$$

die endliche Durchschnittseigenschaft. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$ (vgl. Lemma 1.4.3). Es folgt $\mathcal{F} \to x$ für ein $x \in X$. Insbesondere ist x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ und daher

$$x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{O \in \mathcal{U}} \overline{O^c} = \bigcap_{O \in \mathcal{U}} O^c$$

Ein WS!, denn $\mathcal{U}$ ist offene Überdeckung.

□

4.1.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn $(A, \mathcal{T}|_A)$ kompakt ist. Sie heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{A} \subseteq X$ kompakt ist.

4.1.3 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subseteq X$, sowie $A_1, \dots, A_m \subseteq X$. Es gilt:*

- *(i) A ist kompakt genau dann wenn jede Familie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von in $(X, \mathcal{T})$ offenen Mengen die A überdeckt, d.h. $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \supseteq A$, schon eine endliche Teilüberdeckung von A enthält, d.h. es gibt $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \cup \dots \cup U_m \supseteq A$.*
- *(ii) Sei A kompakt, $B \subseteq A$ abgeschlossen in $(A, \mathcal{T}|_A)$. Dann ist $B \subseteq X$ kompakt.*
- *(iii) Sind $A_1, \dots, A_m$ kompakt, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_m$.*

Sei zusätzlich vorausgesetzt das $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist. Dann gilt:

- *(iv) Ist A kompakt, so ist A abgeschlossen.*
- *(v) A ist relativ kompakt genau dann, wenn es eine kompakte Menge $B \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq B$.*

Beweis.
`ad`(i): Sei A kompakt und sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung aus in X offenen Mengen. Dann ist

$$\mathcal{V} := \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$$

eine offene Überdeckung von $(A, \mathcal{T}|_A)$. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$. Also ist $U_i \in \mathcal{U}$ und $U_1 \cup \dots \cup U_n \supseteq A$. Umgekehrt habe A die angegebene Eigenschaft und sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von $(A, \mathcal{T}|_A)$. Zu $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U_V \in \mathcal{T}$ mit $U_V \cap A = V$. Also ist $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$ eine Familie offener Mengen in X die A überdeckt. Es gibt also $U_{V_1}, \dots, U_{V_n}$ mit $U_{V_1} \cup \dots \cup U_{V_n} \supseteq A$. Damit ist auch

$$V_1 \cup \dots \cup V_n = (U_{V_1} \cap A) \cup \dots \cup (U_{V_n} \cap A) = (U_{V_1} \cup \dots \cup U_{V_n}) \cap A = A\,.$$

`ad`(ii): Es ist $A \backslash B$ offen in $(A, \mathcal{T}|_A)$, also existiert $O \in \mathcal{T}$ mit $O \cap A = A \backslash B$. Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von B aus in X offenen Mengen, dann überdeckt $\mathcal{U} \cup \{O\}$ ganz A. Daher gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \cup \dots \cup U_n \cup O \supseteq A$. Es folgt

$$U_1 \cup \dots \cup U_n = U_1 \cup \dots \cup U_n \cup \underbrace{(O \cap B)}_{=\emptyset} \supseteq$$

$$\supseteq (U_1 \cap B) \cup \dots \cup (U_n \cap B) \cup (O \cap B) = (U_1 \cup \dots \cup U_n \cup O) \cap B \supseteq B\,.$$

`ad`(iii): Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ aus in X offenen Mengen. Dann überdeckt $\mathcal{U}$ jedes A_i, also existieren $U_k^i, k = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, m$, mit

$$U_1^i \cup \ldots \cup U_{n_i}^i \supseteq A_i\,,$$

und es folgt

$$\bigcup_{k,i} U_k^i \supseteq A_1 \cup \ldots \cup A_m\,.$$

`ad`(iv): Sei $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff und sei $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen. Wähle $x \in \overline{A} \setminus A$. Für jedes $y \in A$ gibt es $U_y \in \mathfrak{U}(y), V_y \in \mathfrak{U}(x)$, offen mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{U} := \{U_y : y \in A\}$ eine Überdeckung von A. Für je endlich viele $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ gilt

$$\left[U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}\right] \cap \left[V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}\right] = \emptyset\,.$$

Wegen $x \in \overline{A}$ und $V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n} \in \mathfrak{U}(x)$ ist $[V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}] \cap A \neq \emptyset$, so folgt

$$U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n} \not\supseteq A\,.$$

Also ist A nicht kompakt.

`ad`(v): Ist A relativ kompakt, so ist also $\overline{A}$ kompakt und klarerweise gilt $A \subseteq \overline{A}$. Sei umgekehrt $A \subseteq B$ mit B kompakt. Dann ist wegen (iv) die Menge B auch abgeschlossen, also folgt $\overline{A} \subseteq B$ und (ii) zeigt das $\overline{A}$ kompakt ist.

□

4.1.4 Lemma. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig. Ist $A \subseteq X$ kompakt, so ist auch $f(A) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ eine Überdeckung von $f(A)$, so ist $f^{-1}(\mathcal{V})$ eine Überdeckung von A. Da f stetig ist, gilt $f^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{T}$. Es gibt also $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ sodaß

$$f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n) \supseteq A\,.$$

Daher ist auch $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq f(A)$.

□

4.1.5 Korollar. *Es gilt:*

(i) Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und $(Y, \mathcal{V})$ Hausdorff. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ bijektiv und stetig. Dann ist f ein Homöomorphismus.

(ii) Sei X eine Menge. In der Menge aller T_2-Topologien auf X geordnet mit $\prec$ sind die kompakten Topologien minimale Elemente. Insbesondere sind je zwei verschiedene kompakte T_2-Topologien auf X nicht vergleichbar.

Beweis.
`ad`(i): Wir müssen zeigen das f^{-1} stetig ist. Wir zeigen das das Urbild unter f^{-1} einer in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossenen Menge in $(Y, \mathcal{V})$ abgeschlossen ist. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt und daher ist nach Lemma 4.1.4 auch

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subseteq Y$$

kompakt. Nach Lemma 4.1.3,(i), ist $(f^{-1})^{-1}(A)$ auch abgeschlossen.

`ad`(ii): Seien $\mathcal{T}, \mathcal{V}$ Topologien auf X sodaß $\mathcal{T}$ kompakt, $\mathcal{V}$ Hausdorff, $\mathcal{V} \prec \mathcal{T}$. Dann ist also $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig, und (i) zeigt das id_X sogar ein Homöomorphismus ist, d.h. $\mathcal{T} = \mathcal{V}$.

□

4.1.6 Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ eine Familie kompakter topologischer Räume. Dann ist auch $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ kompakt.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\pi_i : X = \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Weiters sei ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X gegeben.
·) Wir zeigen das für jedes $i \in I$, $\pi_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_i ist. Zunächst ist klarerweise $\emptyset \notin \pi_i(\mathcal{F})$. Sei $B \supseteq \pi_i(F)$, dann folgt $\pi_i^{-1}(B) \supseteq F$ und daher $\pi_i^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Also ist auch $B = \pi_i(\pi_i^{-1}(B)) \in \pi_i(\mathcal{F})$. Sei $B_1 = \pi_i(F_1), B_2 = \pi_i(F_2)$ für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Dann folgt $B_1 \cap \mathcal{B}_2 \supseteq \pi_i(F_1 \cap F_2) \in \pi_i(\mathcal{F})$. Also ist $\pi_i(\mathcal{F})$ ein Filter.

Sei $B \subseteq X_i$ mit $B \cap \pi_i(F) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann folgt $\pi_i^{-1}(B) \cap F \neq \emptyset$, $F \in \mathcal{F}$, also mit Lemma 1.4.3,(ii), das $\pi_i^{-1}(B) \subseteq \mathcal{F}$. Daher ist $B \in \mathcal{F}$ und daher $\mathcal{F}$ Ultrafilter.

