Topologie

Harald Woracek

(Version 26.4.2018 / nicht korrekturgelesen)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Uniforme Strukturen

Viele Begriffe die man aus der Theorie metrischer Räume kennt, kann man im Kontext topologischer Räume nicht bilden. Dies betrifft solche, wo es nötig ist zu erfassen wann Umgebungen verschiedener Punkte „gleich groß" sind. Im metrischen Raum kann man – intuitiv – Kugeln als „gleich groß" betrachten, wenn sie den selben Radius haben aber egal welchen Mittelpunkt sie haben. Beispiele für solche Begriffe wären insbesondere gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen, Cauchy-Folgen, oder totale Beschränktheit.

Uniforme Räume sind Objekte die von ihrer Allgemeinheit zwischen metrischen und topologischen Räumen liegen, und bei denen man Begriffe dieses Typs sinnvoll definieren kann.

`Kategorielle Perspektive:`
Wir kennen die Kategorien

➢ `Metr` deren Objekte die metrische Räume sind mit allen isometrischen Funktionen als Morphismen.

➢ `Top` deren Objekte die topologischen Räume sind mit allen stetigen Funktionen als Morphismen.

In diesem Kapitel definieren wir eine Kategorie `Unif` die zwischen diesen beiden Kategorien liegt. Wobei „dazwischenliegen" sich in dem Sinne versteht, dass man Funktoren $F^{\mathtt{M}}_{\mathtt{U}}\colon \mathtt{Metr} \to \mathtt{Unif}$ und $F^{\mathtt{U}}_{\mathtt{T}}\colon \mathtt{Unif} \to \mathtt{Top}$ hat, die auf Morphismen als Identität agieren.

1.1 Uniformitäten und gleichmäßig stetige Abbildungen

Sei X eine Menge. Wir bezeichnen im Folgenden für zwei Relationen $R, S \subseteq X \times X$ mit $R \circ S$ das *Relationenprodukt*

$$R \circ S := \{(x, y) \in X \times X \colon\ \exists z \in X.\ (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\},$$

mit R^{-1} die *inverse Relation*

$$R^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \colon\ (y, x) \in R\},$$

und mit Δ die *Diagonale*

$$\Delta := \{(x, x) \colon\ x \in X\}.$$

1.1.1 Definition. Sei X eine Menge. Eine *Uniformität* $\mathcal{U}$ auf X ist eine nichtleere Familie von Teilmengen von $X \times X$, mit den folgenden Eigenschaften:

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}.\ \Delta \subseteq U$

(U2) $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}.\ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

(U3) $\forall U \in \mathcal{U}, V \subseteq X \times X.\ U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}$

(U4) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U}.\ V \circ V \subseteq U$

(U5) $\forall U \in \mathcal{U}.\ U^{-1} \in \mathcal{U}$

Ein Paar $(X, \mathcal{U})$ bestehend aus einer Menge X und einer Uniformität $\mathcal{U}$ auf X heißt ein *uniformer Raum*. Die Elemente einer Uniformität heißen *Nachbarschaften*. ◊

Man bemerke, dass eine Uniformität stets ein Filter auf der Menge $X \times X$ ist.

Für zwei Funktionen $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ und $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ bezeichnen wir im Folgenden mit $f_1 \times f_2$ die komponentenweise agierende Funktion

$$f_1 \times f_2 \colon \begin{cases} X_1 \times X_2 & \to & Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{cases}$$

1.1.2 Definition. Seien $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ uniforme Räume, und $f \colon X \to Y$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn

(GS) $\forall V \in \mathcal{V}.\ (f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$

◊

`Kategorielle Perspektive:`

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X \colon (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{U})$ ist offenbar gleichmäßig stetig. Wegen der Rechenregel

$$(f_1 \circ g_1) \times (f_2 \circ g_2) = (f_1 \times f_2) \circ (g_1 \times g_2)$$

und den Rechenregeln für vollständige Urbilder, ist für zwei gleichmäßig stetige Funktionen $f \colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ und $g \colon (Y, \mathcal{V}) \to (Z, \mathcal{W})$ auch die Zusammensetzung $g \circ f \colon (X, \mathcal{U}) \to (Z, \mathcal{W})$ gleichmäßig stetig.

Wir haben also eine Kategorie `Unif` deren Objekte die uniformen Räume sind mit allen gleichmäßig stetigen Funktionen als Morphismen.

Um konkrete Uniformitäten zu konstruieren, bedient man sich oft der folgenden Aussage.

1.1.3 Lemma. *Sei $\mathcal{B}$ eine nichtleere Familie von Teilmengen von $X \times X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(B1) $\forall B \in \mathcal{B}.\ \Delta \subseteq B$

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{B}.\ A \subseteq B_1 \cap B_2$

(B3) $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{B}.\ A \circ A \subseteq B$

(B4) $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{B}.\ A^{-1} \subseteq B$

Definiere

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \times X \colon\ \exists B \in \mathcal{B}.\ B \subseteq U\}.$$

Dann ist $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf X.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{U}$ die Eigenschaften (U1)–(U5) hat.

➢ Sei $U \in \mathcal{U}$. Wähle $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$. Dann gilt $\Delta \subseteq B \subseteq U$.

➢ Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Wähle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \subseteq U_1$ und $B_2 \subseteq U_2$. Wähle $A \in \mathcal{B}$ mit $A \subseteq B_1 \cap B_2$. Dann gilt $A \subseteq U_1 \cap U_2$.

➢ Sei $U \in \mathcal{U}$ und $V \subseteq X \times X$ mit $U \subseteq V$. Wähle $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$. Dann ist auch $B \subseteq V$.

➢ Sei $U \in \mathcal{U}$. Wähle $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$, und $A \in \mathcal{B}$ mit $A \circ A \subseteq B$. Dann gilt $A \in \mathcal{U}$ und $A \circ A \subseteq U$.

➢ Sei $U \in \mathcal{U}$. Wähle $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$, und $A \in \mathcal{B}$ mit $A^{-1} \subseteq B$. Dann gilt $A \in \mathcal{U}$ und $A^{-1} \subseteq U$.

□

Wir wollen uns nun überlegen, dass jede Pseudometrik auf X eine Uniformität induziert. Dabei verstehen wir unter einer *Pseudometrik* auf einer Menge X eine Abbildungen $d : X \times X \to [0, \infty)$ die alle Eigenschaften einer Metrik hat mit möglicherweiser Ausnahme von „$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$“.

1.1.4 Beispiel. Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit S_n den „$\frac{1}{n}$-Schlauch“ um die Diagonale

$$S_n := \{(x, y) \in X \times X : \ d(x, y) < \frac{1}{n}\}.$$

Wegen den Eigenschaften einer Pseudometrik gelten (B1)–(B4):

➢ Da stets $d(x, x) = 0$, haben wir $\Delta \subseteq S_n$.

➢ Nach Definition ist $S_n \cap S_m = S_{\max\{n,m\}}$.

➢ Wegen der Dreiecksungleichung gilt $S_{2n} \circ S_{2n} \subseteq S_n$.

➢ Da stets $d(x, y) = d(y, x)$, haben wir $S_n = S_n^{-1}$.

Lemma 1.1.3 zeigt nun, dass

$$\mathcal{U}_d := \{U \subseteq X \times X : \ \exists n \in \mathbb{N}. \ S_n \subseteq U\}$$

eine Uniformität auf X ist. Wir sprechen von $\mathcal{U}_d$ als der von *der Metrik induzierten Uniformität*.

Diese Konstruktion ist mit dem wohlbekannten Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit in metrischen Räumen, bzw. dem oben definierten der gleichmäßigen Stetigkeit in uniformen Räumen verträglich. Dazu erinnere man sich, dass eine Funktion $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gleichmäßig stetig heißt, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0. \ d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Klarerweise ist dies äquivalent zu

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}. \ d_1(x, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{1}{n},$$

und damit zu

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}. \ S_m \subseteq (f \times f)^{-1}(S_n).$$

Wir sehen, dass $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ genau dann gleichmäßig stetig ist (im Sinne der metrischen Räume), wenn $f : (X_1, \mathcal{U}_{d_1}) \to (X_2, \mathcal{U}_{d_2})$ gleichmäßig stetig ist (im Sinne der uniformen Räume).

Klarerweise könnte man anstelle der in der Definition der Mengen S_n vorkommenden Folge $\frac{1}{n}$ irgendeine Nullfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden. Exakt ausgedrückt: ist $c_n > 0$ mit $c_n \to 0$, so bilden die Mengen $S'_n := \{(x, y) \in X \times X : \ d(x, y) < c_n\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}_d$. Ebenso erhält man eine Filterbasis von $\mathcal{U}_d$ durch die Mengen $S''_n := \{(x, y) \in X \times X : \ d(x, y) \leq c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. ◊

`Kategorielle Perspektive:`

Wir haben einen Funktor $F_{\mathtt{U}}^{\mathtt{pM}}$ von der Kategorie `pMetr` aller pseudometrischen Räume mit gleichmäßig stetigen Funktionen als Morphismen in die Kategorie `Unif`. Dieser agiert auf Objekten als $(X, d) \mapsto (X, \mathcal{U}_d)$ und auf Morphismen als $f \mapsto f$.

Da jeder metrische Raum auch ein pseudometrischer Raum ist, und jede isometrische Abbildung auch gleichmäßig stetig ist, haben wir auch $F_{\mathtt{U}}^{\mathtt{M}} : \mathtt{Metr} \to \mathtt{Unif}$. Nämlich als Einschränkung von $F_{\mathtt{U}}^{\mathtt{pM}}$.

Ein interessantes Beispiel uniformer Räume erhält man von topologischen Gruppen.

1.1.5 Beispiel. Eine *topologische Gruppe* $(X, \cdot, \mathcal{T})$ ist eine Gruppe $(X, \cdot)$ gemeinsam mit einer Topologie $\mathcal{T}$, sodass die Abbildung

$$\begin{cases} (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) & \to & (X, \mathcal{T}) \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{cases}$$

stetig ist (hier bezeichnet $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ die Produkttopologie). Äquivalent dazu ist dass die Abbildungen $x \mapsto x^{-1}$ und $(x, y) \mapsto x \cdot y$ beide stetig sind.

Bezeichne mit $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ den Umgebungsfilter bzgl. $\mathcal{T}$ des Einselementes e der Gruppe. Für $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ setze

$$S_W := \{(x, y) \in X \times X : \ xy^{-1} \in W\}.$$

Dann erfüllt die Familie $\{S_W : \ W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)\}$ die Axiome (B1)–(B4):

➢ Es gilt stets $xx^{-1} = e \in W$, also $\Delta \subseteq S_W$.

- Ist $W_1, W_2 \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$, so hat auch $W_1 \cap W_2$ diese Eigenschaft. Offenbar gilt $S_{W_1 \cap W_2} = S_{W_1} \cap S_{W_2}$.

- Sei $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ gegeben, und wähle $V \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ mit $V \cdot V \subseteq W$. Diese Wahl ist wegen der Stetigkeit der Multiplikation und $e \cdot e = e$ möglich. Wir wollen nun zeigen, dass $S_V \circ S_V \subseteq S_W$. Dazu sei $(x, y) \in S_V \circ S_V$, und $z \in X$ mit $(x, z), (z, y) \in S_V$. Dann ist
$$xy^{-1} = (xz^{-1}) \cdot (zy^{-1}) \in V \cdot V \subseteq W.$$

- Sei $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ gegeben, und wähle $V \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ mit $V^{-1} \subseteq W$. Diese Wahl ist wegen der Stetigkeit der Inversenbildung und $e^{-1} = e$ möglich. Offenbar gilt $S_{V^{-1}} = (S_V)^{-1}$, und wir erhalten $(S_V)^{-1} \subseteq S_W$.

Nach Lemma 1.1.3 ist
$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \times X\colon\ \exists W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e).\ S_W \subseteq U\}$$
eine Uniformität auf X, und wir sprechen von der *Uniformität der topologischen Gruppe*. Diese Uniformität ist – schon vom Typ ihrer Konstruktion – eng mit der Struktur von X als topologische Gruppe verbunden. Wir werden sehen, dass dies einige interessante Konsequenzen hat. ◊

1.2 Die von einer Uniformität erzeugte Topologie

Wir wollen nun auf einem uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ eine Topologie definieren. Als Vorbild nehmen wir die bekannte Konstruktion der Topologie eines metrischen Raumes.

Für $U \subseteq X \times X$ und $x \in X$ bezeichnen wir mit $U(x)$ die Menge
$$U(x) := \{y \in X\colon\ (x, y) \in U\}.$$
Intuitiv denkt man manchmal von $U(x)$ als der „U-Kugel mit Mittelpunkt x“.

1.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Definiere $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ als
$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} := \{O \subseteq X\colon\ \forall x \in O\ \exists U \in \mathcal{U}.\ U(x) \subseteq O\}.$$
Wir nennen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ die *von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie*. ◊

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ tatsächlich eine Topologie ist.

- Offensichtlich ist $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ und $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

- Ebenso offensichtlich ist dass für jede Familie O_i, $i \in I$, von Mengen aus $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} O_i$ wieder in $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ liegt.

- Um die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte zu sehen, verwenden wir die Eigenschaft (U2). Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, und $x \in O_1 \cap O_2$. Wähle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $U_1(x) \subseteq O_1$ und $U_2(x) \subseteq O_2$. Es gilt stets
$$U_1(x) \cap U_2(x) = (U_1 \cap U_2)(x),$$
und wir schliessen, dass $(U_1 \cap U_2)(x) \subseteq O_1 \cap O_2$.

1.2.2 Beispiel. Im Fall der Uniformität eines pseudometrischen Raumes erhält man tatsächlich die übliche Topologie des Raumes. Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Bedenkt man die Konstruktion von $\mathcal{U}_d$, so sieht man dass
$$O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_d} \Leftrightarrow \forall x \in O\ \exists n \in \mathbb{N}.\ S_n(x) \subseteq O$$
Nun ist
$$S_n(x) = \{y \in X\colon\ d(x, y) < \frac{1}{n}\},$$
also die $\frac{1}{n}$-Kugel mit Mittelpunkt x. ◊

Um mit der Topologie einer Uniformität arbeiten zu können ist die Tatsache praktisch, das man die Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ explizit bestimmen kann.

1.2.3 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, und $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie. Dann gilt für jedes $x \in X$*

$$\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x) = \{U(x) \colon\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Beweis. Bezeichne das Mengensystem auf der rechten Seite mit $\mathcal{W}(x)$. Als erstes bemerken wir, dass $\mathcal{W}(x)$ ein Filter ist:

- Wegen $\mathcal{U} \neq \emptyset$ ist auch $\mathcal{W}(x) \neq \emptyset$. Da stets $x \in U(x)$ gilt, ist kein Element von $\mathcal{W}(x)$ leer.
- Wegen $U_1(x) \cap U_2(x) = (U_1 \cap U_2)(x)$ ist $\mathcal{W}(x)$ bezüglich endlicher Durchschnitte abgeschlossen.
- Sei $U \in \mathcal{U}$ und $W \subseteq X$ mit $U(x) \subseteq W$. Setze

  $$V := U \cup \{x\} \times W.$$

  Dann gilt $U \subseteq V$, und daher $V \in \mathcal{U}$. Nun ist V so definiert, dass $V(x) = W$.

Als zweites bemerken wir, dass die Definition von $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ nun besagt

$$O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \ \Leftrightarrow\ \forall x \in O\ \exists W \in \mathcal{W}(x).\ \ W \subseteq O.$$

Die Inklusion $\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x) \subseteq \mathcal{W}(x)$ ist einfach einzusehen. Sei dazu $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$. Wähle $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ mit $x \in O \subseteq W$, und nun wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $U(x) \subseteq O$. Dann gilt $U(x) \subseteq W$, und damit $W \in \mathcal{W}(x)$.

Um die umgekehrte Inklusion einzusehen, zeigen wir zuerst die folgende Tatsache:

$$\forall x \in X, W \in \mathcal{W}(x)\ \exists W' \in \mathcal{W}(x)\ \forall y \in W'.\ \ W \in \mathcal{W}(y).$$

Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $W = U(x)$. Nun wähle $U' \in \mathcal{U}$ mit $U' \circ U' \subseteq U$, und setze $W' := U'(x)$. Sei $y \in W'$. Wir zeigen, dass $U'(y) \subseteq W$, und damit dass $W \in \mathcal{W}(y)$. Sei dazu $z \in U'(y)$. Dann haben wir $(x, y) \in U'$ und $(y, z) \in U'$, also $(x, z) \in U' \circ U' \subseteq U$, d.h. $z \in U(x)$.

Nun zeigen wir

$$\forall x \in X, W \in \mathcal{W}(x).\ \ \widetilde{W} := \{y \in X \colon\ W \in \mathcal{W}(y)\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}.$$

Sei dazu $z \in \widetilde{W}$. Dann ist also $W \in \mathcal{W}(z)$, und wir finden nach dem oben bewiesenen eine Menge $W' \in \mathcal{W}(z)$ mit $W \in \mathcal{W}(y)$, $y \in W'$. Damit haben wir $W' \subseteq \widetilde{W}$. Nach obiger Charakterisierung von $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ schliessen wir dass $\widetilde{W} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

Sei nun $W \in \mathcal{W}(x)$. Für die oben konstruierte Menge $\widetilde{W}$ gilt offenbar $x \in \widetilde{W}$ und $\widetilde{W} \subseteq W$. Da $\widetilde{W} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, haben wir daher $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$. □

Als einfache Folgerung erhalten wir

1.2.4 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ uniforme Räume, und $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ gleichmäßig stetig. Dann ist $f : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}}) \to (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{V}}$ mit $f(x) \in O$. Wähle $V \in \mathcal{V}$ mit $V(f(x)) \subseteq O$, und setze $U := (f \times f)^{-1}(V)$. Dann ist $U \in \mathcal{U}$, und daher $U(x)$ eine Umgebung von x bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Ist $y \in U(x)$, d.h. $(x, y) \in U$, so folgt $(f(x), f(y)) \in V$, d.h. $f(y) \in V(f(x))$. Wir haben also $f(U(x)) \subseteq V(f(x))$. □

`Kategorielle Perspektive:`

Wir haben einen Funktor $F^{\mathtt{U}}_{\mathtt{T}} : \mathtt{Unif} \to \mathtt{Top}$. Nämlich indem wir einem uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ den topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ zuweisen, und $F^{\mathtt{U}}_{\mathtt{T}}$ auf Morphismen als $f \mapsto f$ agieren lassen.

Wir wollen nun zu dem Beispiel einer topologischen Gruppe zurückkehren. Hat man eine topologische Gruppe $(X, \cdot, \mathcal{T})$, so hat man in kanonischer Weise auch die Uniformität $\mathcal{U}$ der topologischen Gruppe. Diese erzeugt nach dem Obigen wiederum eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

1.2.5 Proposition. *Sei $(X, \cdot, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, $\mathcal{U}$ die Uniformität der Gruppe, und $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ die von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie. Dann gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}$.*

Beweis. Wir verwenden wiederholt die Beschreibung Lemma 1.2.3 des $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-Umgebungsfilters eines Elementes.

① Wir zeigen $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e) = \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e)$.
Es gilt

$$\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e) = \{U(e) \colon\ U \in \mathcal{U}\} = \{\{y \in X \colon\ (e, y) \in U\} \colon\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Nach Definition von $\mathcal{U}$ existiert für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Menge $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ mit $S_W \subseteq U$. Also ist

$$\{\{y \in X \colon\ (e, y) \in S_W\} \colon\ W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)\}$$

eine Filterbasis von $\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e)$.

Nun gilt für $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ dass

$$\{y \in X \colon\ (e, y) \in S_W\} = \{y \in X \colon\ y^{-1} \in W\} = W^{-1}.$$

Da die Inversenbildung $x \mapsto x^{-1}$ ein Homöomorphismus bzgl. $\mathcal{T}$ ist, ist $\{W^{-1} \colon\ W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)\} = \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$. Wir sehen, dass $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e)$ ist. Da $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ selbst schon ein Filter ist, folgt $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e) = \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e)$.

