Operatoren im Krein Raum

WS 2007/08

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Räume mit inneren Produkt

1.1 Geometrische Eigenschaften

1.1.1 Definition. Sei $\mathcal{L}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $[.,.] : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt*, wenn gilt

(*i*) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, $x, y, z \in \mathcal{L}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(*ii*) $[y, x] = \overline{[x, y]}$, $x, y \in \mathcal{L}$.

Ist $[.,.]$ ein inneres Produkt, so ist $[x, x]$ stets reel.

1.1.2 Definition. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Ein Element $x \in \mathcal{L}$ heißt *positiv* (*negativ*,*neutral*), wenn $[x, x] > 0$ ($[x, x] < 0$, $[x, x] = 0$).

Ein linearer Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ heißt *positiv* (*nichtnegativ*, *negativ*, *nichtpositiv*, *neutral*), wenn jedes Element $x \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ positiv (nicht negativ, negativ, nicht positiv, neutral) ist. $\mathcal{M}$ heißt *definit*, wenn $\mathcal{M}$ positiv oder negativ ist, und *semidefinit* wenn $\mathcal{M}$ nichtnegativ oder nichtpositiv ist.

Das innere Produkt $[.,.]$ heißt *positiv definit* (*positiv semidefinit*, *negativ definit*, *negativ semidefinit*, *definit*, *semidefinit*), wenn $\mathcal{L}$ selbst positiv (nichtnegativ, negativ, nichtpositiv, definit, semidefinit) ist

Eine wichtige Rolle spielt der Begriff der Orthogonalität.

1.1.3 Definition. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Zwei Elemente $x, y \in \mathcal{L}$ heißen *orthogonal*, wenn $[x, y] = 0$ ist. Man schreibt in diesem Fall $x \perp y$ bzw. wenn man herausstreichen möchte bzgl. welchem inneren Produkt die Orthogonalität zu verstehen ist, auch $x[\perp]y$.

Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$, so heißt $M^\perp := \{x \in \mathcal{L} : x \perp y, y \in M\}$ das *orthogonale Komplement* von M. Analog wie oben schreibt man manchmal auch $M^{[\perp]}$.

Ein Element $x \in \mathcal{L}$ heißt *isotrop*, wenn $x \perp \mathcal{L}$, d.h. $[x, y] = 0$ für alle $y \in \mathcal{L}$. Die Menge $\mathcal{L}^\circ := \mathcal{L}^\perp$ heißt der *isotrope Teil* von $\mathcal{L}$. Das innere Produkt $[.,.]$ heißt *nicht-entartet*, wenn $\mathcal{L}^{[\circ]} = \{0\}$ ist.

1.1.4 Bemerkung. Sei $\mathcal{M}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}$. Obwohl $\mathcal{M}^\perp$ das „orthogonale Komplement“ von $\mathcal{M}$ heißt, muß es kein wirkliches „Komplement“ sein. Tatsächlich kann sowohl $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ sowie auch $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp \neq \mathcal{L}$ sein.

Ein Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ heißt *ortho-komplementiert*, wenn $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$ gilt. Das Interesse an solchen Räumen ist auch dadurch motoviert, dass sie orthogonale Projektionen zulassen.

1.1.5 Proposition. *Sei $\mathcal{M}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{M}$ ortho-komplementiert, genau dann, wenn es ene orthogonale Projektion P (d.h. eine Projektion P mit $\operatorname{ran} P \perp \ker P$) mit $\operatorname{ran} P = \mathcal{M}$ gibt. Diese ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn zusätzlich $\mathcal{M}$ nichtentartet ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$, dann existiert ein Teilraum $\mathcal{M}_1$ von $\mathcal{M}^\perp$ mit $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}$. Die Projektion mit $\operatorname{ran} P = \mathcal{M}$ und $\ker P = \mathcal{M}_1$ ist orthogonal. Ist umgekehrt P eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{M}$, so gilt $\ker P \subseteq \mathcal{M}^\perp$ und damit

$$\mathcal{L} = \operatorname{ran} P \dot{+} \ker P \subseteq \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{L}\,,$$

also $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$.

Wir sehen aus obigem Argument, dass die orthogonalen Projektionen P auf $\mathcal{M}$ in bijektiver Beziehung stehen zu den Teilräumen $\mathcal{M}_1$ mit $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}_1 = \mathcal{L}$ und $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}^\perp$, nämlich vermöge $\mathcal{M}_1 = \ker P$. Nun existiert ein eindeutiger Teilraum M_1 mit den genannten Eigenschaften, genau dann wenn $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$, d.h. wenn $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$ und zusätzlich $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ist.

❑

1.1.6 Proposition. *Sei $\mathcal{M}$ ortho-komplementiert. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{M}^\circ \subseteq \mathcal{L}^\circ$;

(ii) $\mathcal{M}^\perp$ *ist ortho-komplementiert;*

(iii) $(\mathcal{M}^\perp)^\circ = \mathcal{M}^{\perp\perp} \cap \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}^\circ$;

(iv) $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M} + \mathcal{L}^\circ$.

Beweis. Es ist $\mathcal{M}^\circ = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp \subseteq (\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{L}^\circ$, also gilt (i). Da stets $\mathcal{M}^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{M}$ ist, gilt $\mathcal{M}^\perp + \mathcal{M}^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{M}^\perp + \mathcal{M}$, also gilt (ii). Die Aussage (iii) folgt da

$$\mathcal{L}^\circ \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp} \cap \mathcal{M}^\perp = (\mathcal{M}^\perp + \mathcal{M})^\perp \subseteq \mathcal{L}^\circ\,.$$

Die Inklusion $\mathcal{M}^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{M} + \mathcal{L}^\circ$ ist klar. Sei umgekehrt $x \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$. Dann existieren $m \in \mathcal{M}, m' \in \mathcal{M}^\perp$, mit $x = m + m'$. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$ ist $x - m = m' \in \mathcal{M}^{\perp\perp} \cap \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}^\circ$. Also haben wir $x = (x - m) + m \in \mathcal{L}^\circ + \mathcal{M}$.

❑

Im allgemeinen ist es schwierig zu entscheiden ob ein gegebener Teilraum ortho-komplementiert ist. Ein wichtiges Beispiel von stets ortho-komplementierten Teilräumen gibt uns die folgende Aussage.

1.1.7 Proposition. *Sei $\mathcal{M}$ endlichdimensional und gelte $\mathcal{M}^\circ \subseteq \mathcal{L}^\circ$. Dann ist $\mathcal{M}$ ortho-komplementiert.*

Beweis. Da $\mathcal{M}$ endlichdimensional ist, können wir eine Basis $\{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_m\}$ von $\mathcal{M}$ finden, sodaß

$$[b_i, b_j] = \begin{cases} \pm 1 & , \ i = j \ \text{ und } i \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & , \ i = j \ \text{ und } i \in \{n+1, \dots, m\} \\ 0 & , \ i \neq j \end{cases}$$

Dabei gilt $\mathcal{M}^\circ = \operatorname{span}\{b_{n+1}, \dots, b_m\}$. Setze $\mathcal{M}_1 := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$ und definiere eine Abbildung $P : \mathcal{L} \to \mathcal{M}_1$ durch

$$Px := \sum_{i=1}^{n} \frac{[x, b_i]}{[b_i, b_i]} b_i \,.$$

Offenbar gilt $P^2 = P$, $\operatorname{ran} P = \mathcal{M}_1$ und $\operatorname{ran}(I - P) \perp \mathcal{M}_1$. Es folgt $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1^\perp = \mathcal{L}$. Da $\operatorname{span}\{b_{n+1}, \dots, b_m\} \subseteq \mathcal{L}^\circ$, gilt $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{M}_1^\perp$, also $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{L}$.

❑

Wegen ihrer Wichtigkeit erinnern wir an die *Schwarzsche Ungleichung*.

1.1.8 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ semidefinit. Dann gilt*

$$|[x, y]|^2 \leq [x, x] \cdot [y, y], \ \ x, y \in \mathcal{L} \,.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $[.,.]$ positiv semidefinit ist. Seien $x, y \in \mathcal{L}$ gegeben. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stets

$$0 \leq [\alpha x + y, \alpha x + y] = \alpha^2 [x, x] + 2\alpha \operatorname{Re}[x, y] + [y, y] \,,$$

Ist $[x, x] = 0$ so folgt dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha 2 \operatorname{Re}[x, y] + [y, y] \geq 0 \,.$$

Es muß daher $\operatorname{Re}[x, y] = 0$ sein.

Ist $[x, x] \neq 0$, so hat die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + \alpha \frac{2 \operatorname{Re}[x, y]}{[x, x]} + \frac{[y, y]}{[x, x]} = 0$$

höchstens eine reelle Lösung. Es folgt

$$\frac{(\operatorname{Re}[x, y])^2}{[x, x]^2} - \frac{[y, y]}{[x, x]} \leq 0 \,,$$

also

$$(\operatorname{Re}[x, y])^2 \leq [x, x] \cdot [y, y] \,.$$

Sei nun $|\xi| = 1$ sodaß $\xi [x, y] > 0$. Dann gilt nach dem eben bewiesenen

$$|[x, y]|^2 = |[\xi x, y]|^2 = (\operatorname{Re}[\xi x, y])^2 \leq$$

$$\leq [\xi x, \xi x] \cdot [y, y] = [x, x] \cdot [y, y] \,.$$

Ist $[.,.]$ negativ semidefinit, so wende das bereits bewiesene auf $\langle \mathcal{L}, -[.,.] \rangle$ an.

❑

1.1.9 Korollar. *Sei $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ semidefinit und $x\in\mathcal{L}$ neutral. Dann ist x isotrop.*

Beweis. Es gilt für jedes $y\in\mathcal{L}$

$$0\leq|[x,y]|\leq[x,x]\cdot[y,y]=0\,.$$

❑

1.2 Fundamentalzerlegungen

1.2.1 Definition. Sei $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Ein Paar $J=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ heißt eine *Fundamentalzerlegung* von $\mathcal{L}$, wenn $\mathcal{L}_+$ ein positiver Teilraum von $\mathcal{L}$ ist, $\mathcal{L}_-$ ein negativer Teilraum von $\mathcal{L}$, und

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$$

gilt.

Der Raum $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ heißt *zerlegbar*, wenn er eine Fundamentalzerlegung besitzt. Die Existenz einer solchen ist nicht immer gesichert, vgl. Beispiel A.1.2.

1.2.2 Definition. Sei $\mathcal{J}=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$. Die orthogonalen Projektionen P_+ und P_- auf $\mathcal{L}_+$ bzw. $\mathcal{L}_-$ heißen *Fundamentalprojektoren zu $\mathcal{J}$* Die Abbildung $J:=P_+-P_-$ heißt die *Fundamentalsymmetrie zu $\mathcal{J}$*. Weiters setzen wir $(x,y)_\mathcal{J}:=[Jx,y]$, $x,y\in\mathcal{L}$, und $\|x\|_\mathcal{J}:=(x,x)_\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}$, $x\in\mathcal{L}$.

1.2.3 Proposition. *Sei $\mathcal{J}=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$. Dann gilt*

(i) $P_+P_-=P_-P_+=0$, $P_+J=JP_+=P_+$, $P_-J=JP_-=-P_-$, $J^2=P_++P_-$.

(ii) $J|_{\mathcal{L}_+}=\mathrm{id}_{\mathcal{L}_+}$, $J|_{\mathcal{L}_-}=\mathrm{id}_{\mathcal{L}_-}$, $\ker J=\mathcal{L}^\circ$. *Weiters ist $J|_{\mathcal{L}_+\dot{+}\mathcal{L}_-}$ bijektiv und es gilt $(J|_{\mathcal{L}_+\dot{+}\mathcal{L}_-})^{-1}=J|_{\mathcal{L}_+\dot{+}\mathcal{L}_-}$.*

(iii) $(.,.)_\mathcal{J}$ *ist ein positives semidefinites inneres Produkt auf $\mathcal{L}$. Es gilt*

$$\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle^\circ=\langle\mathcal{L},(.,.)_\mathcal{J}\rangle^\circ\,,$$

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ=\mathcal{L}_+(\dot{+})_\mathcal{J}\mathcal{L}_-(\dot{+})_\mathcal{J}\mathcal{L}^\circ$$

(iv) *Für alle $x,y\in\mathcal{L}$ gilt*

$$[Jx,y]=[x,Jy],\ (Jx,y)_\mathcal{J}=(x,Jy)_\mathcal{J}\,,$$

$$[Jx,Jy]=[x,y],\ (Jx,Jy)_\mathcal{J}=(x,y)_\mathcal{J}\,.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ran} P_+ = \mathcal{L}_+$, $\ker P_+ = \mathcal{L}_- + \mathcal{L}^\circ$, sowie $\operatorname{ran} P_- = \mathcal{L}_-$, $\ker P_- = \mathcal{L}_- \dot{+} \mathcal{L}^\circ$, also gilt $P_+P_- = P_-P_+ = 0$. Weiters folgt

$$P_+J = P_+(P_+ - P_-) = P_+,\ JP_+ = (P_+ - P_-)P_+ = P_+\,,$$

$$P_-J = P_-(P_+ - P_-) = -P_-,\ JP_- = (P_+ - P_-)P_- = -P_-\,,$$

$$J^2 = (P_+ - P_-)(P_+ - P_-) = P_+ - P_-\,.$$

Aus diesen Beziehungen folgt auch sofort, dass (*ii*) gilt.

Da $\mathcal{L}_+$ ein positiver und $\mathcal{L}_-$ ein negativer Teilraum ist, und $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$ ist, gilt

$$(x,x)_{\mathcal{J}} = [P_+x - P_-x, P_+x - P_-x] = [P_+x, P_+x] - [P_-x, P_-x] \geq 0$$

Weiters ist $(x,x)_{\mathcal{J}} = 0$ genau dann, wenn $P_+x = P_-x = 0$. Dieses wiederum ist äquivalent zu $x \in \mathcal{L}^\circ$. Wegen der Schwarzschen Ungleichung für $(.,.)_{\mathcal{J}}$ ist $x \in \mathcal{L}^{(\circ)_{\mathcal{J}}}$ genau dann, wenn $(x,x)_{\mathcal{J}} = 0$.

Es gilt für $x, y \in \mathcal{L}$ dass $(x,y)_{\mathcal{J}} = [(P_+ - P_-)x, y] = [P_+x, P_+y] - [P_-x, P_-y]$. Wir erhalten $\mathcal{L}_+(\perp)_{\mathcal{J}}\mathcal{L}_-$, sowie

$$(Jx,y)_{\mathcal{J}} = [P_+x, P_+y] + [P_-x, P_-y] = (x, Jy)_{\mathcal{J}}\,,$$

$$(Jx,Jy)_{\mathcal{J}} = [P_+x, P_+y] - [P_-x, P_-y] = (x,y)_{\mathcal{J}}\,.$$

Schließlich haben wir wegen $x - (P_+ + P_-)x \in \mathcal{L}^\circ$, dass

$$[x,y] = [(P_+ + P_-)x, y] = [P_+x, P_+y] + [P_-x, P_-y]$$

und erhalten damit

$$[Jx,y] = [P_+x, P_+y] - [P_-x, P_-y] = [x, Jy]\,,$$

$$[Jx,Jy] = [P_+x, P_+y] + [P_-x, P_-y] = [x,y]\,.$$

❑

1.3 Winkeloperatoren und semidefinite Teilräume

Wir kommen zu einer oft nützlichen Beschreibung semidefiniter Teilräume.

1.3.1 Definition. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nichtentartet und sei $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$ mit zugehörigen Fundamentalprojektionen P_+, P_-. Weiters sei $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{L}$ ein linearer Teilraum. Ist $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv, so heißt $K_+ : P_+(\mathcal{M}) \to P_-(\mathcal{M})$, $K_+ := P_- \circ (P_+|_{\mathcal{M}})^{-1}$, der *Winkeloperator* von $\mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{L}_+$.

1.3.2 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nichtentartet und $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$. Dann gilt:*

(*i*) *Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ ein Teilraum mit $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv, und bezeichnet K_+ den zugehörigen Winkeloperator, so gilt*

$$\mathcal{M} = \{x + K_+x : x \in P_+(\mathcal{M})\}.$$

(*ii*) *Ist $D \subseteq \mathcal{L}_+$ ein Teilraum und $K : D \to \mathcal{L}_-$ linear, so ist*

$$\mathcal{M} := \{x + Kx : x \in D\}$$

ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}$ mit $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv. Sein Winkeloperator ist gleich K.

Beweis. Ist $x \in P_+(\mathcal{M})$, so ist $y := (P_+|_{\mathcal{M}})^{-1}x \in \mathcal{M}$ und es gilt

$$P_+y = x,\ \ P_-y = K_+x\,,$$

also $y = x+K_+x$. Ist umgekehrt $y \in \mathcal{M}$, so setze $x := P_+y$. Dann ist $x \in P_+(\mathcal{M})$ und es gilt

$$y = P_+y + P_-y = x + K_+x\,.$$

Das zeigt (*i*). Um (*ii*) zu sehen sei $K : D \to \mathcal{L}_-$ gegeben. Klarerweise ist $\mathcal{M}$ ein linearer Teilraum. Ist $P_+y = 0$ für ein $y \in \mathcal{M}$, $y = x + Kx$, so folgt $x = 0$ also $y = 0$. Wegen $P_-y = Kx$ und $P_+y = x$ haben wir $K_+ = K$.

❑

1.3.3 Proposition. *Sei $\langle\mathcal{L}, [.,.]\rangle$ nichtentartet, $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung, und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ ein Teilraum. Dann gilt:*

(*i*) *$\mathcal{M}$ ist nichtnegativ genau dann, wenn $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv und $\|K_+\| \leq 1$ ist. Dabei ist $\|K_+\|$ die Operatornorm von K_+ als Abbildung von $\langle P_+(\mathcal{M}), \|.\|_{\mathcal{J}}\rangle$ nach $\langle\mathcal{L}_-, \|.\|_{\mathcal{J}}\rangle$.*

(*ii*) *$\mathcal{M}$ ist positiv (neutral) genau dann, wenn $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv und $\|K_+x\|_{\mathcal{J}} < \|x\|_{\mathcal{J}}$ für alle $x \in P_+(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ (bzw. $\|K_+x\|_{\mathcal{J}} = \|x\|_{\mathcal{J}}$ für alle $x \in P_+(\mathcal{M})$).*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ nichtnegativ. Ist $y \in \mathcal{M}$, $P_+y = 0$, so folgt $y = P_-y \in \mathcal{L}_-$. Daher muß $y = 0$ sein. Also ist $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv.

Ist $\mathcal{M}$ ein Teilraum mit $P_+|_{\mathcal{M}}$ injektiv, so gilt für jedes $y \in \mathcal{M}$ (mit $x := P_+y$)

$$[y, y] = [x + K_+x, x + K_+x] = [x, x] + [K_+x, K_+x] = \|x\|_{\mathcal{J}} - \|K_+x\|_{\mathcal{J}}\,.$$

Also ist $\mathcal{M}$

$$\begin{array}{lll} \text{nichtnegativ} & \iff & \|K_+x\|_{\mathcal{J}} \leq \|x\|_{\mathcal{J}},\ x \in P_+(\mathcal{M}) \\ \text{positiv definit} & \iff & \|K_+x\|_{\mathcal{J}} < \|x\|_{\mathcal{J}},\ x \in P_+(\mathcal{M}) \setminus \{0\} \\ \text{neutral} & \iff & \|K_+x\|_{\mathcal{J}} = \|x\|_{\mathcal{J}},\ x \in P_+(\mathcal{M}) \end{array}$$

❑

Betrachte die Menge $\mathrm{PosSd}(\mathcal{L})$ aller nichtnegativen Teilräume von $\mathcal{L}$. Diese ist bzgl. der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet. Da die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von nichtnegativen Teilräumen wieder nichtnegativ ist, ist nach dem Lemma von Zorn jeder nichtnegativer Teilraum $\mathcal{M}$ in einem maximalen nichtnegativen Teilraum (d.h. einem maximalen Element von $\mathrm{PosSd}(\mathcal{L})$ enthalten.

Bezeichne mit $\mathrm{Pos}(\mathcal{L})$ die Menge aller positiven Teilräume von $\mathcal{L}$. Ebenfalls nach dem Lemma von Zorn liegt jeder positive Teilraum in einem in $\mathrm{Pos}(\mathcal{L})$ maximalen positiven Teilraum.

Klarerweise gilt: Ist $\mathcal{M} \in \mathrm{Pos}(\mathcal{L})$ und maximal in $\mathrm{PosSd}(\mathcal{L})$, so ist $\mathcal{M}$ auch maximal in $\mathrm{Pos}(\mathcal{L})$. Es muß aber nicht jeder maximal positive Teilraum auch maximal nichtnegativ sein.