·) Da X_i kompakt ist gilt $\mathcal{F}_i \to x_i$ für ein gewisses $x_i \in X_i$. Wir zeigen das $\mathcal{F} \to (x_i)_{i\in I} =: x$. Sei U eine Menge der Gestalt

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \tag{4.1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I$, $U_{i_j} \in \mathfrak{U}(x_{i_j})$ in $(X_{i_j}, \mathcal{T}_{i_j})$. Da $\mathcal{F}_{i_j} \to x_{i_j}$ folgt $U_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$, also gibt es $B_j \in \mathcal{F}$ mit $\pi_{i_j}(B_j) = U_{i_j}$. Es folgt $B_j \subseteq \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ und daher

$$U \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{F},$$

also $U \in \mathcal{F}$. Da die Mengen der Gestalt (4.1) eine Umgebungsbasis von x in der Topologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden folgt $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \to x$.

□

4.2 Kompaktifizierung

4.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$ ist ein Paar $(l, (Y, \mathcal{V}))$ wobei $(Y, \mathcal{V})$ ein kompakter T_2-Raum ist, $l : X \to Y$ ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf $(l(X), \mathcal{V}|_{l(X)})$, und $l(X)$ dicht in $(Y, \mathcal{V})$ ist.

Wir können also stets eine Kompaktifizierung auffassen als einen kompakten T_2-Raum der $(X, \mathcal{T})$ als dichten Teilraum enthält.

4.2.2 Satz. *Ein topologischer Raum besitzt genau dann eine Kompaktifizierung wenn er vollständig regulär ist.*

Beweis. Sei $(Y, \mathcal{V})$ kompakter T_2-Raum. Nach dem Satz von Stone ist $(Y, \mathcal{V})$ fully normal und daher vollständig regulär. Damit ist auch jeder Teilraum von $(Y, \mathcal{V})$ vollständig regulär. Hat also $(X, \mathcal{T})$ eine Kompaktifizierung, so muß $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär sein.

Sei umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Nach dem Einbettungssatz von Tychonoff ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum des Produktes $[0,1]^I$, $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} X' \subseteq [0,1]^I$. Nach dem Produktsatz von Tychonoff (Satz 4.1.6) ist $[0,1]^I$ kompakt, also ist auch $\overline{X'} \subseteq [0,1]^I$ kompakt. Damit ist $(\iota, \overline{X'})$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$.

□

4.2.3 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Dann existiert eine Kompaktifizierung $(\iota, \beta(X))$ mit der Eigenschaft*

- **(SČ)** *Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion, so existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\beta(X)$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{R} \\ \beta(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Sind $(\iota, \beta(X)), (\iota', \beta'(X))$ zwei Kompaktifizierungen die die Eigenschaft (SČ) haben, dann sind $\beta(X)$ und $\beta'(X)$ homöomorph vermöge eines Homöomorphismus φ der X punkteweise festläßt:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota'"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ \beta'(X) \arrow[rr, "\varphi"'] & & \beta(X) \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Die, durch die Eigenschaft (SČ) in obigen Sinne also eindeutig bestimmte Kompaktifizierung $(\iota, \beta(X))$ heißt Stone-Čech-Kompaktifizierung.

Beweis. Wir betrachten die im Beweis von Satz 4.2.2 angegebene Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \beta(X) \subseteq [0,1]^I$. Wir erinnern daran das die Menge I im Beweis des Einbettungssatzes von Tychonoff als $I = \{g : X \to [0,1] : g \text{ stetig }\}$ gewählt wurde, und $\iota(x) = (g(x))_{g \in I}$ war.
·) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Dann gilt für geeignete positive Zahlen ϵ, k das $0 \leq \epsilon \cdot (f(x) + k) \leq 1$, $x \in X$. Also ist $g_0 := \epsilon \cdot (f + k) \in I$. Die Projektion $\pi_{g_0} : [0,1]^I \to [0,1]$ auf die g_0-te Komponente ist stetig und wir haben

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\iota"'] & {[0,1]} \\ {[0,1]^I} \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

denn für $x \in X$ gilt

$$(\pi_{g_0} \circ \iota)(x) = \pi_{g_0}((g(x))_{g \in I}) = g_0(x) .$$

Insbesondere ist $\pi_{g_0}|_{\beta(X)}$ eine stetige Fortsetzung von g_0 auf $\beta(X)$. Daher ist

$$\tilde{f} := \frac{1}{\epsilon}\Big(\pi_{g_0}|_{\beta(X)}\Big) - k$$

eine stetige Fortsetzung von f auf $\beta(X)$.

·) Sei $(l', \beta'(X))$ eine weitere Kompaktifizierung mit der Eigenschaft (SČ).

Ist $g : X \to [0,1]$ stetig, d.h. $g \in I$, so existiert also eine stetige Fortsetzung $\tilde{g}$ auf $\beta'(X)$, d.h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l'"'] & {[0,1]} \\ \beta'(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Wir definieren

$$\varphi : \begin{cases} \beta'(X) & \longrightarrow & [0,1]^I \\ y & \mapsto & (\tilde{g}(y))_{g\in I} \end{cases}$$

Da für jedes $g \in I$ die Abbildung $\pi_g \circ \varphi = \tilde{g}$ stetig ist, folgt das φ stetig ist. Weiters gilt für $x \in X$

$$(\varphi \circ l')(x) = (\tilde{g}(l(x)))_{g\in I} = (g(x)_{g\in I}) = l(x)\,,$$

d.h. es gilt (4.2). Wir erhalten

$$\varphi(\beta'(X)) = \varphi\big(\overline{l'(X)}\big) \subseteq \overline{\varphi(l'(X))} = \overline{l(X)} = \beta(X)\,.$$

Andererseits ist $\beta'(X)$ und daher auch $\varphi(\beta'(X))$ kompakt und daher abgeschlossen. Wegen

$$\varphi(\beta'(X)) = \varphi\big(\overline{l'(X)}\big) \supseteq \varphi(l'(X)) = l(X)$$

folgt daher

$$\varphi(\beta'(X)) \supseteq \overline{l(X)} = \beta(X)\,.$$

Insgesamt haben wir also $\varphi(\beta'(X)) = \beta(X)$.

Seien $y_0, y_1 \in \beta'(X)$, $y_0 \neq y_1$. Dann existiert eine stetige Funktion $\gamma : \beta'(X) \to [0,1]$ mit $\gamma(y_0) = 0, \gamma(y_1) = 1$. Sei g_0 so daß

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "l'"'] & {[0,1]} \\ l'(X) \arrow[ur, "\gamma|_{l'(X)}"'] & \end{tikzcd}$$

und sei weiters $\tilde{g}_0 : \beta'(X) \to [0,1]$ wie in (4.3). Wegen $\overline{l'(X)} = \beta'(X)$ und $g_0 \circ (l')^{-1} = \gamma|_{l'(X)}$ folgt $\gamma = \tilde{g}_0$. Daher ist

$$\pi_{g_0}(\varphi(y_0)) = \tilde{g}_0(y_0) = \gamma(y_0) = 0\,,$$

$$\pi_{g_0}(\varphi(y_1)) = \tilde{g}_0(y_1) = \gamma(y_1) = 1\,,$$

also muß insbesondere $\varphi(y_0) \neq \varphi(y_1)$ sein.

Wegen Korollar 4.1.5,(i), ist φ ein Homöomorphismus.