② Wir zeigen dass alle Translationen $T_z : x \mapsto xz$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ stetig sind.
Sei $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(e)$ gegeben. Es gilt

$$\mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(xz) = \{U(xz) \colon\ U \in \mathcal{U}\} = \{\{y \in X \colon\ (xz, y) \in U\} \colon\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $V = \{y \in X \colon\ (xz, y) \in U\}$, und wähle $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(e)$ mit $S_W \subseteq U$. Dann gilt

$$V \supseteq \{y \in X \colon\ (xz, y) \in S_W\} = \{y \in X \colon\ xz \cdot y^{-1} \in W\}.$$

Setze $V' := \{y \in X \colon\ xy^{-1} \in W\}$. Dann ist $V' \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$. Für $y \in V'$ gilt $xz \cdot (yz)^{-1} = xy^{-1} \in W$, also ist

$$T_z(V') \subseteq V.$$

□

Die Trennungseigenschaft (T_1) läßt sich in einfacher Weise charakterisieren.

1.2.6 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann gilt*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \textit{ ist } (\mathrm{T}_1) \iff \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \textit{ ist } (\mathrm{T}_0) \iff \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta.$$

Beweis. Die Implikation $(\mathrm{T}_1) \Rightarrow (\mathrm{T}_0)$ gilt stets.

Sei vorausgesetzt, dass (T_0) gilt. Ist $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, so existiert $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ sodass entweder $x \in O, y \notin O$ oder $y \in O, x \notin O$. Im ersten Fall wähle $U \in U$ mit $U(x) \subseteq O$. Wegen $y \notin U(x)$ haben wir $(x, y) \notin U$. Im zweiten Fall wähle $U \in U$ mit $U(y) \subseteq O$. Wegen $x \notin U(y)$ haben wir $(y, x) \notin U$, und daher $(x, y) \notin U^{-1} \in \mathcal{U}$.

Sei vorausgesetzt, dass $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$, und seien x, y zwei verschiedene Punkte von X. Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $(x, y) \notin U$. Dann gilt $y \notin U(x) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$ und $x \notin U^{-1}(y) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(y)$. □

1.2.7 Beispiel. Wir wollen in diesem Kontext zu dem Beispiel eines pseudometrischen Raumes zurückkehren. Sei (X, d) ein pseudometrischer Raum, $\mathcal{U}_d$ die von d induzierte Uniformität, und $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie (wir wissen bereits aus Beispiel 1.2.2, dass $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_d}$). Es gilt

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_d} U = \{(x, y) \colon\ d(x, y) = 0\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{T}_d \text{ ist } (\mathrm{T}_1) \iff \mathcal{T}_d \text{ ist } (\mathrm{T}_0) \iff d \text{ ist Metrik}.$$

◊

1.3 Totale Beschränktheit, Vollständigkeit

1.3.1 Definition. Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{U})$ heißt *total beschränkt*, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}\ \exists x_1, \ldots, x_n \in X.\ X = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_n).$$

◊

1.3.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum.

➢ Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ heißt ein *Cauchy-Netz* in $(X, \mathcal{U})$, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}\ \exists i_0 \in I\ \forall i, j \geq i_0.\ (x_j, x_i) \in U.$$

➢ Der uniforme Raum $(X, \mathcal{U})$ heißt *vollständig*, wenn jedes Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{U})$ bzgl. der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ konvergent ist.

◊

1.3.3 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{U})$ und $(Y, \mathcal{V})$ uniforme Räume, und $\varphi : X \to Y$.*

(i) *Sei φ surjektiv und gleichmäßig stetig. Ist $(X, \mathcal{U})$ total beschränkt, so ist auch $(Y, \mathcal{V})$ total beschränkt.*

(ii) *Sei φ bijektiv, und $\varphi : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}}) \to (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ stetig, und $\varphi^{-1} : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{U})$ gleichmäßig stetig. Ist $(X, \mathcal{U})$ vollständig, so ist auch $(Y, \mathcal{V})$ vollständig.*

Beweis.

① Wir zeigen (i).
Sei $V \in \mathcal{V}$ gegeben. Setze $U := (f \times f)^{-1}(V)$, dann ist $U \in \mathcal{U}$. Wähle $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_n)$. Sei nun $y \in Y$, und wähle $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wähle $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in U(x_{i_0})$, dann gilt also $(x_{i_0}, x) \in U$. Damit folgt $(f(x_{i_0}), f(x)) \in V$, also $f(x) \in V(f(x_{i_0}))$. Wir sehen, dass $Y = V(f(x_1)) \cup \ldots \cup V(f(x_n))$.

② Wir zeigen (ii).
Sei $(y_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in $(Y, \mathcal{V})$, und setze $x_i := f^{-1}(y_i)$. Ist $U \in \mathcal{U}$, so ist

$$V := (f^{-1} \times f^{-1})^{-1}(U) \in \mathcal{V}.$$

Wähle $i_0 \in I$, sodass für alle $i, j \geq i_0$ gilt $(y_j, y_i) \in V$. Dann gilt

$$(x_j, x_i) = (f^{-1} \times f^{-1})(y_j, y_i) \in U, \quad i, j \geq i_0.$$

Also ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{U})$. Sei $x \in X$ mit $(x_i)_{i \in I} \to x$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Dann folgt $(f(x_i))_{i \in I} \to f(x)$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{V}}$.

□

Wir können nun eine, zu der aus der Theorie der metrischen Räume bekannten analoge, Charakterisierung von Kompaktheit zeigen.

1.3.4 Satz. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ is kompakt.*

(ii) *$(X, \mathcal{U})$ ist vollständig und total beschränkt.*

Beweis von Satz 1.3.4*, "(i)⇒(ii)".* Wir zeigen, dass X total beshränkt ist. Sei $U \in \mathcal{U}$. Für $x \in X$ ist $U(x) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x)$, und $X = \bigcup_{x \in X} U(x)$. Daher finden wir $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$.

Sei nun $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{U})$. Wähle ein konvergentes Teilnetz $\iota : J \to I$ und $x \in X$ mit $(x_{\iota(j)})_{j \in J} \to x$. Wir zeigen, dass auch $(x_i)_{i \in I} \to x$. Sei $U \in \mathcal{U}$, und wähle $V \in \mathcal{U}$ mit $V \circ V \subseteq U$. Wähle $i_0 \in I$ mit $(x_i, x_l) \in V$, $i, l \geq i_0$. Wähle $j_0 \in J$ mit $x_{\iota(j)} \in V(x)$, $j \geq j_0$, und $\iota(j_0) \geq i_0$. Dann gilt

$$(x, x_l) = (x, x_{\iota(j_0)}) \circ (x_{\iota(j_0)}, x_l) \in V \circ V \subseteq U, \quad l \geq i_0.$$

□

Für den Beweis der Umkehrung verwenden wir die folgenden beiden Lemmata.

1.3.5 Lemma. *Sei X eine Menge, und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in x. Dann existiert ein Teilnetz $\iota : J \to I$ von $(x_i)_{i\in I}$ sodass*

$$\forall M \subseteq X.\ \ (\exists j_0 \in J\ \forall j \geq j_0.\ \ x_{\iota(j)} \in M) \vee (\exists j_0 \in J\ \forall j \geq j_0.\ \ x_{\iota(j)} \in M^c) \tag{1.3.1}$$

Beweis. Betrachte den Endstückfilter

$$\mathcal{F} := \{N \subseteq X\colon\ \exists i_0 \in I.\ \{x_i\colon\ i \geq i_0\} \subseteq N\},$$

und wähle einen Ultrafilter $\tilde{\mathcal{F}}$ mit $\tilde{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$.

Um ein Teilnetz zu konstruieren, defineren wir zunächst

$$J := \{(j, N) \in I \times \tilde{\mathcal{F}}\colon\ x_j \in N\},$$

und

$$(j, N) \geq (j', N') :\ \Leftrightarrow\ (j \geq j' \wedge N \subseteq N').$$

Mit dieser Relation wird J zu einer gerichteten Menge: Die Reflexivität und Transitivität von $\geq$ ist klar. Seien $(j, N), (j', N') \in J$. Wähle $k \in I$ mit $k \geq j, j'$. Dann ist

$$N \cap N' \cap \{x_i\colon\ i \geq k\} \in \tilde{\mathcal{F}},$$

und daher nichtleer. Wähle $k' \geq k$ sodass $x_{k'} \in N \cap N'$, dann ist

$$(k', N \cap N') \in J \text{ und } (k', N \cap N') \geq (j, N), (j', N').$$

Die Abbildung $\iota : J \to I$ sei nun die Projektion auf die erste Komponente: $\iota(j, N) := j$. Offenbar ist ι monoton. Weiters gilt $\iota(J) = I$ da für jedes $i \in I$ das Paar $(i, \{x_j\colon\ j \geq i\})$ zu J gehört, insbesondere ist $\iota(J)$ cofinal in I. Wir haben also das Teilnetz $(x_{\iota(j,N)})_{(j,N)\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$.

Wir zeigen jetzt, dass dieses Teilnetz die gewünschte Eigenschaft (1.3.1) hat. Sei dazu $M \subseteq X$. Dann ist, da $\tilde{\mathcal{F}}$ ein Ultrafilter ist, entweder $M \in \tilde{\mathcal{F}}$ oder $M^c \in \tilde{\mathcal{F}}$. Betrachte den ersten Fall. Wähle $i_0 \in I$ beliebig, dann ist $M \cap \{x_i\colon\ i \geq i_0\} \in \tilde{\mathcal{F}}$, also nichtleer. Wähle $i_1 \geq i_0$ mit $x_{i_1} \in M$, dann ist $(i_1, M) \in J$. Für $(j, N) \geq (i_1, M)$ gilt $x_{\iota(j,N)} = x_j \in N \subseteq M$. Den zweiten Fall behandelt man genauso. □

1.3.6 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{U})$ ein total beschränkter uniformer Raum, und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X für welches die Eigenschaft* (1.3.1) *gilt. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{U})$.*

Beweis. Sei $U \in \mathcal{U}$, und wähle $V \in \mathcal{U}$ mit $V = V^{-1}$ und $V \circ V \subseteq U$. Wähle $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_n)$. Für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt wegen (1.3.1)

$$(\exists i_l \in I\ \forall i \geq i_l.\ \ x_i \in V(x_l)) \vee (\exists i_l \in I\ \forall i \geq i_l.\ \ x_i \in V(x_l)^c)$$

Sei angenommen dass für alle $l \in \{1, \ldots, n\}$ die zweite Alternative eintritt. Wähle $i \in I$ mit $i \geq i_1, \ldots, i_n$, dann ist $x_i \in V(x_1)^c \cap \ldots \cap V(x_n)^c = \emptyset$, ein Widerspruch. Also, existiert $l_0 \in \{1, \ldots, n\}$ sodass für l_0 die erste Alternative eintritt. Damit folgt

$$(x_j, x_i) = (x_{l_0}, x_j)^{-1} \circ (x_{l_0}, x_i) \in V^{-1} \circ V = V \circ V \subseteq U, \quad i, j \geq i_{l_0}.$$

□

Beweis von Satz 1.3.4, "(ii)⇒(i)". Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Nach Lemma 1.3.5 finden wir ein Teilnetz $\iota : J \to I$ sodass $(x_{\iota(j)})_{j\in J}$ die Eigenschaft (1.3.1) hat. Nach Lemma 1.3.6 ist $(x_{\iota(j)})_{j\in J}$ ein Cauchy-Netz in $(X, \mathcal{U})$, und daher konvergent in $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$. □

1.4 Metrisierbarkeit

Wir einen uniformen Raum $(X, \mathcal{U})$ *pseudometrisierbar* (bzw. *metrisierbar*), wenn es eine Pseudometrik (bzw. Metrik) d auf X gibt, sodass die von d gemäß Beispiel 1.1.4 induzierte Uniformität $\mathcal{U}_d$ gleich $\mathcal{U}$ ist.

1.4.1 Satz. *Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{U})$ ist genau dann pseudometrisierbar, wenn der Filter $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat.*

Dass die angegebene Abzählbarkeitseigenschaft notwendig für Pseudometrisierbarkeit ist, ist klar.

Beweis von Satz 1.4.1*, "⇒".* Sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$ für eine Pseudometrik d auf X. Dann bilden, nach Definition von $\mathcal{U}_d$, die Mengen

$$U_n := \{(x,y) \in X \times X\colon\ d(x,y) < \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Filterbasis von $\mathcal{U}$. □

Die umgekehrte Implikation zu zeigen erfordert die Konstruktion einer geeigneten Pseudometrik.

Beweis von Satz 1.4.1*, "⇐".* Sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat, und sei

$$\mathcal{B} = \{U_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$$

eine solche.

① Wir konstruieren induktiv Mengen V_n, $n \in \mathbb{N}$, mit den Eigenschaften

$$V_0 = X \times X, \quad V_n \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}, \quad V_n = V_n^{-1},\ n \geq 0, \quad V_n \circ V_n \circ V_n \subseteq U_n \cap V_{n-1},\ n \geq 1. \tag{1.4.1}$$

Beachte, dass wegen $V_n \in \mathcal{U}$ und $V_n \subseteq V_n \circ V_n \circ V_n \subseteq U_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, die Familie $C := \{V_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ sein wird.

Für $n = 0$ setze $V_0 := X \times X$, dann gelten alle Eigenschaften (1.4.1). Sei nun $n \geq 1$, und sei angenommen dass $V_0, \ldots, V_{n-1}$ mit (1.4.1) schon konstruiert sind. Es ist $U_n \cap V_{n-1} \in \mathcal{U}$, also finden wir $W_n \in \mathcal{U}$ mit $W_n = W_n^{-1}$ und $W_n \circ W_n \subseteq U_n \cap V_{n-1}$. Wegen $W_n \in \mathcal{U}$ finden wir $V_n \in \mathcal{U}$ mit $V_n = V_n^{-1}$ und $V_n \circ V_n \subseteq W_n$. Wir erhalten

$$V_n \circ V_n \circ V_n \subseteq (V_n \circ V_n) \circ (V_n \circ V_n) \subseteq W_n \circ W_n \subseteq U_n \cap V_{n-1}.$$

② Betrachte die Funktion

$$f(x,y) := \inf\{2^{-n}\colon\ n \geq 0, (x,y) \in V_n\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist stets nichtleer denn $V_0 = X \times X$.

Die Funktion f hat die folgenden Eigenschaften:

- Wir haben stets $f(x,y) \in [0,1]$.
- Da $V_n \supseteq V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}\colon\ (x,y) \in V_n\}$ ein Intervall $[0, n_0]$ in $\mathbb{N}$, oder ganz $\mathbb{N}$. Im ersten Fall ist $f(x,y) = 2^{-n_0} = \min\{2^{-n}\colon\ n \geq 0, (x,y) \in V_n\}$, im zweiten Fall ist $f(x,y) = 0$.
- Es gilt $V_n = \{(x,y) \in X \times X\colon\ f(x,y) \leq 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere bilden die Mengen $\{(x,y) \in X \times X\colon\ f(x,y) \leq 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Filterbasis von $\mathcal{U}$.
- Da $\Delta \subseteq V_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt stets $f(x,x) = 0$.
- Da $V_n = V_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt stets $f(x,y) = f(y,x)$.

③ Wäre f eine Pseudometrik, so hätten wir schon $\mathcal{U} = \mathcal{U}_f$, da ja die Mengen $\{(x,y) \in X \times X\colon\ f(x,y) \leq 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Filterbasis von $\mathcal{U}_f$ bilden würden, cf. Beispiel 1.1.4. Leider erfüllt f im Allgemeinen nicht die Dreiecksungleichung. Um diese zu erzwingen betrachte die Funktion

$$d(x,y) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)\colon\ m \geq 1,\ (x_0, \ldots, x_m) \in X^{m+1},\ x_0 = x, x_m = y\Big\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nichtleer, denn sie enthält stets (die Wahl für $m = 1$) den Wert $f(x,y)$. Insbesondere haben wir also

$$d(x,y) \leq f(x,y), \quad x, y \in X. \tag{1.4.2}$$

Weiters sind alle Elemente der Menge auf der rechten Seite nichtnegativ, also ist auch $d(x,y) \geq 0$. Wir wollen nun nachrechnen, dass d eine Pseudometrik ist:

➢ Stets gilt $0 \leq d(x,x) \leq f(x,x) = 0$, also $d(x,x) = 0$.

➢ Die Mengen in den Definitionen von $d(x,y)$ und $d(y,x)$ sind gleich: Sei $m \geq 1$ und $(x_0, \ldots, x_m) \in X^{m+1}$ mit $x_0 = x, x_m = y$. Setze $x'_j := x_{m-j}$, $j = 0, \ldots, m$, dann ist $(x'_m, \ldots, x'_0) \in X^{m+1}$ und $x'_0 = y, x'_m = x$. Weiters gilt wegen der Symmetrieeigenschaft von f

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i) = f(x_0, x_1) + \ldots + f(x_{m-1}, x_m) = f(x_1, x_0) + \ldots + f(x_m, x_{m-1}) = \sum_{l=1}^{m} f(x'_{l-1}, x'_l).$$

➢ Es gilt die Dreiecksungleichung: Seien $x, y, z \in X$, und seien $(x_0, \ldots, x_m) \in X^{m+1}$ mit $x_0 = x, x_m = y$, und $(x'_0, \ldots, x'_{m'}) \in X^{m'+1}$ mit $x'_0 = y, x'_{m'} = z$. Setze

$$y_i := \begin{cases} x_i &, \quad i = 0, \ldots, m, \\ x'_{i-m} &, \quad i = m+1 \ldots, m+m'. \end{cases}$$

Dann ist $(y_0, \ldots, y_{m+m'}) \in X^{m+m'+1}$ mit $y_0 = x, y_{m+m'} = z$, und

$$d(x,z) \leq \sum_{i=1}^{m+m'} f(y_{i-1}, y_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i) + \sum_{i=1}^{m'} f(x'_{i-1}, x'_i).$$

Geht man zum Infimum über alle Folgen $(x_0, \ldots, x_m)$ und $(x'_0, \ldots, x'_{m'})$ über, so folgt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

④ Die Ungleichung (1.4.2) gewährleistet dass $\mathcal{U}_d \subseteq \mathcal{U}$. Denn wir haben

$$S''_n := \{(x,y) \in X \times X : \ d(x,y) \leq 2^{-n}\} \supseteq \{(x,y) \in X \times X : \ f(x,y) \leq 2^{-n}\} = V_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

die Mengen S''_n bilden eine Filterbasis von $\mathcal{U}_d$, und die Mengen V_n gehören zu $\mathcal{U}$.

⑤ Wir zeigen nun eine zu (1.4.2) bis auf eine Konstante umgekehrte Ungleichung, nämlich

$$f(x,y) \leq 2d(x,y), \quad x, y \in X. \tag{1.4.3}$$

Dazu zeigen wir mittels Induktion nach m dass

$$f(x_0, x_m) \leq 2 \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i), \quad (x_0, \ldots, x_m) \in X^{m+1}. \tag{1.4.4}$$

Daraus folgt (1.4.3) sofort, indem man zum Infimum über $m \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_{m-1}$ übergeht.

Für $m = 1$ gilt (1.4.4), denn $f(x_0, x_1) \geq 0$. Sei $m > 1$ und sei vorausgesetzt, dass (1.4.4) für alle Folgen in $X^{m'+1}$ mit $m' < m$ gilt. Sei $(x_0, \ldots, x_m) \in X^{m+1}$ gegeben, und setze

$$r := \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i).$$

Wir erledigen zuerst den Fall dass $r = 0$. In diesem Fall gilt $f(x_{i-1}, x_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, also $(x_{i-1}, x_i) \in V_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $n' \in \mathbb{N}$ mit

$$\underbrace{V_{n'} \circ \ldots \circ V_{n'}}_{m \text{ mal}} \subseteq V_n.$$

Diese Wahl ist wegen der letzten Eigenschaft in (1.4.1) sicherlich möglich. Dann gilt

$$(x_0, x_m) = (x_0, x_1) \circ \ldots \circ (x_{m-1}, x_m) \in V_\infty \circ \ldots \circ V_\infty \subseteq V_{n'} \circ \ldots \circ V_{n'} \subseteq V_n,$$

und da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war folgt $(x_0, x_m) \in V_\infty$. Also haben wir auch $f(x_0, x_m) = 0$.