1.3.4 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt, und sei $\mathcal{M}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ oder maximal positiv, so ist $\mathcal{M}^\perp$ nichtpositiv.*

(ii) *Ist $\mathcal{M}$ positiv und maximal nichtnegativ, so ist $\mathcal{M}^\perp$ negativ.*

(iii) *Ist $\mathcal{M}$ maximal positiv und ortho-komplementiert, so ist $\mathcal{M}^\perp$ maximal nichtpositiv.*

Beweis. Ist $x \in \mathcal{M}^\perp$, $[x,x] > 0$, so ist $\mathcal{M}_1 := \mathrm{span}\{\mathcal{M}, x\}$ wieder nichtnegativ bzw. positiv. Also folgt $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, d.h. $x \in \mathcal{M}$. Damit ist aber $x \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{M}$, und daher $[x,x] = 0$. Ein Widerspruch, und wir sehen dass (i) gilt.

Ist $x \in \mathcal{M}^\perp$, $[x,x] \geq 0$, so ist $\mathcal{M}_1 := \mathrm{span}\{\mathcal{M}, x\}$ wieder nichtnegativ, also $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, d.h. $x \in \mathcal{M}$. Wir erhalten $[x,x] = 0$, einen Widerspruch da $\mathcal{M}$ positiv ist, und es folgt (ii).

Sei nun $\mathcal{M}$ maximal positiv und orthokomplementiert. Dann ist nach (i) $\mathcal{M}^\perp$ nichtpositiv. Angenommen $\mathcal{M}_1$ ist nichtpositiv und $\mathcal{M}_1 \supseteq \mathcal{M}^\perp$. Sei $x \in \mathcal{M}_1$ und schreibe $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$. Dann ist $y = x - z \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Also ist $x \in \mathcal{M}^\perp$, und wir sehen dass $\mathcal{M}^\perp$ maximal nichtpositiv ist.

❏

In der Aussage (i) dieser Proposition kann man im allgemeinen nicht auf „$\mathcal{M}^\perp$ maximal nichtpositiv“ schliessen, vgl. Beispiel A.1.1

Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nicht entartet, und sei weiter $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$. Betrachte die Menge $\mathrm{Win}(\mathcal{J})$ aller Paare (D, K) wobei D ein Teilraum von $\mathcal{L}_+$ und $K : D \to \mathcal{L}_-$ linear mit $\|K\| \leq 1$ ist. Diese ist halbgeordnet bzgl. der folgenden Relation

$$(D_1, K_1) \leq (D_2, K_2) :\iff D_1 \subseteq D_2 \text{ und } K_2|_{D_1} = K_1 \,.$$

1.3.5 Korollar. *Die Zuordnung $\mathcal{M} \mapsto K_+$ die einem nichtnegativen Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ seinen Winkeloperator K_+ bzgl. $\mathcal{J}$ zuordnet, ist eine ordnungserhaltende Bijektion von* $\mathrm{PosSd}(\mathcal{L})$ *auf* $\mathrm{Win}(\mathcal{J})$.

Beweis. Die Tatsache, dass $\mathcal{M} \mapsto K_+$ bijektiv ist, folgt unmittelbar aus Proposition 1.3.2 und Proposition 1.3.3. Nun impliziert $\mathcal{M}_1 \subseteq M_2$ dass $P_+(\mathcal{M}_1) \subseteq P_+(\mathcal{M}_2)$ und $(P_+|_{\mathcal{M}_1})^{-1} = (P_+|_{\mathcal{M}_2})^{-1}|_{P_+(\mathcal{M}_1)}$. Also ist der Winkeloperator $K_{2,+}$ von $\mathcal{M}_2$ eine Fortsetzung von dem Winkeloperator $K_{1,+}$ von $\mathcal{M}_1$. Ist umgekehrt $K_{2,+}$ eine Fortsetzung von $K_{1,+}$ so folgt nach Proposition 1.3.2 dass

$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$.

❑

1.3.6 Bemerkung. Alle vorangegangenen Überlegungen zu Winkeloperatoren kann man genauso mit $\mathcal{L}_-$ an Stelle von $\mathcal{L}_+$ durchführen: Ist $P_-|_\mathcal{M}$ injektiv, so setze $K_- := P_+ \circ (P_-|_\mathcal{M})^{-1}$. Dann ergeben sich die analogen Resultate für nichtpositive Teilräume anstelle von nichtnegativen.

1.4 Topologien auf Räumen mit inneren Produkt

Wir wollen auf einem Raum $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ mit inneren Produkt solche Topologien betrachten die mit der algebraischen Struktur und dem inneren Produkt verträglich sind, und eine vernünftige Theorie erlauben.

1.4.1 Definition. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathcal{L}$. Dann heißt $\mathcal{T}$ eine *Majorante*, wenn

(i) $\langle \mathcal{L}, \mathcal{T} \rangle$ ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum (ohne Hausdorff);

(ii) Die Abbildung $[.,.] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ ist stetig, wobei $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ und $\mathbb{C}$ mit der euklidischen Topologie versehen ist.

1.4.2 Bemerkung.

(i) Ist $\mathcal{T}$ eine Majorante, so ist insbesondere für jedes $y \in \mathcal{L}$ die Abbildung

$$[.,y] : \begin{cases} \mathcal{L} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & [x,y] \end{cases}$$

bzgl. $\mathcal{T}$ stetig.

(ii) Ist $\mathcal{T}$ eine Majorante eines nichtentarteten Raumes $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$, so ist $\mathcal{T}$ Hausdorff. Denn die Familie $\{[.,y] : y \in \mathcal{L}\}$ ist in diesem Fall punktetrennend und $\mathbb{C}$ ist Hausdorff.

(iii) Für jede Teilmenge $M \subseteq \mathcal{L}$ und jede Majorante $\mathcal{T}$ ist $M^\perp$ bzgl. $\mathcal{T}$ abgeschlossen.

Es muß nicht immer Majoranten geben, vgl. Beispiel A.1.3. Gibt es jedoch eine Majorante, so gibt es auch besonders einfache.

1.4.3 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt und sei $\mathcal{T}$ eine Majorante. Dann gibt es eine Seminorm p auf $\mathcal{L}$, sodaß $\mathcal{T}_p$ eine Majorante ist und $\mathcal{T}_p$ gröber als $\mathcal{T}$ ist.*

Ist $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nichtentartet, so muß p bereits eine Norm sein.

Beweis. Da $\mathcal{T}$ lokalkonvex ist, gibt es eine Familie $\{p_i : i \in I\}$ von Seminormen, die $\mathcal{T}$ induziert. Da $[.,.]$ stetig ist, gibt es $\epsilon > 0$ und endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n$, sodaß

$$|[x,y]| < 1 \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{L} \ \text{ mit } p_{i_k}(x), p_{i_k}(y) < \epsilon,\ k = 1, \dots, n\,.$$

Setze $p := \max_{k=1,\dots,n} p_{i_k}$, dann ist p eine Seminorm und $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_{\{p_i : i\in I\}} = \mathcal{T}$. Weiters ist $|[x,y]| < 1$ für alle $x,y \in \mathcal{L}$ mit $p(x), p(y) < \epsilon$, also ist $\mathcal{T}_p$ eine Majorante. Ist $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ nichtentartet, so ist jede Majorante Hausdorff. Wird eine Majorante von einer Seminorm erzeugt, so muß diese also eine Norm sein.

❑

Existiert eine Majorante für $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$, so gibt es im allgemeinen viele verschiedene Majoranten. Ist $\mathcal{L}$ nichtentartet, so sind nach Proposition 1.4.3 darunter auch solche die von einer Norm induziert werden. Es kann $\mathcal{L}$ aber bezüglich höchstens einer solchen vollständig sein:

1.4.4 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ nichtentartet, und seien $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf $\mathcal{L}$ sodaß $\mathcal{L}$ bezüglich beider vollständig ist und sodaß $\mathcal{T}_{\|.\|_1}, \mathcal{T}_{\|.\|_2}$ Majoranten sind. Dann gilt $\mathcal{T}_{\|.\|_1} = \mathcal{T}_{\|.\|_2}$.*

Beweis. Betrachte die identische Abbildung $\mathrm{id} : \langle \mathcal{L}, \|.\|_1\rangle \to \langle \mathcal{L}, \|.\|_2\rangle$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}$, mit $x_n \xrightarrow{\|.\|_1} x$, $x_n \xrightarrow{\|.\|_2} x'$. Dann folgt

$$[x_n, y] \to [x,y],\ [x_n,y] \to [x',y], \quad y \in \mathcal{L}\,,$$

und daher $x = x'$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist id daher stetig, und nach dem Satz von der offenen Abbildung dann sogar ein Homöomorphismus.

❑

Es wäre natürlich schön, wenn man Majoranten von innen heraus, also nur unter Verwendung von $[.,.]$, definieren könnte. Dieses ist möglich, wenn Fundamentalzerlegungen existieren.

1.4.5 Definition. Sei $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung von $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$, und sei J die entsprechende Fundamentalsymmetrie. Die von der Seminorm

$$p_{\mathcal{J}}(x) := (x,x)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}},\ x \in \mathcal{L}\,,$$

erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ heißt die *Zerlegungsmajorante* zu $\mathcal{J}$.

1.4.6 Proposition. *Es ist $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ tatsächlich eine Majorante. Weiters gilt $p_{\mathcal{J}}(x) = 0$ genau dann wenn $x \in \mathcal{L}^\circ$. Insbesondere ist $p_{\mathcal{J}}$ eine Norm genau dann wenn $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ nichtentartet ist.*

Beweis. Es gilt

$$|[x,y]| = |(Jx,y)_{\mathcal{J}}| \le (Jx,Jx)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}} \cdot (y,y)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}} = (x,x)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}} \cdot (y,y)_{\mathcal{J}}^{\frac{1}{2}}\,,$$

also ist $[.,.]$ eine beschränkte Sesquilinearform, und damit stetig. Weiters ist jedes x mit $p_{\mathcal{J}}(x) = 0$ auch isotrop. Ist umgekehrt $x \in \mathcal{L}^\circ$, so ist $p_{\mathcal{J}}(x) = [Jx,x]^{\frac{1}{2}} = 0$.

❑

Eine Zerlegungsmajorante ist insofern besonders einfach, als dass sie von einem inneren Produkt erzeugt wird. Weiters ist sie in natürlicher Weise mit dem Raum $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ verbunden, da sie nur mit Hilfe von $[.,.]$ definiert wurde, also nicht von aussen aufgesetzt wird. Es ist von Interesse Bedingungen zu finden wann es Zerlegungsmajoranten gibt, und, als besonders natürliche Situation, wann sie nicht von der Wahl der Zerlegung abhängen.

1.4.7 Satz. *Sei $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ ein Raum mit einem inneren Produkt, und sei $\mathcal{T}$ eine Majorante die von einem Hilbertraum-Skalarprodukt auf $\mathcal{L}$ induziert wird. Dann gilt:*

(*i*) *$\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ ist zerlegbar;*

(*i'*) *Es gibt eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ sodaß $\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-$, und $\mathcal{L}_+\dot{+}\mathcal{L}_-$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}$ sind;*

Setzt man zusätzlich voraus, dass $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ nichtentartet ist, so gilt weiter

(*ii*) *Jede Zerlegungsmajorante ist gröber als $\mathcal{T}$.*

(*iii*) *Je zwei Zerlegungsmajoranten sind gleich.*

Beweis. Sei $(.,.)$ ein Hilbertraum-Skalarprodukt welches $\mathcal{T}$ induziert. Da $[.,.]$ eine stetige Sesquilinearform bzgl. $\mathcal{T}$ ist, existiert $G\in\mathcal{B}(\langle\mathcal{L},(.,.)\rangle)$, $G=G^*$, sodaß
$$[x,y]=(Gx,y),\ \ x,y\in\mathcal{L}\,.$$
Sei E das Spektralmaß von G, und setze
$$\mathcal{L}_+:=E\big((0,\infty)\big),\ \ \mathcal{L}_-:=E\big((-\infty,0)\big)\,.$$
Dann sind $\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-$ sowie $\mathcal{L}_++\mathcal{L}_-=E(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ abgeschlossene Teilräume von $\langle\mathcal{L},(.,.)\rangle$. Es gilt weiters
$$\mathcal{L}^\circ=\ker G=E(\{0\})\,,$$
also ist $\mathcal{L}=\mathcal{L}_+\dot{+}\mathcal{L}_-\dot{+}\mathcal{L}^\circ$.

Schließlich gilt
$$[x,y]=(Gx,y)=\int\limits_{\mathbb{R}} tdE_{x,y}(t)\,,$$
wobei $E_{x,y}(\Delta):=(E(\Delta)x,y)$. Ist $x\in\mathcal{L}_+$, so ist $x=E((0,\infty))x$, also
$$E_{x,x}(\Delta)=(E(\Delta)E((0,\infty))x,E((0,\infty))x)=(E(\Delta\cap(0,\infty))x,x)\,.$$
Also ist $E_{x,x}$ ist ein positives Maß mit $E_{x,x}((-\infty,0])=0$, und wir erhalten
$$[x,x]=\int\limits_{\mathbb{R}} t\,dE_{x,x}(t)=\int\limits_{(0,\infty)} t\,dE_{x,x}(t)\geq 0\,.$$
Genauso sieht man, daß $[x,x]\leq 0$ für alle $x\in\mathcal{L}_-$. Weiters ist $\mathcal{L}_+(\perp)\mathcal{L}_-$ und beide unter G invariant. Also ist auch $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-$. Wir haben mit $\mathcal{J}:=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung erhalten wie in (i') gefordert. Damit ist natürlich auch (i) bewiesen.

Sei im folgenden stets vorausgesetzt, daß $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ nichtentartet ist. Zum Beweis von (ii) sei eine Fundamentalzerlegung $J=(\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ gegeben. Dann ist

$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{[\perp]}$, $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}^{[\perp]}$, und daher $\mathcal{L}_+$ und $\mathcal{L}_-$ bzgl. $\mathcal{T}$ abgeschlossen. Bezeichne mit P_+, P_- die Fundamentalprojektionen von $\mathcal{J}$.

Wir zeigen, daß P_+ und P_- bzgl. $\mathcal{T}$ stetig sind. Sei $x_n \to x$, $P_+ x_n \to y$, bzgl. $\mathcal{T}$. Dann gilt $y \in \operatorname{ran} P_+$, da $\operatorname{ran} P_+ = \mathcal{L}_+$ abgeschlossen ist. Es ist auch $\ker P_+ = \mathcal{L}_-$ abgeschlossen, und daher $x - y = \lim_{n\to\infty}(x_n - P_+ x_n) \in \ker P_+$. Insgesamt folgt $y = P_+ x$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen angewendet auf P_+ im Hilbertraum $\langle \mathcal{L}, (.,.)\rangle$, ist P_+ bzgl. $\mathcal{T}$ stetig. Genauso folgt, dass P_- bzgl. $\mathcal{T}$ stetig ist, und damit auch die Fundamentalsymmetrie $J = P_+ - P_-$. Wir erhalten ($\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$)

$$\|x\|_{\mathcal{J}}^2 = [Jx, x] \le M\|Jx\| \cdot \|x\| \le M\|J\| \cdot \|x\|^2 ,$$

und daher ist $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gröber als $\mathcal{T}$.

Seien nun zwei Fundamentalzerlegungen J_1, J_2 gegeben. Wie wir im Beweis von (ii) gesehen haben, sind die entsprechenden Fundamentalsymmetrien J_1 und J_2 bzgl. $\mathcal{T}$ stetig. Setze $T := J_1 J_2$, dann gilt

$$(Tx, y)_{\mathcal{J}_1} = [J_1 T x, y] = [J_2 x, y] = [x, J_2 y] =$$

$$= [x, J_1 T y] = [J_1 x, Ty] = (x, Ty)_{\mathcal{J}_1} .$$

Weiters gilt, wieder nach (ii), $\|x\|_{\mathcal{J}_1} \le \alpha \|x\|$ mit einem geeigneten $\alpha > 0$.

Wir haben für jedes $n \ge 0$, dass

$$\|T^{2^n} x\|_{\mathcal{J}_1}^2 = (T^{2^n} x, T^{2^n} x)_{\mathcal{J}_1} = (T^{2^{n+1}} x, x)_{\mathcal{J}_1} \le \|T^{2^{n+1}} x\|_{\mathcal{J}_1} \cdot \|x\|_{\mathcal{J}_1} ,$$

und erhalten induktiv $\|Tx\|_{\mathcal{J}_1} \le \|T^{2^n} x\|_{\mathcal{J}_1}^{2^{-n}} \|x\|_{\mathcal{J}_1}^{1-2^{-n}}$, $n \ge 0$. Es folgt

$$\|Tx\|_{\mathcal{J}_1} \le (\alpha \|T^{2^n} x\|)^{2^{-n}} \|x\|_{\mathcal{J}_1}^{1-2^{-n}} \le \alpha^{2^{-n}} \|T\| \cdot \|x\|^{2^{-n}} \|x\|_{\mathcal{J}_1}^{1-2^{-n}} ,$$

und für $n \to \infty$ erhält man

$$\|Tx\|_{\mathcal{J}_1} \le \|T\| \; \|x\|_{\mathcal{J}_1} .$$

Also ist T bzgl. $\mathcal{T}_1$ stetig. Wir erhalten

$$\|x\|_{\mathcal{J}_2}^2 = [J_2 x, x] = [J_1 T x, x] = (Tx, x)_{\mathcal{J}_1} \le \|T\| \cdot \|x\|_{\mathcal{J}_1}^2 ,$$

also ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$. Vertauscht man die Rollen von J_1, J_2, so folgt, dass auch $\mathcal{T}_2$ feiner als $\mathcal{T}_1$ ist.

❑

Dieser Satz gibt uns eine Voraussetzung aus der die Existenz und Eindeutigkeit von Zerlegungsmajoranten folgt. Es kann weder die Voraussetzung der Vollständigkeit, noch die dass $\mathcal{T}$ von einem inneren Produkt kommt, weggelassenwerden, vgl. Beispiel A.1.5 bzw. Beispiel A.1.6. Der folgende Satz gibt eine schwächere Voraussetzung aus der noch die Gleichheit aller Zerlegungsmajoranten folgt (falls überhaupt welche existieren).

1.4.8 Satz. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ nichtentartet, sei $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung, und sei vorausgesetzt dass $\mathcal{L}_+$ oder $\mathcal{L}_-$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ vollständig ist. Dann sind je zwei Zerlegungsmajoranten gleich.*

Beweis. O.b.d.A. sei angenommen dass $\mathcal{L}_+$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ vollständig ist. Sei eine weitere Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}' = (\mathcal{L}'_+, \mathcal{L}'_-)$ gegeben. Betrachte den Hilbertraum $\langle \mathcal{L}_+, (.,.)_{\mathcal{J}} \rangle$ und die linearen Funktionale

$$\varphi_y : \left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathcal{L}_+, (.,.)_{\mathcal{J}} \rangle & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & [x,y] \end{array} \right. , \qquad y \in \mathcal{L},\ \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1.$$

Wegen

$$\varphi_y(x) = (Jx, y)_{\mathcal{J}} = (P_+x, y)_{\mathcal{J}} = (x, P_+y)_{\mathcal{J}},\ x \in \mathcal{L}_+\,,$$

sind diese stetig. Tatsächlich gilt $\|\varphi_y\| = \|P_+y\|_{\mathcal{J}}$.

Ist $x \in \mathcal{L}_+$ festgehalten, und $y \in \mathcal{L}$, $\|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1$, so gilt

$$|\varphi_y(x)| = |[x,y]| \leq \|x\|_{\mathcal{J}'} \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq \|x\|_{\mathcal{J}'}\,.$$

Also ist die Familie $\{\varphi_y : y \in \mathcal{L}, \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1\}$ punktweise beschränkt. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist sie sogar gleichmäßig beschränkt, d.h. $M := \sup\{\|\varphi_y\| : y \in \mathcal{L}, \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1\} < \infty$.

Betrachtet man die Hilbertraum-Vervollständigung von $\langle \mathcal{L}, (.,.)_{\mathcal{J}'} \rangle$, so sieht man, dass

$$\|x\|_{\mathcal{J}'} = \sup \big\{ |(x,y)_{\mathcal{J}'}| : y \in \mathcal{L}, \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1 \big\},\ x \in \mathcal{L}\,.$$

Nun ist $(x,y)_{\mathcal{J}'} = [x, J'y]$ und $\mathcal{J}'$ eine Isometrie, also

$$\big\{ |(x,y)_{\mathcal{J}'}| : y \in \mathcal{L}, \|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1 \big\} = \big\{ |[x,z]| : z \in \mathcal{L}, \|z\|_{\mathcal{J}'} \leq 1 \big\}\,,$$

und wir erhalten

$$\|x\|_{\mathcal{J}'} \leq M \|x\|_{\mathcal{J}},\ x \in \mathcal{L}_+\,.$$

Umgekehrt haben für jedes $y \in \mathcal{L}_+$ mit $\|y\|_{\mathcal{J}'} \leq 1$, dass $\|y\|_{\mathcal{J}} = \|P_+y\|_{\mathcal{J}} \leq M$. Also ist

$$\|y\|_{\mathcal{J}} \leq M \|y\|_{\mathcal{J}'},\ y \in \mathcal{L}_+\,.$$

Insgesamt sind die Normen $\|.\|_{\mathcal{J}}$ und $\|.\|_{\mathcal{J}'}$ auf $\mathcal{L}_+$ äquivalent.