$\square$

4.2.4 Korollar. *Sei $(X,\mathcal{T})$ vollständig regulär und $(Y,\mathcal{V})$ kompakt T_2. Ist $f : X \to Y$ stetig, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\beta(X)$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] & Y \\ \beta(X) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Der Raum $(Y,\mathcal{V})$ ist vermöge $l' : Y \to [0,1]^{\mathcal{I}}$ wobei $\mathcal{I} := \{g : Y \to [0,1] : g \text{ stetig}\}, l'(y) := (g(y))_{g\in\mathcal{I}}$, ein Teilraum von $[0,1]^{\mathcal{I}}$. Wir haben für $g \in \mathcal{I}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] & Y \arrow[r, "l'"] & {[0,1]^{\mathcal{I}}} \arrow[r, "\pi_g"] & {[0,1]} \\ \beta(X) \arrow[urrr, dotted, "\tilde{f}_g"'] & & & \end{tikzcd}$$

Definiere $\hat{f} : \beta(X) \to [0,1]^{\mathcal{I}}$ durch $\hat{f}(a) := (\tilde{f}_g(a))_{g\in\mathcal{I}}$. Wegen $\pi_g \circ \hat{f} = \tilde{f}_g$ ist $\hat{f}$ stetig. Weiters gilt

$$\pi_g \circ \hat{f} \circ l = \tilde{f}_g \circ l = \pi_g \circ l' \circ f,\ g \in \mathcal{I},$$

also folgt $\hat{f} \circ l = l' \circ f$. Wir haben

$$\hat{f}(\beta(X)) = \hat{f}\big(\overline{l(X)}\big) \subseteq \overline{\hat{f}(l(X))} = \overline{l'(f(X))} \subseteq \overline{l'(Y)}\,.$$

Da Y kompakt ist, ist $\overline{l'(Y)} = l'(Y)$, also erhalten wir $\hat{f}(\beta(X)) \subseteq l'(Y)$. Setze schließlich $\tilde{f} := (l')^{-1} \circ \hat{f}$.

Wegen $\overline{l(X)} = \beta(X)$ ist eine Fortsetzung von f eindeutig. $\square$

4.2.5 Bemerkung. Die Eigenschaft von Korollar 4.2.4 charakterisiert $\beta(X)$. Denn sie impliziert insbesondere (SČ).

4.2.6 Korollar. *Sei $(l',(Y,\mathcal{V}))$ eine Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$. Dann existiert eine stetige surjektive Funktion $\psi : \beta(X) \to Y$ die X punktweise festläßt und $\beta(X) \setminus l(X)$ auf $Y \setminus l'(X)$ abbildet.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "l'"] & \\ \beta(X) \arrow[rr, dotted, "\psi"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung $l' : X \to Y$ ist stetig. Nach Korollar 4.2.4 existiert daher eine stetige Fortsetzung ψ. Es gilt

$$\psi(\beta(X)) = \psi\big(\overline{l(X)}\big) \supseteq \psi(l(X)) = l'(X)\,.$$

Da $\beta(X)$ kompakt ist, ist $\psi(\beta(X))$ kompakt und daher abgeschlossen, also folgt

$$\psi(\beta(X)) \supseteq \overline{l'(X)} = Y \, ,$$

d.h. ψ surjektiv.

Sei nun $a \in \beta(X) \setminus l(X)$. Dann ist wegen $\overline{l(X)} = \beta(X)$ stets $U \cap l(X) \neq \emptyset$, $U \in \mathfrak{U}(a)$. Also ist

$$\mathcal{F}' := \{U \cap l(X) : U \in \mathfrak{U}(a)\}$$

eine Filterbasis, und es gilt $\mathcal{F}' \to a$. Damit folgt $\psi(\mathcal{F}') \to \psi(a)$. Sei

$$\mathcal{F} := \{l^{-1}(U \cap l(X)) : U \in \mathfrak{U}(a)\} \, ,$$

dann ist $\mathcal{F}$ eine Filterbasis in X, und $\mathcal{F}$ ist nicht konvergent, denn wäre $\mathcal{F} \to x_0$, so wäre $\mathcal{F}' = l(\mathcal{F}) \to l(x_0)$, also $l(x_0) = a$, ein WS!. Es ist

$$\psi(\mathcal{F}') = \psi(l(\mathcal{F})) = l'(\mathcal{F}) \, .$$

Würde $l'(\mathcal{F})$ in Y gegen einen Punkt von $l'(X)$ konvergieren, $l'(\mathcal{F}) \to l'(x_0)$, so würde auch $l'(\mathcal{F}) \to l'(x_0)$ in $(l'(X), \mathcal{V}|_{l'(X)})$ gelten. Damit folgt aber durch Anwendung der stetigen Funktion $(l')^{-1}$ das $\mathcal{F} \to x_0$, ein WS!.

Nun ist $l'(\mathcal{F}) = \psi(\mathcal{F}') \to \psi(a)$, also gilt $\psi(a) \notin l'(X)$.

□

4.2.7 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär und $\beta(X)$ die Stone-Čech Kompaktifizierung von X. Ist $x \in \beta(X) \setminus X$, so hat $\mathfrak{U}(x)$ keine abzählbare Basis.*

Beweis. Angenommen $x \in \beta(X) \setminus X$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis. Da $(X, \mathcal{T})$ insbesondere regulär ist können wir eine Umgebungsbasis $\mathcal{W}(x) = \{U_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ wählen sodaß U_i offen ist und

$$U_1 \supseteq \overline{U_2} \supseteq U_2 \supseteq \overline{U_3} \supseteq \dots \tag{4.4}$$

$\cdot$) Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ und besteht $U \cap X$ aus nur endlich vielen Punkten $x_1, \dots, x_n$ so ist, da $(X, \mathcal{T})$ insbesondere T_1 ist, $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathfrak{U}(x)$ und daher auch $U \setminus \{x_1, \dots, x_n\} =: U' \in \mathfrak{U}(x)$. Nun ist $U' \cap X = \emptyset$, also $x \notin \overline{X}$. Ein WS! da X dicht in $\beta(X)$ liegt. Wir schließen das stets $|U_i \cap X| = \infty$ sein muß. Wir können also eine Folge $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ paarweise verschiedener Punkte von X wählen mit $a_i, b_i \in U_i \cap X, i = 1, 2, \dots$. Beachte das die Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sowie $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\beta(X)$ gegen x konvergieren.

$\cdot$) Für $i \in \mathbb{N}$ können wir eine in $(X, \mathcal{T})$ offene Umgebung $V_i \in \mathfrak{U}_X(b_i)$ wählen sodaß gilt

(i) $V_i \subseteq U_i \cap X$.

(ii) Es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $V_i \cap U_j = \emptyset$.

(iii) $V_i \cap \{a_k, b_l : k, l \in \mathbb{N}\} = b_i$.

Um dies zu sehen wähle zuerst $j \in \mathbb{N}$ sodaß $b_i \notin \overline{U_j}$. Das ist möglich da $\mathcal{W}(x)$ Umgebungsbasis ist, $b_i \neq x$, und (4.4) gilt. Setze $W := \overline{U_j}^c \cap X$, dann ist $W \in \mathcal{T}$ und $b_i \in W$, also $W \in \mathfrak{U}_X(b_i)$. Nun ist U_i offen in $\beta(X)$, also $U_i \cap X$ offen in X, und es gilt $b_i \in U_i$ also folgt $W' := U_i \cap X \in \mathfrak{U}_X(b_i)$. Weiters wähle

$W'' \in \mathfrak{U}_X(b_i)$ mit $a_1, \dots, a_{j-1} \notin W''$ und $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_{j-1} \notin W''$. Damit ist $V_i := W \cap W' \cap W'' \in \mathfrak{U}_X(b_i)$ und erfüllt (i)-(iii).