Sei nun angenommen dass $r > 0$. Sei $j \in \{0, \ldots, m\}$ die größte Zahl mit

$$\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leq \frac{r}{2}.$$

Da $r > 0$ ist, gilt $j \leq m-1$. Weiters ist $\sum_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1}, x_i) > \frac{r}{2}$, und daher $f(x_j, x_{j+1}) > 0$ und $\sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) < \frac{r}{2}$ (wobei wir eine leere Summe als 0 verstehen). Wir haben nach Induktionsvoraussetzung und da alle Summanden $f(x_{i-1}, x_i)$ nichtnegativ sind,

$$f(x_0, x_j) \leq 2 \sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leq r, \quad f(x_j, x_{j+1}) \leq r, \quad f(x_{j+1}, x_m) \leq 2 \sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) < r.$$

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $2^{-l} \leq r$. Wir zeigen, dass

$$(x_0, x_j), (x_j, x_{j+1}), (x_{j+1}, x_m) \in V_l. \tag{1.4.5}$$

- ➢ Betrachte die Zahl $f(x_0, x_j)$. Ist $f(x_0, x_j) = 0$, so gilt $(x_0, x_j) \in V_\infty \subseteq V_l$. Ist $f(x_0, x_j) > 0$, so haben wir $f(x_0, x_j) = 2^{-n}$ wobei n die größte Zahl mit $(x_0, x_j) \in V_n$ ist. Nun ist $2^{-n} = f(x_0, x_j) \leq r$, und es folgt $l \leq n$ und damit $(x_0, x_j) \in V_n \subseteq V_l$.
- ➢ Wir haben $0 < f(x_j, x_{j+1})$, also ist $f(x_j, x_{j+1}) = 2^{-n}$ wobei n die größte Zahl mit $(x_j, x_{j+1}) \in V_n$ ist. Nun ist $2^{-n} = f(x_j, x_{j+1}) \leq r$, und es folgt $l \leq n$ und damit $(x_j, x_{j+1}) \in V_n \subseteq V_l$.
- ➢ Wir haben $f(x_{j+1}, x_m) < r$, also existiert eine Zahl n mit $2^{-n} < r$ und $(x_{j+1}, x_m) \in V_n$. Es folgt $l \leq n$ und damit $(x_{j+1}, x_m) \in V_n \subseteq V_l$.

Zusammen haben wir (1.4.5) gezeigt, und erhalten vermöge (1.4.1)

$$(x_0, x_m) = (x_0, x_j) \circ (x_j, x_{j+1}) \circ (x_{j+1}, x_m) \in V_l \circ V_l \circ V_l \subseteq V_{l-1}.$$

Damit folgt $f(x_0, x_m) \leq 2^{-(l-1)} = 2 \cdot 2^{-l} \leq 2r = 2 \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$.

⑥ Die Ungleichung (1.4.3) gewährleistet dass $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_d$. Denn wir haben

$$V_n = \{(x, y) \in X \times X : \ f(x, y) \leq 2^{-n}\} \supseteq S''_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

die Mengen V_n bilden eine Filterbasis von $\mathcal{U}$, und die Mengen S''_n gehören zu $\mathcal{U}_d$.

□

Gemeinsam mit Beispiel 1.2.7 erhalten wir unmittelbar das folgende Korollar.

1.4.2 Korollar. *Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{U})$ ist genau dann metrisierbar, wenn der Filter $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat und $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$ gilt.* □

Kehrt man zum Beispiel topologischer Gruppen zurück, so erhält man eine interessante Strukturaussage.

Dazu erinnern wir an die folgenden Begriffe. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *pseudometrisierbar* (bzw. *metrisierbar*), wenn es eine Pseudometrik (bzw. Metrik) d auf X gibt, sodass die von d induzierte Topologie gleich $\mathcal{T}$ ist. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *1.Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Umgebungsfilter $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ eine abzählbare Basis besitzt.

Offensichtlich erfüllt jeder metrisierbare Raum das 1.Abzählbarkeitsaxiom, denn die Kugeln mit Radius $\frac{1}{n}$ und Mittelpunkt x bilden eine Umgebungsbasis von x. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

1.4.3 Proposition. *Sei $(X, \cdot, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar, wenn $(X, \mathcal{T})$ das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Beweis. Wie oben bemerkt, gilt die Implikation "⇒" sowieso ganz allgemein. Sei also vorausgesetzt, dass $(X, \mathcal{T})$ das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann hat insbesondere der Umgebungsfilter des Einselementes der Gruppe eine abzählbare Basis, und damit auch die Uniformität $\mathcal{U}$ der Gruppe. Nach Satz 1.4.1 ist $\mathcal{U}$ pseudometrisierbar, sagen wir vermöge einer Pseudometrik d. Nach Beispiel 1.2.2 ist die von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ gerade die von d induzierte Topologie, also ist der toplogische Raum $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}})$ pseudometrisierbar. Nun wissen wir aus Proposition 1.2.5, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}$ gilt. □

1.5 Topologisierbarkeit

Wir nennen einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ *uniformisierbar*, wenn es eine Uniformität $\mathcal{U}$ auf X gibt, sodass die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ gleich $\mathcal{T}$ ist.

1.5.1 Satz. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann uniformisierbar, wenn die Topologie $\mathcal{T}$ die Eigenschaft* $(T_{3½})$ *hat.*

Beweis von Satz 1.5.1, *"⇐".* Wir beginnen mit einer allgemeinen Konstruktion.

① Sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen von X nach $[0, 1]$. Wir konstruieren eine Uniformität auf X.
Setze
$$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|, \quad f \in \mathcal{F}.$$
Dann ist d_f eine Pseudometrik auf X. Sei $\mathcal{U}_f$ die von d_f induzierte Uniformität, und setze
$$\mathcal{S} := \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{U}_f.$$
Dieses Mengensystem hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall U \in \mathcal{S}.\ \Delta \subseteq U$.
(ii) $\forall U \in \mathcal{S}\ \exists V \in \mathcal{S}.\ V \circ V \subseteq U$.
(iii) $\forall U \in \mathcal{S}.\ U^{-1} \in \mathcal{S}$.

Um dies zu sehen, genügt es zu bemerken, dass ein Element von $\mathcal{S}$ zu mindestens einer der Mengen $\mathcal{U}_f$ gehört, und dass $\mathcal{U}_f$ eine Uniformität ist.

Sei nun $\mathcal{B}$ die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h.
$$\mathcal{B} := \Big\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i :\ n \geq 1,\ U_i \in \mathcal{S}\Big\}.$$
Dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Eigenschaften (B1)–(B4) von Lemma 1.1.3:

➢ (B1) ist klar wegen (i).
➢ (B2) gilt da $\mathcal{B}$ nach Definition sogar unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.
➢ (B3) gilt wegen (ii) und
$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\Big) \circ \Big(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\Big) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (V_i \circ V_i).$$
➢ (B4) gilt wegen (iii) und
$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big)^{-1} = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^{-1}\Big).$$
NachLemma 1.1.3 ist
$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \times X :\ \exists n \geq 1, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}.\ U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq U\}$$
eine Uniformität auf X.

② Sei nun $\mathcal{F}$ eine Menge stetiger Funktionen von X nach $[0, 1]$, und $\mathcal{U}$ die wie oben konstruierte Uniformität. Wir zeigen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{T}$.
Sei $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ und $x_0 \in O$. Wähle $U \in \mathcal{U}$ mit $U(x_0) \subseteq O$, wähle $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}$ mit $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq U$, und wähle $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ mit
$$\big\{(x, y) \in X \times X :\ |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon_i\big\} \subseteq U_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Da die Funktionen f_i alle stetig bzgl. $\mathcal{T}$ sind, finden wir $W \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x_0)$ mit
$$|f_i(x_0) - f_i(y)| < \epsilon_i, \quad y \in W, i = 1, \ldots, n.$$
Es folgt $W \subseteq U_1(x_0) \cap \ldots \cap U_n(x_0) \subseteq U(x_0) \subseteq O$, also ist $O \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x_0)$. Da $x_0 \in O$ beliebig war, folgt $O \in \mathcal{T}$.

③ Sei nun vorausgesetzt dass $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom $(T_{3\frac{1}{2}})$ erfüllt, und sei $\mathcal{F}$ die Menge aller stetiger Funktionen von X nach $[0,1]$. Sei $\mathcal{U}$ wieder die oben konstruierte Uniformität. Wir zeigen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} \supseteq \mathcal{T}$.

Sei $O \in \mathcal{T}$ und $x_0 \in O$. Wähle $f \in \mathcal{F}$ mit $f(O^c) = \{0\}$ und $f(x_0) = 1$, und betrachte

$$U := \{(x,y) \in X \times X\colon\ |f(x) - f(y)| < 1\} \in \mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}.$$

Dann gilt

$$U(x_0) \subseteq f^{-1}((0,1]) \subseteq O.$$

Also ist $O \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}}(x_0)$. Da $x_0 \in O$ beliebig war, folgt $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

□

Beweis von Satz 1.5.1*, "⇒".* Sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{T}$ uniformisierbar ist, und wähle eine Uniformität $\mathcal{U}$ auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Die folgende Argumentation ist in gewissem Sinne ähnlich dem Beweis des Lemmas von Urysohn.

① Sei $U \in \mathcal{U}$. Wir konstruieren eine, mit einer dichten Teilmenge I von $[0,1]$ parameterisierte, Familie $(V_i)_{i \in I}$ von Mengen.

Die angesprochene Indexmenge I ist die Menge aller rationalen Zahlen in $[0,1]$ mit endlicher dyadischer Zifferndarstellung, d.h.,

$$I := \Big\{ \sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i}\colon\ m \geq 1,\ 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_m \Big\} \cup \{0,1\}.$$

Wähle nun induktiv Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$U_n \in \mathcal{U},\ U_n \subseteq U, \quad U_n = U_n^{-1},\ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

und setze

$$V_0 := \Delta,\ V_1 := U_0, \qquad V_r := U_{n_1} \circ U_{n_2} \circ \ldots \circ U_{n_m} \text{ für } r = \sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i} \in I \setminus \{0,1\}.$$

Wir wollen zwei, sich unmittelbar aus dieser Definition ergebende, Eigenschaften der Mengen V_r festhalten:

➢ Es gilt stets $V_{2^{-n}} = U_n$.

➢ Hat man Zahlen $r, r' \in I$ mit Entwicklungen $r = \sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i}$ und $r' = \sum_{i=1}^{m'} 2^{-n'_i}$, und gilt $n_m < n'_1$, so ist

$$V_{r+r'} = V_r \circ V_{r'}. \tag{1.5.1}$$

② Wir zeigen, dass die oben konstruierte Familie die folgende Eigenschaft hat:

$$\forall n \geq 0\ \forall k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}.\ V_{k2^{-n}} \circ U_n \subseteq V_{(k+1)2^{-n}}. \tag{1.5.2}$$

Dazu machen wir Induktion nach n. Für $n = 0$ ist (1.5.2) erfüllt, denn die einzige Wahl von k ist $k = 0$ und nach Definition gilt $V_0 \circ U_0 = \Delta \circ U_0 = U_0 = V_1$. Sei nun $n \geq 1$, und sei angenommen, dass (1.5.2) für alle kleineren Werte von n gilt. Weiters sei $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

➢ Betrachte den Fall, dass k gerade ist, und schreibe $k = 2j$. Dann ist $j \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$, und es gilt $k2^{-n} = j2^{-(n-1)}$. Um $V_{(k+1)2^{-n}}$ zu berechnen, betrachte die dyadische Entwicklung der Zahl $(k+1)2^{-n}$. Es ist $(k+1)2^{-n} = k2^{-n} + 2^{-n} = j2^{-(n-1)} + 2^{-n}$. Da j ganzzahlig ist, ist die dyadische Entwicklung von $j2^{-(n-1)}$ von der Gestalt $\sum_{i=1}^{m} 2^{-n_i}$ mit $n_m \leq n - 1$. Benützt man (1.5.1), so folgt

$$V_{(k+1)2^{-n}} = V_{j2^{-(n-1)}} \circ V_{2^{-n}} = V_{k2^{-n}} \circ U_n.$$

Wir sehen, dass (1.5.2) gilt (sogar mit Gleichheit).

➢ Sei nun k ungerade, und schreibe $k = 2j + 1$. Dann ist $j \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$, und es gilt $k2^{-n} = j2^{-(n-1)} + 2^{-n}$ und $(k+1)2^{-n} = (j+1)2^{-(n-1)}$. Es folgt, unter Benützung von (1.5.1), der Eigenschaft $U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}$ und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$V_{k2^{-n}} \circ U_n = V_{j2^{-(n-1)}+2^{-n}} \circ U_n = \big(V_{j2^{-(n-1)}} \circ U_n\big) \circ U_n \subseteq V_{j2^{-(n-1)}} \circ U_{n-1} \subseteq V_{(j+1)2^{-(n-1)}} = V_{(k+1)2^{-n}}.$$

Damit ist (1.5.2) bewiesen.

Aus (1.5.2) erhalten wir insbesondere, dass

$$V_r \subseteq V_{r'}, \quad r, r' \in I, r \leq r'.$$

Denn schreibt man r, r' mit gemeinsamen Nenner als $r = k2^{-n}$ und $r' = (k+l)2^{-n}$, so ist $l \geq 0$ und iterierte Anwendung von (1.5.2) gibt $V_{k2^{-n}} \subseteq V_{(k+l)2^{-n}}$.

③ Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, und $x_0 \notin A$. Wir definieren eine Funktion $f: X \to [0,1]$.
Da $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ist, finden wir $U \in \mathcal{U}$ mit $U(x_0) \subseteq A^c$. Sei $(V_r)_{r \in I}$ eine von dieser Menge ausgehend konstruierte Familie, und

$$f(x) := \begin{cases} \sup\{r\colon\ x \notin V_r(x_0)\}, & x \neq x_0, \\ 0 \qquad , & x = x_0. \end{cases}$$

Die Menge über die das Supremum gebildet wird ist nichtleer, denn $V_0 = \Delta$. Weiters ist sie ein Intervall, da die Mengen V_r eine aufsteigende Familie sind.

Es gilt nach Definition $f(x_0) = 0$, und wegen $V_1(x_0) = U_0(x_0) \subseteq U(x_0) \subseteq A^c$ folgt $f(A) = \{1\}$.

④ Wir zeigen, dass f stetig ist.
Da I dicht in $[0,1]$ ist, genügt es dazu zu zeigen dass für jedes $r \in I$ die Mengen

$$O_{<r} := \{x \in X\colon\ f(x) < r\} \text{ und } O_{>r} := \{x \in X\colon\ f(x) > r\}$$

offen sind. Bemerke, dass $O_{<0} = O_{>1} = \emptyset$.

Sei $r \in I \setminus \{0\}$ und $x \in O_{<r}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < \frac{r - f(x)}{2}$. Wir zeigen, dass $U_n(x_0) \subseteq O_{<r}$. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$ jene Zahl mit

$$(k-1)2^{-n} \leq f(x) < k2^{-n}.$$

Dann ist

$$k2^{-n} \leq f(x) + 2^{-n} < f(x) + \frac{r - f(x)}{2} = \frac{r + f(x)}{2} \leq 1,$$

und daher $k \in \{1, \ldots, 2^{-n} - 1\}$. Da $f(x) < k2^{-n}$ ist, finden wir $r' \in I$ mit $f(x) < r' < k2^{-n}$. Nach der Definition von f folgt $x \in V_{r'}(x_0) \subseteq V_{k2^{-n}}(x_0)$. Für $y \in U_n(x)$ gilt nun nach (1.5.2)

$$(x_0, y) = (x_0, x) \circ (x, y) \in V_{k2^{-n}} \circ U_n \subseteq V_{(k+1)2^{-n}},$$

d.h. $y \in V_{(k+1)2^{-n}}(x_0)$. Damit folgt

$$f(y) \leq (k+1)2^{-n} = (k+1)2^{-n} + 2 \cdot 2^{-n} < f(x) + (r - f(x)) = r,$$

d.h., $y \in O_{<r}$.

Sei $r \in I \setminus \{1\}$ und $x \in O_{>r}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n} < \frac{f(x) - r}{2}$. Wir zeigen, dass $U_n(x_0) \subseteq O_{>r}$. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$ jene Zahl mit

$$(k-1)2^{-n} \leq r < k2^{-n}.$$

Dann ist

$$k2^{-n} \leq r + 2^{-n} < r + \frac{f(x) - r}{2} = \frac{f(x) + r}{2} \leq 1,$$

und daher $k \in \{1, \ldots, 2^{-n} - 1\}$. Sei nun $y \in U_n(x)$ und sei angenommen, dass $y \notin O_{>r}$. Dann ist $f(x) \leq r < k2^{-n}$, und damit $y \in V_{k2^{-n}}(x_0)$. Wir erhalten mit (1.5.2)

$$(x_0, x) = (x_0, y) \circ (y, x) \in V_{k2^{-n}}(x_0) \circ U_n^{-1} = V_{k2^{-n}}(x_0) \circ U_n \subseteq V_{(k+1)2^{-n}}(x_0).$$

Dies zeigt $f(x) \leq (k+1)2^{-n}$, und wir erhalten den Widerspruch

$$f(x) \leq (k+1)2^{-n} = (k-1)2^{-n} + 2 \cdot 2^{-n} < r + (f(x) - r) = f(x).$$

□

Als Korollar erhalten wir wieder eine Strukturaussage über topologische Gruppen.

1.5.2 Korollar. *Sei $(X, \cdot, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Dann erfüllt $\mathcal{T}$ die Eigenschaft* $(T_{3\frac{1}{2}})$.

Beweis. Nach Proposition 1.2.5 ist die Topologie einer topologischen Gruppe stets uniformisierbar. □

Kapitel 2

Kompaktifizierungen

2.1 Der Begriff der Kompaktifizierung

In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage ob man einen topologischen Raum stets in einen kompakten topologischen Raum einbetten kann, sprich, ihn als Teilraum eines kompakten auffassen kann.

Dazu präzisieren wir zunächst den Begriff einer Einbettung: Sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ topologische Räume und $\iota\colon X \to Y$, so heißt ι eine *Einbettung* von $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{V})$, wenn ι injektiv ist und $\iota\colon (X, \mathcal{T}) \to (\iota(X), \mathcal{V}|_{\iota(X)})$ ein Homöomorphismus ist. Hier bezeichnet $\mathcal{V}|_{\iota(X)}$ die Spurtopologie von $\mathcal{V}$ auf $\iota(X)$.

Bemerke, dass ι genau dann eine Einbettung ist, wenn $\mathcal{T}$ die initiale Topologie bzgl. $\iota\colon X \to (Y, \mathcal{V})$ ist.

2.1.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$ ist ein Paar $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$, sodass gilt:

- **(KF1)** $(Y, \mathcal{V})$ ist ein kompakter topologischer Raum.
- **(KF2)** $\iota_Y\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ ist eine Einbettung.
- **(KF3)** $\iota_Y(X)$ ist dicht in $(Y, \mathcal{V})$.

◊

Das dritte Axiom soll nur gewährleisten, dass Y nicht unnötig groß ist. Hat man $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$ mit den Eigenschaften (KF1) und (KF2), so ist $(\iota_Y, (\overline{\iota(X)}, \mathcal{V}|_{\overline{\iota(X)}}))$ eine Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Hier bezeichnet $\overline{\iota(X)}$ den Abschluß von $\iota(X)$ bzgl. $\mathcal{V}$, und $\mathcal{V}|_{\overline{\iota(X)}}$ die Spurtopologie auf $\overline{\iota(X)}$ von $\mathcal{V}$. Dies folgt, da ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten topologischen Raumes wieder kompakt ist.

Kompakte Hausdorffräume spielen oft eine wichtige Rolle. Man erinnere sich zum Beispiel daran, dass

$$\text{kompakt} + (\mathrm{T}_2) \implies \text{normal}$$

2.1.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *T_2-Kompaktifizierung* ist eine Kompaktifizierung $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$, sodass $(Y, \mathcal{V})$ das Trennungsaxiom (T_2) erfüllt.