Es gilt für jedes $x \in \mathcal{L}$

$$\|P_+x\|^2_{\mathcal{J}'} \leq M^2 \|P_+x\|_{\mathcal{J}} = M^2 (P_+x, P_+x)_{\mathcal{J}} =$$

$$= M^2 (P_+x, x)_{\mathcal{J}} = M^2 [JP_+x, x] = M^2 [P_+x, x] \leq M^2 \|P_+x\|_{\mathcal{J}'} \|x\|_{\mathcal{J}'}\,,$$

also $\|P_+x\|_{\mathcal{J}'} \leq M^2 \|x\|_{\mathcal{J}'}$. Es folgt, dass

$$\|x\|^2_{\mathcal{J}} = [Jx, x] \leq \|Jx\|_{\mathcal{J}'} \|x\|_{\mathcal{J}'} = \|2P_+x - x\|_{\mathcal{J}'} \|x\|_{\mathcal{J}'} \leq$$

$$\leq (2M^2 + 1) \|x\|^2_{\mathcal{J}'}\,.$$

Wir sehen, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{J}'}$ feiner ist als $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

Da $\|.\|_{\mathcal{J}}$ und $\|.\|_{\mathcal{J}'}$ auf $\mathcal{L}$ äquivalent sind, ist $\mathcal{L}_+$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}'}$ vollständig. Die Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}'$ erfüllt also die Voraussetzung des Satzes. Wir können daher die gleiche Argumentation mit den Rollen von $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}'$ vertauscht durchführen, und erhalten dass auch $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ feiner ist als $\mathcal{T}_{\mathcal{J}'}$.

❑

Kapitel 2

Krein- und Pontryagin-Räume

2.1 Krein Räume

2.1.1 Definition. Ein Raum $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ mit inneren Produkt heißt ein *Krein Raum*, wenn er nicht-entartet ist und eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ besitzt sodaß $\mathcal{K}$ mit $\|.\|_{\mathcal{J}}$ vollständig ist.

Die Wahl der Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ in dieser Definition ist nicht wesentlich. Denn, ist $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ ein Krein Raum, so sind nach Satz 1.4.8 alle Normen $\|.\|_{\mathcal{J}}$ für Fundamentalzerlegungen $\mathcal{J}$ äquivalent.

Dies zeigt auch, dass ein Krein Raum eine eindeutige natürliche Topologie trägt, nämlich die Zerlegungsmajorante. Wenn nichts anderes gesagt wird, verstehen sich alle topologischen Begriffe bezüglich dieser.

2.1.2 Bemerkung. Da ein Krein Raum mit $(.,.)_{\mathcal{J}}$ zu einem Hilbertraum wird, ist $\mathcal{K}' \cong \mathcal{K}$ vermöge der Abbildung $y \mapsto (.,y)_{\mathcal{J}}$. Da J bijektiv ist, ist auch $y \mapsto [.,y]$ ein Isomorphismus von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}'$.

2.1.3 Satz. *Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Dann ist $\mathcal{K}$ ein Krein Raum, genau dann wenn gilt*

(*i*) *Es existiert eine Majorante die von einem Hilbertraum-Skalarprodukt induziert wird;*

(*ii*) *Ist $(.,.)$ ein Hilbertraum-Skalarprodukt welches eine Majorante induziert, dann ist der Gram-Operator G von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)$ beschränkt invertierbar, d.h. $0 \in \rho(G)$.*

Beweis. Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ ein Krein Raum. Wähle eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ von $\mathcal{K}$. Dann ist $\langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}} \rangle$ ein Hilbertraum, und die von $(.,.)_{\mathcal{J}}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ ist eine Majorante. Der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)_{\mathcal{J}}$ ist gerade die Fundamentalsymmetrie J, und wegen $J^2 = I$ gilt $0 \in \rho(J)$.

Sei nun $(.,.)$ irgendein Skalarprodukt, sodaß $\langle \mathcal{K}, (.,.) \rangle$ ein Hilbertraum ist und die von $(.,.)$ induzierte Topologie eine Majorante ist. Weiters sei G der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)$. Nach Proposition 1.4.4 hat $[.,.]$ höchstens eine Majorante die von einem Hilbertraum-Skalarprodukt induziert wird, also sind die von $(.,.)$ bzw. $(.,.)_{\mathcal{J}}$ induzierten Topologien gleich und die entsprechenden Normen äquivalent. Insbesondere ist $(.,.)$ eine bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$, bzw. $(.,.)_{\mathcal{J}}$ eine bzgl. $\|.\|$, stetige Sesquilinearform. Es gibt daher eine beschränkte Operatoren G', G'' mit $(x,y) = (G'x,y)_{\mathcal{J}}$, $(x,y)_{\mathcal{J}} = (G''x,y)$, $x,y \in \mathcal{K}$. Wegen

$$(G'G''x,y)_{\mathcal{J}} = (G''x,y) = (x,y)_{\mathcal{J}},\ (G''G'x,y) = (G'x,y)_{\mathcal{J}} = (x,y)\,,$$

gilt $G''G' = G'G'' = I$, d.h. $0 \in \rho(G'), \rho(G'')$, und $(G')^{-1} = G''$. Nun gilt

$$(G'Gx,y)_{\mathcal{J}} = (Gx,y) = [x,y] = (Jx,y)_{\mathcal{J}},\ x,y \in \mathcal{K}\,,$$

also $G'G = J$. Damit ist $G = G''J$ beschränkt invertierbar.

Sei nun umgekehrt (i) und (ii) vorausgesetzt, und sei $(.,.)$ ein Hilbertraum-Skalarprodukt welches eine Majorante induziert. Weiters sei G der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)$, und E sein Spektralmaß. Wie wir in Satz 1.4.7 gesehen haben, ist

$$\mathcal{J} := \big(E((-\infty,0)), E((0,\infty))\big)$$

eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^\circ = E(\{0\}) = \ker G$. Nun gilt $0 \in \rho(G)$, also existiert $c > 0$ mit $(-c,c) \subseteq \rho(G)$.

Es folgt $\ker G = 0$ und

$$E((-\infty,0)) = E([-\|G\|,-c]),\ E((0,\infty)) = E([c,\|G\|])\,.$$

Also gilt, für $x \in E((0,\infty))$,

$$\|x\|_{\mathcal{J}}^2 = [x,x] = (Gx,x) = \int\limits_{[c,\|G\|]} t\,dE_{x,x}(t)$$

und, wegen $\|x\|^2 = (x,x) = \int_{[c,\|G\|]} 1\,dE_{x,x}(t)$, ist damit

$$c\|x\|^2 \le \|x\|_{\mathcal{J}}^2 \le \|G\| \cdot \|x\|^2,\ x \in E((0,\infty))\,.$$

Genauso folgert man $c\|x\|^2 \le \|x\|_{\mathcal{J}}^2 \le \|G\| \cdot \|x\|^2$ für $x \in E((-\infty,0))$. Da $E((0,\infty))$, $E((-\infty,0))$ bzgl. $\|.\|$ abgeschlossen sind, sind sie bzgl. $\|.\|$ vollständig. Wegen der Äquivalenz von $\|.\|$ und $\|.\|_{\mathcal{J}}$ sind sie auch bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ vollständig. Also ist $\mathcal{K}$ ein Kreinraum.

❏

2.1.4 Definition. Seien $\langle\mathcal{K}_1,[.,.]_1\rangle$ und $\langle\mathcal{K}_2,[.,.]_2\rangle$ Krein Räume. Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn Φ linear, bijektiv, isometrisch und homöomorph ist.

2.2 Teilräume und orthogonale Komplemente

2.2.1 Proposition. *Sei $\langle\mathcal{K},[.,.]\rangle$ ein Krein Raum, und sei $\mathcal{L}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{K}$. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{L}$ besitzt eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-)$ mit der Eigenschaft dass $\mathcal{L}_+,\mathcal{L}_-$ und $\mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-$ in $\mathcal{K}$ abgeschlossen sind.

(*ii*) *Es gilt* $\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$

Beweis. Sei $(.,.)$ ein Hilbertraum-Skalarprodukt auf $\mathcal{K}$ welches eine Majorante von $[.,.]$ induziert. Da $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ abgeschlossen ist (in der Zerlegungsmajorante von $\mathcal{K}$ und wegen Proposition 1.4.4 auch bzgl. $(.,.)$), ist auch $\langle \mathcal{L}, (.,.)\rangle$ ein Hilbertraum und $(.,.)|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$ induziert eine Majorante von $[.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{L}$. Nach Satz 1.4.7 gibt es eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$ deren Komponenten in $\mathcal{L}$ abgeschlossen sind. Da $\mathcal{L}$ abgeschlossen in $\mathcal{K}$ ist, sind sie auch in $\mathcal{K}$ abgeschlossen.

Es gilt $x[\perp]\mathcal{L}$, d.h. $[x,y] = 0$ für alle $y \in \mathcal{L}$, genau dann wenn $(x, Jy)_{\mathcal{J}} = 0$, $y \in \mathcal{L}$, sowie genau dann wenn $(Jx, y)_{\mathcal{J}} = 0$, $y \in \mathcal{L}$. Wir sehen, dass

$$\mathcal{L}^{[\perp]} = (J\mathcal{L})^{(\perp)_{\mathcal{J}}} = J(\mathcal{L}^{(\perp)_{\mathcal{J}}}). \tag{2.1}$$

Es folgt

$$\mathcal{L}^{[\perp][\perp]} = (J\mathcal{L}^{(\perp)_{\mathcal{J}}})^{[\perp]} = (JJ\mathcal{L}^{(\perp)_{\mathcal{J}}})^{(\perp)_{\mathcal{J}}} = \mathcal{L}^{(\perp)_{\mathcal{J}}(\perp)_{\mathcal{J}}} = \mathcal{L}\,.$$

❑

Die Voraussetzung dass $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist, kann in Proposition 2.2.1, nicht weggelassen werden, vgl. Beispiel A.1.5.

Wir wollen noch die folgende Aussage festhalten:

2.2.2 Korollar. *Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Krein Raum, und $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{L}$ dicht genau dann, wenn $\mathcal{L}^{\perp} = \{0\}$ ist.*

Beweis. Nach (2.1) ist, $J\mathcal{L}$ dicht genau dann, wenn $\mathcal{L}^{\perp} = \{0\}$ ist. Nun ist J ein Homöomorphismus.

❑

Ist $\mathcal{K}$ ein Krein Raum und $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{K}$ der nicht abgeschlossen ist, so muß $\mathcal{L}$ nicht zerlegbar sein, vgl. Beispiel A.1.5.

2.2.3 Satz. *Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Krein Raum und $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{K}$ Dann sind äquivalent:*

(*i*) *$\mathcal{L}$ ist ortho-komplementiert;*

(*ii*) *$\mathcal{L}$ ist in $\mathcal{K}$ abgeschlossen, $\langle \mathcal{L}, [.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}\rangle$ ist nicht-entartet, und zu jeder Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ von $\mathcal{L}$ existiert eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{L}_+ \subseteq \mathcal{K}_+$, $\mathcal{L}_- \subseteq \mathcal{K}_-$;*

(*iii*) *$\mathcal{L}$ ist in $\mathcal{K}$ abgeschlossen und $\langle \mathcal{L}, [.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}\rangle$ ist ein Krein Raum.*

Beweis. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (ii)$, sei also $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{K}$. Wegen Proposition 1.1.6 ist $\mathcal{L}$ und auch $\mathcal{L}^{\perp}$ abgeschlossen und nichtentartet. Sei nun eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ von $\mathcal{L}$ gegeben. Wähle eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_{\mathcal{L}^{\perp}} = (\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^-)$ von $\mathcal{L}^{\perp}$ und setze

$$\mathcal{K}_+ := \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}^+,\ \mathcal{K}_- := \mathcal{L}_- + \mathcal{L}^-\,.$$

Da $\mathcal{L}_+ \perp \mathcal{L}^+$ ist, ist $\mathcal{K}_+$ ein positiver Teilraum von $\mathcal{K}$. Genauso ist $\mathcal{K}_-$ ein negativer Teilraum von $\mathcal{K}$, und es gilt $\mathcal{K}_+ \perp \mathcal{K}_-$. Weiters ist

$$\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_- = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}^+) + (\mathcal{L}_- + \mathcal{L}^-) = (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) + (\mathcal{L}^+ + \mathcal{L}^-) = \mathcal{L} + \mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{K}\,,$$

also ist $\mathcal{J}_\mathcal{K} := (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{K}$. Offenbar gilt $\mathcal{L}_+ \subseteq \mathcal{K}_+$ sowie $\mathcal{L}_- \subseteq \mathcal{K}_-$.

Sei nun (ii) vorausgesetzt, wir zeigen dass $\langle \mathcal{L}, [.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}\rangle$ ein Krein Raum ist. Wähle nach Proposition 2.2.1 eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_\mathcal{L} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ von $\mathcal{L}$ sodass $\mathcal{L}_+$ und $\mathcal{L}_-$ in $\mathcal{K}$ abgeschlossen sind. Nach Voraussetzung gibt es eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_\mathcal{K} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ von $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K}_+ \supseteq \mathcal{L}_+$, $\mathcal{K}_- \supseteq \mathcal{L}_-$. Da $\mathcal{L}_+$ in $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist, ist $\mathcal{L}_+$ auch in $\mathcal{K}_+$ (bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}|_{\mathcal{K}_+}$) abgeschlossen. Nun ist $\mathcal{K}_+$, und damit auch $\mathcal{L}_+$, bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}$ vollständig. Wegen

$$\|x\|^2_{\mathcal{J}_\mathcal{K}} = [x,x] = \|x\|^2_{\mathcal{J}_\mathcal{L}},\ x \in \mathcal{L}_+\,,$$

ist also $\mathcal{L}_+$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{L}}$ vollständig. Genauso sieht man, dass $\mathcal{L}_-$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{L}}$ vollständig ist. Insgesamt ist $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ein Krein Raum.

Schließlich zeigen wir $(iii) \Rightarrow (i)$. Wähle eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}$ von $\mathcal{K}$, und sei G der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)_\mathcal{J}$. Weiters bezeichne P die $(.,.)_\mathcal{J}$- orthogonale Projektion auf $\mathcal{L}$. Dann gilt für $x, y \in \mathcal{L}$

$$[x,y] = (Gx,y)_\mathcal{J} = (PGx,y)_\mathcal{J}\,.$$

Also ist der Gram-Operator von $[.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$ bzgl. dem Hilbertraum-Skalarprodukt $(.,.)_\mathcal{J}|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$ gleich $PG|_\mathcal{L}$. Nach Satz 2.1.3 ist $0 \in \rho(PG|_\mathcal{L})$, insbesondere ist $\operatorname{ran}(PG|_\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Sei nun $x \in \mathcal{K}$ gegeben, dann ist $PGx \in \mathcal{L}$, also existiert $x_0 \in \mathcal{L}$ mit $PGx = PGX_0$. Für $y \in \mathcal{L}$ gilt dann

$$[x - x_0, y] = (G(x-x_0), y)_\mathcal{J} = (PG(x-x_0), y)_\mathcal{J} = 0\,,$$

also ist $x - x_0 \in \mathcal{L}^\perp$. Wir sehen dass $\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp$.

❑

Zur Existenz von nicht ortho-komplementierten Teilräumen vgl. Beispiel A.1.4.

2.3 Vervollständigung

2.3.1 Definition. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Ein Paar $(\iota, \mathcal{K})$ heißt eine *Vervollständigung* von $\mathcal{L}$, wenn $\mathcal{K}$ ein Krein Raum ist und $\iota : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ eine injektive isometrische Abbildung ist deren Bild dicht in $\mathcal{K}$ liegt.

Zwei Vervollständigungen $(\iota, \mathcal{K})$ und $(\iota', \mathcal{K}')$ von $\mathcal{L}$ heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus Φ der Krein Räume $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ gibt mit $\Phi \circ \iota = \iota'$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota'"] & \\ \mathcal{K} \arrow[rr, "\Phi"'] & & \mathcal{K}' \end{tikzcd}$$

2.3.2 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ein nicht-entarteter Raum mit inneren Produkt. Ist $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$, und bezeichnet $(\iota_+, \mathcal{K}_+)$ (bzw. $(\iota_- \mathcal{K}_-)$) die Hilbert- (bzw. Anti-Hilbert-) Raum Vervollständigung von $\mathcal{L}_+$ (bzw. $\mathcal{L}_-$), dann ist $(\iota_+ + \iota_-, \mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}_-)$ eine Vervollständigung von $\mathcal{L}$.*

Die, ausgehend von zwei Fundamentalzerlegungen $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$, erhaltenen Vervollständigungen sind isomorph, genau dann wenn die Zerlegungsmajoranten $\mathcal{T}_\mathcal{J}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}'}$ auf $\mathcal{L}$ gleich sind.

Beweis. Da $\langle \mathcal{K}_+, [.,.]\rangle$ und $\langle \mathcal{K}_-, -[.,.]\rangle$ nach ihrer Definition Hilberträume sind, ist $\mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}_-$. ein Krein Raum. Ebenfalls nach Definition ist ι_+ von $\mathcal{L}_+$ in $\mathcal{K}_+$ und ι_- von $\mathcal{L}_-$ in $\mathcal{K}$ isometrisch. Da $\mathcal{L}_+ \perp \mathcal{L}_-$ und, nach Definition, $\mathcal{K}_+ \perp \mathcal{K}_-$ ist $\iota_+ + \iota_-$ auch von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}$ isometrisch. Da $\iota_+(\mathcal{L}_+)$ bzw. $\iota_-(\mathcal{L}_-)$ dicht in $\mathcal{L}_+$ bzw. $\mathcal{L}_-$ ist, ist $(\iota_+ + \iota_-)(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)$ dicht in $\mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}_-$.

Seien nun $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}'$ zwei Fundamentalzerlegungen von $\mathcal{L}$, und $(\iota, \mathcal{K})$ bzw. $(\iota', \mathcal{K}')$ die oben konstruierten Vervollständigungen. Sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{T}_\mathcal{J} = \mathcal{T}_{\mathcal{J}'}$, also die Normen $\|.\|_\mathcal{J}$, $\|.\|_{\mathcal{J}'}$ äquivalent sind. Bezeichnet $\mathcal{J}_\mathcal{K}$ die Fundamentalzerlegung $\mathcal{J}_\mathcal{K} := (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ die oben konstruiert wurde, und genauso $\mathcal{J}_{\mathcal{K}'} := (\mathcal{K}'_+, \mathcal{K}'_-)$, so gilt

$$\|x\|_\mathcal{J} = \|\iota(x)\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}, \; \|x\|_{\mathcal{J}'} = \|\iota'(x)\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}'}}, \; x \in \mathcal{L}\,. \tag{2.2}$$

Also ist $\iota' \circ \iota^{-1} : \iota(\mathcal{L}) \to \iota'(\mathcal{L})$ eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung zwischen den dichten Teilräumen $\iota(\mathcal{L})$ und $\iota'(\mathcal{L})$ der Banachräume $\langle \mathcal{K}, \|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}\rangle$ bzw. $\langle \mathcal{K}', \|.\|_{\mathcal{J}'_\mathcal{K}}\rangle$. Daher hat sie eine Fortsetzung Φ zu einem Homöomorphismus zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$. Da ι und ι' Isometrien in den entsprechenden indefiniten Skalarprodukten sind, und diese bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}$ bzw. $\|.\|_{\mathcal{J}'_\mathcal{K}}$ stetig sind, folgt das Φ ebenfalls isometrisch in den indefiniten Skalarprodukten ist.

Umgekehrt sei vorausgesetzt, dass $(\iota, \mathcal{K})$ und $(\iota', \mathcal{K}')$ isomorph sind, und sei Φ ein entsprechender Isomorphismus. Wegen (2.2) ist $\mathcal{T}_\mathcal{J}$ die initiale Topologie von $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}$ bzgl. ι, und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}'}$ die initiale Topologie von $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}$ bzgl. ι'. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathcal{K}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}_\mathcal{K}}\rangle \arrow[r, "\Phi"] & \langle \mathcal{K}', \mathcal{T}_{\mathcal{J}_{\mathcal{K}'}}\rangle \\
\langle \mathcal{L}, \mathcal{T}_\mathcal{J}\rangle \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \langle \mathcal{L}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}'}\rangle \arrow[u, "\iota'"']
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass id : $\langle \mathcal{L}, \mathcal{T}_\mathcal{J}\rangle \to \langle \mathcal{L}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}'}\rangle$ ein Homöomorphismus ist.