Die Familie $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist lokal endlich in X. Dann ist $y \in X$, so wähle $U \in \mathfrak{U}(y)$ und $j \in \mathbb{N}$ sodaß $U \cap U_j = \emptyset$. Für $i \geq j$ gilt $V_i \subseteq U_i \subseteq U_j$ und daher auch $U \cap V_i = \emptyset$ also insbesondere $(U \cap X) \cap V_i = \emptyset$.

$\cdot$) Da X vollständig regulär ist gibt es eine stetige Funktion $f_i : X \to [0,1]$ mit

$$f_i(b_i) = 1, f_i(X \setminus V_i) = \{0\}.$$

Setze

$$f := \sup\{f_i : i \in \mathbb{N}\} : X \to [0,1].$$

Ist $y_0 \in X$ so gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}_X(y_0)$ mit $U \cap V_i = \emptyset$ für alle bis auf endliche viele $i \in \mathbb{N}$. Seien diese Ausnahmen $i_1, \dots, i_n$. Dann ist also $f_i(U) = \{0\}$ für $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, also

$$f(y) = \max\{f_{i_1}(y), \dots, f_{i_n}(y)\}, \ y \in U.$$

Daher ist f stetig an der Stelle y_0. Da $y_0 \in X$ beliebig war ist $f : X \to [0,1]$ stetig.

Es existiert also eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\beta(X)$. Wegen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \to x$ in $\beta(X)$ folgt $\tilde{f}(a_i) \to \tilde{f}(x)$ und $\tilde{f}(b_i) \to \tilde{f}(x)$. Nun ist aber $\tilde{f}(a_i) = 0$, da $a_i \notin V_j, i, j \in \mathbb{N}$, und $\tilde{f}(b_i) = 1$ da $f_i(b_i) = 1$. Also ist $\tilde{f}(a_i) \to 0$ und $\tilde{f}(b_i) \to 1$, ein WS!.

□

4.2.8 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ vollständig regulär und erfüllen das 1-te Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist $X \cong Y$ genau dann, wenn $\beta(X) \cong \beta(Y)$.*

Beweis. Ist $X \cong Y$, so ist klarerweise auch $\beta(X) \cong \beta(Y)$. Sei also vorausgesetzt das $\beta(X) \cong \beta(Y)$ und sei $\varphi : \beta(X) \to \beta(Y)$ ein Homöomorphismus. Es hat $x \in \beta(X)$ eine abzählbare Umgebungsbasis genau dann wenn $\varphi(x) \in \beta(Y)$ diese Eigenschaft hat. Wegen Satz 4.2.7 und der Voraussetzung des Lemmas gilt

$$\{x \in \beta(X) : x \text{ hat abzählbare Umgebungsbasis }\} = X$$

und genauso für Y. Also folgt $\varphi(X) = Y$ und $\varphi|_X$ ist ein Homöomorphismus von X auf Y.

□

4.3 Der Ring der stetigen Funktionen

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so bezeichne mit $C(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Mit den punktweise definierten Operationen

$$f + g : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$f \cdot g : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

ist $C(X)$ ein kommutativer Ring mit dem Einselement $f(x) \equiv 1$.

Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}(R)$ die Menge aller maximalen Ideale von R.

4.3.1 Lemma. *Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Der Operator $\bar{.} : \mathcal{P}(\mathfrak{T}(R)) \to \mathcal{P}(\mathfrak{T}(R))$ definiert als $(B \subseteq \mathfrak{T}(R))$*

$$J \in \overline{B} :\iff \bigcap_{J' \in B} J' \subseteq J$$

ist ein Abschlußoperator.

Beweis. Wir zeigen das die Eigenschaften $(C1)$-$(C4)$ eines Abschlußoperators (vgl. Satz 1.3.6) erfüllt sind.
·) Ist $B = \emptyset$, so folgt $\bigcap\{J' : J' \in B\} = \bigcap \emptyset = R$ und daher ist $\overline{B} = \emptyset$.

·) Ist $J \in B$, so ist $J \in \{J' : J' \in B\}$ also $\bigcap\{J' : J' \in B\} \subseteq J$, d.h. es ist auch $J \in \overline{B}$

·) Es gilt $J \in \overline{A} \cup \overline{B}$ genau dann, wenn $J \supseteq \bigcap\{J' : J' \in A\}$ oder $J \supseteq \bigcap\{J' : J' \in B\}$. Weiters gilt $J \in \overline{A \cup B}$ genau dann, wenn $J \supseteq \bigcap\{J' : J' \in A \cup B\}$. Wegen

$$\bigcap\{J' : J' \in A \cup B\} = \left[\bigcap\{J' : J' \in A\}\right] \cap \left[\bigcap\{J' : J' \in B\}\right]$$

impliziert $J \in \overline{A} \cup \overline{B}$ das auch $J \in \overline{A \cup B}$. Umgekehrt sei $J \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Wähle $x, y \notin J$ mit $x \in \bigcap\{J' : J' \in A\}$, $y \in \bigcap\{J' : J' \in B\}$. Dann ist $x \cdot y \in \bigcap\{J' : J' \in A \cup B\}$ aber $x \cdot y \notin J$ da J als maximales Ideal auch Primideal ist. D.h. $J \not\supseteq \bigcap\{J' : J' \in A \cup B\}$, also $J \notin \overline{A \cup B}$.

·) Sei $J \in \overline{\bar{A}}$, d.h. $J \supseteq \bigcap\{J' : J' \in \bar{A}\}$. Nun gilt für jedes $J' \in \bar{A}$ das $J' \supseteq \bigcap\{J'' : J'' \in A\}$ und wir erhalten auch

$$\bigcap\{J' : J' \in \bar{A}\} \supseteq \bigcap\{J'' : J'' \in A\}.$$

Insgesamt folgt $J \in \bar{A}$. Gemeinsam mit (C2) folgt $A^{=} = \bar{A}$.

□

Wir sprechen von $\mathfrak{T}(R)$ mit der von diesem Abschlußoperator induzierten Topologie als dem *Raum der maximalen Ideale* von R.

4.3.2 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter T_2-Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu $\mathfrak{T}(C(X))$.*

Beweis.
·) Ist $a \in X$, so ist die Punktauswertung

$$\gamma_a : \begin{cases} C(X) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

ein Ringhomöomorphismus. Wegen $\gamma_a(1) = 1$ ist $\ker \gamma_a \neq C(X)$ und es gilt $\gamma_a(C(X)) = \mathbb{R}$ da jede konstante Funktion in $C(X)$ liegt. Also ist

$$\ker \gamma_a = \{f \in C(X) : f(a) = 0\}$$

ein maximales Ideal von $C(X)$. Wir definieren $\varphi : X \to \mathfrak{I}(C(X))$ als

$$\varphi(a) := \ker \gamma_a \,.$$

Sind $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, so wähle $f \in C(X)$ mit $f(x_1) = 0, f(x_2) = 1$. Dann gilt $f \in \ker \gamma_{x_1} \setminus \ker \gamma_{x_2}$, also ist $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, d.h. φ ist injektiv.

$\cdot$) Wir zeigen das φ surjektiv ist. Sei $J \in \mathcal{I}(C(X))$. Ist $f \in J$, so ist $A_f := f^{-1}(\{0\})$ eine abgeschlossene Menge in X. Sind $f_1, \dots, f_n \in J$ und wäre $A_{f_1} \cap \dots \cap A_{f_n} = \emptyset$, so wäre

$$g := f_1^2 + \dots + f_n^2 \in J$$

und g nullstellenfrei. Es folgt $\frac{1}{g} \in C(X)$ und daher $1 = \frac{1}{g} \cdot g \in J$, ein WS!. Wir schließen das das System $\{A_f : f \in J\}$ abgeschlossener Mengen die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Da X kompakt ist folgt $\bigcap_{f \in J} A_f \neq \emptyset$. Ist $a \in \bigcap_{f \in J} A_f$, so ist also $J \subseteq \ker \gamma_a$. Da J maximales Ideal ist, folgt $J = \ker \gamma_a$.