Analog definiert man auch den Begriff der *T_1-Kompaktifizierung*. ◊

`Kategorielle Perspektive:`

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann können wir die Kategorie $\mathtt{Comp}_{(X,\mathcal{T})}$ der Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$ bilden. Diese hat als Objekte alle Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$, und als Morphismen $\phi\colon (\iota_Y, (Y, \mathcal{V})) \to (\iota_{Y'}, (Y', \mathcal{V}'))$ zwischen zwei solchen alle stetigen Funktionen $\phi\colon (Y, \mathcal{V}) \to (Y', \mathcal{V}')$ mit $\phi \circ \iota_Y = \iota_{Y'}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota_Y"'] \arrow[dr, "\iota_{Y'}"] & \\ Y \arrow[rr, "\phi"'] & & Y' \end{tikzcd}$$

Bemerke, dass zwei Kompaktifizierungen $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$ und $(\iota_{Y'}, (Y', \mathcal{V}'))$ genau dann isomorph in $\mathtt{Comp}_{(X,\mathcal{T})}$ sind, wenn es einen Homöomorphismus $\phi\colon (Y, \mathcal{V}) \to (Y', \mathcal{V}')$ mit $\phi \circ \iota_Y = \iota_{Y'}$ gibt.

Die volle Teilkategorie von $\mathtt{Comp}_{(X,\mathcal{T})}$ die aus allen T_2-Kompaktifizierungen besteht, bezeichnen wir mit $\mathtt{Comp}^{T_2}_{(X,\mathcal{T})}$

2.1.3 Beispiel. Wir wollen als erstes Beispiel einen bereits kompakten Raum $(X,\mathcal{T})$ betrachten. Klarerweise ist $(\mathrm{id}_X, (X,\mathcal{T}))$ eine Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$.

Diese ist aber nicht die einzige. Als – triviales – Beispiel wähle einen Punkt $x_0 \in X$, und setze

- $Y := X \cup \{x_0'\}$ wobei x_0' ein Symbol ist welches nicht Element von X ist,
- $\iota_Y : X \to Y$ die Inklusionsabbildung,
- $\mathcal{V} := \{O : \ O \in \mathcal{T}, \ x_0 \notin O\} \cup \{O \cup \{x_0'\} : \ O \in \mathcal{T}, \ x_0 \in O\}$.

Dann ist $(\iota_Y, (Y,\mathcal{V}))$ eine Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$. ◊

In diesem Beispiel wurde eine Kompaktifizierung konstruiert indem man einen Punkt von x_0 künstlich verdoppelt, und zwar so dass seine Kopie topologisch nicht vom Original unterscheidbar ist. Damit hat man natürlich jegliche Trennungseigenschaften zerstört. Betrachtet man T_2-Kompaktifizierungen, dann kann dies nicht passieren.

2.1.4 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ kompakt und Hausdorff. Dann ist $(\mathrm{id}_X, (X,\mathcal{T}))$ bis auf Isomorphie die einzige T_2-Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$.*

Beweis. Sei $(\iota_Y, (Y,\mathcal{V}))$ eine T_2-Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$. Dann ist $\iota_Y(X)$ kompakt in Y, und da Y Hausdorff ist, daher auch abgeschlossen. Damit ist $\iota_Y(X) = Y$, und daher ι_Y ein Homöomorphismus von $(X,\mathcal{T})$ auf $(Y,\mathcal{V})$. Klarerweise gilt $\iota_Y \circ \mathrm{id}_X = \iota_Y$, und damit ist ι_Y ein Isomorphismus zwischen den Kompaktifizierungen $(\mathrm{id}_X, (X,\mathcal{T}))$ und $(\iota_Y, (Y,\mathcal{V}))$. □

2.2 Die Alexandroff–Kompaktifizierung

Wir wollen nun für einen gegebenen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ eine spezielle Kompaktifizierung konstruieren, und damit insbesondere zeigen, dass jeder topologische Raum eine Kompaktifizierung besitzt.

2.2.1 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum der nicht kompakt ist. Sei ∞ ein Symbol sodass $\infty \notin X$, und definiere

- $\alpha(X) := X \cup \{\infty\}$,
- $\iota_\alpha : X \to \alpha(X)$ als die Inklusionsabbildung,
- $\mathcal{T}_\alpha$ als die Familie

$$\mathcal{T}_\alpha := \mathcal{T} \cup \{O \subseteq \alpha(X) : \ \infty \in O, \ X \setminus O \text{ kompakt und abgeschlossen in } (X,\mathcal{T})\}.$$

Wir nennen $(\iota_\alpha, (\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha))$ die *Alexandroff–Kompaktifizierung* (oder *1-Punkt–Kompaktifizierung*) von $(X,\mathcal{T})$. ◊

Wir sagen im Folgenden, dass ein topologischer Raum *lokalkompakt* ist, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

2.2.2 Satz. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum der nicht kompakt ist. Dann ist $(\iota_\alpha, (\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha))$ eine Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$.*

Der Raum $(\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha)$ ist Hausdorff, genau dann wenn $(X,\mathcal{T})$ lokalkompakt und Hausdorff ist.

Beweis.

① Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_\alpha$ eine Topologie ist.

- Es ist $\emptyset \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\alpha$. Weiters ist $\infty \in \alpha(X)$ und $X \setminus \alpha(X) = \emptyset$ kompakt und abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$, also haben wir auch $\alpha(X) \in \mathcal{T}_\alpha$.

➢ Wir bemerken zunächst, dass für jede Menge $O \in \mathcal{T}_\alpha$ der Durchschnitt $X \cap O$ offen in X ist: Ist $O \in \mathcal{T}$ ist dies trivial, sei also O sodass $\infty \in O$ und $X \setminus O$ kompakt und abgeschlossen in X. Dann ist $X \cap O = X \setminus (X \setminus O)$, und daher offen in X.

Seien nun $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_\alpha$. Betrachte den Fall dass $O_1 \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$O_1 \cap O_2 = O_1 \cap (X \cap O_2),$$

und daher ist $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\alpha$. Der Fall dass $O_2 \in \mathcal{T}$ ist analog. Seien nun $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_\alpha \setminus \mathcal{T}$. Dann gilt $\infty \in O_1 \cap O_2$, und $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$ ist kompakt und abgeschlossen in X. Also ist wieder $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_\alpha$.

➢ Seien $O_i \in \mathcal{T}_\alpha$, $i \in I$. Sind alle O_i in $\mathcal{T}$, so ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ ebenfalls in $\mathcal{T}$. Sei nun angenommen, dass $O_{i_0} \in \mathcal{T}_\alpha \setminus \mathcal{T}$ für ein $i_0 \in I$. Dann ist $\infty \in O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Weiters ist

$$X \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} O_i\Big) = (X \setminus O_{i_0}) \cap \bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} X \setminus O_i.$$

Die erste Menge auf der rechten Seite ist kompakt und abgeschlossen in X, die zweite Menge ist abgeschlossen in X. Ihr Durchschnitt ist daher kompakt und abgeschlossen in X.

② Wir zeigen, dass $(\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha)$ kompakt ist, und X dicht in $\alpha(X)$ liegt.

Sei $\{O_i\colon\ i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $(\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha)$. Wähle $i_0 \in I$ mit $\infty \in O_{i_0}$. Es ist $\{X \cap O_i\colon\ i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X, insbesondere daher von $X \setminus O_{i_0}$. Da diese Menge kompakt ist, finden wir $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $\bigcup_{l=1}^n O_{i_l} \supseteq X \setminus O_{i_0}$. Insgesamt folgt $O_{i_0} \cup \bigcup_{l=1}^n O_{i_l} = \alpha(X)$.

Es ist $\alpha(X) \setminus X = \{\infty\}$. Ist $O \in \mathcal{T}_\alpha$ mit $\infty \in O$, so ist $X \setminus O$ kompakt in X. Da X selbst nicht kompakt ist, folgt $X \setminus O \neq X$. Das bedeutet $X \cap O \neq \emptyset$.

③ Sei vorausgesetzt, dass $(\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha)$ Hausdorff ist. Da sich (T_2) auf Teilräume vererbt, ist damit auch $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff. Sei nun $x \in X$. Wähle disjunkte offene Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_\alpha$ mit $x \in O_1$ and $\infty \in O_2$. Dann ist $\infty \notin O_1$, und daher $O_1 \in \mathcal{T}$. Wegen $x \in O_1 \subseteq X \setminus O_2$, ist $X \setminus O_2$ eine kompakte Umgebung von x.

④ Sei vorausgesetzt, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff und lokalkompakt ist. Seien $x, y \in \alpha(X)$ verschieden. Ist $x, y \in X$, so finden wir disjunkte Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\alpha$ with $x \in O_1$ and $y \in O_2$. Sei nun, z.B., $y = \infty$. Wähle eine kompakte Umgebung V von x in X, und $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq V$. Da X Hausdorff ist, ist V auch abgeschlossen, und wir sehen dass $O_y \coloneqq \alpha(X) \setminus V \in \mathcal{T}_\alpha$. Klarerweise ist $y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$.

□

2.3 Der Einbettungssatz von Tychonoff

Wir haben in Satz 2.2.2 gesehen, dass jeder topologische Raum eine Kompaktifizierung besitzt. Im Gegensatz dazu, hat nicht jeder Raum eine T_2-Kompaktifizierung. Der einfache Grund dafür ist, dass sich das Axiom $(T_{3½})$ auf Teilräume vererbt: Hat $(X, \mathcal{T})$ eine T_2-Kompaktifizierung $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$, so ist $(Y, \mathcal{V})$ insbesondere vollständig regulär, und daher muss auch $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär sein.

Es ist eine tiefliegendere Tatsache, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt. Dies folgt aus dem Produktsatz von Tychonoff gemeinsam mit dem *Einbettungssatz von Tychonoff*. Letzterer besagt:

2.3.1 Satz. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn es eine nichtleere Indexmenge I und eine Einbettung $\phi\colon X \to [0,1]^I$ gibt (wobei der Würfel $[0,1]^I$ mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf $[0,1]$ versehen ist).*

Das die Existenz einer Einbettung hinreichend ist, ist einfach zu sehen:

Beweis von Satz 2.3.1, "⇐". Das Intervall $[0, 1]$ mit der euklidischen Topologie ist ein kompakter Hausdorffraum. Nach dem Produktsatz von Tychonoff ist auch jeder Würfel $[0,1]^I$ kompakt. Die Trennungseigenschaft (T_2) vererbt sich klarerweise auch auf Produkte. Damit ist $[0,1]^I$ ebenso ein kompakter Hausdorffraum, daher auch normal, und daher auch vollständig regulär. Nun ist jeder Teilraum eines vollständig regulären Raumes ebenso vollständig regulär, und jedes homöomorphe Bild eines vollständig regulären Raumes ebenso vollständig regulär. Wir sehen, dass $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist. □

Um die Umkehrung zu zeigen, müssen wir eine Einbettung konstruieren. Um wiederum Einbettungen zu konstruieren, ist es oft praktisch mit „trennenden Familien von Abbildungen“ zu arbeiten.

2.3.2 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $((Y_i,\mathcal{V}_i))_{i\in I}$, eine Familie topologischer Räume, und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $f_i\colon X \to Y_i$. Die Familie $(f_i)_{i\in I}$ heißt eine *trennende Familie* von Abbildungen, wenn gilt:

(TF1) Für alle $i \in I$ ist $f_i\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y_i,\mathcal{V}_i)$ stetig.

(TF2) Für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ existiert $i \in I$ mit $f_i(x) \neq f_i(y)$.

(TF3) Für jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jeden Punkte $x \in X\setminus A$. existiert $i \in I$ mit $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$.

◊

2.3.3 Proposition. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $((Y_i,\mathcal{V}_i))_{i\in I}$, eine Familie topologischer Räume, und $(f_i)_{i\in I}$ eine trennende Familie von Abbildungen $f_i\colon X \to Y_i$. Bezeichne mit $f\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ die Produktabbildung*

$$f(x) := (f_i(x))_{i\in I}, \quad x \in X,$$

und mit $\prod_{i\in I}\mathcal{V}_i$ die Produkttopologie.

Dann ist $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} Y_i, \prod_{i\in I}\mathcal{V}_i)$ eine Einbettung.

Beweis. Wegen der Eigenschaft (TF2) ist f injektiv. Wegen (TF1), und da die Produkttopologie die initiale Topologie bezüglich der kanonischen Projektionen ist, ist f stetig.

Wir müssen zeigen, dass f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Dazu bleibt noch zu zeigen, dass f eine offene Abbildung auf sein Bild ist. Sei also $O \in \mathcal{T}$ gegeben. Sei $y \in f(O)$, und wähle $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun ist $X \setminus O$ abgeschlossen und $x \notin X \setminus O$, also finden wir $i_0 \in I$ sodass $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}$.

Die Menge (π_{i_0} bezeichnet die kanonische Projektion von $\prod_{i\in I} Y_i$ auf Y_{i_0})

$$V := \pi_{i_0}^{-1}\big(\, Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)}\,\big)$$

ist offen in $\prod_{i\in I} Y_{i_0}$, und sie enthält y. Also ist $V \cap f(X)$ eine Umgebung von y bzgl. der Spurtopologie.

Wir zeigen, dass $V \cap f(X) \subseteq f(O)$. Sei $y' \in V \cap f(X)$ und wähle $x' \in X$ mit $f(x') = y'$. Dann gilt

$$f_{i_0}(x') = (\pi_{i_0} \circ f)(x') = \pi_{i_0}(y') \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(X \setminus O)} \subseteq Y_{i_0} \setminus f_{i_0}(X \setminus O),$$

und daher $x' \in O$. Damit folgt $y' \in f(O)$.

Wir sehen dass $f(O)$ eine Umgebung von y bzgl. der Spurtopologie auf $f(X)$ ist. Da $y \in f(O)$ beliebig war, ist $f(O)$ offen in der Spurtopologie. □

Beweis von Satz 2.3.1, *“⇒”.* Da X vollständig regulär ist, ist die Familie

$$\mathcal{F} := \{f\colon X \to [0,1]\colon\ f \text{ stetig}\}$$

eine trennenden Familie. Nach Proposition 2.3.3 ist die Abbildung $x \mapsto (f(x))_{f\in\mathcal{F}}$ eine Einbettung von X in $[0,1]^{\mathcal{F}}$. □

Nun erhalten wir das

2.3.4 Korollar. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann hat $(X,\mathcal{T})$ genau dann eine T_2-Kompaktifizierung, wenn $(X,\mathcal{T})$ vollständig regulär ist.*

Beweis. Die Implikation “⇐” haben wir am Anfang dieses Abschnittes schon bemerkt. Ist umgekehrt X vollständig regulär, so haben wir eine Einbettung $\iota\colon X \to [0,1]^I$, und damit eine T_2-Kompaktifizierung, nämlich den Abschluß von $\iota(X)$ im Würfel $[0,1]^I$. □

2.4 Die Stone-Cech–Kompaktifizierung

Die mit Hilfe des Einbettungssatzes von Tychonoff konstruierte T_2-Kompaktifizierung spielt eine wesentliche Rolle (und hat einen eigenen Namen).

2.4.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum, und sei $\mathcal{F}$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach $[0, 1]$. Bezeichne

➢ $\iota_\beta \colon x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$,

➢ $\beta(X) := \overline{\iota_\beta(X)} \subseteq [0, 1]^{\mathcal{F}}$.

Die T_2-Kompaktifizierung $(\iota_\beta, (\beta(X), \mathcal{T}_\beta))$, wobei $\mathcal{T}_\beta$ für die Spurtopologie auf $\beta(X)$ der Produkttopologie des Würfels $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ steht, heißt die *Stone-Cech–Kompaktifizierung* von $(X, \mathcal{T})$. ◊

2.4.2 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Die Stone-Cech–Kompaktifizierung $\beta(X)$ von X hat die folgende Eigenschaft:*

➢ *Jede stetige und beschränkte Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ hat eine stetige Fortsetzung auf $\beta(X)$, d.h., es gibt $\tilde{f} \colon \beta(X) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$.*

$$\begin{tikzcd} & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ X \arrow[ur, "\iota_\beta"] \arrow[r, "f"'] & {[\inf f(X), \sup f(X)]} \end{tikzcd}$$

Jede T_2-Kompaktifizierung mit dieser Eigenschaft ist isomorph zur Stone-Cech–Kompaktifizierung.

Beweis. Sei $f \colon X \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist für geeignete $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq r(f(x) + t) \leq 1, \quad x \in X.$$

Damit gehört die Funktion $g(x) := r(f(x) + t)$ zur Familie $\mathcal{F}$. Die Projektion $\pi_g \colon [0, 1]^{\mathcal{F}} \to [0, 1]$ ist stetig und erfüllt offenbar $\pi_g \circ \iota_\beta = g$. Damit haben wir durch

$$\tilde{f} := \frac{1}{r} \pi_g|_{\beta(X)} - t$$

eine stetige Funktion $\tilde{f} \colon \beta(X) \to \mathbb{R}$ die $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$ erfüllt.

Sei nun $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$ eine T_2-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ welche die im Satz genannte Eigenschaft hat. Für $f \in \mathcal{F}$ sei $\tilde{f} \colon Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\tilde{f} \circ \iota_Y = f$. Betrachte die Abbildung

$$\phi \colon \begin{cases} Y & \to & [0, 1]^{\mathcal{F}} \\ y & \mapsto & (\tilde{f}(y))_{f \in \mathcal{F}} \end{cases}$$

Wegen $\pi_f \circ \phi = \tilde{f}$, ist ϕ stetig. Weiters gilt $(\phi \circ \iota_Y)(x) = \big(\tilde{f}(\iota_Y(x))\big)_{f \in \mathcal{F}} = (f(x))_{f \in \mathcal{F}} = \iota_\beta(x)$, $x \in X$.

Wir zeigen, dass ϕ injektiv ist. Dazu seien $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Da Y kompakt und (T_2) ist, ist Y auch vollständig regulär, und wir finden $g \colon Y \to [0, 1]$ mit $g(y_1) = 0$ und $g(y_2) = 1$. Die Funktion $h := g \circ \iota_Y$ liegt in $\mathcal{F}$, und für ihre Fortsetzung $\tilde{h} \colon Y \to \mathbb{R}$ gilt $\tilde{h} \circ \iota_Y = h = g \circ \iota_Y$. Da $\iota_Y(X)$ dicht in Y ist, folgt $\tilde{h} = g$. Damit erhalten wir

$$\pi_h(\phi(y_1)) = \tilde{h}(y_1) = g(y_1) = 0, \quad \pi_h(\phi(y_2)) = \tilde{h}(y_2) = g(y_2) = 1,$$

also ist $\phi(y_1) \neq \phi(y_2)$.

Die Menge $\phi(Y)$ ist kompakt und daher abgeschlossen, und sie enthält $\phi(\iota_Y(X))$ als dichte Teilmenge. Nun ist $\phi(\iota_Y(X)) = \iota_\beta(X)$ dicht in $\beta(X)$, und wir schliessen dass $\phi(Y) = \beta(X)$. Als stetige bijektive Funktion zwischen kompakten Hausdorffräumen, ist ϕ ein Homöomorphismus. □

Die in Satz 2.4.2 genannte Eigenschaft läßt sich noch verstärken.