❑

2.3.3 Bemerkung. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ein Raum mit inneren Produkt, und sei vorausgesetzt, dass $\mathcal{L}$ eine Vervollständigung $(\iota, \mathcal{K})$ hat. Dann ist $\mathcal{L}$ nicht-entartet. Denn für $x \in \mathcal{L}^\circ$ gilt $\iota(x) \perp \iota(\mathcal{L})$ und daher $\iota(x) \perp \mathcal{K}$. Da ι injektiv ist, folgt $x = 0$.

Es folgt aber aus der Existenz einer Vervollständigung nicht notwendigerweise, dass $\mathcal{L}$ zerlegbar ist, vgl. Beispiel A.1.5. Auch muß nicht immer eine Vervollständigung existieren, vgl. Beispiel A.1.4.

2.4 Maximal semidefinite Teilräume

2.4.1 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Krein Raum und $\mathcal{J} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ eine Fundamentalzerlegung. Weiters sei $\mathcal{M}$ ein nichtnegativer linearer Teilraum von $\mathcal{K}$. Dann gilt:*

(*i*) *$\mathcal{M}$ ist maximal nichtnegativ genau dann, wenn $P_+\mathcal{M} = \mathcal{K}_+$.*

(*ii*) *Ist $\mathcal{M}$ maximal positiv und abgeschlossen, so ist $\mathcal{M}$ sogar maximal nichtnegativ.*

(*iii*) *Ist $\mathcal{M}$ maximal nichtnegtiv, so ist $\mathcal{M}^\perp$ maximal nichtpositiv.*

Beweis. Sei K der Winkeloperator von $\mathcal{M}$, $K : D \to \mathcal{K}_-$ mit $D := P_+\mathcal{M}$.

Die Implikation „$\Leftarrow$" in (i) ist einfach zu sehen: Ist $P_+\mathcal{M} = \mathcal{K}_+$, so ist K also auf ganz $\mathcal{K}_+$ definiert und kann daher keine echte Fortsetzung haben. Nach Korollar 1.3.5 ist $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ.

Für den Beweis der umgekehrten Implikation in (i) sowie dem Beweis von (ii) zuerst eine Zwischenbemerkung: Sei $\mathcal{M}$ nichtnegativ und abgeschlossen. Betrachte die Abbildung $P_+ : \mathcal{M} \to \mathcal{K}_+$. Dann gilt

$$\|x\|_{\mathcal{J}}^2 = \|P_+x\|_{\mathcal{J}}^2 + \|P_-x\|_{\mathcal{J}}^2 \geq \|P_+x\|^2,\ x \in \mathcal{K}\,,$$

und da $\mathcal{M}$ nichtnegativ ist,

$$\|x\|_{\mathcal{J}}^2 = \|P_+x\|_{\mathcal{J}}^2 + \|P_-x\|_{\mathcal{J}}^2 = 2\|P_+x\|_{\mathcal{J}}^2 - [x,x] \leq 2\|P_+x\|_{\mathcal{J}}^2,\ x \in \mathcal{M}\,.$$

Also sind $P_+|_{\mathcal{M}}$ und $(P|_{\mathcal{M}})_+^{-1}$ beide beschränkt. Da $\langle \mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{J}}\rangle$ ein Banachraum ist, ist auch $P_+(\mathcal{M})$ vollständig, und daher abgeschlossen in $\mathcal{K}_+$.

Sei nun angenommen, dass $P_+(\mathcal{M}) \neq \mathcal{K}_+$. Da $\mathcal{K}_+$ vollständig ist, existiert ein Teilraum $D_1 \neq \{0\}$ von $\mathcal{K}_+$ mit

$$\mathcal{K}_+ = P_+(\mathcal{M})(\dot{+})_{\mathcal{J}} D_1 = P_+(\mathcal{M})[\dot{+}]D_1\,.$$

Definiere $K_1 : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$ durch

$$K_1(x+y) := Kx,\ x \in P_+(\mathcal{M}), y \in D_1\,.$$

Dann gilt $K_1|_{P_+(\mathcal{M})} = K$ und

$$\|K_1(x+y)\|_{\mathcal{J}} = \|Kx\|_{\mathcal{J}} \leq \|x\|_{\mathcal{J}}^2 \leq \|x\|_{\mathcal{J}}^2 + \|y\|_{\mathcal{J}}^2 = \|x+y\|_{\mathcal{J}}^2\,. \tag{2.3}$$

Also haben wir $\|K_1\|_{\mathcal{J}} \leq 1$. Der von K_1 als Winkeloperator erzeugte Teilraum $\mathcal{M}_1$ ist also nichtnegativ und klarerweise gilt $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}_1$. Ist $\mathcal{M}$ sogar positiv, so gilt $\|Kx\|_{\mathcal{J}} < \|x\|_{\mathcal{J}}$ für $x \in P_+(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$. Gilt $\|K_1(x+y)\|_{\mathcal{J}} = \|x+y\|_{\mathcal{J}}$ für ein $x \in P_+(\mathcal{M})$, $y \in D_1$, so muß in (2.3) überall Gleichheit gelten, und wir sehen dass $x = y = 0$ sein muß. Also ist $\mathcal{M}_1$ positiv.

Zum Beweis von „$\Rightarrow$" in (i) sei $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ. Da mit $\mathcal{M}$ auch $\overline{\mathcal{M}}$ nichtnegativ ist, folgt dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist. Nach obiger Argumentation muß $P_+(\mathcal{M}) = \mathcal{K}_+$ sein.

Unter der Voraussetzung von (ii) erhalten wir ebenfalls aus dieser Argumentation, dass $P_+(\mathcal{M}) = \mathcal{K}_+$. Wegen (i) folgt dass $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ ist.

Wir kommen zu (iii): Es ist $\mathcal{M}^\perp$ nichtpositiv und abgeschlossen. Analog wie oben sieht man, dass $P_-(\mathcal{M}^\perp)$ in $\mathcal{K}_-$ abgeschlossen ist. Wäre $P_-(\mathcal{M}^\perp) \neq \mathcal{K}_-$, so existierte also $x \in \mathcal{K}_- \setminus \{0\}$ mit $x \perp P_-(\mathcal{M}^\perp)$. Es folgt $x \in \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$, ein Widerspruch da $\mathcal{M}$ nichtnegativ ist.

❑

2.5 Pontryagin Räume

2.5.1 Proposition. *Sei* $\langle\mathcal{L}, [.,.]\rangle$ *nichtentartet, und sei vorausgesetzt dass* $\mathcal{L}$ *einen maximalen negativen Teilraum* $\mathcal{M}_0$ *besitzt mit* $\kappa := \dim \mathcal{M}_0 < \infty$. *Dann gilt:*

(i) *Ist* $\mathcal{M}$ *ein maximal nichtpositiver oder ein maximal negativer Teilraum von* $\mathcal{L}$*, so ist* $\dim \mathcal{M} = \kappa$.

(ii) *Ist* $\mathcal{M}$ *maximal negativ, so ist* $(\mathcal{M}^\perp, \mathcal{M})$ *eine Fundamentalzerlegung von* $\mathcal{L}$.

(iii) *Alle Zerlegungsmajoranten sind gleich.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ ein maximal negativer Teilraum mit $\dim \mathcal{M} < \infty$. Dann ist $\mathcal{M}$ nach Proposition 1.1.7 ortho-komplementiert, d.h. wir haben $\mathcal{L} = \mathcal{M}^\perp[\dot{+}]\mathcal{M}$. Nach Proposition 1.3.4 ist $\mathcal{M}^\perp$ nichtnegativ. Da $\mathcal{L}$ nichtentartet ist, folgt mit Korollar 1.1.9 dass $\mathcal{M}^\perp$ sogar positiv ist.

Sei $\mathcal{J}$ die Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} := (\mathcal{M}_0^\perp, \mathcal{M}_0)$, und sei $\mathcal{M}$ ein nichtpositiver Teilraum. Wir zeigen, analog zu Proposition 2.4.1, dass gilt:

(1) $\mathcal{M}$ ist maximal nichtpositiv, genau dann wenn $P_-(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_0$.

(2) Sei $\mathcal{M}$ negativ. Dann ist $\mathcal{M}$ maximal negativ, genau dann wann $\mathcal{M}$ maximal nichtpositiv ist.

Der wesentliche Schritt im Beweis von Proposition 2.4.1 war, dass $P_+(\mathcal{M})$ in $\mathcal{K}_+$ abgeschlossen ist. Im hier betrachteten Fall ist $\dim \mathcal{M}_0 < \infty$, und daher $P_-(\mathcal{M})$ in $\mathcal{M}_0$ stets abgeschlossen. Damit kann die gleiche Konstruktion wie in Proposition 2.4.1 verwendet werden, und wir erhalten (1) und (2).

Da für jeden nichtpositiven Teilraum $\mathcal{M}$ die Abbildung $P_-|_\mathcal{M}$ injektiv ist, erhalten wir aus (1) und (2) die Behauptung (i). Mit dem ersten Argument dieses Beweises folgt nun auch (ii). Die Aussage (iii) erhalten wir aus Satz 1.4.8.

❑

Die Zahl κ in Proposition 2.5.1 heißt der *negative Index* von $\langle\mathcal{L}, [.,.]\rangle$, und man schreibt $\kappa =: \operatorname{ind}_- \mathcal{L}$.

2.5.2 Definition. Ein Raum $\langle\mathcal{P}, [.,.]\rangle$ mit inneren Produkt heißt *Pontryagin Raum*, wenn er nicht entartet ist, es einen maximal negativen Teilraum $\mathcal{M}_0$ mit endlicher Dimension gibt, und er bzgl. der Norm $\|.\|_\mathcal{J}$, wobei $\mathcal{J} := (\mathcal{M}_0^\perp, \mathcal{M}_0)$, vollständig ist.

2.5.3 Bemerkung.

(i) Die Bedingung in Definition 2.5.2 dass $\mathcal{M}_0$ existiert, ist äquivalent zur Forderung
$$\sup\big\{\dim \mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ nichtpositiv}\big\} < \infty\,.$$

(ii) Klarerweise ist jeder Pontryagin Raum auch ein Krein Raum.

(iii) Alle im folgenden für Pontryagin Räume angegebenen Aussagen könnte man natürlich entsprechend für Räume mit einem endlichdimensionalen maximal positiven Teilraum formulieren.

2.5.4 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt. Dann ist $\mathcal{P}$ ein Pontryagin Raum, genau dann wenn gilt:*

(*i*) *Es existiert eine Majorante die von einem Hilbertraum-Skalarprodukt induziert wird;*

(*ii*) *Ist $(.,.)$ ein Hilbertraum-Skalarprodukt welches eine Majorante induziert, dann ist der Gram-Operator G von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)$ invertierbar und $\sigma(G) \cap (-\infty, 0)$ besteht aus endlich vielen Punkten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $\dim \ker(G - \lambda_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Pontryagin Raum. Dann ist $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ auch ein Krein Raum und nach Satz 2.1.3 ist $0 \in \rho(G)$ und $(E((0,\infty)), E((-\infty, 0)))$ eine Fundamentalzerlegung. Es folgt dass $\dim \operatorname{ran} E(-\infty, 0) < \infty$. Die Umkehrung erhält man genauso.

❑

Die folgende, an sich ganz simple, Feststellung ist für viele Eigenschaften verantwortlich welche Pontryagin Räume als „besonders gute“ unter den Krein Räumen auszeichnen.

2.5.5 Proposition. *Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Pontryagin Raum, und $D \subseteq \mathcal{P}$ ein dichter linearer Teilraum. Dann enthält D einen maximal negativen Teilraum.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}_0 := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_\kappa\}$ ein maximal negativer Teilraum von $\mathcal{P}$. Dann sind alle Nullstellen des Polynoms

$$p(z) := \det \Big(([x_i, x_j])_{i,j=1}^{\kappa} - zI \Big)$$

negativ. Wähle Folgen $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, \kappa$, mit $x_{i,n} \in D$ und $\lim_{n \to \infty} x_{i,n} = x_i$. Dann konvergieren auch alle Koeffizienten der Polynome

$$p_n(z) := \det \Big(([x_{i,n}, x_{j,n}])_{i,j=1}^{\kappa} - zI \Big)$$

gegen die Koeffizienten von p. Da die Nullstellen eines Polynoms stetig von seinen Koeffizienten abhängen, folgt dass für hinreichend großes n alle Nullstellen von p_n negativ sind. Damit ist, für solche n, der Raum $\operatorname{span}\{x_{1,n,\dots,} x_{\kappa,n}\}$ ein κ-dimensionaler negativer Teilraum der in D enthalten ist.

❑

2.5.6 Korollar. *Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Pontryagin Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}$. Dann gilt:*

(*i*) *Es ist $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ in $\mathcal{P}$ genau dann, wenn*

$$[x_n, x_n] \to [x_0, x_0] \,,$$

und wenn es eine dichte Teilmenge M von $\mathcal{P}$ gibt mit

$$[x_n, y] \to [x_0, y], \;\; y \in M \,.$$

(*ii*) *Es ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge genau dann, wenn*

$$[x_n - x_m, x_n - x_n] \to 0,\ n, m \to \infty\,,$$

und wenn es eine dichte Teilmenge M *von* $\mathcal{P}$ *gibt sodass für jedes* $y \in M$ *die Folge* $([x_n, y])_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Ist $x_n \to x_0$ bzw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{P}$, so folgen die angegebenen Bedingungen wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes. Für die dichte Menge M können wir dabei ganz $\mathcal{P}$ nehmen.

Sei nun vorausgesetzt, dass $M \subseteq \mathcal{P}$ dicht ist und die in (*i*) bzw. (*ii*) angegebenen Eigenschaften erfüllt sind. Dann gelten diese auch für alle $y \in \operatorname{span} M$, wir können also oBdA voraussetzen, dass M ein dichter linearer Teilraum ist.

Sei $\mathcal{P}_-$ ein maximal negativer Teilraum von $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P}_- \subseteq M$, und betrachte die Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} := (\mathcal{P}_-^\perp, \mathcal{P}_-)$ mit entsprechenden Fundamentalprojektionen P_+, P_-. Wegen $\mathcal{P}_- \subseteq M$ ist $\mathcal{P}_-^\perp \cap M$ ein dichter linearer Teilraum von $\mathcal{P}_-^\perp$.

Betrachte die Folge $(P_- x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $\mathcal{P}_- \subseteq M$ ist diese in $\mathcal{P}_-$ schwach konvergent gegen $P_- x_0$ bzw. in $\mathcal{P}_-$ schwache Cauchy-Folge. Da $\mathcal{P}_-$ endlichdimensional ist, folgt dass $P_- x_n \to P_- x_0$ bzgl. der Norm $\|.\|_{\mathcal{J}}$ bzw. $\|P_- x_n - P_- x_m\|_{\mathcal{J}} \to 0$, $n, m \to \infty$.

Betrachte die Folge $(P_+ x_n)_{n\to\mathbb{N}}$.
Aussage (*i*): Für die in $\mathcal{P}_-^\perp$ dichte Teilmenge $\mathcal{P}_-^\perp \cap M$ gilt

$$[P_+ x_n, y] \to [P_+ x_0, y],\ y \in \mathcal{P}_-^\perp \cap M\,.$$

Weiters ist

$$[P_+ x_n, P_+ x_n] = [x_n, x_n] - [P_- x_n, P_- x_n] \to [x_0, x_0] - [P_- x_0, P_- x_0] =$$

$$= [P_+ x_0, P_+ x_0]\,.$$

Da $\mathcal{P}_-^\perp$ ein Hilbertraum ist, folgt mit Proposition B.1.1 dass $P_+ x_n \to P_+ x_0$ bzgl. der Norm $\|.\|_{\mathcal{J}}$.
Aussage (*ii*): Es gilt

$$[P_+ x_n - P_+ x_m, P_+ x_n - P_+ x_m] =$$

$$= [x_n - x_m, x_n - x_m] - [P_- x_n - P_- x_m, P_- x_n - P_- x_m] \to 0,\ n, m \to \infty\,,$$

also ist $(P_+ x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ eine Cauchy-Folge.

❑

2.5.7 Korollar. *Seien* $\langle \mathcal{P}_1, [.,.]_1 \rangle$ *und* $\langle \mathcal{P}_2, [.,.]_2 \rangle$ *Pontryagin Räume, und seien* D_1, D_2 *dichte lineare Teilräume von* $\mathcal{P}_1$ *bzw.* $\mathcal{P}_2$. *Weiters sei* $V : D_1 \to D_2$ *eine lineare und isometrische Abbildung von* D_1 *auf* D_2, *also*

$$[Vx, Vy]_2 = [x, y]_1,\ x, y \in D_1\,.$$

Dann existiert ein Isomorphismus U *von* $\mathcal{P}_1$ *auf* $\mathcal{P}_2$ *mit* $U|_{D_1} = V$.

Beweis. Ist $Vx = 0$, so gilt für alle $y \in D_1$ dass $[x, y]_1 = [Vx, Vy]_2 = 0$. Da D_1 dicht in $\mathcal{P}_1$ ist, folgt $x = 0$. Also ist V eine Bijektion zwischen D_1 und D_2, die isometrisch ist. Insbesondere ist das Bild eines maximal negativen Teilraumes von D_1 unter V ein maximal negativer Teilraum von D_2. Wir erhalten $\operatorname{ind}_- D_1 = \operatorname{ind}_- D_2$, und wegen Proposition 2.5.5 damit auch $\operatorname{ind}_- \mathcal{P}_1 = \operatorname{ind}_- \mathcal{P}_2$.

Sei $\mathcal{P}_{1,-}$ ein maximal negativer Teilraum von $\mathcal{P}_1$ mit $\mathcal{P}_{1,-} \subseteq D_1$. Dann ist $\mathcal{P}_{2,-} := V\mathcal{P}_{1,-}$ ein maximal negativer Teilraum von $\mathcal{P}_2$ mit $\mathcal{P}_{2,-} \subseteq D_2$. Es ist $\mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1$ dicht im Hilbertraum $\mathcal{P}_{1,-}^\perp$ und $\mathcal{P}_{2,-}^\perp \cap D_2$ dicht im Hilbertraum $\mathcal{P}_{2,-}^\perp$. Weiters ist $V|_{\mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1}$ eine isometrische Abbildung von $\mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1$ auf $\mathcal{P}_{2,-}^\perp \cap D_2$: Denn ist $y \in \mathcal{P}_{2,-}^\perp \cap D_2$, so existiert $x \in D_1$ mit $Vx = y$. Es ist, für jedes $z \in \mathcal{P}_{1,-}$,

$$[x, z]_1 = [Vx, Vz]_2 = [y, Vz]_2 = 0\,,$$

also $x \in \mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1$. Ist umgekehrt $x \in \mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1$, so ist für jedes $z \in \mathcal{P}_{1,-}$

$$0 = [x, z] = [Vx, Vz]\,,$$

also $Vx \in \mathcal{P}_{2,-}^\perp$.

Da eine isometrische Abbildung zwischen normierten Räumen stetig ist, und $\mathcal{P}_{1,-}^\perp$ sowie $\mathcal{P}_{2,-}^\perp$ Hilberträume sind, läßt sich $V|_{\mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1}$ zu einer isometrischen Abbildung U_0 von $\mathcal{P}_{1,-}^\perp = \overline{\mathcal{P}_{1,-}^\perp \cap D_1}^{\|.\|_\mathcal{J}}$ auf $\mathcal{P}_{2,-}^\perp = \overline{\mathcal{P}_{2,-}^\perp \cap D_2}^{\|.\|_\mathcal{J}}$ fortsetzen. Definiert man

$$Ux := U_0(P_+x) + V(P_-x)\,,$$

so erhält man eine bijektive und isometrische Abbildung von $\mathcal{P}_1$ auf $\mathcal{P}_2$. Da $\mathcal{P}_{1,-}$ endlichdimensional ist, ist $V|_{\mathcal{P}_{1,-}}$ stetig. Insgesamt ist U stetig und damit auch ein Homöomorphismus. Nach Konstruktion gilt $U|_{D_1} = V$.

❑

2.5.8 Korollar. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nichtentartet, und habe $\mathcal{L}$ einen maximal negativen Teilraum endlicher Dimension κ. Dann hat $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ eine Vervollständigung und diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Sie ist ein Pontryagin Raum mit negativen Index κ.*

Beweis. Da $\mathcal{L}$ zerlegbar ist, existiert nach Proposition 2.3.2 eine Vervollständigung. Zum Beispiel erhält man eine solche durch vervollständigen der Fundamentalzerlegung $(\mathcal{M}_0^\perp, \mathcal{M}_0)$ wo $\mathcal{M}_0$ ein endlichdimensionaler maximaler negativer Teilraum ist. Da $\mathcal{M}_0$ endlichdimensional, und daher bereits vollständig ist, hat diese die Gestalt $(\iota_0, \mathcal{H}[\dot{+}]\mathcal{M}_0)$ mit einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sie ist also ein Pontryagin Raum mit negativen Index κ.