$\cdot$) Wir zeigen das φ Homöomorphismus ist. Sei $A \subseteq X$. Ist $f \in C(X)$ und $f(A) = \{0\}$, so folgt $f(\overline{A}) = \{0\}$. D.h. für jedes $a \in \overline{A}$ gilt

$$\bigcap \{\ker \gamma_x : x \in A\} \subseteq \ker \gamma_a \,,$$

und wir haben also $\varphi(a) \in \overline{\varphi(A)}, a \in \overline{A}$. Also ist $\varphi(\overline{A}) \subseteq \overline{\varphi(A)}$, d.h. φ ist stetig.

Sei $J = \ker \gamma_a \in \overline{\varphi(A)}$, d.h. gelte $\bigcap \{\ker \gamma_x : x \in A\} \subseteq J$. Dieses wiederum besagt das für jedes f mit $f(A) = \{0\}$ schon folgt $f(a) = 0$. Wäre $a \notin \overline{A}$, so existierte aber ein $f \in C(X)$ mit $f(\overline{A}) = \{0\}$ und $f(a) = 1$, ein WS!. Also erhält man $a \in \overline{A}$, d.h. es ist $\overline{\varphi(A)} \subseteq \varphi(\overline{A})$ und insgesamt $\varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(A)}$. Die Abbildung φ bildet daher abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene ab und daher ist φ^{-1} stetig.

□

4.3.3 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ kompakte T_2-Räume. Dann sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ homöomorph genau dann, wenn die Ringe $C(X)$ und $C(Y)$ isomorph sind.*

Beweis. Ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu $(Y, \mathcal{V})$ so ist klarerweise $C(X) \cong C(Y)$. Ist umgekehrt $C(X) \cong C(Y)$ als Ring, so folgt $\mathfrak{I}(C(X)) \cong \mathfrak{I}(C(Y))$ als topologische Räume. Wegen Satz 4.3.2 folgt $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{V})$. □

Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichne mit $C'(X)$ die Menge aller beschränkten und stetigen Funtionen $f : X \to \mathbb{R}$. Offenbar ist $C'(X)$ ein Unterring von $C(X)$. Ist X kompakt, so ist für jedes $f \in C(X)$ die Menge $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und daher beschränkt. Also gilt für kompakte Räume $C'(X) = C(X)$.

4.3.4 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär, $\beta(X)$ die Stone-Čech Kompaktifizierung von X. Dann gilt $C'(X) \cong C(\beta(X))$.*

Beweis. Sei $l : X \to \beta(X)$ die kanonische Einbettung. Ist $f \in C(\beta(X))$, so ist f beschränkt da $\beta(X)$ kompakt ist. Wir definieren

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} C(\beta(X)) & \longrightarrow & C'(X) \\ f & \longmapsto & f \circ l \end{array} \right.$$

Wegen $\varphi(1) = 1, \varphi(0) = 0$,

$$\varphi(f+g)(x) = (f+g)(l(x)) = f(l(x)) + g(l(x)) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$
$$= (\varphi(f) + \varphi(g))(x),\ x \in X\,,$$
$$\varphi(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(l(x)) = f(l(x)) \cdot g(l(x)) = \varphi(f)(x) \cdot \varphi(g)(x)$$
$$= (\varphi(f) \cdot \varphi(g))(x),\ x \in X\,.$$

Ist φ ein Ringhomöomorphismus. Da $l(X)$ dicht in $\beta(X)$ liegt ist φ injektiv. Sei $g \in C'(X)$. Wegen (SČ) gibt es eine stetige Fortsetzung f von g auf $\beta(X)$, d.h. $f \in C(\beta(x))$ mit $\varphi(f) = g$. Also ist φ surjektiv.

□

4.3.5 Korollar. *Seine $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ vollständig regulär und seien $\beta(X), \beta(Y)$ die entsprechenden Stone-Čech Kompaktifizierungen. Dann ist $\beta(X) \cong \beta(Y)$ genau dann wenn $C'(X) \cong C'(Y)$. Sei zusätzlich vorausgesetzt das $(X, \mathcal{T})$ und $Y, \mathcal{V})$ das 1-te Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Dann ist $X \cong Y$ genau dann wenn $C'(X) \cong C'(Y)$.*

Beweis.
·) Ist $\beta(X) \cong \beta(Y)$, so ist auch $C'(X) \cong C(\beta(X))) \cong C(\beta(Y)) \cong C'(Y)$. Ist umgekehrt $C'(X) \cong C'(Y)$, so folgt $C(\beta(X)) \cong C(\beta(Y))$ und mit Korollar 4.3.3 folgt $\beta(X) \cong \beta(Y)$.

·) Erfüllen $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ das 1-te Abzählbarkeitsaxiom, so können wir Korollar 4.2.8 anwenden.

□

Kapitel 5

Metrische Räume

5.1 Metriken

Wir haben in Beispiel 1.1.3 gesehen das eine Metrik d auf einer Menge X eine Topologie induziert.

5.1.1 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert.

5.1.2 Bemerkung. Es ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, wenn $(X, \mathcal{T})$ homöomorph ist zu einem metrischen Raum.

5.1.3 Lemma. *Es gilt:*

(i) *Ist d Metrik auf X, so ist auch $\tilde{d}(x,y) := \min\{d(x,y), 1\}$ eine Metrik. Die Metriken d und $\tilde{d}$ induzieren die gleiche Topologie.*

(ii) *Sei (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{T}$ die von d induzierte Topologie. Ist $Y \subseteq X$, so ist $\tilde{d} := d|_{Y \times Y}$ eine Metrik auf Y und die von $\tilde{d}$ induzierte Topologie ist gleich $\mathcal{T}|_Y$.*

(iii) *Ist (X, d_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$, eine abzählbare Familie metrischer Räume, $\mathcal{T}_i$ die entsprechenden Topologien, so gibt es eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ die die Produkttopologie $\prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i$ induziert.*

Beweis.
ad(i): Es gilt $\tilde{d}(x,y) = 0$ genau dann wenn $d(x,y) = 0$ ist, also genau dann wenn $x = y$ ist. Offenbar gilt $\tilde{d}(x,y) = \tilde{d}(y,x)$ da d diese Eigenschaft hat. Aus $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ folgt auch unmittelbar das

$$\min\{d(x,y), 1\} \leq \min\{d(x,z) + d(z,y), 1\} \leq$$

$$\leq \min\{d(x,z), 1\} + \min\{d(z,y), 1\} .$$

Da eine Umgebungsbasis bezüglich der von d induzierten Topologie gegeben ist durch

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y,x) \leq C\}, \ 0 < \epsilon < 1 ,$$

und analog durch $\tilde{U}_\epsilon(x)$ für $\tilde{d}$, folgt das die Topologie gleich sind denn $U_\epsilon(x) = \tilde{U}_\epsilon(x), 0 < \epsilon < 1$.

ad(ii): Die Tatsache das $d|_{Y\times Y}$ eine Metrik ist, ist offensichtlich. Eine Umgebungsbasis von $y \in Y$ im Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ ist gegeben durch $U'_\epsilon(y) := U_\epsilon(y) \cap Y$. Wegen

$$U_\epsilon(y) \cap Y = \{z \in Y : d(z,y) < \epsilon\} = \{z \in Y : d|_{Y\times Y}(z,y) < \epsilon\}$$

ist das genau die von $d|_{Y\times Y}$ induzierte Umgebungsbasis.

ad(iii): Wegen (i) können wir oBdA voraussetzen das $d_i(X_i, X_i) \subseteq [0,1]$. Definiere für $(x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i$

$$\tilde{d}((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)\,.$$

Dann ist $\tilde{d}$ wohldefiniert und erfüllt die Axiome $(M1) - (M3)$ einer Metrik.