2.4.3 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Ist $(Y, \mathcal{V})$ kompakt und Hausdorff, und ist $f\colon X \to Y$ stetig, so existiert eine eindeutige stetige Funktion $\tilde{f} : \beta(X) \to Y$ mit $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$.*

$$\begin{tikzcd}
 & \beta(X) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\
X \arrow[ur, "\iota_\beta"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $(\iota_Y, (\beta(Y), \mathcal{T}_{\beta,Y}))$ die Stone-Cech–Kompaktifizierung von $(Y, \mathcal{V})$. Da Y kompakt und Hausdorff ist, ist ι_Y ein Homöomorphismus, cf. Lemma 2.1.4. Bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge aller stetigen Funktionen von Y nach $[0, 1]$, und betrache für $g \in \mathcal{G}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_\beta"] \arrow[d, "f"'] & \beta(X) & \\
Y \arrow[r, "\cong", "\iota_Y"'] & \beta(Y) \arrow[r, "\pi_g"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Wegen der universellen Eigenschaft von $\beta(X)$ finden wir eine stetige Funktion $\psi_g\colon \beta(X) \to [0, 1]$ mit $\psi_g \circ \iota_\beta = \pi_g \circ \iota_Y \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_\beta"] \arrow[d, "f"'] & \beta(X) \arrow[dr, dashed, "\psi_g"] & \\
Y \arrow[r, "\cong", "\iota_Y"'] & \beta(Y) \arrow[r, "\pi_g"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Sei $\psi\colon \beta(X) \to [0, 1]^{\mathcal{G}}$ die Produktabbildung $\psi(x) := (\psi_g(x))_{g \in \mathcal{G}}$. Diese ist stetig, da $\pi_g \circ \psi = \psi_g$. Weiters gilt

$$\pi_g \circ \psi \circ \iota_\beta = \psi_g \circ \iota_\beta = \pi_g \circ \iota_Y \circ f.$$

Da die Abbildungen π_g, $g \in \mathcal{G}$, gemeinsam injektiv sind, folgt dass $\psi \circ \iota_\beta = \iota_Y \circ f$. Wir haben also das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_\beta"] \arrow[d, "f"'] & \beta(X) \arrow[d, dotted, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_g"] & \\
Y \arrow[r, "\cong", "\iota_Y"'] & \beta(Y) \subseteq [0,1]^{\mathcal{G}} \arrow[r, "\pi_g"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\psi(\iota_\beta(X)) \subseteq \beta(Y)$, und daher auch $\psi(\beta(X)) \subseteq \beta(Y)$. Wir erhalten

$$[\iota_Y^{-1} \circ \psi] \circ \iota_\beta = f,$$

und haben eine Fortsetzung von f gefunden. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist wiederum klar, da $\iota_\beta(X)$ dicht in $\beta(X)$ ist. □

`Kategorielle Perspektive:`

Sei $\mathtt{Comp}^{\mathrm{T}_2}$ die volle Teilkategorie von $\mathtt{Top}$ deren Objekte alle kompakten Hausdorffräume sind, und sei $\mathtt{Top}^{\mathrm{vr}}$ die volle Teilkategorie von $\mathtt{Top}$ deren Objekte alle vollständig regulären Hausdorffräume sind. Dann gibt die Stone-Cech–Kompaktifizierung ein Funktor $\beta\colon \mathtt{Top}^{\mathrm{vr}} \to \mathtt{Comp}^{\mathrm{T}_2}$. Einem Objekt X wird die Stone-Cech–Kompaktifizierung $\beta(X)$ zugeordnet. Einer stetigen Funktion $f\colon X \to Y$ wird die stetige Funktion $\beta f\colon \beta(X) \to \beta(Y)$ mit $\beta f \circ \iota_{\beta,X} = \iota_{\beta,Y} \circ f$ zugewiesen.

Gemeinsam mit dem Inklusions-Funktor $G\colon \mathtt{Comp}^{\mathrm{T}_2} \to \mathtt{Top}^{\mathrm{vr}}$ hat man eine Adjunktion zwischen diesen beiden Kategorien.

2.4.4 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär, und sei $(\iota_Y, (Y, \mathcal{V}))$ eine T_2-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Dann existiert eine eindeutige stetige Funktion $\phi\colon \beta(X) \to Y$ mit $\phi \circ \iota_\beta = \iota_Y$.*

Diese Funktion ϕ ist surjektiv und erfüllt $\phi(\beta(X) \setminus \iota_\beta(X)) = Y \setminus \iota_Y(X)$.

Beweis. Nach Satz 2.4.3 hat die Funktion $\iota_Y\colon X \to Y$ eine eindeutige Fortsetzung ϕ auf $\beta(X)$.

Da $\phi(\beta(X))$ kompakt ist und $\iota_Y(X)$ enthält, ist ϕ surjektiv. Die letztgenannte Aussage folgt da ι_Y eine Einbettung ist: Sei $z \in \beta(X) \setminus \iota_\beta(X)$, und wähle ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit $\lim_{i\in I} \iota_\beta(x_i) = z$. Dann gilt auch

$$\lim_{i\in I} \iota_Y(x_i) = \lim_{i\in I} \phi(\iota_\beta(x_i)) = \phi(z).$$

Sei nun indirekt angenommen, dass $\phi(z) \in \iota_Y(X)$. Da ι_Y eine Einbettung ist, folgt dann dass $\lim_{i\in I} x_i = \iota_Y^{-1}(\phi(z))$, und damit

$$z = \lim_{i\in I} \iota_\beta(x_i) = \iota_\beta(\iota_Y^{-1}(\phi(z))) \in \iota_\beta(X).$$

□

`Kategorielle Perspektive:`

Dieses Korollar besagt dass die Stone-Cech–Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$ ein initiales Objekt in $\mathtt{Comp}^{\mathrm{T}_2}_{(X,\mathcal{T})}$ ist.

Die Struktur von $\beta(X)$ ist sehr komplex. Zum Beispiel gilt die folgende Aussage.

2.4.5 Satz. *Sei $(X,\mathcal{T})$ vollständig regulär. Ist $z \in \beta(X) \setminus \iota_\beta(X)$, so hat z keine abzählbare Umgebungsbasis.*

Im Beweis verwenden wir eine allgemeine Konstruktion. Dazu erinnern wir zuerst an den folgenden Begriff: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X heißt *lokal endlich*, wenn gilt

(LE) $\quad \forall x \in X\ \exists U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x).\ \{i \in I\colon\ M_i \cap U \neq \emptyset\}$ ist endlich.

Ist $f: X \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einem topologischen Raume, so bezeichnen wir im Folgenden mit $\operatorname{supp} f$ ihren *Träger*, das ist die Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}}$.

2.4.6 Lemma. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I$, eine Familie stetiger Funktionen sodass die Familie $(\operatorname{supp} f_i)_{i\in I}$ lokal endlich ist. Dann ist $f := \sum_{i\in I} f_i$ eine wohldefinierte und stetige Funktion von X nach $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann sind nur endlich viele der Funktionen f_i an der Stelle x verschieden von 0, und daher ist $f(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)$ wohldefiniert. Um die Stetigkeit von f an der Stelle nachzuweisen, sei eine Umgebung V von $f(x)$ gegeben. Wähle eine Umgebung U von x, und $i_1,\ldots,i_n \in I$, sodass $U \cap \operatorname{supp} f_i = \emptyset$, $i \in I \setminus \{i_1,\ldots,i_n\}$. Die Funktion $g := \sum_{k=1}^n f_{i_k}$ ist stetig, und daher finden wir eine Umgebung W von x mit $g(W) \subseteq V$. Nun gilt $f|_U = g|_U$, und damit folgt $f(U \cap W) \subseteq V$. □

Beweis von Satz 2.4.5. Sei $z \in \beta(X) \setminus \iota_\beta(X)$ und sei indirekt angenommen, dass $\mathcal{U}^{\mathcal{T}_\beta}(z)$ eine abzählbare Basis hat. Sei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche. Da $\beta(X)$ insbesondere regulär ist, bildet die Menge aller abgeschlossenen Umgebungen von z eine Umgebungsbasis, und wir können induktiv eine Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus offenen Mengen U_n mit $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$, $n \in \mathbb{N}$, konstruieren. Da $\beta(X)$ insbesondere (T_1) ist, gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{z\}$.

Da $z \in \beta(X) \setminus \iota_\beta(X)$, und $\iota_\beta(X)$ dicht liegt, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $U_n \cap \iota_\beta(x)$ nichtleer. Da die U_n eine absteigende Folge bilden deren Durchschnitt nur der Punkt $\{z\}$ ist, ist $U_n \cap \iota_\beta(x)$ sogar unendlich. Daher können wir eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ und zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X wählen, sodass

- $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$,
- $M := \{x_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ und $N := \{y_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ sind disjunkt,
- $x_k, y_k \in \iota_\beta^{-1}(U_{n_k} \setminus \overline{U_{n_{k+1}}})$, $k \in \mathbb{N}$.

Da die Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Umgebungsbasis von z bilden, haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \iota_\beta(x_k) = \lim_{k\to\infty} \iota_\beta(y_k) = z. \tag{2.4.1}$$

Betrachte die Menge

$$V_k := \iota_\beta^{-1}(U_{n_k} \setminus \overline{U_{n_{k+1}}}) \setminus N.$$

Da $\iota_\beta(y_l) \in U_{n_l}$, haben wir $y_l \notin \iota_\beta^{-1}(U_{n_k} \setminus \overline{U_{n_{k+1}}})$ für $l > k$, und damit

$$V_k = \iota_\beta^{-1}(U_{n_k} \setminus \overline{U_{n_{k+1}}}) \cap \{y_1,\ldots,y_k\}^c.$$

Da X insbesondere (T_1) ist, sehen wir dass V_k offen in X ist. Klarerweise ist $x_k \in V_k$, und da X vollständig regulär ist, finden wir eine stetige Funktion $f_k: X \to [0,1]$ mit

$$f_k(x_k) = 1 \text{ und } f_k(X \setminus V_k) = \{0\}. \tag{2.4.2}$$

Wir zeigen nun, dass die Familie $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich ist. Sei dazu $x \in X$ gegeben. Da $\iota_\beta(x) \neq z$, finde wir offene und disjunkte Mengen O_1, O_2 in $\beta(X)$ mit $\iota_\beta(x) \in O_1$ und $z \in O_2$. Dann ist $\iota_\beta^{-1}(O_1)$ eine Umgebung von x, und $\iota_\beta^{-1}(O_1) \cap \iota_\beta^{-1}(O_2) = \emptyset$. Da O_2 eine Umgebung von z ist, finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq O_2$. Dann gilt, für k so groß dass $n_k \geq n_0$,

$$V_k \subseteq \iota_\beta^{-1}(U_{n_k}) \subseteq \iota_\beta^{-1}(U_n) \subseteq \iota_\beta^{-1}(O_2).$$

Wir sehen, dass $\iota_\beta^{-1}(O_1)$ höchstens endlich viele der Mengen V_k, und damit auch der Mengen $\overline{V_k}$ schneiden kann.

Da $\operatorname{supp} f_k \subseteq \overline{V_k}$, ist $f := \sum_{k=1}^\infty$ wohldefiniert und stetig. Nun sind die Mengen V_k paarweise disjunkt, und daher für jedes $x \in X$ höchstens ein Wert der $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, verschieden von 0. Damit haben wir $f(x) \in [0,1]$, sowie

$$f(x_k) = 1,\ f(y_k) \in f\Big(X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k\Big) = \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft Satz 2.4.2 der Stone-Cech–Kompaktifizierung, existiert eine stetige Funktion $\tilde{f}: \beta(X) \to [0,1]$ mit $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$. Erinnert man sich an (2.4.1) und (2.4.2), so erhält man den Widerspruch

$$\tilde{f}(z) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(\iota_\beta(x_k)) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1,$$
$$\tilde{f}(z) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(\iota_\beta(y_k)) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = 0.$$

□

2.4.7 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ vollständig reguläre Räume die beide das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Dann sind X und Y genau dann homöomorph, wenn $\beta(X)$ und $\beta(Y)$ homöomorph sind.*

Beweis. Sind X und Y homöomorph, so sind klarerweise auch die Stone-Cech–Kompaktifizierungen $\beta(X)$ und $\beta(Y)$ homöomorph. Umgekehrt sei vorausgesetzt, dass $\varphi: \beta(X) \to \beta(Y)$ ein Homöomorphismus ist. Dann hat $x \in \beta(X)$ eine abzählbare Umgebungsbasis, genau dann wenn $\varphi(x) \in \beta(Y)$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat. Nun ist nach Satz 2.4.5 und der Voraussetzung des Lemmas

$$\{x \in \beta(X) : x \text{ hat abzählbare Umgebungsbasis}\} = \iota_{\beta,X}(X),$$

und genauso für Y. Also haben wir $\varphi(X) = Y$, und damit den Homöomorphismus $\iota_{\beta,Y}^{-1} \circ \varphi|_X \circ \iota_{\beta,X}: X \to Y$. □

2.5 Der Raum der maximalen Ideale

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein *Ideal* von R ist ein Unterring I von R mit $RI \subseteq I$. Ein *maximales Ideal* ist ein maximales Element der Menge aller von R verschiedenen Ideale von R. Da ein Ideal I genau dann verschieden von R ist, wenn $1 \notin I$, erhält man mit dem Lemma von Zorn, dass jedes von R verschiedene Ideal in einem maximalen Ideal enthalten ist. Insbesondere existieren maximale Ideale (denn $\{0\}$ ist stets ein von R verschiedenes Ideal).

2.5.1 Definition. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Dann bezeichnen wir mit $\Im(R)$ die Menge aller maximalen Ideale von R. ◊

Wir wollen nun die Menge $\Im(R)$ topologisieren. Dazu definieren wir einen Operator $\varphi: \mathcal{P}(\Im(R)) \to \mathcal{P}(\Im(R))$ und zeigen dass dieser ein Abschlußoperator ist.

2.5.2 Definition. Die Abbildung $\varphi: \mathcal{P}(\Im(R)) \to \mathcal{P}(\Im(R))$ sei definiert als

$$\varphi(B) := \Big\{J \in \Im(R) : J \supseteq \bigcap_{J'\in B} J'\Big\}, \quad B \in \mathcal{P}(\Im(R)).$$

◊

2.5.3 Lemma. *Die Abbildung φ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) $\forall B \in \mathcal{P}(\Im(R)).\ B \subseteq \varphi(B)$.

(iii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\Im(R)).\ \varphi(B_1 \cup B_2) = \varphi(B_1) \cup \varphi(B_2)$.

(iv) $\forall B \in \mathcal{P}(\Im(R)).\ \varphi(\varphi(B)) = \varphi(B)$.

Beweis. Es gilt $\bigcap_{J' \in \emptyset} J' = R$, also ist $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Weiters gilt für $J \in B$ sicherlich $J \supseteq \bigcap_{J' \in B} J'$, also ist $B \subseteq \varphi(B)$. Damit folgt auch schon $\varphi(B_1) \cup \varphi(B_1) \subseteq \varphi(B_1 \cup B_2)$ sowie $\varphi(\varphi(B)) \supseteq \varphi(B)$.

Sei nun $J \in \varphi(B_1 \cup B_2)$. Dann gilt also

$$J \supseteq \bigcap_{J' \in B_1 \cup B_2} J' = \bigcap_{J' \in B_1} J' \cap \bigcap_{J' \in B_2} J'. \tag{2.5.1}$$

Sei angenommen, dass $J \notin \varphi(B_1)$, d.h., $J \not\supseteq \bigcap_{J' \in B_1} J'$. Wähle ein Element $x \in \bigcap_{J' \in B_1} J' \setminus J$. Sei $y \in \bigcap_{J' \in B_2} J'$, dann ist wegen (2.5.1) und da der Durschnitt von Idealen wieder ein Ideal ist, $xy \in J$. Da J maximal ist, ist J auch prim, und wir schliessen dass eines von x und y in J liegen muss. Da $x \notin J$, folgt also $y \in J$. Wir sehen dass $J \in \varphi(B_2)$.

Schliesslich sei $J \in \varphi(\varphi(B))$ gegeben. Dann ist also $J \supseteq \bigcap_{J' \in \varphi(B)} J'$. Nun gilt für jedes $J' \in \varphi(B)$ dass $J' \supseteq \bigcap_{J'' \in B} J''$, und damit folgt dass auch $J \supseteq \bigcap_{J'' \in B} J''$. □

Es gibt also eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}_\Im$ auf $\Im(R)$, sodass für jede Teilmenge B von $\Im(R)$ gilt dass $\varphi(B) = \overline{B}$ wobei $\overline{B}$ der Abschluß bezüglich $\mathcal{T}_\Im$ ist.

Betrachte nun einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} C_b(X) &:= \{f : X \to \mathbb{R} :\ f \text{ stetig und beschränkt}\}, \\ C(X) &:= \{f : X \to \mathbb{R} :\ f \text{ stetig}\}. \end{aligned}$$

Dann sind $C_b(X)$ und $C(X)$ kommutative $\mathbb{R}$-Algebren mit Einselement.

Stetige Abbildungen liften sich zu Homomorphismen: ist $\phi : X \to Y$ stetig, so ist

$$\phi^* : \begin{cases} C(Y) & \to & C(X) \\ g & \mapsto & g \circ \phi \end{cases}$$

ein Homomorphismus. Offensichtlich gilt $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ sowie $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{C(X)}$. Insbesondere ist für einen Homöomorphismus ϕ die Abbildung ϕ^* ein Isomorphismus.

`Kategorielle Perspektive:`

Wir haben hier einen "Funktor" der jedoch die Richtung der Abbildungen umdreht. Man spricht von einem *kontravarianten Funktor*.

Präzise ausgedrückt: Hat man eine Kategorie C, so definiert man eine Kategorie C^{op}. Nämlich als die Kategorie mit den gleichen Objekten wie C, aber mit $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X)$ und entsprechend $f \circ_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} g := g \circ_{\mathsf{C}} f$.

Ein kontravarianter Funktor von C nach D ist dann ein Funktor von C nach D^{op}.

2.5.4 Satz. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *kompakt und* (T_2). *Dann ist* $(X, \mathcal{T})$ *homöomorph zu* $(\Im(C(X)), \mathcal{T}_\Im)$.

Beweis.

① Wir konstruieren eine Funktion $\Phi : X \to \Im(C(X))$.

Für $x \in X$ ist das Punktauswertungsfunktional $\chi_x : x \mapsto f(x)$ ein Ringhomomorphismus von $C(X)$ nach $\mathbb{R}$. Da $C(X)$ alle konstanten Funktionen enthält, ist χ_x nicht identisch Null. Daher ist $\ker \chi_a$ ein maximales Ideal von $C(X)$. Wir definieren nun

$$\Phi : \begin{cases} X & \to & \Im(C(X)) \\ x & \mapsto & \ker \chi_x \end{cases}$$

② Wir zeigen, dass Φ bijektiv ist.

Seien $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Da X insbesondere vollständig regulär ist, finden wir $f \in C(X)$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 1$. Dann ist $f \in \Phi(x_1)$ aber $f \notin \Phi(x_2)$, also ist $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$.

Um Surjektivität zu zeigen, sei $J \in \Im(C(X))$ gegeben. Wir betrachten die Mengenfamilie

$$C := \{f^{-1}(\{0\}) \colon\ f \in J\},$$

und zeigen, dass C die endliche Durschnittsseigenschaft hat. Seien dazu $f_1, \dots, f_n \in J$, und sei angenommen dass $f_1^{-1}(\{0\}) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Dann ist die Funktion $g := f_1^2 + \ldots + f_n^2$ nullstellenfrei, und daher in $C(X)$ invertierbar. Nun ist aber $g \in J$, und erhalten wir erhalten $1 = g \cdot (1/g) \in J$, ein Widerspruch.

Da X kompakt ist, folgt $\bigcap_{f \in J} f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$. Für jedes Element x dieses Durschnittes gilt dann $f \in \ker \chi_x$, $f \in J$, d.h., $J \subseteq \ker \chi_x$. Da J maximal ist, muss hier Gleichheit gelten, d.h., $J = \Phi(x)$.

③ Wir zeigen, dass Φ ein Homöomorphismus ist.
Um dies zu sehen, zeigen wir dass $\Phi(\overline{A}) = \overline{\Phi(A)}$, $A \subseteq X$.

Für die Inklusion "$\subseteq$" sei ein Element $a \in \overline{A}$ gegeben. Wir haben zu zeigen, dass $\Phi(a) \supseteq \bigcap J' \in \Phi(A) J'$, explizite also $\ker \chi_a \supseteq \bigcap_{x \in A} \ker \chi_x$. Dies ist aber leicht einzusehen: Ist $f \in \bigcap_{x \in A} \ker \chi_x$, so ist $f(A) = \{0\}$. Da f stetig ist, folgt $f(\overline{A}) = \{0\}$, und damit $f(a) = 0$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $J \in \overline{\Phi(A)}$ gegeben. Setze $x := \Phi^{-1}(J)$, dann ist also $\ker \chi_x \supseteq \bigcap_{a \in A} \ker \chi_a$. Sei indirekt angenommen dass $x \notin \overline{A}$. Da $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist, finden wir $f \in C(X)$ mit $f(x) = 1$ aber $f(\overline{A}) = \{0\}$. Es folgt der Widerspruch

$$f \in \Big(\bigcap_{a \in A} \ker \chi_a\Big) \setminus \ker \chi_x.$$

□

Als Korollar erhalten wir, dass ein kompakter Hausdorffraum durch seinen Ring der stetigen Funktionen eindeutig bestimmt ist.