Sei nun $(\iota, \mathcal{K})$ eine beliebige Vervollständigung von $\mathcal{L}$. Angenommen es existiert ein negativer Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{K}$ mit $\dim \mathcal{M} = \kappa + 1$. Dann zeigt das gleiche Argument wie im Beweis von Proposition 2.5.5, dass auch $\iota(\mathcal{L})$ einen $(\kappa + 1)$-dimensionalen negativen Teilraum enthalten müßte. Ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{K}$ ein Pontryagin Raum. Die Abbildung

$$\iota \circ \iota_0^{-1} : \iota_0(\mathcal{L}) \to \iota(\mathcal{L})$$

ist eine isometrische Abbildung zwischen den dichten Teilmengen $\iota_0(\mathcal{L})$ und $\iota(\mathcal{L})$ der Pontryagin Räume $\mathcal{H}[\dot{+}]\mathcal{M}_0$ bzw. $\mathcal{K}$. Nach Korollar 2.5.7 besitzt sie eine Fortsetzung zu einem Isomorphismus.

❑

Auch bei der Frage ob ein Teilraum orthokomplementiert ist, verhalten sich Pontryagin Räume einfacher als allgemeine Krein Räume.

2.5.9 Satz. *Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.]\rangle$ ein Pontryagin Raum, und $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{P}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{L}$ ist ortho-komplementiert.*

(ii) *$\mathcal{L}$ ist nicht-entartet und abgeschlossen in $\mathcal{P}$.*

(iii) *$\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ist ein Pontryagin Raum und $\mathcal{L}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{P}$.*

(iv) *$\langle \mathcal{L}, [.,.]\rangle$ ist ein Pontryagin Raum und $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$ ist dicht in $\mathcal{P}$.*

Beweis.

Schritt 1, (i) $\Rightarrow$ (iv): Ist $\mathcal{L}$ ortho-komplementiert, so ist nach Satz 2.2.3, $(i) \Rightarrow (iii)$, der Raum $\mathcal{L}$ selbst, mit $[.,.]|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$, ein Pontryagin Raum.

Schritt 2, (iv) $\Rightarrow$ (iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}$ mit $x_n \to x_0$ in $\mathcal{P}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge, und wir erhalten

$$\begin{aligned}&[x_n - x_m, x_n - x_m] \to 0,\\ &\forall y \in \mathcal{P} : ([x_n, y])_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge,}\end{aligned}$$

insbesondere auch für alle $y \in \mathcal{L}$. Nach Korollar 2.5.6 ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}$, und daher konvergent, $x_n \to \tilde{x}_0$ in $\mathcal{L}$. Es folgt

$$[x_0, y] = \lim_{n\to\infty}[x_n, y] = [\tilde{x}_0, y], \; y \in \mathcal{L}\,,$$

$$[x_0, y] = \lim_{n\to\infty}[x_n, y] = 0 = [\tilde{x}_0, y], \; y \in \mathcal{L}^\perp\,.$$

Insgesamt haben wir $[x_0, y] = [\tilde{x}_0, y]$ für alle y aus der in $\mathcal{P}$ dichten Menge $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$, und daher $x_0 = \tilde{x}_0$. Insbesondere folgt $x_0 \in \mathcal{L}$.

Schritt 3, (iii) $\Rightarrow$ (ii): Trivial.

Schritt 4, (ii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt

$$(\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp)^\perp = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{L} = \{0\}\,, \tag{2.4}$$

und daher ist $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$ dicht in $\mathcal{P}$. Also existiert ein maximal negativer Teilraum $\mathcal{P}_-$ von $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P}_- \subseteq \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$.

Sei $\mathcal{M}_1$ ein maximal negativer Teilraum von $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}_2$ einer von $\mathcal{L}^\perp$, und setze $\mathcal{M}_- := \mathcal{M}_1[\dot{+}]\mathcal{M}_2$. Dann ist $\mathcal{M}_-$ ein negativer Teilraum von $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$. Angenommen es existiert ein negativer Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$ mit $\mathcal{M} \supsetneq \mathcal{M}_-$. Dann wähle $x \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ mit $x \perp \mathcal{M}_-$. Beachte hier, dass alle negativen Teilräume endlichdimensional sind. Ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{L}$, $x_2 \in \mathcal{L}^\perp$, so gilt

$$0 > [x, x] = [x_1, x_1] + [x_2, x_2]\,.$$

Also muß $[x_1, x_1] < 0$ oder $[x_2, x_2] < 0$ gelten. Nun ist $x_1 = x - x_2 \perp \mathcal{M}_1$ und $x_2 = x - x_1 \perp \mathcal{M}_2$. Im ersten Fall wäre $\operatorname{span}\{x_1\} + \mathcal{M}_1$ ein negativer

Teilraum von $\mathcal{L}$ der $\mathcal{M}_1$ echt umfasst, im zweiten Fall wäre $\operatorname{span}\{x_2\} + \mathcal{M}_2$ ein negativer Teilraum von $\mathcal{L}^\perp$ der $\mathcal{M}_2$ echt umfasst. Es folgt, dass $\mathcal{M}_-$ maximal negativ in $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$ ist. Da $\mathcal{P}_-$ klarerweise maximal negativ in $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^+$ ist, folgt $\dim \mathcal{M}_- = \dim \mathcal{P}_-$. Es folgt nun, dass $\mathcal{M}_-$ sogar in $\mathcal{P}$ maximal negativ ist, und daher dass $(\mathcal{M}_-^\perp, \mathcal{M}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{P}$ ist.

Sei nun $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{L}_-$ maximal negativ in $\mathcal{L}$, und wir können das obige Argument anwenden mit $\mathcal{M}_1 := \mathcal{L}_-$ und irgendeinem maximal negativen Teilraum $\mathcal{M}_2$ von $\mathcal{L}^\perp$. Ist $x \in \mathcal{L}_+$, so ist $x \perp \mathcal{M}_1$, da $\mathcal{L}_+ \perp \mathcal{L}_-$. Weiters ist $x \perp \mathcal{M}_2$, da $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{L}^\perp$. Insgesamt ist $x \perp \mathcal{M}_1[\dot{+}]\mathcal{M}_2$, und wir sehen dass die im obigen Schritt erhaltene Fundamentalzerlegung $(\mathcal{M}_-^\perp, \mathcal{M}_-)$ von $\mathcal{P}$ die Eigenschaft $\mathcal{M}_- \supseteq \mathcal{L}_-$, $\mathcal{M}_-^\perp \supseteq \mathcal{L}_+$ hat. Nach Satz 2.2.3, $(ii) \Rightarrow (i)$, ist $\mathcal{L}$ ortho-komplementiert.

❑

Die Voraussetzung in (iii), dass $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist, kann nicht weggelassen werden, vgl. Beispiel A.1.7.

Wir können nun auch ein Analogon der Zerlegung $\mathcal{P} = \mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^\perp$ für entartete Teilräume $\mathcal{L}$ angeben. Dazu benötigen wir noch eine Vorbereitung. Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Raum mit inneren Produkt, und $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ zwei lineare Teilräume. Dann heißen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ *schief verbunden*, wenn $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ neutral sind und $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ nicht-entartet ist.

2.5.10 Lemma. *Sei $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ zerlegbar und nicht-entartet, und sei $\mathcal{M}_1$ ein neutraler Teilraum von $\mathcal{L}$. Dann existiert $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{L}$ sodaß $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ schief verbunden sind.*

Beweis. Wähle eine Fundamentalsymmetrie J und setze $\mathcal{M}_2 := J\mathcal{M}_1$. Dann ist $\mathcal{M}_2$ neutral, da J bzgl. $[.,.]$ isometrisch ist. Sei $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{M}_1 + M_2$. Ist $x \neq 0$, so ist entweder $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$. Betrachte den ersten Fall: Dann gilt

$$[x, Jx_1] = [x_1, Jx_1] + \underbrace{[x_2, Jx_1]}_{=0} = (x_1, x_1)_\mathcal{J} > 0\,.$$

Im zweiten Fall gilt:

$$[x, J^{-1}x_2] = \underbrace{[x_1, J^{-1}x_2]}_{=0} + [x_2, J^{-1}x_2] = (x_2, x_2)_\mathcal{J} > 0\,.$$

❑

2.5.11 Bemerkung. Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ schief verbunden, und ist $\dim \mathcal{M}_1 < \infty$, so ist $\dim \mathcal{M}_2 = \dim \mathcal{M}_1$: Denn es ist $\operatorname{codim} \mathcal{M}_1^\perp \leq \dim \mathcal{M}_1$ da $\mathcal{M}_1^\perp$ durch $\dim \mathcal{M}_1$ viele lineare Gleichungen beschrieben wird. Weiters ist und $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_1^\perp = \{0\}$. Also haben wir $\dim \mathcal{M}_2 \geq \dim \mathcal{M}_1$. Das gleiche Argument mit $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ vertauscht zeigt $\dim \mathcal{M}_2 = \dim \mathcal{M}_1$.

2.5.12 Satz. *Sei $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$ ein Pontryagin Raum, und $\mathcal{L}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{P}$. Dann gilt:*

(i) Es existiert ein abgeschlossener nicht-entarteter Teilraum $\mathcal{L}_1$ von $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$.

(*ii*) *Sind* $\mathcal{L}_1$ *und* $\mathcal{L}_2$ *abgeschlossene Teilräume mit* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$ *und* $\mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_2[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$*, so existiert ein Teilraum* $\mathcal{M}$ *von* $\mathcal{P}$ *sodass* $\mathcal{L}^\circ$ *und* $\mathcal{M}$ *schief verbunden sind und*

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}_1[\dot{+}](\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})[\dot{+}]\mathcal{L}_2$$

(*iii*) *Ist* $\mathcal{M}$ *ein Teilraum sodass* $\mathcal{L}^\circ$ *und* $\mathcal{M}$ *schief verbunden sind, so existieren eindeutige abgeschlossene Teilräume* $\mathcal{L}_1$ *und* $\mathcal{L}_2$ *mit*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ,\ \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_2[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ,\ \mathcal{P} = \mathcal{L}_1[\dot{+}](\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})[\dot{+}]\mathcal{L}_2$$

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{P}$. Dann ist $\langle \mathcal{L}, (.,.)_\mathcal{J}\rangle$ ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{L}_1$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{L}^\circ$ in $\mathcal{L}$ bzgl. $(.,.)_\mathcal{J}$. Dann ist $\mathcal{L}_1$ bzgl. $\|.\|_\mathcal{J}$, also in $\mathcal{P}$, abgeschlossen und es gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\dot{+})_\mathcal{J}\mathcal{L}^\circ$. Klarerweise ist $\mathcal{L}_1[\perp]\mathcal{L}^\circ$. Also gilt (*i*).

Um (*ii*) zu zeigen, seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ gegeben. Es gilt $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1^\circ = \{0\}$, $\mathcal{L}_2^\circ = \{0\}, \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0\}$, und es ist $\mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_2$ nicht-entartet. Weiters ist $(\mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_2)^\perp = \mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$. Ist $x \in \mathcal{P}$, so schreibe $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{L}_1$, $z \in \mathcal{L}_1^\perp$. Schreibe weiter $z = z_1 + z_2$ mit $z_1 \in \mathcal{L}_2$, $z_2 \in \mathcal{L}_2^\perp$. Wegen $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1^\perp$ ist $z_2 = z - z_1 \in \mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$. Wir sehen, dass

$$\mathcal{P} = (\mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_2)[\dot{+}](\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp). \tag{2.5}$$

Da $\mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}_2$ sowie $\mathcal{P}$ nichtentartet sind, ist auch $\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$ nicht-entartet. Klarerweise ist $\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$ abgeschlossen und nach Satz 2.5.9 selbst ein Pontryagin Raum.

Es ist $\mathcal{L}^\circ$ ein neutraler Teilraum von $\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$. Sei $\mathcal{M}$ ein mit $\mathcal{L}^\circ$ schief verbundener Teilraum in $\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$. Dann ist $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{L}^\circ < \infty$, also auch $\dim(\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}) < \infty$ und daher $\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}$ abgeschlossen. Ist $x \in \mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$ und $x \perp (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})$, so folgt

$$x \perp (\mathcal{L}_1\dot{+}\mathcal{L}^\circ) = \mathcal{L},\ x \perp (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}^\circ) = \mathcal{L}^\perp,$$

also $x \in \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}^\circ$. Da $\mathcal{L}^\circ$ und $\mathcal{M}$ schief verbunden sind, folgt damit $x = 0$. Wir erhalten $\mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp = \mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}$, und die Behauptung folgt aus (2.5).

Wir kommen zum Beweis von (*iii*), sei also $\mathcal{M}$ vorgegeben. Dann ist $\dim(\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}) = 2\dim \mathcal{L}^\circ < \infty$, also $\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}$ auch abgeschlossen. Es folgt

$$\mathcal{P} = (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})^\perp[\dot{+}](\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M}).$$

Setze

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L} \cap (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})^\perp,\ \mathcal{L}_2 := \mathcal{L}^\perp \cap (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})^\perp.$$

Ist $x \in \mathcal{L}$, $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in (\mathcal{L}^\circ + \mathcal{M})^\perp$, $x_2 \in (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})$, so folgt $x_2 = x - x_1 \perp \mathcal{L}^\circ$, also $x_2 \in \mathcal{L}^\circ$. Damit ist $x_1 = x - x_2 \in \mathcal{L}$. Wir sehen, dass $x_1 \in \mathcal{L}_1$, und haben damit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$. Wegen $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{M}$, ist auch $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}^\circ = 0$. Genauso erhält man $\mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_2[\dot{+}]\mathcal{L}^\circ$.

Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}_1^\perp \cap \mathcal{L}_2^\perp$ sind wir in der gleichen Situation wie im Beweise von (*ii*), und erhalten

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}_1[\dot{+}](\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})[\dot{+}]\mathcal{L}_2.$$

Um die Eindeutigkeitsaussage einzusehen, seien $\mathcal{L}_1'$ und $\mathcal{L}_2'$ weitere Teilräume mit den angegebenen Eigenschaften. Dann gilt $\mathcal{L}_1' \subseteq \mathcal{L} \cap (\mathcal{L}^\circ\dot{+}\mathcal{M})^\perp = \mathcal{L}_1$ und

$\mathcal{L}_2' \subseteq \mathcal{L}^\perp \cap (\mathcal{L}^\circ \dot{+} \mathcal{M})^\perp = \mathcal{L}_2$. Wegen $\mathcal{L}_1' \dot{+} \mathcal{L}^\circ = \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}^\circ$ sowie $\mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}^\circ = \mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_2 \dot{+} \mathcal{L}^\circ$ folgt nun $\mathcal{L}_1' = \mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2' = \mathcal{L}_2$.

❑

Kapitel 3

Invariante Teilräume

3.0.13 Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein Krein Raum. Wir bezeichnen die Menge aller stetigen linearen Operatoren von $\mathcal{K}$ in sich mit $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Ist $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{K}$, so wird die Topologie von $\mathcal{K}$ von dem Hilbertraum-Skalarprodukt $(.,.)_\mathcal{J}$ induziert. Es ist also $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ gleich der Menge aller beschränkten Operatoren des Hilbertraumes $\langle \mathcal{K}, (.,.)_\mathcal{J} \rangle$. Insbesondere sind alle Aussagen aus der Spektraltheorie der beschränkten Operatoren im Hilbert- oder Banach-Raum gültig.

3.1 Unitäre- und selbstadjungierte Operatoren

3.1.1 Proposition. *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $T^+ \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit*

$$[Tx, y] = [x, T^+ y], x, y \in \mathcal{K}. \tag{3.1}$$

Es gilt für $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, stets

$$(S+T)^+ = S^+ + T^+, (\lambda T)^+ = \overline{\lambda} T^+, (ST)^+ = T^+ S^+, T^{++} = T. \tag{3.2}$$

Es ist

$$\ker(T^+) = \operatorname{ran}(T)^\perp, \ \overline{\operatorname{ran}(T^+)} = \ker(T)^\perp .$$

Ist $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{K}$, und bezeichnet T^* die Adjungierte von T in $\mathcal{B}(\langle \mathcal{K}, (.,.)_\mathcal{J} \rangle)$, so gilt $T^+ = JT^*J$. Es folgt weiters, dass $\|T^+\| = \|T\|$, wobei hier die Operatornorm bzgl. $\|.\|_\mathcal{J}$ steht.

Beweis. Da das innere Produkt $[.,.]$ nicht-entartet ist, existiert höchstens ein Operator T^+ mit der Eigenschaft (3.1). Sei $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung und betrachte JT^*J: Es gilt

$$[Tx, y] = (JTx, y)_\mathcal{J} = (Tx, Jx)_\mathcal{J} = (x, T^*Jy)_\mathcal{J} = [Jx, T^*Jy] = [x, JT^*Jy] .$$

Also existiert ein Operator mit (3.1), nämlich $T^+ := JT^*J$.

Die Rechenregeln (3.2) folgen sofort wegen der Eindeutigkeit von T^+, zum Beispiel ist

$$[STx, y] = [Tx, S^+ y] = [x, T^+ S^+ y], \ x, y \in \mathcal{K} ,$$

also $(ST)^+ = T^+S^+$. Es gilt

$$T^+y = 0 \iff \forall x : [x, T^+y] = 0 \iff \forall x : [Tx, y] = 0 \iff y \in \operatorname{ran}(T)^\perp .$$

Daraus erhalten wir auch

$$\ker(T)^\perp = \ker(T^{++})^\perp = \operatorname{ran}(T^+)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{ran}(T^+)} .$$

Da J eine Isometrie bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ ist, bildet J die $\|.\|_{\mathcal{J}}$-Einheitskugel auf sich ab. Wir erhalten

$$\|JT^*J\| = \sup\left\{|(JT^*Jx, y)|_{\mathcal{J}}| : \|x\|_{\mathcal{J}}, \|y\|_{\mathcal{J}} \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{|(T^*Jx, Jy)|_{\mathcal{J}}| : \|x\|_{\mathcal{J}}, \|y\|_{\mathcal{J}} \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{|(T^*\hat{x}, \hat{y})_{\mathcal{J}}| : \|\hat{x}\|_{\mathcal{J}}, \|\hat{y}\|_{\mathcal{J}} \le 1\right\} = \|T^*\| = \|T\| .$$

❑

3.1.2 Proposition. *Sei $\mathcal{K}$ ein Krein Raum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Dann gilt*

(i) $\lambda \in \rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \rho(T^+)$;

(ii) $\lambda \in \sigma_p(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^+) \cup \sigma_r(T^+)$;

(iii) $\lambda \in \sigma_r(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^+)$;

(iv) $\lambda \in \sigma_c(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_c(T^+)$.

Beweis. Wegen $I^+ = I$ und den Rechenregeln für die Adjungierte, ist ein Element $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ genau dann invertierbar, wenn S^+ invertierbar ist. Wegen $(T^+ - \overline{\lambda}) = (T - \lambda)^+$ folgt (i). Ist $\ker(T - \lambda) \neq \{0\}$, so folgt

$$\mathcal{K} \neq \ker(T - \lambda)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(T^+ - \overline{\lambda})} ,$$

also ist $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^+) \cup \sigma_r(T^+)$. Ist $\overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} \neq \mathcal{K}$, so ist $\ker(T^+ - \overline{\lambda}) = \operatorname{ran}(T - \lambda)^\perp \neq \{0\}$, und wir erhalten $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^+)$.

Da sich das Spektrum als disjunkte Vereinigung von Punkt-, kontinuierlichen-, und Residualspektrum schreibt, folgt (iv) aus den bereits bewiesenen Punkten $(i) - (iii)$.

❑

3.1.3 Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein Krein Raum. Ein Operator

(i) $U \in B(\mathcal{K})$ heißt *unitär*, wenn $UU^+ = U^+U = I$;

(ii) $A \in B(\mathcal{K})$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A^+ = A$.

3.1.4 Bemerkung. Ein im Krein Raum $\mathcal{K}$ unitärer oder selbstadjungierter Operator muß im Hilbertraum $\langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}} \rangle$ nicht einmal normal sein. Zum Beispiel ist ja $A^*A = JA^+JA$ und $AA^* = AJA^+J$.