Sei $(x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i$ gegeben. Eine Umgebungsbasis von $(x_i)_{i=1}^\infty$ in der Produkttopologie ist gegeben durch die Mengen

$$U_{\epsilon,n}((x_i)_{i=1}^\infty) := \prod_{i=1}^n U_\epsilon^{(i)}(x_i) \times \prod_{i=n+1}^\infty X_i$$

wobei $U_\epsilon^{(i)}$ die von der Metrik d_i kommende ϵ-Kugel ist. Ist $\tilde{U}_\epsilon((x_i)_{i=1}^\infty)$ die von $\tilde{d}$ kommende ϵ-Kugel, so gilt einerseits

$$\tilde{U}_{\epsilon 2^{-n}}((x_i)_{i=1}^\infty) \subseteq U_{\epsilon,n}((x_i)_{i=1}^\infty)\,,$$

denn ist $\tilde{d}((y_i)_{i=1}^\infty, (x_i)_{i=1}^\infty) < \epsilon 2^{-n}$, so folgt für jedes $i = 1, 2, \ldots$, das

$$\frac{1}{2^i} d(y_i, x_i) < \epsilon 2^{-n}\,.$$

Für $i \leq n$ folgt also $d(y_i, x_i) < \epsilon$. Andererseits wähle zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodaß $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$, dann folgt

$$U_{\frac{\epsilon}{2},n}((x_i)_{i=1}^\infty \subseteq \tilde{U}_\epsilon((x_i)_{i=1}^\infty)\,.$$

Denn sei $(y_i)_{i=1}^\infty \in U_{\frac{\epsilon}{2},n}((x_i)_{i=1}^\infty)$. D.h. gelte $d_i(y_i, x_i) < \frac{\epsilon}{2}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann erhalten wir

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} d_i(y_i, x_i) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}\frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{2^i} \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon\,.$$

Damit schließen wir das die Umgebungsfilter von $(x_i)_{i=1}^\infty$ in der Topologie $\prod_{i=1}^\infty \mathcal{T}_i$ mit jenen der von $\tilde{d}$ induzierten Topologie übereinstimmen.

□

5.1.4 Korollar. *Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle das 2-te Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, wenn $(X, \mathcal{T})$ regulär ist.*

Beweis. Jeder metrische Raum ist regulär. Sei also umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ regulär. Nach dem Einbettungssatz von Urysohn, Satz 3.3.5, ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Teilraum von $[0,1]^\mathbb{N}$ und damit wegen obigem Lemma metrisierbar. □

5.2 Metrisierbarkeit

5.2.1 Satz (Metrisierbarkeitssatz von Alexandroff-Urysohn). *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_1-Raum. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, wenn es eine Folge $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots$ offener Überdeckungen gibt sodaß*

(*i*) $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3^* > \dots$

(*ii*) *Für jedes $x \in X$ ist $\{S(x,\mathcal{U}_n) : n = 1,2,\dots\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X,\mathcal{T})$.*

Beweis. Sei zuerst $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar; sei d eine Metrik auf X die $\mathcal{T}$ induziert. Setze

$$\mathcal{U}_n := \{U_{3^{-n}}(x) : x \in X\},$$

dann erfüllt die Folge $\mathcal{U}_n$ alle gewünschten Eigenschaften. Denn $\mathcal{U}_n$ ist eine offene Überdeckung von X, wegen

$$S(U_{3^{-n}}(x),\mathcal{U}_n) \subseteq U_{3\cdot 3^{-n}}(x) = U_{3^{(n-1)}}(x)$$

gilt (i) und wegen

$$S(x,\mathcal{U}_n) = U_{2\cdot 3^{-n}}(x) \subseteq U_{3^{-n+1}}(x)$$

gilt (ii).

Sei also im folgenden vorausgesetzt das $\mathcal{U}_n$ die Eigenschaften (i) und (ii) haben. Wir müssen eine Metrik auf X konstruieren die $\mathcal{T}$ induziert.
·) Wir definieren für rationale Zahlen der Gestalt $\frac{k}{2^n}$, $k = 1,\dots,2^n-1$, $n \in \mathbb{N}$, offene Überdeckungen $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$. Dazu gehen wir induktiv vor: Zuerst sei $\mathcal{V}(\frac{1}{2}) := \mathcal{U}_1$. Sind die Überdeckungen $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ bereits definiert, so setze

$$\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) := \mathcal{U}_{n+1},\ \mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{k/2}{2^n}\Big) \text{ falls } k \text{ gerade },$$

$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) := \Big\{S(V,\mathcal{U}_{n+1}) : V \in \mathcal{V}\Big(\frac{[k/2]}{2^n}\Big)\Big\},\ k = 3,5,7,\dots,2^{n+1}-1\,.$$

Damit ist für jede rationale Zahl q die sich in der Form $q = \frac{k}{2^n}$ anschreiben läßt eine offene Überdeckung $\mathcal{V}(q)$ wohldefiniert: Dabei ist klar das jedes Element von $\mathcal{V}(q)$ offen ist. Weiters ist die induktive Definition so daß $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n}) = \mathcal{V}(\frac{2k}{2^{n+1}}) = \dots$, also ist $\mathcal{V}(q)$ wohldefiniert. Die Tatsache das $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ eine Überdeckung ist sieht man induktiv: $n = 1 : \mathcal{U}_1$ ist Überdeckung, $n \mapsto n+1 : \mathcal{U}_{n+1}$ ist Überdeckung, $\mathcal{V}(\frac{k/2}{2^n})$ ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung, schließlich $\mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$ ebenfalls denn $S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \supseteq V$ und $\mathcal{V}(\frac{[k/2]}{2^n})$ ist Überdeckung nach Induktionsvoraussetzung.

Wir setzen weiters $\mathcal{V}(1) := \{X\}$.

·) Wir zeigen induktiv die folgende Behauptung: Sei $1 \le k \le 2^n - 1$. Für jedes $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ existiert $V' \in \mathcal{V}(\frac{k+1}{2^n})$ mit $S(V,\mathcal{U}_n) \subseteq V'$.
$n = 1$: $\mathcal{V}(\frac{1}{2}) = \mathcal{U}_1$ und $\mathcal{V}(\frac{2}{2}) = \{X\}$, also ist die Behauptung richtig.
$n \mapsto n+1$: Sei $1 \le k \le 2^{n+1}-1$. Betrachte zuerst den Fall das k gerade ist. Dann gilt

$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{k/2}{2^n}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{[\frac{k+1}{2}]}{2^n}\Big)\,.$$

Ist nun $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$ gegeben, so ist nach der Definition von $\mathcal{V}(\frac{k+1}{2^{n+1}})$

$$S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \in \mathcal{V}\Big(\frac{k+1}{2^{n+1}}\Big)\,.$$

Wir können also $V' := S(V,\mathcal{U}_{n+1})$ wählen.

Betrachte den Fall $k = 1$. Dann ist $\mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}) = \mathcal{U}_{n+1}$ und $\mathcal{V}(\frac{1+1}{2^{n+1}}) = \mathcal{V}(\frac{1}{2^n}) = \mathcal{U}_n$. Wegen der Voraussetzung (i) gilt $\mathcal{U}_{n+1}^* < \mathcal{U}_n$. Ist also $V \in \mathcal{U}_{n+1}$, so gibt es $V' \in \mathcal{U}_n$ mit $S(V,\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq V'$.