2.5.5 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ kompakt und* (T_2). *Dann sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ genau dann homöomorph, wenn die Ringe $C(X)$ und $C(Y)$ isomorph sind.*

Beweis. Die Implikation "$\Rightarrow$" ist klar: ist $\phi \colon X \to Y$ ein Homöomorphismus, so ist $g \mapsto g \circ \phi$ ein Isomorphismus von $C(Y)$ auf $C(X)$. Für die umgekehrte Implikation benützen wir Satz 2.5.4: ist $\phi \colon C(X) \to C(Y)$ ein Ringisomorphismus, so ist $J \mapsto \phi(J)$ ein Homöomorphismus der maximalen Idealräume $\Im(C(X))$ und $\Im(C(Y))$. Diese wiederum sind isomorph zu den Ausgangsräumen X und Y. □

Um dieses Resultat auf nicht notwendig kompakte Räume zu liften behilft man sich der Stone-Cech–Kompaktifizierung. Die zentrale Feststellung ist, dass der Ring $C(\beta(X))$ schon durch X selbst bestimmt ist.

2.5.6 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Dann sind die Ringe $C_b(X)$ und $C(\beta(X))$ isomorph.*

Beweis. Wir betrachten den Ringhomomorphismus $(\iota_\beta)^* \colon C(\beta(X)) \to C(X)$. Da $\iota_\beta(X)$ dicht in $\beta(X)$ liegt, folgt aus $f \circ \iota_\beta = g \circ \iota_\beta$ bereits dass $f = g$, d.h. also $(\iota_\beta)^*$ ist injektiv. Wegen Satz 2.4.2 ist $(\iota_\beta)^*$ auch surjektiv. □

2.5.7 Korollar. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ vollständig reguläre topologische Räume die das 1.Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Dann sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ genau dann homöomorph, wenn die Ringe $C_b(X)$ und $C_b(Y)$ isomorph sind.*

Beweis. Die Implikation "$\Rightarrow$" ist wiederum klar. Umgekehrt: Sind $C_b(X)$ und $C_b(Y)$ isomorph, so sind auch $C(\beta(X))$ und $C(\beta(Y))$ isomorph. Damit sind $\beta(X)$ und $\beta(Y)$ homöomorph, und mit Korollar 2.4.7 daher auch X und Y. □

2.6 Shanin's Konstruktion von Kompaktifizierungen

Wir diskutieren in diesem Abschnitt eine recht allgemeine Methode Kompaktifizierungen zu konstruieren. Diese verwendet einige Begriffe die wir nun einführen wollen. Zunächst der Begriff der abgeschlossenen Basis. Dies ist also nichts anderes als die Menge der Komplemente aller Elemente einer Basis.

2.6.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X heißt eine *abgeschlossene Basis*, wenn die Familie $\{B^c \colon\ B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist. D.h. also, dass alle Elemente von $\mathcal{B}$ abgeschlossen in X sind, und sich jede abgeschlossene Menge als Durchschnitt von Elementen von $\mathcal{B}$ darstellen läßt. ◊

Diesen Begriff kann man verstärken zu T_1- bzw. normalen Basen.

2.6.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und sei $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Basis von X. Dann heißt $\mathcal{B}$ eine T_1-*Basis* von X, wenn

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$,

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}.\ B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$,

(iii) $\forall x \in X\ \forall B \in \mathcal{B}, x \notin B\ \exists C \in \mathcal{B}.\ B \cap C = \emptyset, x \in C$.

Weiters heißt $\mathcal{B}$ eine *normale Basis*, wenn zusätzlich

(iv) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 = \emptyset\ \exists C_1, C_2 \in \mathcal{B}.\ B_1 \cap C_1 = B_2 \cap C_2 = \emptyset, C_1 \cup C_2 = X$.

◊

Nun der Begriff des $\mathcal{B}$-Filters. Das ist ein zu Filtern analoges Konstrukt, wobei die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ der Grundmenge X durch eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von ihr ersetzt wird.

2.6.3 Definition. Sei X eine Menge, und $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt ein *$\mathcal{B}$-Filter*, wenn

(i) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$,

(ii) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(iii) $\forall B, C \in \mathcal{F}.\ B \cap C \in \mathcal{F}$,

(iv) $\forall B \in \mathcal{F}\ \forall C \in \mathcal{B}, C \supseteq B.\ C \in \mathcal{F}$.

◊

Bemerke dass man tatsächlich für $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ den üblichen Filterbegriff erhält.

Nachdem wir wissen dass Kompaktheit mit Hilfe von Ultrafiltern beschrieben werden kann (jeder Ultrafilter konvergiert), ist es naheliegend, dass man das Analogon von Ultrafiltern im Kontext von $\mathcal{B}$-Filtern studiert.

2.6.4 Lemma. *Sei X eine Menge, und $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.*

(i) *Ist $C \subseteq \mathcal{B}$ und hat C die endliche Durchschnittseigenschaft, dann existiert ein maximaler $\mathcal{B}$-Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \supseteq C$.*

(ii) *Ein $\mathcal{B}$-Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein maximaler $\mathcal{B}$-Filter, wenn*

$$\forall B \in \mathcal{B}.\ (\forall F \in \mathcal{F}.\ B \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow B \in \mathcal{F}.$$

Beweis. Für den Beweis von (i) sei $C \subseteq \mathcal{B}$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gegeben. Dann ist

$$\mathcal{F}_0 := \{B \in \mathcal{B} \colon\ \exists C_1, \ldots, C_n \in C.\ C_1 \cap \ldots \cap C_n \subseteq B\}$$

ein $\mathcal{B}$-Filter der C umfasst. Die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von $\mathcal{B}$-Filtern ist wieder ein $\mathcal{B}$-Filter, und daher zeigt das Lemma von Zorn Existenz eines maximalen Elements in der Menge aller $\mathcal{B}$-Filters die C umfassen. Jedes solche ist insbesonder ein maximaler $\mathcal{B}$-Filter.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Sei zuerst angenommen, dass $\mathcal{F}$ die genannte Eigenschaft hat. Sei $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{B}$-Filter mit $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, und sei $B \in \mathcal{G}$. Dann gilt $B \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, und damit $B \in \mathcal{F}$. Also haben wir $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Umgekehrt, sei angenommen, dass $\mathcal{F}$ ein maximaler $\mathcal{B}$-Filter ist. Sei $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap F \neq \emptyset$, $F \in \mathcal{F}$. Dann hat also $C := \mathcal{F} \cup \{B\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, und wir finden einen $\mathcal{B}$-Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} \supseteq C$. Wegen der Maximalität von $\mathcal{F}$ folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, also $B \in \mathcal{F}$. □

Bemerke, dass für $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ die zweite in Lemma 2.6.4 genannte Eigenschaft gerade die bekannte Charakterisierung von Utrafiltern ($\forall B \subseteq X.\ B \in \mathcal{F} \vee B^c \in \mathcal{F}$) ergibt.

Wir konstruieren nun aus einer T_1-Basis auf einem T_1-Raum einen kompakten T_1-Raum.

2.6.5 Definition. Sei X eine Menge, und $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Wir bezeichnen

$$\sigma(X,\mathcal{B}) := \{\mathcal{F}:\ \mathcal{F} \text{ maximaler } \mathcal{B}\text{-Filter auf } X\}$$

$$\sigma\colon \begin{cases} \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(\sigma(X,\mathcal{B})) \\ M & \mapsto & \{\mathcal{F}\in\sigma(X,\mathcal{B}):\ M\in\mathcal{F}\} \end{cases}$$

◊

Als erstes bemerken wir, dass σ auf $\mathcal{B}$ mit endlichen Vereinigungen und Durchschnitten verträglich ist.

2.6.6 Lemma. *Seien $M_1, M_2 \subseteq X$.*

(i) *Es gilt $\sigma(M_1)\cap\sigma(M_2)\subseteq\sigma(M_1\cap M_2)$. Sind $M_1, M_2\in\mathcal{B}$, so gilt Gleichheit.*

(ii) *Seien $M_1, M_2\in\mathcal{B}$, dann gilt $\sigma(M_1\cup M_2) = \sigma(M_1)\cup\sigma(M_2)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}\in\sigma(M_1)\cap\sigma(M_2)$, dann gilt also $M_1, M_2\in\mathcal{F}$. Damit ist auch $M_1\cap M_2\in\mathcal{F}$, also $\mathcal{F}\in\sigma(M_1\cap M_2)$. Sei nun vorausgesetzt dass $M_1, M_2\in\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{F}\in\sigma(M_1\cap M_2)$, dann ist $M_1\cap M_2\in\mathcal{F}$, und daher auch $M_1, M_2\in\mathcal{F}$. Damit haben wir $\mathcal{F}\in\sigma(M_1)\cap\sigma(M_2)$.

Als nächstes haben wir

$$\begin{aligned}\sigma(M_1\cup M_2) &= \{\mathcal{F}\in\sigma(X,B):\ M_1\cup M_2\in\mathcal{F}\}\\ &\supseteq \{\mathcal{F}\in\sigma(X,B):\ M_1\in\mathcal{F}\}\cup\{\mathcal{F}\in\sigma(X,B):\ M_2\in\mathcal{F}\} = \sigma(M_1)\cup\sigma(M_2).\end{aligned}$$

Umgekehrt, sei $\mathcal{F}\notin\sigma(M_1)\cup\sigma(M_2)$, d.h., $M_1\notin\mathcal{F}$ und $M_2\notin\mathcal{F}$. Wegen Lemma 2.6.4 finden wir $F_1, F_2\in\mathcal{F}$ mit $F_1\cap M_1 = F_2\cap M_2 = \emptyset$. Dann ist $F_1\cap F_2\in\mathcal{F}$, und es gilt $(M_1\cup M_2)\cap(F_1\cap F_2)=\emptyset$. Daher ist $M_1\cup M_2\notin\mathcal{F}$, d.h., $\mathcal{F}\notin\sigma(M_1\cup M_2)$. □

2.6.7 Satz. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis von $(X,\mathcal{T})$. Dann ist*

$$\sigma(\mathcal{B}) = \{\sigma(B):\ B\in\mathcal{B}\}$$

abgeschlossene Basis einer (eindeutigen) Topologie $\mathcal{T}_\sigma$ auf $\sigma(X,\mathcal{B})$. Der topologische Raum $(\sigma(X,\mathcal{B}),\mathcal{T}_\sigma)$ ist kompakt und (T_1).

Ist $\mathcal{B}$ eine normale Basis, so ist $\mathcal{T}_\sigma$ Hausdorff.

Beweis.

① Wir zeigen, dass die Menge $\{\sigma(B)^c:\ B\in\mathcal{B}\}$ Basis einer Topologie auf $\sigma(X,\mathcal{B})$ ist.

Zunächst ist $\emptyset\in\mathcal{B}$ und $\sigma(X,\mathcal{B}) = \sigma(\emptyset)^c$. Wegen Lemma 2.6.6, und da $\mathcal{B}$ unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, ist $\{\sigma(B)^c:\ B\in\mathcal{B}\}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen. Also ist diese Menge tatsächlich Basis einer Topologie auf $\sigma(X,\mathcal{B})$ ist. Per definitionem hat $\mathcal{T}_\sigma$ die abgeschlossene Basis $\sigma(\mathcal{B})$, und klarerweise ist eine Topologie durch jede ihrer abgeschlossenen Basen eindeutig bestimmt.

Wir wollen die von $\{\sigma(B)^c:\ B\in\mathcal{B}\}$ erzeugte Topologie mit $\mathcal{T}_\sigma$ bezeichnen.

② Wir zeigen, dass $(\sigma(X,\mathcal{B}),\mathcal{T}_\sigma)$ das Trennungsaxiom (T_1) erfüllt.

Seien dazu $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\sigma(X,\mathcal{B})$ mit $\mathcal{F}\neq\mathcal{G}$ gegeben. Wegen der Maximalität von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ folgt $\mathcal{F}\not\subseteq\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}\not\subseteq\mathcal{F}$. Wähle $F\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}$ und $G\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{F}$. Dann gilt $\mathcal{F}\in\sigma(F),\mathcal{G}\notin\sigma(F)$ und $\mathcal{F}\in\sigma(F),\mathcal{G}\notin\sigma(F)$. Die Mengen $O_F := \sigma(G)^c$ und $O_G := \sigma(F)^c$ sind offen in $\sigma(X,\mathcal{B})$, und wir haben

$$\mathcal{F}\in O_F, \mathcal{G}\notin O_F \quad\text{und}\quad \mathcal{G}\in O_G, \mathcal{F}\notin O_G.$$

③ Wir zeigen, dass $(\sigma(X,\mathcal{B}),\mathcal{T}_\sigma)$ kompakt ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass jede Teilfamilie der abgeschlossenen Basis $\sigma(\mathcal{B})$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft nichtleeren Durchschnitt hat (denn dies ist klarerweise dazu äquivalent dass jede Familie abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft nichtleeren Durchschnitt hat). Sei also eine Teilfamilie C von $\sigma(\mathcal{B})$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft gegeben. Schreibe $C = \sigma(\mathcal{B}')$ mit einer geeigneten Familie $\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}$.

Wir zeigen, dass $\mathcal{B}'$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Seien dazu $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}'$. Dann ist

$$\sigma(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \sigma(B_1) \cap \ldots \cap \sigma(B_n) \neq \emptyset,$$

und da $\sigma(\emptyset) = \emptyset$ ist, muss $B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq \emptyset$ sein.

Nach Lemma 2.6.4 finden wir einen maximalen $\mathcal{B}$-Filter $\mathcal{F}$ der $\mathcal{B}'$ umfasst. Dann gilt $\mathcal{F} \in \bigcap_{B\in\mathcal{B}'} \sigma(B) = \bigcap C$.

④ Sei nun vorausgesetzt, dass $\mathcal{B}$ eine normale Basis ist. Wir zeigen (T_2).
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \sigma(X, \mathcal{B})$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Mit Lemma 2.6.4 sehen wir, dass es Mengen $B_1 \in \mathcal{F}$, $B_2 \in \mathcal{G}$, gibt mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Wähle $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \cap C_1 = B_2 \cap C_2 = \emptyset$ und $C_1 \cup C_2 = X$. Dann ist $C_1 \notin \mathcal{F}$ und $C_2 \notin \mathcal{G}$, also $\mathcal{F} \in \sigma(C_1)^c$ und $\mathcal{G} \in \sigma(C_2)^c$. Weiters ist $X = C_1 \cup C_2 \in \mathcal{B}$, und daher

$$\sigma(C_1) \cup \sigma(C_2) = \sigma(C_1 \cup C_2) = \sigma(X) = \sigma(X, \mathcal{B}).$$

Es ist also $\sigma(C_1)^c \cap \sigma(C_2)^c = \emptyset$, und wir haben zwei trennende offene Mengen gefunden.

□

Als nächstes konstruieren wir eine Einbettung von X in $\sigma(X, \mathcal{B})$. Für $x \in X$ setze

$$\mathcal{F}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}.$$

2.6.8 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis von $(X, \mathcal{T})$. Die Abbildung*

$$\iota_\sigma : \begin{cases} X & \to & \sigma(X, \mathcal{B}) \\ x & \mapsto & \mathcal{F}_x \end{cases}$$

ist eine Einbettung von $(X, \mathcal{T})$ in $(\sigma(X, \mathcal{B}), \mathcal{T}_\sigma)$ und $\iota_\sigma(X)$ ist dicht in $\sigma(X, \mathcal{B})$. Es gilt

(i) *$\{\overline{\iota_\sigma(B)} : B \in \mathcal{B}\}$ ist eine abgeschlossene Basis von $\mathcal{T}_\sigma$,*

(ii) *$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}.\ \overline{\iota_\sigma(B_1)} \cap \overline{\iota_\sigma(B_2)} = \overline{\iota_\sigma(B_1) \cap \iota_\sigma(B_2)}$,*

Ist $\mathcal{T}_\sigma$ Hausdorff, so ist $\mathcal{B}$ eine normale Basis.

Beweis.

① Wir zeigen, dass $\mathcal{F}_x$ ein maximaler $\mathcal{B}$-Filter ist.
Da $\emptyset \in \mathcal{B}$, erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Menge $C \in \mathcal{B}$ mit $x \in C$. Also ist $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$. Alle anderen Eigenschaften eines $\mathcal{B}$-Filters sind offensichtlich.

Sei nun angenommen $\mathcal{G}$ wäre ein $\mathcal{B}$-Filter mit $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}_x$. Wähle $B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}_x$. Dann ist also $x \notin B$. Daher finden wir $C \in \mathcal{B}$ mit $B \cap C = \emptyset$ und $x \in C$. Dann ist $C \in \mathcal{F}_x$ aber $C \notin \mathcal{G}$, und wir haben einen Widerspruch erhalten.

② Wir zeigen, dass ι_σ injektiv ist.
Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gegeben. Da $(X, \mathcal{T})$ insbesondere (T_0) erfüllt, finden wir eine offene Menge O die einen dieser Punkte enthält und den anderen aber nicht. Sei zum Beispiel $x \in O$ aber $y \notin O$. Die Menge O^c ist Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{B}$, daher finden wir $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ aber $y \notin \mathcal{B}$. Es folgt $B \in \mathcal{F}_y \setminus \mathcal{F}_x$, und damit $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$.

③ Wir zeigen, dass ι_σ eine Homöomorphismus auf sein Bild ist.
Sei $B \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\iota_\sigma(X) \cap \sigma(B) = \{\mathcal{F}_x : x \in X, B \in \mathcal{F}_x\} = \{\mathcal{F}_x : x \in B\} = \iota_\sigma(B). \tag{2.6.1}$$

Da $\mathcal{T}_\sigma$ die Menge $\{\sigma(B)^c : B \in \mathcal{B}\}$ als Basis hat, hat die Spurtopologie von $\mathcal{T}_\sigma$ auf $\iota(X)$ die Basis $\{\iota(X) \cap \sigma(B)^c : B \in \mathcal{B}\}$. Nun gilt, da ι_σ injektiv ist,

$$\iota_\sigma(X) \cap \sigma(B)^c = \iota_\sigma(X) \setminus \sigma(B) = \iota_\sigma(X) \setminus \big(\iota_\sigma(X) \cap \sigma(B)\big) = \iota_\sigma(X) \setminus \iota_\sigma(B) = \iota_\sigma(B^c).$$

Nun ist $\{B^c : B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, und wir sehen, dass ι_σ eine Basis der Topologie im Urbildraum auf eine Basis der Topologie im Bildraum abbildet. Daher ist ι_σ ein Homöomorphismus.

④ Wir zeigen, dass ι_σ dichtes Bild hat.

Sei O eine nichtleere offene Menge in $\sigma(X,\mathcal{B})$. Wähle $B \in \mathcal{B}$ sodass $\sigma(B)^c \neq \emptyset$ und $\sigma(B)^c \subseteq O$. Wäre $B = X$, so hätten wir $X \in \mathcal{B}$ und $\sigma(B) = \sigma(X,\mathcal{B})$, ein Widerspruch. Also ist $B \neq X$, und wir finden $x \in X \setminus B$. Dann gilt $B \notin \mathcal{F}_x$, und daher $\mathcal{F}_x \in \sigma(B)^c$. Das zeigt insbesondere, dass $\iota_\sigma(X) \cap O \neq \emptyset$.

⑤ Wir zeigen, dass $\sigma(C) = \overline{\iota_\sigma(C)}$, $C \in \mathcal{B}$, und folgern (i)–(ii).

Als erstes bemerken wir, dass für je zwei Mengen $B, C \in \mathcal{B}$ wegen (2.6.1) und der Injektivität von ι_σ gilt:

$$\sigma(B) \supseteq \iota_\sigma(C) \;\Leftrightarrow\; \iota_\sigma(X) \cap \sigma(B) \supseteq \iota_\sigma(C) \Leftrightarrow\; \iota_\sigma(B) \supseteq \iota_\sigma(C) \Leftrightarrow\; B \supseteq C$$

Sei nun $C \in \mathcal{B}$ gegeben. Da $\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_\sigma$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\overline{\iota_\sigma(C)}^c &= \bigcup\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}, \sigma(B)^c \subseteq \overline{\iota_\sigma(C)}^c\} = \bigcup\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}, \sigma(B)^c \cap \overline{\iota_\sigma(C)} = \emptyset\} \\ &= \bigcup\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}, \sigma(B)^c \cap \iota_\sigma(C) = \emptyset\} = \bigcup\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}, \sigma(B) \supseteq \iota_\sigma(C)\} \\ &= \bigcup\{\sigma(B)^c\colon\ B \in \mathcal{B}, B \supseteq C\} = \sigma(C)^c,\end{aligned}$$

wobei wir für die Inklusion "$\subseteq$" in der letzten Gleichheit die Monotonie von σ verwendet haben.