Aus Proposition 3.1.2 erhalten wir unmittelbar:

3.1.5 Korollar. *Ist A selbstadjungiert, so ist $\rho(A)$ symmetrisch zur reellen Achse, d.h. $\rho(A) = \overline{\rho(A)}$. Ist U unitär, so ist $\rho(U)$ symmetrisch zur Einheitskreislinie, d.h. $\lambda \in \rho(U) \iff \overline{\lambda}^{-1} \in \rho(U)$ für $\lambda \neq 0$.*

Beweis. Ist $A = A^+$, so gilt

$$\lambda \in \rho(A) \iff \lambda \in \rho(A^+) \iff \overline{\lambda} \in \rho(A)\,.$$

Ist U unitär, so ist für $\lambda \neq 0$

$$U - \frac{1}{\overline{\lambda}} = -\frac{1}{\overline{\lambda}} U(U^+ - \overline{\lambda})\,.$$

Da stets $0 \in \rho(U)$ ist, gilt also

$$\frac{1}{\overline{\lambda}} \in \rho(U) \iff \overline{\lambda} \in \rho(U^+) \iff \lambda \in \rho(U)\,.$$

❑

3.2 Existenz invarianter Teilräume

Ist $Y \subseteq X$ ein Teilraum mit $T(Y) \subseteq Y$, und ist $X = Y \dot{+} Z$, so kann man T schreiben als Dreiecksmatrix

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{matrix} Y \\ \dot{+} \\ Z \end{matrix} \to \begin{matrix} Y \\ \dot{+} \\ Z \end{matrix}$$

Dabei sind, wenn P_Y und P_Z die Projektionen auf Y bzw. Z mit Kern Z bzw. Y bezeichnen,

$$T_{11} := P_Y T|_Y\,,\ T_{12} := P_Y T|_Z\,,\ T_{22} := P_Z T|_Z\,.$$

Nun kann man viele Eigenschaften von T, z.B. Spektraleigenschaften, zurückführen auf Eigenschaften der „kleineren“ Operatoren T_{11} und T_{22}.

Die Frage ob jeder Operator nichttriviale invariante Teilräume besitzt, bekannt als das „Invariant Subspace Problem“, ist eine der tiefliegendsten Fragen der Funktionalanalysis, und eine vollständige Antwort ist nicht bekannt. Man weiß zum Beispiel, daß für einen Banachraum X die Antwort im allgemeinen „nein“ ist, d.h. es existiert ein Banachraum X und ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ der keinen nichttrivialen invarianten Teilraum hat. Ist X ein Hilbertraum, so ist das Problem ungelöst, man kennt nur gewisse Klassen von Operatoren die stets invariante Teilräume haben. Zum Beispiel hat ein normaler Operator wegen dem Spektralsatz stets einen nichttrivialen invarianten Teilraum: Sei E das Spektralmaß von T. Gilt $\sigma(T) = \{x_0\}$, so ist $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE = \int_{\{x_0\}} \lambda\, dE = x_0 \cdot I$, und jeder Teilraum ist invariant. Besteht $\sigma(T)$ aus mehr als einem Punkt, so wähle $M_1, M_2 \subseteq \sigma(T)$ mit $M_1 \dot{\cup} M_2 = \sigma(T)$ und $E(M_1), E(M_2) \neq 0, I$. Dann ist $\operatorname{ran} E(M_1)$ ein nichttrivialer invarianter Teilraum. Die Existenz solcher Mengen M_1, M_2 erhält man zum Beispiel so: Seien $x_1, x_2 \in \sigma(T), x_1 \neq x_2$. Wähle eine Gerade γ sodaß x_1 links von γ und x_2 rechts von γ liegt. Sei H_1 die abgeschlossene Halbebene links von γ und H_2 die offene Halbebene rechts von γ, und setze $M_1 := \sigma(T) \cap H_1$, $M_2 := \sigma(T) \cap H_2$. Dann ist $M_1 \dot\cup M_2 = \sigma(T)$ und $T(\operatorname{ran} E(M_j)) \subseteq \operatorname{ran} E(M_j)$, $j = 1, 2$. Also können wir schreiben

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \operatorname{ran} E(M_1) \\ \dot{+} \\ \operatorname{ran} E(M_2) \end{array} \to \begin{array}{c} \operatorname{ran} E(M_1) \\ \dot{+} \\ \operatorname{ran} E(M_2) \end{array}$$

wobei $T_1 := T|_{\operatorname{ran} E(M_1)}$, $T_2 := T|_{\operatorname{ran} E(M_2)}$. Nun gilt $\sigma(T_1) \subseteq \overline{M_1} = M_1$, $\sigma(T_2) \subseteq \overline{M_2}$,denn für $\lambda \notin \overline{M_1}$ bzw. $\lambda \notin \overline{M_2}$ ist

$$\int_{M_1} \frac{1}{z - \lambda} \, dE \cdot (T_1 - \lambda) = \mathrm{id}_{\operatorname{ran} E(M_1)} ,$$

bzw.

$$\int_{M_2} \frac{1}{z - \lambda} \, dE \cdot (T_2 - \lambda) = \mathrm{id}_{\operatorname{ran} E(M_2)} .$$

In diesem Kapitel werden wir den folgenden Satz beweisen, der eine große Klasse von Operatoren in einem Krein Raum angibt, welche sicher immer nichttriviale invariante Teilräume besitzen.

3.2.1 Satz. *Sei $\mathcal{K}$ ein Krein Raum, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, und $\mathcal{J} = (\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{K}$. Schreibe*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{K}_+ \\ [\dot{+}] \\ \mathcal{K}_- \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{K}_+ \\ [\dot{+}] \\ \mathcal{K}_- \end{array} \tag{3.3}$$

mit

$$T_{11} := P_+ T|_{\mathcal{K}_+}, \ T_{12} := P_+ T|_{\mathcal{K}_-}, \ T_{21} := P_- T|_{\mathcal{K}_+}, \ T_{22} := P_- T|_{\mathcal{K}_-} .$$

Sei vorausgesetzt, dass gilt

(*i*) *$[Tx, Tx] \geq 0$ für alle x mit $[x, x] \geq 0$,*

(*ii*) *T_{12} ist kompakt.*

Dann existiert zu jedem nichtnegativen Teilraum $\mathcal{M}_0$ der unter T invariant ist ein maximaler nichtnegativer Teilraum $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_0$ der ebenfalls unter T invariant ist.

3.2.2 Bemerkung. Ist $\mathcal{K}$ tatsächlich indefinit, d.h. weder ein Hilbert- noch ein anti-Hilbert Raum, so existiert unter den Voraussetzungen des Satzes also ein nichttrivialer invarianter Teilraum. Denn man kann im Satz sicher immer $\mathcal{M}_0 = \{0\}$ verwenden, und maximale semidefinite Teilräume sind weder $= \{0\}$ noch $= \mathcal{K}$.

Der Beweis von Satz 3.2.1 ist eine Anwendung des Fixpunktsatzes Satz B.2.5. Die wesentliche Feststellung die das ermöglicht ist im folgenden Lemma zusammengefaßt.

3.2.3 Lemma. *Sei $T \in B(\mathcal{K})$ und gelte $[Tx, Tx] \geq 0$ für $[x, x] \geq 0$. Weiters sei $T = (T_{ij})_{i,j=1}^2$ eine Matrixdarstellung wie in (3.3). Dann gilt:*

(*i*) *Ist* $\mathcal{M} \in \mathrm{PosSd}(\mathcal{K})$*, so ist auch* $T(\mathcal{M}) \in \mathrm{PosSd}(\mathcal{K})$*;*

(*ii*) *Sind* $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \mathrm{PosSd}(\mathcal{K})$*, und* K, K' *die entsprechenden Winkeloperatoren, so gilt* $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$ *genau dann, wenn*

$$\operatorname{ran}(T_{11} + T_{12}K) \subseteq \operatorname{dom} K' \text{ und } T_{21} + T_{22}K = K'(T_{11} + T_{12}K). \quad (3.4)$$

Beweis. Die Aussage (i) ist klar. Seien nun $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ mit entsprechenden Winkeloperatoren K, K' gegeben. Es gilt für $x \in \operatorname{dom} K$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}x + T_{12}Kx \\ T_{21}x + T_{22}Kx \end{pmatrix}.$$

Gelte $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$ und sei $x \in \operatorname{dom} K$. Dann muß es ein $y \in \operatorname{dom} K'$ geben mit

$$\begin{pmatrix} T_{11}x + T_{12}Kx \\ T_{21}x + T_{22}Kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ K'y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Dann ist aber $y = T_{11}x + T_{12}Kx$ und es gilt

$$T_{21}x + T_{22}Kx = K'(T_{11}x + T_{12}Kx).$$

Da $x \in \operatorname{dom} K$ beliebig war, folgt (3.4).

Umgekehrt sei (3.4) erfüllt und sei $x \in \operatorname{dom} K$. Definiere $y := T_{11}x + T_{12}Kx$, dann ist $y \in \operatorname{dom} K'$ und es gilt (3.5). Also ist $T(x + Kx) = y + K'y \in \mathcal{M}'$.

❑

Beweis (von Satz 3.2.1). Sei K_0 der Winkeloperator von $\mathcal{M}_0$. Betrachte den Raum $\mathcal{B}(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$ versehen mit der schwachen Operatortopologie und sei

$$X := \left\{ K \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-) : \|K\| \leq 1, K|_{\operatorname{dom} K_0} = K_0 \right\},$$

das entspricht der Menge aller maximalen nichtnegativen Teilräume die $\mathcal{M}_0$ umfassen. Die Menge X ist klarerweise nichtleer und konvex. Weiters ist sie, da wir die schwache Operatortopologie betrachten, kompakt, vgl. Satz B.1.4.

Definiere eine Abbildung $\Phi : X \to \mathcal{P}(X)$ durch

$$\Phi(K) := \left\{ K' \in X : T_{21} + T_{22}K = K'(T_{11} + T_{12}K) \right\},$$

das entspricht der Menge aller maximalen nichtnegativen Teilräume $\mathcal{M}'$ die für den von K induzierten Raum $\mathcal{M}$, die Beziehung $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$ erfüllen und $\mathcal{M}_0$ umfassen.

Die Menge $\Phi(K)$ ist nichtleer: Denn es ist stets $T(\mathcal{M})$ ein nichtnegativer Teilraum, also existieren maximal nichtnegative Teilräume $\mathcal{M}'$ mit $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}'$. Weiters gilt $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ und $T(\mathcal{M}_0) \subseteq \mathcal{M}_0$, also muß jeder solche Teilraum $\mathcal{M}'$ bereits $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}_0$ erfüllen.

Die Menge $\Phi(K)$ ist offensichtlich konvex. Sei $(K'_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\Phi(K)$ welches in der schwachen Operatortopologie gegen K' konvergiert. Da X abgeschlossen ist, gilt $K' \in X$. Nun ist für jedes $A \in B(\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-)$

$$\lim_{i \in I}(K'_i A) = (\lim_{i \in I} K'_i) A,$$

also folgt dass K' auch der definierenden Gleichung von $\Phi(K)$ genügt. Also ist $\Phi(K)$ abgeschlossen, und, da X kompakt ist, damit ebenfalls kompakt.

Wir müssen noch zeigen dass gilt: Seien $(K_i)_{i\in I}, (K_i')_{i\in I}$ Netze in X mit $K_i \to K$, $K_i' \to K'$. Ist $K_i' \in \Phi(K_i)$, $i \in I$, so folgt $K' \in \phi(K)$. Zum Beweis dieser Aussage: Da X abgeschlossen ist, ist $K, K' \in X$. Weiters gilt für jedes $i \in I$

$$T_{21} + T_{22}K_i = K_i'T_{11} + K_i'T_{12}K_i \,.$$

Da T_{12} kompakt ist, folgt $T_{21} + T_{22}K = K'T_{11} + K'T_{12}K$ vgl. Proposition B.1.5 und Proposition B.1.6.

Wir können also den Fixpunktsatz Satz B.2.5 anwenden, und erhalten ein $K \in X$ mit $K \in \Phi(K)$. Das bedeutet für den von K induzierten maximal nichtnegativen Teilraum $\mathcal{M}$ gerade dass $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

❑

3.2.4 Bemerkung.

(*i*) Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für invariante maximal nichtpositive Teilräume: Gilt $[Tx, Tx] \leq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$ mit $[x, x] \leq 0$ und ist $T_{21} : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$ kompakt, folgt die Existenz maximal nichtpositiver Teilräume die unter T invariant sind.

(*ii*) Ist einer der beiden Räume $\mathcal{K}_+$ oder $\mathcal{K}_-$ endlichdimensional, so ist die Kompaktheitsvoraussetzung in Satz 3.2.1 stets erfüllt. Denn ist $\dim \mathcal{K}_- < \infty$, so hat T_{12} endlichdimensionales Bild, ist $\dim \mathcal{K}_+ < \infty$ dann ebenfalls.

3.2.5 Korollar. *Sei $U \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ unitär und sei U_{12} (bzw. U_{21}) kompakt. Weiters sei $\mathcal{M}_0$ ein nichtnegativer (bzw. nichtpositiver) Teilraum der unter U invariant ist. Dann existiert ein maximaler nichtnegativer (bzw. nichtpositiver) Teilraum von $\mathcal{K}$, der invariant unter U ist und $\mathcal{M}_0$ umfasst.*

Beweis. Ist $x \in \mathcal{K}$ mit $[x, x] \geq 0$, so folgt $[Ux, Ux] = [x, x] \geq 0$.

❑

Wir benützen nun die Cayley-Transformation, um dieses Ergebnis auf selbstadjungierte Operatoren zu übertragen. Dazu ist einige technische Arbeit nötig.

3.2.6 Korollar. *Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ selbstadjungiert und sei A_{12} (bzw. A_{21}) kompakt. Weiters sei $\mathcal{M}_0$ ein nichtnegativer (bzw. nichtpositiver) Teilraum der unter A invariant ist. Dann existiert ein maximaler nichtnegativer (bzw. nichtpositiver) Teilraum von $\mathcal{K}$, der invariant unter A ist und $\mathcal{M}_0$ umfasst.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \lambda > \|A\|$ festgehalten, wobei $\|A\|$ die Operatornorm von A bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ ist. Setze

$$U := (A - \overline{\lambda})(A - \lambda)^{-1} = I + (\lambda - \overline{\lambda})(A - \lambda)^{-1} \,.$$

Dann gilt

$$U^+ = (A^+ - \lambda)(A^+ - \overline{\lambda})^{-1} = (A - \lambda)(A - \overline{\lambda})^{-1} \,,$$

und daher ist $UU^+ = U^+U = I$. Weiters ist

$$U - I = (\lambda - \overline{\lambda})(A - \lambda)^{-1}$$

bijektiv, also $1 \in \rho(U)$.

Setze $\mathcal{M}_1 := \overline{\mathcal{M}_0}$. Dann ist $\mathcal{M}_1$ nichtnegativ und, wegen $A(\overline{\mathcal{M}_0}) \subseteq \overline{A\mathcal{M}_0}$, gilt ebenfalls $A(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$. Es folgt, dass auch $A^n(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$, $n \geq 0$. Nun ist $|\lambda| > \|A\|$, also

$$(A-\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n .$$

Da $\mathcal{M}_1$ abgeschlossen ist, schließen wir $(A-\lambda)^{-1}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$, und damit auch $U(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$.

Aus der Definition von U sieht man dass $U(A-\lambda) = A - \overline{\lambda}$. Setzt man hier die entsprechenden Matrixdarstellungen ein, so ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}-\overline{\lambda} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\overline{\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Vergleicht man die rechten oberen Ecken, so sieht man dass

$$U_{11}A_{12} + U_{12}(A_{22}-\lambda) = A_{12} .$$

Wegen $|\lambda| > \|A\| \geq \|A_{22}\|$, ist $\lambda \in \rho(A_{22})$, und es folgt

$$U_{12} = (I - U_{11})A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}. \tag{3.7}$$

Da A_{12} kompakt ist, ist also auch U_{12} kompakt.

Sei $\mathcal{M}$ ein maximaler nichtnegativer Teilraum mit $U(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_1$. Dann gilt auch $(U-I)(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich $(U-I)(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ gilt. Dazu genügt es zu zeigen dass $P_+(U-I)(\mathcal{M}) = \mathcal{K}_+$ ist, vgl. Korollar 1.3.5.

Es ist

$$\begin{aligned} P_+(U-I)x = (1,0)\begin{pmatrix} U_{11}-I & U_{12} \\ U_{21} & U_{22-I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_+x \\ P_-x \end{pmatrix} = \\ = (U_{11}-I)P_+x + U_{12}P_-x,\ x \in \mathcal{K} . \end{aligned}$$

Bezeichne K den Winkeloperator zu $\mathcal{M}$, dann gilt für $x \in \mathcal{M}$ stets $P_-x = KP_+x$, und es folgt

$$P_+(U-I)x = (U_{11} - I + U_{12}K)P_+x,\ x \in \mathcal{M} .$$

Da $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ ist, ist $P_+\mathcal{M} = \mathcal{K}_+$. Die gewünschte Gleichheit folgt also sicher dann wenn $0 \in \rho(U_{11} - I + U_{12}K)$. Nun gilt wegen (3.7)

$$U_{11} - I + U_{12}K = (U_{11}-I)\Big[I - A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}K\Big]. \tag{3.8}$$

Es ist $\operatorname{Im}\lambda > \|A\| > \|A_{12}\|$. Da A_{22} selbstadjungiert im Hilbertraum $\mathcal{K}_+$ ist, gilt $\|(A_{22}-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$. Insgesamt ist $\|A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}\| < 1$, und da auch $\|K\| \leq 1$ ist, ist der zweite Faktor in (3.8) invertierbar. Um die Invertierbarkeit des ersten Faktors zu zeigen, betrachten wir die linke obere Ecke in (3.6):

$$U_{11}(A_{11}-\lambda) + U_{12}A_{21} = A_{11} - \overline{\lambda} .$$

Verwendet man (3.7), so folgt

$$U_{11}(A_{11}-\lambda) + (U_{11}-I)A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21} = A_{11} - \overline{\lambda} ,$$

also

$$(U_{11}-I)\Big[(A_{11}-\lambda)-A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21}\Big]=\lambda-\overline{\lambda}\,,$$

$$(U_{11}-I)\Big[I-A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21}(A_{11}-\lambda)^{-1}\Big]=(\lambda-\overline{\lambda})(A_{11}-\lambda)^{-1}. \qquad (3.9)$$

Wegen $\operatorname{Im}\lambda > \|A\| \geq \|A_{12}\|, \|A_{21}\|$, und da A_{11} und A_{22} selbstadjungiert im Hilbertraum $\mathcal{K}_+$ bzw. $\mathcal{K}_-$ sind, also $\|(A_{11}-\lambda)^{-1}\|, \|(A_{22}-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$ erfüllen, folgt

$$\|A_{12}(A_{22}-\lambda)^{-1}A_{21}(A_{11}-\lambda)^{-1}\|<1\,.$$

Also ist der zweite Faktor auf der linken Seite von (3.9) invertierbar. Klarerweise ist $(A_{11}-\lambda)^{-1}$ invertierbar, und es folgt dass $(U_{11}-I)$ invertierbar ist. Insgesamt ist $U_{11}-I+U_{12}K$ invertierbar.

Formt man die Definition von U um, so erhält man

$$A=(\lambda U-\overline{\lambda})(U-I)^{-1}\,.$$

Nun gilt $(U-I)(\mathcal{M})=\mathcal{M}$, also folgt auch $(U-I)^{-1}(\mathcal{M})=\mathcal{M}$. Wegen $U(\mathcal{M})\subseteq \mathcal{M}$, erhalten wir $A(\mathcal{M})\subseteq\mathcal{M}$.

❑

Kapitel 4

Spektraltheorie definisierbarer Operatoren

4.1 Definisierbare Operatoren

4.1.1 Definition. Sei $\langle\mathcal{K},[.,.]\rangle$ ein Krein Raum. Ein selbstadjungierter Operator $A\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ heißt *definisierbar*, wenn es ein Polynom $p\in\mathbb{C}[z]$ gibt, sodaß

$$[p(A)x,x]\geq 0,\ \ x\in\mathcal{K}. \tag{4.1}$$

Jedes Polynom mit der Eigenschaft (4.1) heißt *definisierendes Polynom* für A.

4.1.2 Bemerkung. Jeder definisierbare Operator besitzt ein definisierendes Polynom mit reellen Koeffizienten. Denn, hat $p\in\mathbb{C}[z]$ die Eigenschaft (4.1), so gilt für $q(z):=p(z)+\overline{p}(z)$

$$[q(A)x,x]=[p(A)x,x]+[\overline{p}(A)x,x]=[p(A)x,x]+[x,p(A)x]\geq 0\,.$$

4.1.3 Beispiel. Ist $\langle\mathcal{P},[.,.]\rangle$ ein Pontryaginraum und $A\in\mathcal{B}(\mathcal{P})$ selbstadjungiert, so ist A definisierbar. Um dies einzusehen, wähle einen maximal nichtpositiven Teilraum $\mathcal{M}$ der invariant unter A ist, vgl. Korollar 3.2.6. Da $\mathcal{M}$ endlichdimensional ist, gibt es ein Polynom $q\in\mathbb{C}[z]$ mit $q(A|_{\mathcal{M}})=0$. Es folgt für $x\in\mathcal{P},y\in\mathcal{M}$,

$$[\overline{q}(A)x,y]=[x,q(A)y]=0\,,$$

d.h. $\overline{q}(A)x\in\mathcal{M}^\perp$. Nun ist nach Proposition 1.3.4 $\mathcal{M}^\perp$ nichtnegativ, und wir erhalten

$$0\leq[\overline{q}(A)x,\overline{q}(A)x]=[(q\overline{q})(A)x,x]\,,$$

d.h. $p(z):=q(z)\overline{q}(z)$ ist ein definisierendes Polynom für A.