Betrachte schließlich den Fall $k = 3, 5, 7, \dots, 2^{n+1} - 1$. Setze $k' := [\frac{k}{2}]$, d.h. $k = 2k' + 1$, dann ist $k' \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Sei $V \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$, dann gibt es nach Definition ein $\tilde{V} \in \mathcal{V}(\frac{k'}{2^n})$ mit $V = S(\tilde{V},\mathcal{U}_{n+1})$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $V' \in \mathcal{V}(\frac{k'+1}{2^n})$ mit $V' \supseteq S(\tilde{V},\mathcal{U}_n)$. Wir erhalten wegen (i) und Lemma 3.1.8 das

$$S(V,\mathcal{U}_{n+1}) = S(S(\tilde{V},\mathcal{U}_{n+1}),\mathcal{U}_{n+1}) \subseteq S(\tilde{V},\mathcal{U}_n) \subseteq V'\,.$$

$\cdot$) Sei $q < q'$ rationale Zahlen der Gestalt $\frac{k}{2^n}$ bzw. $\frac{k'}{2^{n'}}$. ObdA sei $q = \frac{k}{2^n}, q' = \frac{k'}{2^n}$ mit $k < k'$. Wegen dem letzten Schritt gilt insbesondere $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n}) < \mathcal{V}(\frac{k+1}{2^n}) < \dots < \mathcal{V}(\frac{k'}{2^n})$, also $\mathcal{V}(q) < \mathcal{V}(q')$.

$\cdot$) Für $x, y \in X$ definieren wir

$$\varphi(x,y) := \inf\Big\{q = \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1,2,\dots,2^n\}, y \in S(x,\mathcal{V}(q))\Big\}\,,$$

$$d(x,y) := \sup\Big\{|\varphi(x,z) - \varphi(y,z)| : z \in X\Big\}\,.$$

Wir zeigen das d eine Metrik ist.

Es gilt stets $\varphi(x,y) \in [0,1]$. Offenbar gilt $d(x,x) = 0$ sowie $d(x,y) = d(y,x)$. Sei nun $d(x,y) = 0$. Wir müssen zeigen das $x = y$. Angenommen $x \neq y$. Es ist stets

$$d(x,y) \geq |\varphi(x,y) - \varphi(y,y)| = \varphi(x,y)\,. \tag{5.1}$$

Nach Voraussetzung (ii) und da $(X,\mathcal{T})$ ein T_1-Raum ist, existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y \notin S(x,\mathcal{U}_n) = S(x,\mathcal{V}(\frac{1}{2^n}))$ und wegen $\mathcal{V}(q) < \mathcal{V}(\frac{1}{2^n})$ für alle $q < \frac{1}{2^n}$ auch $y \notin S(x,\mathcal{V}(q))$ für solche q. Wir erhalten $\varphi(x,y) \geq \frac{1}{2^n}$, und daher insbesondere $d(x,y) \neq 0$.

Seien $x, y, a \in X$, dann gilt

$$d(x,y) = \sup\{|\varphi(x,z) - \varphi(y,z)| : z \in X\} \leq \sup\{|\varphi(x,z) - \varphi(a,z)| : z \in X\} +$$
$$+ \sup\{|\varphi(a,z) - \varphi(y,z)| : z \in X\} = d(x,a) + d(a,y)\,.$$

$\cdot$) Wir zeigen das die von d induzierte Topologie gleich $\mathcal{T}$ ist. Bezeichne mit $\mathfrak{U}(x)$ den Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}$ und mit $U_\epsilon(x)$ die ϵ-Kugel bezüglich der Metrik d.

Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben. Wegen (ii) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2^n}$ und $y \in U_\epsilon(x)$, d.h. $d(x,y) < \epsilon$. Dann folgt wegen (5.1) das auch $\varphi(x,y) < \epsilon$ ist. D.h. es existiert $0 < \delta < \epsilon$ mit $y \in S(x,\mathcal{V}(\delta)) \subseteq S(x,\mathcal{V}(\frac{1}{2^n})) = S(x,\mathcal{U}_n)$. Es folgt

$$U_\epsilon(x) \subseteq U\,.$$

Wir müssen zeigen das es auch umgekehrt zu jedem $U_\epsilon(x)$ ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq U_\epsilon(x)$. Dazu zeigen wir die folgende Hilfsaussage.

·) Seien $x, y, z \in X, x \in S(y, \mathcal{U}_{n+1})$, dann folgt $\varphi(x,z) \leq \varphi(y,z) + \frac{3}{2^{n+1}}$. Zum Beweis dieser Aussage unterscheiden wir drei Fälle:

(1)$\varphi(y,z) < \frac{1}{2^n}$

(2)$\exists\, k \in \{2, 3, \dots, 2^n - 1\} : \frac{k-1}{2^n} \leq \varphi(y,z) < \frac{k}{2^n}$

(3)$\frac{2^n-1}{2^n} \leq \varphi(y,z)$

`ad(1)`:Da $\varphi(y,z) < \frac{1}{2^n}$ folgt $z \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^n}))$, also existiert ein $V' \in \mathcal{V}(\frac{1}{2^n})$ mit $z, y \in V'$. Nun gilt $x \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$ und daher erst recht $x \in S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$. Offenbar ist auch $z \in V' \subseteq S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}}))$. Nach Definition gilt

$$V := S(V', \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}})) = S(V', \mathcal{U}_{n+1}) \in \mathcal{V}(\frac{3}{2^{n+1}}),$$

und wir schließen das $z \in S(x, \mathcal{V}(\frac{3}{2^{n+1}}))$ denn $x, z \in V$. Also haben wir $\varphi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$ und daher

$$\varphi(x,z) - \varphi(y,z) \leq \varphi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}.$$

`ad(2)`:In diesem Fall ist $\varphi(y,z) < \frac{k}{2^n}$, also $z \in S(y, \mathcal{V}(\frac{k}{2^n}))$, und daher gibt es ein $V' \in \mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ mit $z, y \in V'$. Es gilt

$$x \in S(y, \mathcal{V}(\frac{1}{2^{n+1}})) \subseteq S(V', \mathcal{U}_{n+1}) =: V \in \mathcal{V}(\frac{2k+1}{2^{n+1}}),$$

sowie $z \in V' \subseteq V$, und wir schließen $z \in S(x, \mathcal{V}(\frac{2k+1}{2^{n+1}}))$ und damit $\varphi(x,z) \leq \frac{2k+1}{2^{n+1}}$. Also erhalten wir

$$\varphi(x,z) \leq \frac{2k-2}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} \leq \varphi(y,z) + \frac{3}{2^{n+1}}.$$

`ad(3)`:Es gilt stets

$$\varphi(x,z) \leq 1 < \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{3}{2^{n+1}} \leq \varphi(y,z) + \frac{3}{2^{n+1}}$$

·) Aus der obigen Aussage schließen wir das für $x, y \in X$ mit $x \in S(y, \mathcal{U}_{n+1})$ sogar gilt $d(x,y) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$. Denn aus der obigen Aussage erhalten wir

$$\varphi(x,z) - \varphi(y,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Nun ist aber $x \in S(y, \mathcal{U}_{n+1})$ genau dann, wenn $y \in S(x, \mathcal{U}_{n+1})$, also können wir die obige Aussage auch anwenden auf $y, x, z \in X$ mit $y \in S(x, \mathcal{U}_{n+1})$ d.h. mit vertauschten Rollen von x und y. Damit folgt

$$\varphi(y,z) - \varphi(x,z) \leq \frac{3}{2^{n+1}},$$

also insgesamt $|\varphi(x,z) - \varphi(y,z)| \leq \frac{3}{2^{n+1}}$ und da $z \in X$ beliebig war auch $d(x,y) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$.