Die Eigenschaft (i) gilt nun da $\{\sigma(B)\colon\ B \in \mathcal{B}\} = \{\overline{\iota_\sigma(B)}\colon\ B \in \mathcal{B}\}$, und (ii) gilt wegen Lemma 2.6.6 und da ι_σ injektiv ist.

⑥ Sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{T}_\sigma$ Hausdorff ist. Wir zeigen dass $\mathcal{B}$ normale Basis ist.

Seien B_1, B_2 disjunkte Mengen aus $\mathcal{B}$. Dann ist, wegen (ii), auch $\overline{\iota_\sigma(B_1)} \cap \overline{\iota_\sigma(B_1)} = \emptyset$. Da $\sigma(X,\mathcal{B})$ kompakt und Hausdorff ist, ist $\sigma(X,\mathcal{B})$ auch normal, und wir finden disjunkte Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_\sigma$ mit $O_1 \supseteq \overline{\iota_\sigma(B_1)}$ und $O_2 \supseteq \overline{\iota_\sigma(B_2)}$.

Wir zeigen nun, dass man O_1 von der Gestalt $\sigma(C_1)^c$ mit einem gewissen $C_1 \in \mathcal{B}$ wählen kann. Dazu schreibe $O_1 = \bigcup_{i\in I} \sigma(D_i)^c$ mit $D_i \in \mathcal{B}$. Da $\overline{\iota(B_1)}$ kompakt ist, finden wir $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $\overline{\iota(B_1)} \subseteq \sigma(D_{i_1})^c \cup \ldots \cup \sigma(D_{i_n})^c$. Es ist $C_1 := D_{i_1} \cap \ldots \cap D_{i_n} \in \mathcal{B}$, und mit Lemma 2.6.6 erhalten wir

$$\overline{\iota(B_1)} \subseteq \sigma(C_1)^c \subseteq O_1.$$

Genauso konstruiert man $C_2 \in \mathcal{B}$ mit $\overline{\iota(B_2)} \subseteq \sigma(C_2)^c \subseteq O_2$.

Sei angenommen, dass $B_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, und wähle x in diesem Durchschnitt. Dann gilt $B_1, C_1 \in \mathcal{F}_x$, also $\mathcal{F}_x \in \sigma(B_1) \cap \sigma(C_1) = \overline{\iota_\sigma(B_1)} \cap \sigma(C_1)$, ein Widerspruch. Also haben wir $B_1 \cap C_1 = \emptyset$. Genauso sieht man dass $B_2 \cap C_2 = \emptyset$. Schliesslich gilt $\sigma(C_1 \cup C_2) = \sigma(C_1) \cup \sigma(C_2) = (\sigma(C_1)^c \cap \sigma(C_2)^c)^c = \sigma(X,\mathcal{B})$. Sei angenommen dass $C_1 \cup C_2 \neq X$, und wähle $x \in X \setminus (C_1 \cup C_2)$. Dann ist $C_1 \cup C_2 \notin \mathcal{F}_x$, und daher $\mathcal{F}_x \notin \sigma(C_1 \cup C_2)$, ein Widerspruch. Also haben wir $C_1 \cup C_2 = X$.

□

Wir erhalten also aus jeder T_1-Basis $\mathcal{B}$ die Kompaktifizierung $(\iota_\sigma, (\sigma(X,\mathcal{B}), \mathcal{T}_\sigma))$, und wir bezeichnen diese als die von $\mathcal{B}$ induzierte *Shanin–Kompaktifizierung*. Fasst man die beiden letzten Sätze zusammen, so gilt detaillierter:

2.6.9 Korollar. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis von $(X,\mathcal{T})$. Dann ist $(\iota_\sigma, (\sigma(X,\mathcal{B}), \mathcal{T}_\sigma))$ eine T_1-Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$, und es gelten die Eigenschaften* (i) *und* (ii) *aus Satz* 2.6.8.

Sie ist genau dann eine T_2-Kompaktifizierung wenn $\mathcal{B}$ eine normale Basis ist. □

Es gilt auch eine Eindeutigkeitsaussage.

2.6.10 Satz. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein T_1-Raum, und $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis von $(X,\mathcal{T})$. Sei $(\iota_Y, (Y, \mathcal{T}_Y))$ eine T_1-Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T})$ die die Eigenschaften* (i) *und* (ii) *aus Satz* 2.6.8 *hat. Dann ist $(\iota_Y, (Y, \mathcal{T}_Y))$ isomorph zu der von $\mathcal{B}$ induzierten Shanin–Kompaktifizierung.*

Beweis. Sei eine T_1-Kompaktifizierung $(\iota_Y, (Y, \mathcal{T}_Y))$ mit (i), (ii), gegeben. Wir konstruieren einen Isomorphismus $\varphi\colon (\iota_\sigma, (\sigma(X,\mathcal{B}), \mathcal{T}_\sigma)) \to (\iota_Y, (Y, \mathcal{T}_Y))$.

① Wir zeigen, dass für jedes $\mathcal{F} \in \sigma(X, \mathcal{B})$ die Menge $\bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\}$ einelementig ist.

Betrachte die Familie $C := \{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\}$. Da $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, hat auch C diese. Die Kompaktheit von Y impliziert nun $\bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Wähle ein Element y in diesem Durchschnitt. Wir zeigen als nächstes, dass

$$C = \{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{B}, y \in \overline{\iota_Y(B)}\}.$$

Dabei gilt die Implikation "$\subseteq$" nach Definition von y. Sei $C \in \mathcal{B}$ mit $y \in \overline{\iota_Y(C)}$. Sei $F \in \mathcal{F}$, dann gilt wegen der Eigenschaft (ii) und da ι_Y injektiv ist,

$$y \in \overline{\iota_Y(C)} \cap \overline{\iota_Y(F)} = \overline{\iota_Y(C) \cap \iota_Y(F)} = \overline{\iota_Y(C \cap F)}.$$

Damit folgt dass $C \cap F \neq \emptyset$, und Lemma 2.6.4 zeigt $C \in \mathcal{F}$. Wegen der Eigenschaft (i) und da Y (T_1) ist, erhalten wir

$$\bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\} = \bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{B}, y \in \overline{\iota_Y(B)}\} = \{y\}.$$

② Nach dem oben gezeigten ist eine Abbildung $\varphi\colon \sigma(X, \mathcal{B}) \to Y$ wohldefiniert durch die Vorschrift dass stets $\varphi(\mathcal{F}) \in \bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\}$ gilt. Ist $x \in X$, so gilt für jedes $B \in \mathcal{F}_x$ dass $x \in B$, und damit dass $\iota_Y(x) \in \overline{\iota_Y(B)}$. Dies zeigt $\varphi(\mathcal{F}_x) = \iota_Y(x)$, $x \in X$, d.h., $\varphi \circ \iota_\sigma = \iota_Y$.

③ Wir zeigen, dass φ bijektiv ist.

Seien zuerst $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \sigma(X, \mathcal{B})$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ gegeben. Wähle $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$ mit $F \cap G = \emptyset$. Dann gilt auch

$$\bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\} \cap \bigcap\{\overline{\iota_Y(C)}\colon\ C \in \mathcal{G}\} \subseteq \overline{\iota_Y(F)} \cap \overline{\iota_Y(G)} = \overline{\iota_Y(F \cap G)} = \emptyset,$$

und daher $\varphi(\mathcal{F}) \neq \varphi(\mathcal{G})$.

Sei nun $y \in Y$ gegeben, und betrachte die Menge $\{B \in \mathcal{B}\colon\ y \in \overline{\iota_Y(B)}\}$. Diese hat wegen (ii) die endliche Durchschnittseigenschaft. Wähle $\mathcal{F} \in \sigma(X, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{F} \supseteq \{B \in \mathcal{B}\colon\ y \in \overline{\iota_Y(B)}\}$. Dann gilt

$$\bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{B}, y \in \overline{\iota_Y(B)}\} = \{y\},$$

also $\varphi(\mathcal{F}) = y$.

④ Wir zeigen, dass φ ein Homöomorphismus ist.

Dazu genügt es zu wissen, dass φ eine abgeschlossenen Basis auf eine abgeschlossene Basis abbildet; und wir zeigen

$$\varphi(\sigma(B)) = \overline{\iota_Y(B)}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Für $\mathcal{F} \in \sigma(B)$ ist $B \in \mathcal{F}$, und daher

$$\varphi(\mathcal{F}) \in \bigcap\{\overline{\iota_Y(B)}\colon\ B \in \mathcal{F}\} \subseteq \overline{\iota_Y(B)}.$$

Also haben wir $\varphi(\sigma(B)) \subseteq \overline{\iota_Y(B)}$. Umgekehrt, sei $y \in \overline{\iota_Y(B)}$, und $\mathcal{F} := \varphi^{-1}(y)$. Dann gilt für jedes $F \in \mathcal{F}$ dass $y \in \overline{\iota_Y(B)} \cap \overline{\iota_Y(F)} = \overline{\iota_Y(B \cap F)}$, also muss $B \cap F \neq \emptyset$ sein. Dies zeigt $B \in \mathcal{F}$, also $\mathcal{F} \in \sigma(B)$.

□

Shanin's Konstruktion liefert viele, aber im allgemeinen nicht alle, Kompaktifizierungen. Im Folgenden zeigen wir, dass man jedenfalls für spezielle Wahlen von $\mathcal{B}$ die Alexandroff– und die Stone-Cech–Kompaktifizierung erhält.

2.6.11 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt, (T_2), und nicht kompakt. Dann ist*

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq X\colon\ B \text{ kompakt}\} \cup \{B \subseteq X\colon\ B \text{ abgeschlossen } \wedge \exists C \subseteq X \text{ kompakt}.\ B \cup C = X\}$$

eine normale Basis von X, und die von ihr induzierte Shanin–Kompaktifizierung ist isomorph zur Alexandroff–Kompaktifizierung.

Beweis. Zunächst eine allgemeine Feststellung: Da X lokalkompakt und (T_2) ist, ist die Alexandroff–Kompaktifizierung Hausdorff. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär, insbesondere regulär, und daher bilden für jeden Punkt von X die abgeschlossenen Umgebungen dieses Punktes eine Umgebungsbasis. Da wir eine kompakte Umgebung haben, bilden daher auch die kompakten Umgebungen dieses Punktes eine Umgebungsbasis.

① Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis ist.

➢ $\emptyset$ ist kompakt.

➢ Sind B_1, B_2 kompakt, so sind auch $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \cup B_2$ kompakt. Sei nun B_1 kompakt, und B_2 abgeschlossen und C_2 kompakt mit $B_2 \cup C_2 = X$. Dann ist $B_1 \cap B_2$ kompakt, und $B_1 \cup B_2$ abgeschlossen mit $(B_1 \cup B_2) \cup C_2 = X$. Der Fall dass B_2 kompakt ist, und B_1 abgeschlossen und C_1 kompakt mit $B_1 \cup C_1 = X$ ist analog. Seien schließlich B_1, B_2 abgeschlossen, und C_1, C_2 kompakt mit $B_1 \cup C_1 = B_2 \cup C_2 = X$. Dann sind $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \cup B_2$ abgeschlossen, und $(B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cup C_2) = X$ und $(B_1 \cup B_2) \cup C_1 = X$.

➢ Sei $B \in \mathcal{B}$ und $x \in X \setminus B$. Wie Eingangs angemerkt, bilden die kompakten Umgebungen von x eine Umgebungsbasis, und daher finden wir eine kompakte Umgebung C von x mit $C \subseteq X \setminus B$.

➢ Sei $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$. Wähle eine kompakte Umgebung C von x mit $C \subseteq O$, und wähle $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq C$. Dann ist $X \setminus V$ abgeschlossen, und $(X \setminus V) \cup C = X$. Also ist $V^c \in \mathcal{B}$. Wir sehen, dass $\{B^c : B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

② Wir zeigen, dass $\alpha(X)$ der Bedingung (i) aus Satz 2.6.8 genügt.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\overline{A}^{\alpha}$ den Abschluss einer Menge in $\alpha(X)$. Es ist zu zeigen, dass die Familie

$$C' := \{\alpha(X) \setminus \overline{B}^{\alpha} : B \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_\alpha$ bildet. Daher sei $O \in \mathcal{T}_\alpha$ und $x \in O$ gegeben.

➢ Betrachte den Fall, dass $x = \infty$. Dann ist $O \notin \mathcal{T}$ und daher $X \setminus O$ kompakt in X. Dann ist $X \setminus O$ auch kompakt in $\alpha(X)$ und, da $\alpha(X)$ Hausdorff ist, auch abgeschlossen. Da $\infty \in O$, gilt

$$\alpha(X) \setminus \overline{X \setminus O}^{\alpha} = \alpha(X) \setminus (X \setminus O) = O,$$

also haben wir $O \in C'$.

➢ Betrachte den Fall, dass $x \in X$. Da $X \cap O$ offen in X ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $O \in \mathcal{T}$. Wähle $C \subseteq X$ kompakt und $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq C \subseteq O$. Da die Inklusionsabbildung ι_α eine Einbettung ist, und $X \setminus O$ abgeschlossen in X ist, folgt

$$\overline{X \setminus V}^{\alpha} = \begin{cases} X \setminus V & , \quad X \setminus V \text{ abgeschlossen in } \alpha(X) \\ (X \setminus V) \cup \{\infty\}, & \quad V \text{ nicht abgeschlossen in } \alpha(X) \end{cases}$$

Wir zeigen, dass der zweite Fall eintreten muss. Sei dazu angenommen, es wäre $X \setminus V$ abgeschlossen in $\alpha(X)$. Dann finden wir $U \in \mathcal{T}_\alpha$ mit $\infty \in U$ und $(X \setminus V) \cap U = \emptyset$. Es ist $X \setminus U$ kompakt in X, und wir haben $X = (X \setminus U) \cup V$, und daher auch $X = (X \setminus U) \cup C$. Als Vereinigung zweier kompakter Mengen wäre also X selbst kompakt, ein Widerspruch.

Es gilt also tatsächlich stets $\overline{X \setminus V}^{\alpha} = (X \setminus V) \cup \{\infty\}$, und damit $\alpha(X) \setminus \overline{X \setminus V}^{\alpha} = V$. Da weiters $(X \setminus V) \cup C = X$, folgt $V \in C'$.

③ Wir zeigen, dass $\alpha(X)$ der Bedingung (ii) aus Satz 2.6.8 genügt.

Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Dann sind B_1, B_2 abgeschlossen in X, und daher haben wir $\overline{B_i}^{\alpha} \in \{B_i, B_i \cup \{\infty\}\}$, $i = 1, 2$. Damit erhalten wir

$$B_1 \cap B_2 \subseteq \overline{B_1 \cap B_2}^{\alpha} \subseteq \overline{B_1}^{\alpha} \cap \overline{B_2}^{\alpha} \subseteq (B_1 \cap B_2) \cup \{\infty\}.$$

Ist also $B_1 \cap B_2$ nicht abgeschlossen in $\alpha(X)$, so folgt bereits die gewünschte Gleichheit, denn der zweite Term ist dann gleich dem letzten. Ebenso folgt dies, wenn mindestens eine von B_1, B_2 abgeschlossen in $\alpha(X)$ ist, denn dann ist der dritte Term gleich dem ersten.

Sei nun angenommen, dass $B_1 \cap B_2$ abgeschlossen in $\alpha(X)$ ist, aber B_1 nicht abgeschlossen in $\alpha(X)$. Dann kann B_1 nicht kompakt in X sein, denn B_1 kompakt in X impliziert B_1 kompakt in $\alpha(X)$ und daher B_1 abgeschlossen in $\alpha(X)$ da $\alpha(X)$ Hausdorff ist. Wegen $B_1 \in \mathcal{B}$ finden wir $C_1 \subseteq X$ kompakt mit $X = B_1 \cup C_1$. Daraus folgt nun $B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap C_1)$, und damit dass B_2 kompakt in X ist. Dies wiederum zeigt, dass B_2 abgeschlossen in $\alpha(X)$ ist, und wir sind in dem zweiten der bereits behandelten Fälle.

④ Die Eindeutigkeitsaussage Satz 2.6.10 gibt dass die Alexandroff–Kompaktifizierung $(\iota_\alpha, (\alpha(X), \mathcal{T}_\alpha))$ isomorph zu der von $\mathcal{B}$ induzierten Shanin–Kompaktifizierung ist. Insbesondere ist $\sigma(X, \mathcal{B})$ Hausdorff, und daher muss $\mathcal{B}$ sogar eine normale Basis sein.

□

2.6.12 Definition. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt *Nullstellenmenge*, wenn es eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ gibt mit $M = f^{-1}(\{0\})$. ◊

Bemerke, dass M genau dann eine Nullstellenmenge ist, wenn $M = g^{-1}(\{0\})$ für eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,1]$. Verwende zum Beispiel $g \coloneqq |f|(1+|f|)^{-1}$ wo f wie in der Definition ist.

2.6.13 Proposition. *Sei $(X,\mathcal{T})$ vollständig regulär. Dann ist die Menge $\mathcal{B}$ aller Nullstellenmengen in X eine normale Basis von X, und die von ihr induzierte Shanin–Kompaktifizierung ist isomorph zur Stone-Cech–Kompaktifizierung.*

Beweis.

① Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine T_1-Basis ist.

➢ Jede Nullstellenmenge ist abgeschlossen. Sind $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$, so wähle $f\colon X \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 1$ und $f(O^c) = \{0\}$. Dann ist $x \in f^{-1}(\{0\})^c \subseteq O$. Wir sehen, dass $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Basis ist.

➢ Die leere Menge ist klarerweise eine Nullstellenmenge (wähle f die konstante Funktion mit Wert 1).

➢ Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, und schreibe $B_1 = f_1^{-1}(\{0\})$ und $B_2 = f_2^{-1}(\{0\})$ mit stetigen Funktionen $f_1, f_2\colon X \to [0,1]$. Dann ist

$$B_1 \cap B_2 = \big(\max\{f_1, f_2\}\big)^{-1}(\{0\}), \quad B_1 \cup B_2 = \big(\min\{f_1, f_2\}\big)^{-1}(\{0\}).$$

➢ Sei $B \in \mathcal{B}$ und $x \in X \setminus B$. Wähle eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(B) = \{1\}$, und setze $C \coloneqq f^{-1}(\{0\})$. Dann ist $C \in \mathcal{B}$, $B \cap C = \emptyset$ und $x \in C$.

② Wir zeigen, dass $\beta(X)$ der Bedingung (i) aus Satz 2.6.8 genügt.

Sei $O \subseteq \beta(X)$ offen, und $z \in O$. Wähle $g_0\colon \beta(X) \to [0,1]$ stetig mit $g_0(z) = 1$ und $g_0(O^c) = \{0\}$, und wähle $g_1\colon \beta(X) \to [0,1]$ stetig mit $g_1(z) = 1$ und $g_1(g_0^{-1}([0,\frac{1}{2}])) = \{0\}$. Nun setze $Z \coloneqq g_1^{-1}(\{0\})$ und $W \coloneqq g_0^{-1}([0,\frac{1}{2}))$. Dann gilt

$$Z \text{ kompakt}, \ W \text{ offen}, \quad z \notin Z, \ O^c \subseteq W \subseteq Z.$$

Die Funktion $f \coloneqq g_1 \circ \iota_\beta\colon X \to [0,1]$ ist stetig. Setze $B \coloneqq f^{-1}(\{0\}) = \iota_\beta^{-1}(Z)$. Dann ist $B \in \mathcal{B}$. Es gilt $\iota_\beta(B) \subseteq Z$, und daher auch $\overline{\iota_\beta(B)} \subseteq Z$. Betrachte nun einen Punkt $w \in W$. Ist $V \subseteq \beta(X)$ offen mit $w \in V$, so ist $\iota_\beta(X) \cap (V \cap W) \neq \emptyset$, da $\iota_\beta(X)$ dicht in $\beta(X)$ ist. Wähle $x \in X$ sodass $\iota_\beta(X)$ in diesem Durchschnitt liegt. Dann gilt $x \in \iota_\beta^{-1}(Z) = B$, also haben wir $\iota_\beta(B) \cap V \neq \emptyset$. Da V beliebig war, folgt $w \in \overline{\iota_\beta(B)}$. Wir erhalten $W \subseteq \overline{\iota_\beta(B)}$, und damit

$$z \in \beta(X) \setminus Z \subseteq \beta(X) \setminus \overline{\iota_\beta(B)} \subseteq \beta(X) \setminus W \subseteq O.$$

③ Wir zeigen die folgende allgemeine Aussage: Ist Y vollständig regulär, so bilden für jeden Punkt von Y die Umgebungen von y die Nullstellenmengen sind eine Umgebungsbasis von y.