4.1.4 Proposition. *Sei $\langle\mathcal{K},[.,.]\rangle$ ein Krein Raum, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ selbstadjungiert, und $p\in\mathbb{R}[z]$ ein definisierendes Polynom für A. Weiters bezeichne $N(p)$ die Menge der Nullstellen von p. Dann gilt:*

(*i*) $\sigma(A)\setminus\mathbb{R}\subseteq N(p)$;

(*ii*) *Es existiert ein definisierendes Polynom $\tilde{p}\in\mathbb{R}[z]$ mit $\tilde{p}|p$ sodass $\sigma(A)\setminus\mathbb{R}=N(\tilde{p})\setminus\mathbb{R}$, und sodass jede reelle Nullstelle von $\tilde{p}$ die nicht in $\sigma(A)$ liegt einfach ist.*

Zum Beweis dieser Proposition verwenden wir eine Aussage über nichtnegative Operatoren.

4.1.5 Lemma. *Sei A selbstadjungiert im Krein Raum $\mathcal{K}$, und gelte $[Ax, x] \geq 0$, $x \in \mathcal{K}$. Dann ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Angenommen $\sigma(A)$ enthält einen nichtreellen Punkt. Dann ist $\sup\{|\operatorname{Im}\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} > 0$ und wegen der Kompaktheit von $\sigma(A)$ existiert ein Punkt $\lambda_0 \in \sigma(A)$ mit $|\operatorname{Im}\lambda_0| = \max\{|\operatorname{Im}\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Dieser ist klarerweise ein Randpunkt von $\sigma(A)$. Wegen $\|(A-z)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(z,\sigma(A))}$, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathcal{K}$, mit $\|x_n\|_{\mathcal{J}} = 1$ und $(A-\lambda_0)x_n \to 0$.

Es folgt, dass

$$[Ax_n, x_n] - \lambda_0[x_n, x_n] = [(A-\lambda_0)x_n, x_n] \to 0\,.$$

Da $[Ax_n, x_n], [x_n, x_n] \in \mathbb{R}$, und $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$, folgt daraus dass $[x_n, x_n] \to 0$. Damit erhalten wir auch $[Ax_n, x_n] \to 0$.

Betrachte nun das positive semidefinite Skalarprodukt $[x, y]_A := [Ax, y]$. Dann gilt

$$\|Ax_n\|_{\mathcal{J}}^2 = [Ax_n, JAx_n] = [x_n, JAx_n]_A \leq [x_n, x_n]_A^{\frac{1}{2}} \cdot [JAx_n, JAx_n]_A^{\frac{1}{2}} =$$

$$= [Ax_n, x_n]^{\frac{1}{2}} \cdot [AJAx_n, JAx_n]^{\frac{1}{2}}$$

Der erste Faktor konvergiert gegen 0, der zweite ist beschränkt, also haben wir $Ax_n \to 0$. Wegen $(A-\lambda_0)x_n \to 0$ und $\lambda_0 \neq 0$, folgt nun $x_n \to 0$, ein Widerspruch.

❑

Beweis (von Proposition 4.1.4). Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und sei $p(z_0) \neq 0$. Wähle $\lambda_0 \in \rho(A)$ sodaß $p(z_0)(z_0-\lambda_0)^{-n}(z_0-\overline{\lambda_0})^{-n}$ nichtreell ist. Dies ist möglich, denn $\arg[(z_0-\lambda_0)(z_0-\overline{\lambda_0})]$ ist stetig in λ_0 und nicht konstant.

Setze $r(z) := p(z)(z-\lambda_0)^{-n}(z-\overline{\lambda_0})^{-n}$, dann gilt

$$[r(A)x, x] = [p(A)(A-\lambda_0)^{-n}x, (A-\lambda_0)^{-n}x] \geq 0\,.$$

Nach Lemma 4.1.5, angewandt auf den selbstadjungierten Operator $r(A)$, folgt $\sigma(r(A)) \subseteq \mathbb{R}$. Nach dem Spektralabbildungssatz Proposition B.3.2 haben wir $r(\sigma(A)) \subseteq \sigma(r(A))$. Da $r(z_0) \notin \mathbb{R}$ ist, kann also $z_0 \notin \sigma(A)$ sein.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ die Nullstellen von p die nicht in $\sigma(A)$ liegen. Bezeichne mit α_i die Vielfachheit von z_i falls $z_i \in \mathbb{C}^+$ und die größe ganze Zahl kleiner oder gleich der halben Vielfachheit von z_i falls $z_i \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$\tilde{p}(z) := p(z)\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)^{-\alpha_i}(z-\overline{z_i})^{-\alpha_i}\,,$$

so ist $\tilde{p} \in \mathbb{R}[z]$ und es gilt

$$[\tilde{p}(A)x, x] = \Big[p(A) \cdot \prod_{i=1}^{n}(A-z_i)^{-\alpha_i}x, \prod_{i=1}^{n}(A-z_i)^{-\alpha_i}x\Big] \geq 0\,.$$

❑

Wir wollen anmerken, dass es Nullstellen des definisierenden Polynomes geben kann, die man nicht wegdividieren kann. Dies sieht man am Beispiel einer Fundamentalsymmetrie J. Denn $0 \in \rho(J)$ und $[Jx, x] \geq 0$, also ist $p(x) = x$ ein definisierendes Polynom.

4.2 Funktionalkalkül für Operatoren mit reellem Spektrum

Ist A ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so hat man einen Funktionalkalkül für beschränkte Borel-meßbare Funktionen auf $\sigma(A)$, d.h. einen *-Homomorphismus

$$\Phi_A : B(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\,.$$

Dieser ist stetig, wenn man $B(\sigma(A))$ mit der Supremumsnorm und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit der Operatornorm versieht. Mit Hilfe dieses Funktionalkalküls ist es leicht ein Spektralmaß für A zu erhalten.

Ein ähnliches Ergebnis kann man für definisierbare selbstadjungierte Operatoren in einem Krein Raum zeigen, die Situation ist dabei jedoch etwas komplizierter: Die Nullstellen der definisierenden Polynome spielen eine besondere Rolle; die Funktionen auf die der Funktionalkalkül angewendet werden kann, müssen in einer Umgebung dieser Nullstellen hinreichend glatt sein.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit definisierbaren selbstadjungierten Operatoren mit reellem Spektrum, das nichtreelle Spektrum ist dann einfach hinzuzufügen. Sei also in diesem Abschnitt stets A ein definisierbarer selbstadjungierter Operator in einem Krein Raum $\langle \mathcal{K}, [.,.] \rangle$ mit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Weiters sei $p \in \mathbb{R}[z]$ ein definisierendes Polynom welches nur reelle Nullstellen hat.

Ein Raum von Funktionen.

Wir wollen als erstes diejenige Funktionenmenge studieren, für die wir einen Funktionalkalkül definieren werden können.

Bezeichne im folgenden stets $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die 1-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$. Wähle $\lambda_0 \in \mathbb{C}^+$ fest, und setze

$$\hat{p}(t) := p(t) \cdot (t - \lambda_0)^{-m} (t - \overline{\lambda_0})^{-m}$$

mit $m := [\frac{\deg p + 1}{2}]$. Dann ist

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} \hat{p}(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & , \deg p \text{ gerade} \\ \lim_{t\to\infty} t\hat{p}(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & , \deg p \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sei $N(\hat{p})$ die Menge aller Nullstellen von $\hat{p}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, also

$$N(\hat{p}) = \begin{cases} N(p) & , \deg p \text{ gerade} \\ N(p) \cup \{\infty\} & , \deg p \text{ ungerade} \end{cases}$$

Schliesslich sei $\gamma(\alpha)$ die Vielfachheit von $\alpha \in N(p)$ als Nullstelle von p.

4.2.1 Definition. Wir betrachten die folgenden Räume von Funktionen:

(*i*) Sei $B(\overline{\mathbb{R}})$ die Menge aller beschränkten Borel-meßbaren Funktionen von $\overline{\mathbb{R}}$ nach $\mathbb{C}$. Weiters sei $B(\overline{\mathbb{R}})_c$ die Menge aller Funktionen in $B(\overline{\mathbb{R}})$ die in jedem Punkt von $N(\hat{p})$ stetig sind. Schliesslich setze

$$\mathcal{F} := \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}}) + \hat{p} \cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c \,.$$

(*ii*) Bezeichne $\mathcal{E}$ die Menge aller rationalen Funktion $s \in \mathbb{C}(z)$ der Gestalt

$$s(z) = \frac{a(z)}{(z-\lambda_0)^{\deg p}}$$

mit einem Polynom $a \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\deg a < 2m$.

(*iii*) Seien $U_\alpha \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \in N(\hat{p})$, offene und paarweise disjunkte Mengen mit $\alpha \in U_\alpha$. Sei U_α für $\alpha \neq \infty$ enthalten in $\mathbb{R}$ und beschränkt, und sei $0 \notin U_\alpha$ für $\alpha = \infty$.

Bezeichne mit $\mathcal{F}_{(U_\alpha)}$ die Menge aller Funktionen $f \in B(\overline{\mathbb{R}})$ mit

$$\begin{cases} f|_{U_\alpha} \in C^{\gamma(\alpha)}(U_\alpha) & , \ \alpha \neq \infty \\ f(\frac{1}{t})|_{U_\infty^{-1}} \in C^1(U_\infty^{-1}) & , \ \alpha = \infty \end{cases}$$

4.2.2 Definition. Wir können auf den oben eingeführten Räumen Normen definieren.

(*i*) Sei $B(\overline{\mathbb{R}})$ mit der Supremumsnorm versehen. Die Räume $\mathcal{E}$ und $B(\overline{\mathbb{R}})_c$ seien als Teilräume von $B(\overline{\mathbb{R}})$ ebenfalls mit $\|.\|_\infty$ versehen.

(*ii*) Für $f \in \mathcal{F}_{(U_\alpha)}$ definiere

$$\begin{aligned} \|f\|_{(U_\alpha)} := \max\Bigg(& \Big\{ \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} |f(x)| \Big\} \cup \\ & \cup \Big\{ \sup_{x\in U_\alpha} |f^{(l)}(x)| : \alpha \in N(p), l = 1, \ldots, \gamma(\alpha) \Big\} \\ & \cup \Big\{ \sup_{x\in U_\infty\setminus\{\infty\}} |x^2 f'(x)| \Big\} \Bigg) \end{aligned}$$

Wir fassen die wesentlichen Eigenschaften dieser Begriffe in der folgenden Proposition zusammen.

4.2.3 Proposition. *Es gilt:*

(*i*) *Für jede Wahl von Umgebungen U_α, $\alpha \in N(\hat{p})$, ist $\mathcal{F}_{(U_\alpha)} \subseteq \mathcal{E} + \hat{p} \cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c$.*

(*ii*) *$\mathcal{F} = \mathcal{E} \dot{+} \hat{p} \cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c$.*

(*iii*) *Sei $\Delta \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-Menge. Dann gilt $\chi_\Delta \in \mathcal{F}$ genau dann wenn $\partial\Delta \cap N(\hat{p}) = \emptyset$.*

(*iv*) *Sei $\lambda : \mathcal{F} \to \mathcal{E} \times B(\overline{\mathbb{R}})_c$ die Bijektion sodass $\lambda(f) = (r, q)$ genau dann wenn $f = r + \hat{p}q$. Dann ist, für jede Wahl von Umgebungen U_α, die Einschränkung $\lambda|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ stetig.*

Der Beweis beruht auf der folgenden Feststellung, die man unmittelbar aus dem Taylorschen Lehrsatz erhält.

4.2.4 Lemma. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha \in I$, und sei $\gamma \in \mathbb{N}$. Ist $g \in C^\gamma(I)$, so existiert ein Polynom b mit Grad $\deg b < \gamma$ und eine Funktion $q \in C(I)$ mit*

$$g(t) = b(t) + (t-\alpha)^\gamma q(t),\ \ t \in I\,.$$

Dabei ist

$$\|q\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma!}\|g^{(\gamma)}\|_\infty\,. \tag{4.2}$$

Beweis. Setze $b(t) := \sum_{l=0}^{\gamma-1} \frac{g^{(l)}(\alpha)}{\gamma!}(t-\alpha)^l$, und

$$q(t) := \big(g(t) - b(t)\big)(t-\alpha)^{-\gamma},\ \ t \in I \setminus \{\alpha\}\,.$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz gibt es zu jedem $t \in I$ eine Zwischenstelle ζ sodass $g(t) - b(t) = \frac{g^{(\gamma)}(\zeta)}{\gamma!}(t-\alpha)^\gamma$. Läßt man hier t gegen α streben, so sieht man dass $\lim_{t\to\alpha} q(t) = \frac{g^{(\gamma)}(\alpha)}{\gamma!}$. Also hat q eine stetige Fortsetzung auf ganz I, und mit dieser hat man die gewünschte Darstellung von g.

Die Abschätzung (4.2) ist aus der Konstruktion offensichtlich.

❑

Beweis (von Proposition 4.2.3). Seien Mengen U_α mit den Eigenschaften aus Definition 4.2.1, sowie $f \in \mathcal{F}_{(U_\alpha)}$ gegeben. Setze

$$g(t) := \begin{cases} f(t)(t-\lambda_0)^{2m} & ,\ \deg p = 2m \\ (f(t) - f(\infty))(t-\lambda_0)^{2m-1} & ,\ \deg p = 2m-1 \end{cases}$$

und wähle $b \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg b < \deg p$ sodass

$$b^{(l)}(\alpha) = g^{(l)}(\alpha),\ \ \alpha \in N(p), l = 0, \dots, \gamma(\alpha) - 1\,.$$

Weiters setze

$$q(t) := \begin{cases} \frac{g(t)-b(t)}{p(t)} \cdot \frac{(t-\overline{\lambda_0})^m}{(t-\lambda_0)^m} & ,\ \deg p = 2m \\ \frac{(g(t)-b(t))(t-\lambda_0)}{p(t)} \cdot \frac{(t-\overline{\lambda_0})^m}{(t-\lambda_0)^m} & ,\ \deg p = 2m-1 \end{cases}$$

und

$$a(t) := \begin{cases} b(t) & ,\ \deg p = 2m \\ f(\infty)(t-\lambda_0)^{2m-1} + b(t) & ,\ \deg p = 2m-1 \end{cases}$$

Dann gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{a(t)}{(t-\lambda_0)^{\deg p}} + \hat{p}(t)q(t)\,. \tag{4.3}$$

Offenbar ist $a(t)(t-\lambda_0)^{-\deg p} \in \mathcal{E}$. Wir müssen zeigen, dass $q \in B(\overline{\mathbb{R}})_c$.

Für $\alpha \in N(p)$ wähle offene Intervalle I_α mit $\alpha \in I_\alpha \subseteq \overline{I_\alpha} \subseteq U_\alpha$. Wir haben

$$q(t) = \frac{g(t)-b(t)}{(t-\alpha)^{\gamma(\alpha)}} \cdot \frac{1}{p(t)(t-\alpha)^{-\gamma(\alpha)}} \cdot \Big(\frac{t-\overline{\lambda_0}}{t-\lambda_0}\Big)^m \cdot \begin{cases} 1 & ,\ \deg q = 2m \\ (t-\lambda_0) & ,\ \deg q = 2m-1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Nach unserer Wahl von b gilt $(g-b)^{(l)}(\alpha)=0$, $l=0,\dots,\gamma(\alpha)-1$. Wegen Lemma 4.2.4 ist daher die Funktion $(g(t)-b(t))(t-\alpha)^{-\gamma(\alpha)}$ stetig in I_α und erfüllt

$$\Big\|\frac{g(t)-b(t)}{(t-\alpha)^{\gamma(\alpha)}}\Big\|_{\infty,I_\alpha}\le\frac{1}{\gamma(\alpha)!}\|g^{(\gamma(\alpha))}-b^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha}$$

Die Funktion $p(t)(t-\alpha)^{-\gamma(\alpha)}$ ist stetig auf $\overline{I_\alpha}$ und hat dort keine Nullstelle, also ist

$$\delta_\alpha:=\inf_{t\in I_\alpha}\big|p(t)(t-\alpha)^{-\gamma(\alpha)}\big|>0\,.$$

Weiters ist der zweite Faktor in (4.4) ebenfalls stetig. Insgesamt sehen wir, dass q in I_α stetig und beschränkt ist. Tatsächlich gilt, mit $C:=\sup_{t\in\mathbb{R}}|\frac{t-\overline{\lambda_0}}{t-\lambda_0}|^m$ und $c_\alpha:=\max\{1,\sup_{t\in I_\alpha}|t-\lambda_0|\}$, dass

$$\|q\|_{\infty,I_\alpha}\le\frac{1}{\gamma(\alpha)!}\big(\|g^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha}+\|b^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha}\big)\cdot\delta_\alpha^{-1}\cdot C\cdot c_\alpha\,.$$

Sei nun angenommen, dass $\deg p=2m-1$, d.h. $\infty\in N(\hat p)$. Wähle ein offenes Intervall I_∞ mit $\infty\in I_\infty\subseteq\overline{I_\infty}\subseteq U_\infty$, und betrachte die Funktion

$$h(u):=f\big(\frac{1}{u}\big),\ u\in I_\infty^{-1}\,.$$

Dann ist $h\in C^1(I_\infty^{-1})$ und es gilt $h(0)=f(\infty)$. Weiters ist

$$h'(u)=-\frac{1}{u^2}f'\big(\frac{1}{u}\big),\ u\in I_\infty^{-1}\setminus\{0\}\,.$$

Wir wenden Lemma 4.2.4 an, und erhalten dass die Funktion $(h(u)-f(\infty))u^{-1}$ auf I_∞^{-1} stetig ist, und dass

$$\Big\|\frac{h(u)-f(\infty)}{u}\Big\|_{\infty,I_\infty^{-1}}\le\|h'\|_{\infty,I_\infty^{-1}}=\sup_{u\in I_\infty^{-1}\setminus\{0\}}\Big|\frac{1}{u^2}f'\big(\frac{1}{u}\big)\Big|\,.$$

Beachte hier, dass h' stetig auf ganz I_∞^{-1} ist. Wir haben also gezeigt, dass die Funktion

$$\big(f(t)-f(\infty)\big)\cdot t$$

auf I_∞ stetig ist und dort durch $\sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}}|t^2f'(t)|$ beschränkt. Nun gilt

$$q(t)=\Big(\big(f(t)-f(\infty)\big)(t-\lambda_0)-\frac{b(t)}{(t-\lambda_0)^{2m-2}}\Big)\cdot\frac{(t-\lambda_0)^{2m-1}}{p(t)}\cdot\Big(\frac{t-\overline{\lambda_0}}{t-\lambda_0}\Big)^m$$

und wir sehen dass q auf I_∞ stetig ist und dass, mit $\delta_\infty:=\inf_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}}|p(t)(t-\lambda_0)^{-(2m-1)}|$,

$$\|q\|_{\infty,I_\infty}\le\Big(\sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}}|t^2f'(t)|+2|\lambda_0|\|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}}+\sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}}\Big|\frac{b(t)}{(t-\lambda_0)^{2m-2}}\Big|\Big)\cdot\delta_\infty^{-1}\cdot C\,.$$

Betrachte schließlich $D:=\bigcap_{\alpha\in N(\hat p)}I_\alpha^c$. Wir erhalten aus (4.3), dass

$$q(t)=\Big(f(t)-\frac{a(t)}{(t-\lambda_0)^{\deg p}}\Big)\cdot\frac{1}{\hat p(t)},\ t\in D\,.\tag{4.5}$$

Die Funktion $\hat{p}$ ist in $\overline{\mathbb{R}}$ stetig und auf D stets ungleich Null. Also ist $\delta := \inf_{t\in D} |\hat{p}(t)| > 0$, und $\hat{p}^{-1}|_D$ ist stetig. Da der erste Faktor in (4.5) zu $B(\overline{\mathbb{R}})$ gehört, folgt dass q auf D beschränkt und messbar ist. Tatsächlich haben wir

$$\|q\|_{\infty,D} \leq \Big(\|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}} + \Big\|\frac{a(t)}{(t-\lambda_0)^{\deg p}}\Big\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}}\Big) \cdot \delta^{-1} .$$

Wie man ebenfalls aus der Darstellung (4.5) sieht, ist, wegen $\overline{I_\alpha} \subseteq U_\alpha$, die Funktion q in den Randpunkten von I_α stetig. Insgesamt haben wir gezeigt, dass q auf ganz $\overline{\mathbb{R}}$ messbar und beschränkt ist, und dass q in einer Umgebung jedes der Punkte $\alpha \in N(\hat{p})$ stetig ist. Damit ist die Behauptung (i) bewiesen.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Um $\mathcal{F} = \mathcal{E} + \hat{p}\cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c$ einzusehen, genügt es zu zeigen dass $\mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{E} + \hat{p}\cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c$. Nun ist für jede Wahl von Umgebungen U_α, $\alpha \in N(\hat{p})$, und jede Funktion $s \in \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}})$ sicher $s \in \mathcal{F}_{(U_\alpha)}$.