Nun sei $\epsilon > 0$ gegeben und $x \in X$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodaß $\frac{3}{2^{n+1}} < \epsilon$, und setze $U := S(x, \mathcal{U}_{n+1})$. Da $\mathcal{U}_{n+1}$ eine offene Überdeckung ist, gilt $U \in \mathfrak{U}(x)$. Ist $y \in U$, so folgt $d(x,y) \leq \frac{3}{2^{n+1}} < \epsilon$ und damit ist $y \in U_\epsilon(x)$. Wir haben also $U \subseteq U_\epsilon(x)$.

$\square$

5.2.2 Bemerkung. Wir erwähnen noch ohne Beweis den folgenden Metrisierbarkeitssatz (*Metrisierbarkeitssatz von Nagata-Smirnov*): Sei $(X, \mathcal{T})$ regulär. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar genau dann, wenn $\mathcal{T}$ eine σ-lokal endliche offene Basis besitzt. Der Beweis dieser Aussage wäre nicht komplizierter als der des Satzes von Alexandroff-Urysohn, es bedürfte aber der Einführung einiger weiterer technischer Hilfsmittel.

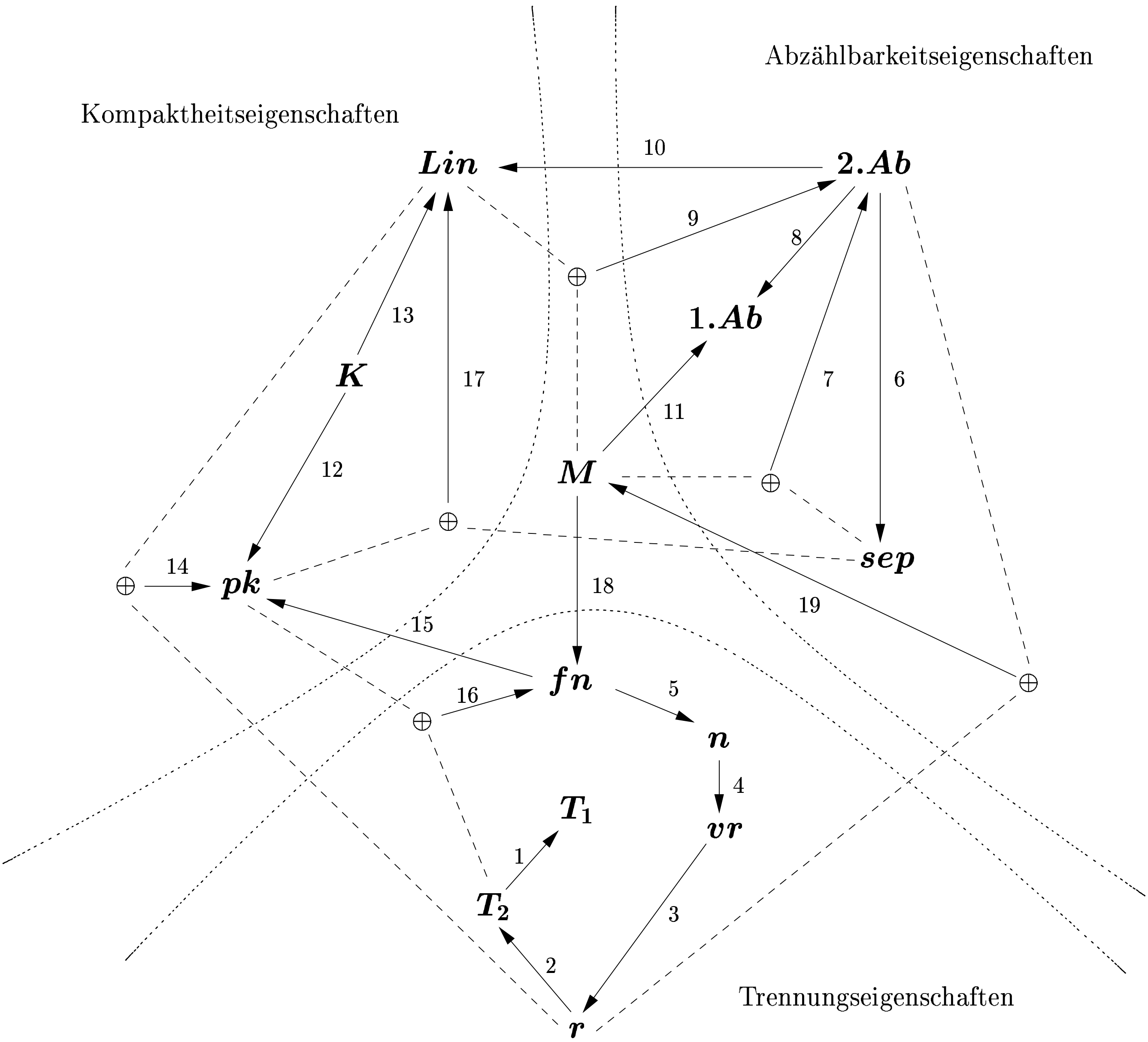
Anhang A

Begriffe und Implikationen

Zusammenstellung der in dieser Vorlesung definierten Begriffe und der von uns bewiesenen Implikationen zwischen ihnen

M: metrisierbar	, Definition 5.1.1
K: kompakt	, Definition 3.2.1, (i)
Lin: Lindelöf	, Definition 3.2.1, (ii)
pk: parakompakt	, Definition 3.2.1, (iii)
fn: fully normal	, Definition 3.2.1, (iv)
n: normal	, Definition 2.3.1
vr: vollständig regulär	, Definition 2.2.1
r: regulär	, Definition 2.2.1
T_2: Hausdorff	, Definition 2.1.1
T_1: T_1	, Definition 2.1.1
2.Ab: 2-te Abzählbarkeitsaxiom	, Definition 1.8.1, (ii)
1.Ab: 1-te Abzählbarkeitsaxiom	, Definition 1.8.1, (i)
sep: separabel	, Definition 1.8.1, (iii)

Eine große Sammlung von Beispielen topologischer Räume die gewisse Eigenschaften haben und andere nicht findet man in [SS].



1: Bemerkung 2.1.2
2: Bemerkung 2.2.2
3: Bemerkung 2.2.2
4: Korollar 2.3.5
5: Lemma 3.2.5
6: Lemma 1.8.2
7: Beispiel 1.8.4
8: Lemma 1.8.2
9: Lemma 3.3.4
10: Lemma 3.3.4

11: Beispiel 1.8.4
12: Bemerkung 3.2.2
13: Bemerkung 3.2.2
14: Korollar 3.2.8
15: Satz 3.3.1
16: Satz 3.3.1
17: Lemma 3.2.3
18: Lemma 3.2.6
19: Korollar 5.1.4
:

Literaturverzeichnis

[N] J.Nagata: *Modern General Topology,*
North-Holland, Amsterdam 1968.

[B] N.Bourbaki: *Elements of Mathematics: General Topology. Part 1,2,*
Hermann, Paris 1966.

Diese Bücher habe ich für die Vorlesung verwendet.
Einige weitere Bücher sind zum Beispiel:

[S] H.Schubert: *Topologie,*
Teubner, Stuttgart 1964 (4.Auflage 1975).

[SS] L.Steen, J.Seebach: *Counterexamples in Topology,*
Holt, Rinehart & Winston, New York 1970.

[K] J.Kelley: *General Topology,*
D.v.Nostrand Company, Toronto 1955.

[H] S.Hu: *Introduction to General Topology,*
Holden-Day, Amsterdam 1966.

[R] W.Rinow: *Lehrbuch der Topologie,*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[G] S.Gaal: *Point Set Topology,*
Academic Press, London 1964.

Index