Sei $O \subseteq Y$ offen mit $y \in O$. Wähle eine stetige Funktion $f\colon Y \to [0,1]$ mit $f(y) = 0$ und $f(O^c) = \{1\}$. Sei $g\colon [0,1] \to [0,1]$ die stückweise lineare stetige Funktion

$$g(t) \coloneqq \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2}, & \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} \coloneqq g \circ f\colon Y \to [0,1]$ stetig, und es gilt

$$y \in f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \subseteq \tilde{f}^{-1}(\{0\}) = f^{-1}([0,\frac{1}{2}]) \subseteq O.$$

④ Wir zeigen, dass $\beta(X)$ der Bedingung (ii) aus Satz 2.6.8 genügt.

Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gegeben. Wir betrachten zuerst den Fall dass $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Es ist also zu zeigen, dass $\overline{\iota_\beta(B_1)} \cap \overline{\iota_\beta(B_2)} = \emptyset$. Schreibe $B_i = g_i^{-1}(\{0\})$ mit gewissen stetigen Funktionen $g_i\colon X \to [0,1]$. Da $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, ist $g_1(x) + g_2(x) > 0$, $x \in X$. Daher ist die Funktion

$$f(x) \coloneqq \frac{g_1(x)}{g_1(x) + g_2(x)}, \quad x \in X,$$

wohldefiniert und stetig. Offenbar bildet sie X nach $[0,1]$ ab, und erfüllt $f(B_1) = \{0\}$ und $f(B_2) = \{1\}$. Sei nun $\tilde{f}\colon \beta(X) \to [0,1]$ stetige Fortsetzung von f, sprich, $\tilde{f} \circ \iota_\beta = f$. Die Menge $Z_1 := \tilde{f}^{-1}(\{0\})$ und $Z_2 := \tilde{f}^{-1}(\{1\})$ sind abgeschlossen in $\beta(X)$, disjunkt, und $\iota_\beta(B_1) \subseteq Z_1$ und $\iota_\beta(B_2) \subseteq Z_2$. Es folgt

$$\overline{\iota_\beta(B_1)} \cap \overline{\iota_\beta(B_2)} \subseteq Z_1 \cap Z_2 = \emptyset.$$

Seien nun $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ beliebig. Die Inklusion $\overline{\iota_\beta(B_1) \cap \iota_\beta(B_2)} \subseteq \overline{\iota_\beta(B_1)} \cap \overline{\iota_\beta(B_2)}$ gilt trivialerweise.

Sei umgekehrt $z \in \overline{\iota_\beta(B_1)} \cap \overline{\iota_\beta(B_2)}$. Um zu zeigen, dass $z \in \overline{\iota_\beta(B_1) \cap \iota_\beta(B_2)}$, genügt es zu zeigen, dass für jede Umgebung W von z die eine Nullstellenmenge ist gilt dass

$$W \cap \iota_\beta(B_1) \cap \iota_\beta(B_2) \neq \emptyset.$$

Sei also $W = \tilde{f}^{-1}(\{0\})$ eine Umgebung von z wobei $\tilde{f}\colon \beta(X) \to [0,1]$ stetig. Sei $f := \tilde{f} \circ \iota_\beta$, und setze $C := f^{-1}(\{0\})$.

Angenommen es wäre $C \cap (B_1 \cap B_2) = \emptyset$. Dann wären also $C \cap B_1, C \cap B_2 \in \mathcal{B}$ disjunkt. Nach dem bereits behandelten Fall erhalten wir auch $\overline{\iota_\beta(C \cap B_1)} \cap \overline{\iota_\beta(C \cap B_2)} = \emptyset$. Da $z \in \overline{\iota_\beta(B_1)}$, finden wir ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in B_1 mit $\iota_\beta(x_i) \to z$. Da W eine Umgebung von z ist, finden wir einen Index $i_0 \in I$ sodass $\iota_\beta(x_i) \in W$, $i \geq i_0$. Dies besagt $x_i \in C$, $i \geq i_0$. Damit ist $(x_i)_{i \in I, i \geq i_0}$ ein Netz in $C \cap B_1$ mit $\iota_\beta(x_i) \to z$, also haben wir $z \in \overline{\iota_\beta(C \cap B_1)}$. Genauso erhalten wir $z \in \overline{\iota_\beta(C \cap B_1)}$, und damit einen Widerspruch.

Es folgt dass $C \cap (B_1 \cap B_2) \neq \emptyset$, und damit

$$W \cap \iota_\beta(B_1 \cap B_2) \supseteq \iota_\beta(C) \cap \iota_\beta(B_1) \cap \iota_\beta(B_2) = \iota_\beta(C \cap B_1 \cap B_2) \neq \emptyset.$$

⑤ Die Eindeutigkeitsaussage Satz 2.6.10 gibt dass die Stone-Cech–Kompaktifizierung $(\iota_\beta, (\beta(X), \mathcal{T}_\beta))$ isomorph zu der von $\mathcal{B}$ induzierten Shanin–Kompaktifizierung ist. Insbesondere ist $\sigma(X, \mathcal{B})$ Hausdorff, und daher muss $\mathcal{B}$ sogar eine normale Basis sein.

□

Anhang A

Vokabular aus der Kategorientheorie

A.1 Kategorien und Funktoren

Kategorien sind ein sehr allgemeines konzeptuelles Konstrukt, das oft eine strukturierende Perspektive ermöglicht. Viele in verschiedenen mathematischen Gebieten wiederholt auftretende Konzepte und Beweise können vereinheitlicht werden, und der gemeinsame Grund für ihr gelten kann herausgestrichen werden. Die Kategorientheorie selbst hat, wie jede andere mathematische Theorie, natürlich auch ihr Eigenleben.

Wir werden nur hin und wieder ein bischen Vokabular aus der Kategorientheorie verwenden, um strukturelle Konzepte klarer darzustellen.

A.1.1 Definition. Eine *Kategorie* $\mathtt{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\operatorname{Obj}\mathtt{C}$ von *Objekten*,
- für je zwei Objekte X, Y einer Menge $\operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*,
- für jedes Objekt X einem ausgewählten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, X)$,
- für je drei Objekte X, Y, Z einer Funktion $\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Z)$,

sodass gilt

- $\forall X, Y \in \operatorname{Obj}\mathtt{C}\ \forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y).\ \ \mathrm{id}_Y \circ f = f, f \circ \mathrm{id}_X = f$,
- $\forall X, Y, Z, W \in \operatorname{Obj}\mathtt{C}\ \forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y), g \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(Y, Z), h \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(Z, W).\ \ h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

◊

A.1.2 Beispiel. Das erste Beispiel einer Kategorie, ist die Kategorie $\mathtt{Set}$. Ihre Objekte sind alle Mengen, ihre Morphismen $\operatorname{Hom}_{\mathtt{Set}}(X, Y)$ alle Funktionen $f\colon X \to Y$, das ausgewählte Element id_X die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, und die Funktionen $\circ$ die Hintereinanderausführung von Funktionen.

Offensichtlich ist dieses Beispiel auch für die allgemeine Bezeichnungsweise „id_X und $\circ$" mitverantwortlich. Oft schreibt man auch im Allgemeinen $f\colon X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ um auszudrücken, dass $f \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$. ◊

A.1.3 Beispiel. Algebraische Strukturen geben Anlass zu Kategorien. Ein Beispiel wäre $\mathtt{Ab}$ die Kategorie aller abelschen Gruppen. Ihre Objekte sind alle abelschen (d.h., kommutativen) Gruppen, ihre Morphismen $\operatorname{Hom}_{\mathtt{Ab}}(X, Y)$ alle Gruppenhomomorphismen $f\colon X \to Y$, das ausgewählte Element id_X die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, und die Funktionen $\circ$ die Hintereinanderausführung von Funktionen.

Offensichtlich sind Beispiele dieses Typs auch für die allgemeine Bezeichnungsweise „$\operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$" mitverantwortlich. ◊

A.1.4 Beispiel. Auch anders geartete Strukturen geben Anlass zu Kategorien. Ein Beispiel wäre $\mathtt{Metr}$, die Kategorie der metrischen Räume, mit allen metrischen Räumen als Objekten und allen isometrischen Abbildungen als Morphismen. Oder $\mathtt{Top}$, die Kategorie aller topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen. ◊

Anhand der obigen Beispiele sieht man schon wie Kategorien oft entstehen: Man hat eine Klasse von Objekten die Mengen mit irgendeiner zusätzlichen Struktur sind, als Morphismen betrachtet man jene Abbildungen die diese Struktur erhalten, und die Identität sowie die Abbildung $\circ$ sind die üblichen.

Kategorien die von diesem Typ sind, nennt man auch konkrete Kategorien (und dieser Begriff kann auch präzise formuliert werden). Es gibt aber auch viele sinnvolle Kategorien, die nicht konkret sind.

A.1.5 Definition. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$ heißt *Isomorphismus*, wenn es $g \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(Y, X)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

Zwei Objekte X, Y einer Kategorie $\mathtt{C}$ heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von X nach Y gibt. ◊

Die Rolle von Abbildungen zwischen Mengen wird auf dem Level der Kategorien selbst von „Funktoren" gespielt.

A.1.6 Definition. Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* F besteht aus

➢ einer Vorschrift die jedem Objekt X von $\mathtt{C}$ ein Objekt FX von $\mathtt{D}$ zuordnet,

➢ für je zwei Objekte X, Y von $\mathtt{C}$ einer Funktion $F\colon \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathtt{D}}(X, Y)$,

sodass gilt

➢ $\forall X \in \mathtt{C}.\ F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$,

➢ $\forall X, Y, Z \in \mathtt{C}\ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(Y, Z).\ F(g \circ f) = (Fg) \circ (Ff)$.

Das Symbol „F" ist hier offenbar überbelegt, aber es ist stets aus dem Zusammenhang klar was es bedeuten soll.

Ist F ein Funktor von $\mathtt{C}$ nach $\mathtt{D}$, so schreibt man auch $F\colon \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ oder $\mathtt{C} \xrightarrow{F} \mathtt{D}$. ◊

Die Hintereinanderausführung von Funktoren ist in der offensichtlichen Weise definiert.

A.1.7 Beispiel. Hat man eine – in obigem intuitiven Sinne konkrete – Kategorie $\mathtt{C}$, so hat man stets einen Funktor $U\colon \mathtt{C} \to \mathtt{Set}$. Nämlich den *Vergiss-Funktor*, der einem Objekt seine Trägermenge zuordnet und einem Morphismus die Funktion die dieser Morphismus ist. Sprich, man vergisst die zusätzliche Struktur.

Zum Beispiele agiert also der Vergiss-Funktor $U\colon \mathtt{Top} \to \mathtt{Set}$ als $F(X, \mathcal{T}) = X$ für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $Ff = f$ für eine stetige Funktion f zwischen zwei topologischen Räumen. ◊

Interessanter sind natürlich Funktoren, die nicht bloss vergessen sondern etwas konstruieren.

A.1.8 Beispiel. Sei $F\colon \mathtt{Metr} \to \mathtt{Top}$ der Funktor der einem metrischen Raum (X, d) den topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_d)$ zuordnet wo $\mathcal{T}_d$ die von der Metrik d induzierte Topologie ist. Auf Morphismen agiert F als $Ff = f$. ◊

A.2 Initiale Objekte, Teilkategorien

A.2.1 Definition. Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt X von $\mathtt{C}$ heißt *initiales Objekt* von $\mathtt{C}$, wenn für jedes Objekt Y von $\mathtt{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$ genau ein Element hat.

Dual heißt X *terminales Objekt*, wenn für alle $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathtt{C}$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(Y, X)$ genau ein Element hat. ◊

A.2.2 Beispiel. In der Kategorie $\mathtt{Set}$ ist die leere Menge initial, und jede einelementige Menge terminal. In der Kategorie $\mathtt{Ab}$ ist jede Gruppe mit genau einem Element sowohl initial als auch terminal. ◊

A.2.3 Definition. Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ Kategorien. Dann heißt $\mathtt{D}$ eine *Teilkategorie* von $\mathtt{C}$, wenn jedes Objekt von $\mathtt{D}$ auch Objekt von $\mathtt{C}$ ist, und stets $\mathrm{Hom}_{\mathtt{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$ gilt.

Man sagt $\mathtt{D}$ ist eine *volle Teilkategorie* von $\mathtt{C}$, wenn $\mathtt{D}$ eine Teilkategorie von $\mathtt{C}$ ist und sogar $\mathrm{Hom}_{\mathtt{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X, Y)$ gilt. ◊

Ist $\mathtt{D}$ eine Teilkategorie von $\mathtt{C}$, so hat man den *Inklusions-Funktor* $V\colon \mathtt{D} \to \mathtt{C}$ der als $VX = X$ und $Vf = f$ agiert.

A.2.4 Beispiel. Bezeichne mit $\mathtt{Top}^{T_2}$ die Kategorie aller Hausdorffschen topologischen Räume mit allen stetigen Funktionen als Morphismen. Dann ist $\mathtt{Top}^{T_2}$ eine volle Teilkategorie von $\mathtt{Top}$.

Als weiteres Beispiel wäre $\mathtt{Ab}$ eine (nicht volle) Teilkategorie von $\mathtt{Set}$. ◊

A.3 Adjungierte Funktoren

Oft kann – oder möchte – man Begriffe oder Sätze zwischen zwei Kategorien hin-und-her übersetzen. Die Rolle eines Wörterbuches zwischen zwei Kategorien spielt dann ein Paar von Funktoren.

A.3.1 Definition. Seien $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ zwei Kategorien. Eine *Adjunktion* zwischen $\mathtt{C}$ und $\mathtt{D}$ besteht aus

➢ einem Funktor $F\colon \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ und einem Funktor $G\colon \mathtt{D} \to \mathtt{F}$,

➢ für je zwei Objekte $X \in \operatorname{Obj}\mathtt{C}$ und $Y \in \operatorname{Obj}\mathtt{D}$ einer Bijektion $\varphi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(FX,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X,GY)$,

sodass gilt

➢ $\forall X \in \operatorname{Obj}\mathtt{C}\ \forall Y,Y' \in \operatorname{Obj}\mathtt{D}, g \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(Y,Y').\ \ \varphi_{X,Y'} \circ g_* = (Gg)_* \circ \varphi_{X,Y}$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(FX,Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "g_*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X,GY) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(FX,Y') \arrow[r, "\varphi_{X,Y'}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X,GY')
\end{tikzcd}$$

➢ $\forall X,X' \in \operatorname{Obj}\mathtt{C}, f \in \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X,X')\ \forall Y \in \operatorname{Obj}\mathtt{D}.\ \ \varphi_{X',Y} \circ (Ff)^* = h^* \circ \varphi_{X,Y}$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(FX,Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X,GY) \arrow[d, "f^*"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathtt{D}}(FX',Y) \arrow[r, "\varphi_{X',Y}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathtt{C}}(X',GY)
\end{tikzcd}$$

Hier ist f^* die Abbildung $h \mapsto h \circ f$, sowie g_* die Abbildung $h \mapsto g \circ h$. Die Abbildungen $(Ff)^*$ und $(Gg)_*$ sind analog definiert. ◊

A.3.2 Beispiel. Sei K ein Körper und $\mathtt{Vec}$ die Kategorie der Vektorräume über dem Körper K. Ihre Objekte sind alle K-Vektorräume, und ihre Morphismen alle linearen Abbildungen.

Klarerweise haben wir den Vergiss-Funktor $G\colon \mathtt{Vec} \to \mathtt{Set}$. In der anderen Richtung, haben wir auch einen Funktor, nämlich jenen der einer Menge X den K-Vektorraum FX mit X als Basis zuordnet. Explizite ist dies

$$FX := \{a \in K^X\colon\ a(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in X\},$$

mit den punktweise erklärten Vektorraumoperationen. Auf $\mathtt{Set}$-Morphismen agiert F als lineare Fortsetzung, explizite ist dies

$$[(Ff)(a)](y) := \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} a(x) \quad \text{für} \quad f\colon X \to Y,\ a \in FX \subseteq K^X,\ y \in Y.$$

Verwendet man die übliche Schreibweise $a = \sum_{x\in X} a_x x$ für Elemente von FX, so hat Ff die Darstellung $(Ff)(a) = \sum_{x\in X} a_x f(x)$. Das F tatsächlich ein Funktor ist, rechnet man einfach nach.

Um zu sehen, dass F,G eine Adjunktion bilden, müssen wir eine Bijektion $\varphi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathtt{Vec}}(FX,V) \to \operatorname{Hom}_{\mathtt{Set}}(X,V)$ angeben. Diese ist durch Einschränkung $f := f|_X$ gegeben. Ihre Inverse ist durch lineare Fortsetzung gegeben: jede Funktion von der Basis X in irgendeinen Vektorraum hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer linearen Abbildung von FX to V; die Formel für diese ist genauso wie oben $(\varphi_{X,V} f)(\sum_{x\in X} a_x x) := \sum_{x\in X} a_x f(x)$. Das dies tatsächlich eine Adjunktion ergibt, rechnet man wiederum leicht nach. ◊

Anhang B

Trennungsaxiome

B.1 Die Axiome (T_0)–(T_4)

B.1.1 Definition. Für einen topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ betrachten wir die folgenden Trennungseigenschaften:

- **(T_0)** Für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ existiert eine offene Menge O, sodass entweder $x \in O, y \notin O$ oder $y \in O, x \notin O$.
- **(T_1)** Für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ existieren offene Mengen O_x, O_y, sodass $x \in O_x, y \notin O_x$ und $y \in O_y, x \notin O_y$.
- **(T_2)** (*Hausdorff*) Für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ existieren disjunkte offene Mengen O_x, O_y, sodass $x \in O_x$ und $y \in O_y$.
- **(T_3)** Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ und Punkt $x \notin A$ existieren disjunkte offene Mengen O_A, O_x, sodass $A \subseteq O_A$ und $x \in O_x$.
- **($T_{3½}$)** Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ und Punkt $x \notin A$ existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(x) = 1$ (hier ist das Interval $[0, 1]$ mit der euklidischen Topologie versehen).
- **(T_4)** Für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$ existieren disjunkte offene Mengen O_A, O_B, sodass $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$.

Erfüllt ein Raum $(X, \mathcal{T})$ die Axiome (T_3) und (T_1), so sagt man er ist *regulär*. Erfüllt ein Raum $(X, \mathcal{T})$ die Axiome $(T_{3½})$ und (T_1), so sagt man er ist *vollständig regulär*. Erfüllt ein Raum $(X, \mathcal{T})$ die Axiome (T_4) und (T_1), so sagt man er ist *normal*. ◊

Es gelten offensichtlich die Implikationen

$$(T_{3½}) \implies (T_3), \quad (T_2) \implies (T_1) \implies (T_0)$$

und es ist

$$(T_1) \iff \forall x \in X.\ \{x\} \text{ ist abgeschlossen}$$

Damit erhält man die Implikationen

$$\text{normal} \implies \text{regulär} \implies (T_2)$$

Das *Lemma von Urysohn* impliziert impliziert, dass

$$\text{normal} \implies \text{vollständig regulär}$$

Eine Eigenschaft die $(T_{3½})$, im Gegensatz zu (T_4), hat, ist, dass sich $(T_{3½})$ auf Teilräume vererbt.

Index