Sei nun $s \in \mathcal{E} \cap \hat{p}\cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c$, und schreibe $s(t) = a(t)(t-\lambda_0)^{\deg p} = \hat{p}(t)q(t)$ mit einem Polynom a, $\deg a < 2m$, und einer Funktion $q \in B(\overline{\mathbb{R}})_c$. Im Fall $\deg p = 2m-1$, ist $\hat{p}(\infty) = 0$, und daher muß $\deg a < \deg p$ sein. Ist $\deg p = 2m$, so gilt dieses sowieso. Nun haben wir

$$\frac{a(t)}{p(t)} = \frac{q(t)}{(t-\overline{\lambda_0})^m (t-\lambda_0)^m} \in B(\overline{\mathbb{R}}) ,$$

und es folgt, dass a an jeder Stelle $\alpha \in N(p)$ eine Nullstelle der Ordnung mindestens $\gamma(\alpha)$ hat. Wegen $\deg a < \deg p = \sum_{\alpha\in N(p)} \gamma(\alpha)$ folgt $a = 0$. Dies zeigt, dass $\mathcal{E} \cap \hat{p}\cdot B(\overline{\mathbb{R}})_c = \{0\}$.

Für den Beweis von (iii) sei eine Borelmenge $\Delta \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Sei $\chi_\Delta \in \mathcal{E} + \hat{p}B(\overline{\mathbb{R}})_c$ und schreibe $\chi_\Delta = s + \hat{p}q$. Dann ist

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1-s(t)}{\hat{p}(t)} & , \ t \in \Delta \setminus N(\hat{p}) \\ -\frac{s(l)}{\hat{p}(t)} & , \ t \in \Delta^c \setminus N(\hat{p}) \end{cases}$$

Da für $\alpha \in N(\hat{p})$ nicht beide Funktionen $\frac{1-s(t)}{\hat{p}(t)}$ und $\frac{s(t)}{\hat{p}(t)}$ für $t \to \alpha$ beschränkt bleiben können, folgt dass $\partial\Delta \cap N(\hat{p}) = \emptyset$ ist. Ist umgekehrt $\partial\Delta \cap N(\hat{p}) = \emptyset$, so gibt es Mengen U_α, $\alpha \in N(\hat{p})$, mit $\chi_\Delta \in \mathcal{F}_{(U_\alpha)}$, wähle nämlich U_α so dass χ_Δ auf U_α konstant ist.

Wir kommen schließlich zum Beweis von (iv). Dazu müssen wir eigentlich nur noch die Abschätzungen die im Beweis von (i) erhalten wurden zusammensetzen. Zur Erinnerung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|q\|_{\infty,I_\alpha} &\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)!}\big(\|g^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha} + \|b^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha}\big) \cdot \delta_\alpha^{-1} \cdot C \cdot c_\alpha , \\
\|q\|_{\infty,I_\infty} &\leq \Big(\sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}} |t^2 f'(t)| + 2|\lambda_0|\|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}} + \\
&\quad + \sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}} \Big|\frac{b(t)}{(t-\lambda_0)^{2m-2}}\Big|\Big) \cdot \delta_\infty^{-1} \cdot C , \\
\|q\|_{\infty,D} &\leq \Big(\|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}} + \Big\|\frac{a(t)}{(t-\lambda_0)^{\deg p}}\Big\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}}\Big) \cdot \delta^{-1} ,
\end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten $\delta_\alpha, \delta_\infty, \delta, c_\alpha, C$. Wir schreiben im folgenden $F \lesssim G$, wenn es eine Konstante $\mu > 0$ gibt mit $F \leq \mu G$ (diese Schreibweise ist sehr praktisch, man muss sie nur immer richtig interpretieren).

Betrachte auf der Menge der Polynome h vom Grad $\deg h < \deg p$ die beiden Normen $\max\{|h^{(l)}(\alpha)| : \alpha \in N(p), l = 0, \dots, \gamma(\alpha) - 1\}$ und $\max\{|h_j| : h(t) = \sum_{j=0}^{\deg p-1} h_j t^j\}$. Da der Raum endlichdimensional ist, sind diese äquivalent. Es folgt

$$\|b^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha} \lesssim \max\left\{|b^{(l)}(\alpha)| : \substack{\alpha\in N(p),\\ l=0,\dots,\gamma(\alpha)-1}\right\} \lesssim \|g^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha} .$$

Da alle Ableitungen von $(t-\lambda_0)^{2m}$ bzw. $(t-\lambda_0)^{2m-1}$ auf I_α beschränkt sind, haben wir $\|g^{(\gamma(\alpha))}\|_{\infty,I_\alpha} \lesssim \|f\|_{(U_\alpha)}$. Insgesamt erhalten wir also $\|q\|_{\infty,I_\alpha} \lesssim \|f\|_{(U_\alpha)}$ für jedes $\alpha \in N(p)$. Wegen

$$\sup_{t\in I_\infty\setminus\{\infty\}} \Big|\frac{b(t)}{(t-\lambda_0)^{2m-2}}\Big| \lesssim \max\{|b_j| : b(t) = \sum_{j=0}^{\deg p-1} b_j t^j\}$$

erhalten auch $\|q\|_{\infty,I_\infty} \lesssim \|f\|_{(U_\infty)}$. Weiters ist

$$\Big\|\frac{a(t)}{(t-\lambda_0)^{\deg p}}\Big\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}} \lesssim \max\Big(\{|b_j| : b(t) = \sum_{j=0}^{\deg p-1} b_j t^j\} \cup \{f(\infty)\}\Big)$$

und es folgt $\|q\|_{\infty,D} \lesssim \|f\|_{(U_\infty)}$ sowie $\|a(t)(t-\lambda_0)^{-\deg p}\|_{\infty,\overline{\mathbb{R}}} \lesssim \|f\|_{(U_\infty)}$.

❑

Der Funktionalkalkül.

Der lineare Raum $\mathcal{F}$ wird mit der punktweisen Multiplikation und Konjugation zu einer *-Algebra. Denn es gilt:

$$(s_1 + \hat{p}q_1)(s_2 + \hat{p}q_2) = s_1 s_2 + \hat{p}(q_1 s_2 + s_1 q_2 + \hat{p}q_1 q_2) .$$

Klarerweise ist $q_1 s_2 + s_1 q_2 + \hat{p}q_1 q_2 \in B(\overline{\mathbb{R}})_c$, also gehört der zweite Summand zu $\mathcal{F}$. Die Funktion $s_1 s_2$ ist rational und liegt in $B(\overline{\mathbb{R}})$, gehört daher ebenfalls zu $\mathcal{F}$. Um die Abgeschlossenheit bezüglich Konjugation zu sehen, genügt es zu bemerken, dass

$$\overline{s(t) + \hat{p}(t)q(t)} = s^{\#}(t) + \hat{p}(t)\overline{q(t)} .$$

4.2.5 Satz. *Sei $\langle\mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Krein-Raum, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ selbstadjungiert und definisierbar mit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Dann existiert ein *-Homomorphismus $\Phi_{\rm bm} : \mathcal{F} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, sodass gilt:*

(i) Für jede Funktion $f \in \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}})$ gilt $\Phi_{\rm bm}(f) = \Phi_{\rm rat}(f)$.

(ii) Für jede Wahl von Umgebungen U_α, $\alpha \in N(\hat{p})$, ist $\Phi_{\rm bm}|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ stetig.

(iii) Ist F holomorph in einer (in S^2) offenen Umgebung U von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$, und $f \in \mathcal{F}$ mit $f|_{U\cap\mathbb{R}} = F|_{U\cap\mathbb{R}}$, so ist $\Phi_{\rm bm}(f) = \Phi_{\rm RD}(F)$.

(iv) Sind $f, g \in \mathcal{F}$ und stimmen f und g auf einer (in $\overline{\mathbb{R}}$) offenen Umgebung von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$ überein, so ist $\Phi_{\rm bm}(f) = \Phi_{\rm bm}(g)$.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in fünf Schritten:

1. Fortsetzung von
$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}}) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{K}) \\ q & \mapsto & \Phi_{\text{rat}}(\hat{p}q) \end{cases}$$
zu einer stetigen Abbildung $\Psi_c : C(\overline{\mathbb{R}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

2. Fortsetzung von Ψ_c zu einer stetigen Abbildung $\Psi_{\text{bm}} : B(\overline{\mathbb{R}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

3. Definition von Φ_{bm} und Nachweis von (i) sowie der *-Homomorphie.

4. Beweis von (ii).

5. Beweis von (iii) und (iv)

Im Laufe des Beweises werden wir die folgenden Lemmata verwenden.

4.2.6 Lemma. *Seien $A_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $j \in I$, und gelte*
$$\sup_{j\in I} |[A_j x, x]| < \infty, \ x \in \mathcal{K}\,.$$
Dann ist $\sup_{j\in I} \|A_j\| < \infty$.

Beweis. Es gilt (Parallelogrammregel)
$$4[A_j x, y] = [A_j(x+y),(x+y)] - [A_j(x-y),(x-y)] +$$
$$+ i[A_j(x+iy),(x+iy)] - i[A_j(x-iy),(x-iy)]\,,$$
also gilt für alle $x, y \in \mathcal{K}$
$$\sup_{j\in I} |[A_j x, y]| < \infty\,.$$
Wir sehen, dass die Familie $\{(., JA_j x)_{\mathcal{J}} : j \in J\} \subseteq \langle \mathcal{K}, (.,.)_{\mathcal{J}}\rangle'$ punktweise beschränkt ist. Es folgt $\sup_{j\in J} \|JA_j x\| < \infty$, $x \in \mathcal{K}$, und damit $\sup_{j\in J} \|JA_j\| < \infty$. Nun ist $\|J^{-1}\| = 1$, also auch $\sup_{j\in J} \|A_j\| < \infty$.

❑

4.2.7 Lemma. *Sei $r \in \mathbb{C}(z)$ und gelte $r(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert $s \in \mathbb{C}(z)$, sodass $r = ss^{\#}$.*

Beweis. Schreibe $r = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden Polynomen p, q der Gestalt
$$p(z) = a\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)^{\gamma_i}, \ q(t) = \prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j)^{\delta_i}$$
Dann ist β_j stets nichtreell und daher $q(x)q^{\#}(x) = |q(x)|^2 > 0$. Es folgt, dass auch
$$a\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\gamma_i}\prod_{i=1}^{m}(x-\overline{\beta}_j)^{\delta_j} = p(x)q^{\#}(x) = r(x)q(x)q^{\#}(x) \geq 0\,.$$

Inbesondere ist $pq^\# = (pq^\#)^\# = p^\# q$, also

$$a\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)^{\gamma_i}\prod_{j=1}^{m}(x-\overline{\beta}_j)^{\delta_i} = \overline{a}\prod_{i=1}^{n}(x-\overline{\alpha_i})^{\gamma_i}\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)^{\delta_j}$$

Es folgt, dass die Mengen $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ und $\{\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha_n}\}$ sowie $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ und $\{\overline{\beta}_1,\ldots,\overline{\beta}_m\}$ inklusive der jeweiligen Vielfachheiten übereinstimmen, und dass $a\in\mathbb{R}$ ist.

Wir können also schreiben

$$p(x) = a\prod_{\alpha_i\in\mathbb{R}}(x-\alpha_i)^{\gamma_i}\prod_{\operatorname{Im}\alpha_i>0}[(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i})]^{\gamma_i}\,,$$

$$q(x) = \prod_{\operatorname{Im}\beta_j>0}[(x-\beta_j)(x-\overline{\beta_j})]^{\delta_j}\,.$$

Daraus sieht man, dass $q(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, und daher auch $p(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Also folgt

$$a\prod_{\alpha_i\in\mathbb{R}}(x-\alpha_i)^{\gamma_i} = p(x)\prod_{\operatorname{Im}\alpha_i>0}[(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i})]^{-\gamma_i}\geq 0,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Daher muss $a>0$ sein, und alle γ_i zu reellen Nullstellen α_i gerade. Setzt man

$$s(z) := \frac{\sqrt{a}\ \prod_{\alpha_i\in\mathbb{R}}(z-\alpha_i)^{\frac{\gamma_i}{2}}\prod_{\operatorname{Im}\alpha_i>0}(z-\alpha_i)^{\gamma_i}}{\prod_{\operatorname{Im}\beta_j>0}(z-\beta_j)^{\delta_j}}\,,$$

so ist $r = ss^\#$.

❑

4.2.8 Lemma. *Sei D ein linearer Teilraum von $C(\overline{\mathbb{R}})$ mit $1\in D$, der bzgl. $\#$ abgeschlossen ist, und sei $\varphi: D\to\mathbb{C}$ linear. Gilt*

$$\varphi(f)\geq 0\ \ \textit{für alle } f\geq 0\,,$$

so ist φ beschränkt.

Beweis. Wir betrachten zuerst reellwertige Funktionen $f\in D$. Ist $f(\overline{\mathbb{R}})\subseteq\mathbb{R}$ und $\|f\|_\infty\leq 1$, dann ist $2-f\geq 0$, und daher auch $\varphi(2)-\varphi(f)\geq 0$ also $\varphi(f)\leq\varphi(2)$. Da mit f auch $-f$ reellwertig ist und $\|-f\|_\infty = \|f\|_\infty\leq 1$ gilt, erhalten wir genauso $-\varphi(f)=\varphi(-f)\leq\varphi(2)$. Insgesamt gilt also $|\varphi(f)|\leq\varphi(2)$.

Sei nun $f\in D$ beliebig. Schreibe

$$f = \Big(\frac{f+f^\#}{2}\Big)+\Big(\frac{f-f^\#}{2}\Big)\,,$$

dann sind $\frac{1}{2}(f+f^\#)$ und $\frac{1}{2}(f-f^\#)$ reellwertige Elemente von D, und es gilt $\|\frac{1}{2}(f+f^\#)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$, $\|\frac{1}{2}(f-f^\#)]\|_\infty\leq\|f\|_\infty$. Wir erhalten

$$|\varphi(f)|\leq\Big|\varphi(\frac{f+f^\#}{2})\Big|+\Big|\varphi(\frac{f+f^\#}{2})\Big|\leq 2\varphi(2)\|f\|_\infty\,.$$

❑

4.2.9 Lemma. *Sei $[.,.]_1$ eine beschränkte Sesquilinearform auf $\mathcal{K}$, d.h. eine Abbildung $[.,.] : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ die linear in der ersten, konjugiert-linear in der zweiten Komponente ist, und einer Abschätzung der Gestalt $|[x,y]_1| \leq C\|x\|\cdot\|y\|$ genügt. Dann existiert ein eindeutiger Operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $\|B\| \leq C$ und*

$$[x,y]_1 = [Bx,y], \ x,y \in \mathcal{K}.$$

Beweis. Betrachte $[.,.]_1$ als eine beschränkte Sesquilinearform am Hilbertraum $\langle \mathcal{K}, (.,.)_\mathcal{J}\rangle$. Dann existiert $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit

$$[x,y]_1 = (\tilde{B}x,y)_\mathcal{J}, \ x,y \in \mathcal{K},$$

und es ist $\|\tilde{B}\| \leq C$. Setzt man $B := J\tilde{B}$, so ist ebenfalls $\|B\| \leq C$ und es gilt

$$[Bx,y] = (JBx,y)_\mathcal{J} = (\tilde{B}x,y)_\mathcal{J} = [x,y]_1, \ x,y \in \mathcal{K}.$$

❑

Beweis (von Satz 4.2.5, 1.Schritt). Für festgehaltenes $x \in \mathcal{K}$ betrachte das Funktional

$$\varphi_x : \begin{cases} \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}}) & \to \quad \mathbb{C} \\ \qquad\qquad q & \mapsto \quad [\Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q)x,x] \end{cases}$$

Ist $q \geq 0$, so gibt es nach Lemma 4.2.7 ein $s \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ mit $q = ss^\#$. Es folgt

$$\varphi_x(q) = [\Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}ss^\#)x,x] = [\hat{p}(A)\,\Phi_{\mathrm{rat}}(s)x, \Phi_{\mathrm{rat}}(s)x] \geq 0\,.$$

Nach Lemma 4.2.8 ist φ_x beschränkt, d.h. $\sup_{\|q\|_\infty \leq 1} |\varphi_x(q)| < \infty$.

Nach Lemma 4.2.6 ist $\sup_{\|q\|_\infty \leq 1} \|\Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q)\| < \infty$, d.h. die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}}) & \to \quad \mathcal{B}(\mathcal{K}) \\ \qquad\qquad q & \mapsto \quad \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q) \end{cases}$$

ist beschränkt. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $\mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ dicht in $C(\overline{\mathbb{R}})$. Daher existiert eine stetige Fortsetzung Ψ_c von Ψ auf ganz $C(\overline{\mathbb{R}})$.

Wir bemerken noch, dass Ψ_c mit der Konjugation verträglich ist: Wegen $\hat{p}^\# = \hat{p}$, gilt für jedes $q \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$

$$\Psi(q^\#) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q^\#) = \Phi_{\mathrm{rat}}((\hat{p}q)^\#) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q)^* = \Psi(q)^*\,.$$

Da die entsprechenden Konjugationen stetig sind, und Ψ_c die stetige Fortsetzung von Ψ ist, folgt $\Psi_c(\overline{q}) = \Psi_c(q)^*$ für alle $q \in C(\overline{\mathbb{R}})$.

❑

Beweis (von Satz 4.2.5, 2.Schritt). Seien $x,y \in \mathcal{K}$, dann ist

$$\varphi_{x,y} : \begin{cases} C(\overline{\mathbb{R}}) & \to \quad \mathbb{C} \\ \quad f & \mapsto \quad [\Psi_c(f)x,y] \end{cases}$$

ein stetiges lineares Funktional. Die Norm von $\varphi_{x,y}$ wird abgeschätzt durch

$$|[\Psi_c(f)x,y]| \leq \|\Psi_c(f)x\| \cdot \|y\| \leq \|\Psi_c\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|\,,$$

also $\|\varphi_{x,y}\| \leq \|\Psi_c\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein komplexes Borelmaß $\mu_{x,y}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\varphi_{x,y}(f) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\mu_{x,y}, \ f \in C(\overline{\mathbb{R}}),$$

und es ist $\|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\| \leq \|\Psi_c\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Es gilt

$$\varphi_{\lambda x+\beta z,y} = \lambda\varphi_{x,y} + \beta\varphi_{z,y}, \ \varphi_{x,\lambda y+\beta z} = \overline{\lambda}\varphi_{x,y} + \overline{\beta}\varphi_{x,z},$$

also gilt auch

$$\mu_{\lambda x+\beta z,y} = \lambda\mu_{x,y} + \beta\mu_{z,y}, \ \mu_{x,\lambda y+\beta z} = \overline{\lambda}\mu_{x,y} + \overline{\beta}\mu_{x,z}.$$

Daher definiert für jedes $f \in B(\overline{\mathbb{R}})$ die Vorschrift

$$[x,y]_f = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\mu_{x,y}, \ x,y \in \mathcal{K}.$$

eine Sesquilinearform auf $\mathcal{K}$. Diese ist beschränkt, denn es gilt

$$\big|[x,y]_f\big| = \Big|\int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\mu_{x,y}\Big| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|\Psi_c\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

also existiert ein eindeutiger Operator $\Psi_{\mathrm{bm}}(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $\|\Psi_{\mathrm{bm}}(f)\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\Psi_c\|$ und

$$[x,y]_f = [\Psi_{\mathrm{bm}}(f)x, y], \ x,y \in \mathcal{K}.$$

Nun gilt

$$[x,y]_{\alpha f+\beta g} = \alpha[x,y]_f + \beta[x,y]_g,$$

also ist auch

$$\Psi_{\mathrm{bm}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\Psi_{\mathrm{bm}}(f) + \beta\Psi_{\mathrm{bm}}(g),$$

wir haben also eine stetige lineare Abbildung $\Psi_{\mathrm{bm}} : B(\overline{\mathbb{R}}) \to C(\overline{\mathbb{R}})$.

Ist $f \in C(\overline{\mathbb{R}})$, so gilt

$$[x,y]_f = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\mu_{x,y} = \varphi_{x,y}(f) = [\Psi_c(f)x, y], \ x,y \in \mathcal{K},$$

also $\Psi_{\mathrm{bm}}(f) = \Psi_c(f)$.

Wir zeigen noch, dass Ψ_{bm} mit der Konjugation verträglich ist: Für jedes $f \in C(\overline{\mathbb{R}})$ gilt

$$\varphi_{x,y}(f) = [\Psi_c(f)x, y] = \overline{[\Psi_c(f)^* y, x]} = \overline{[\Psi_c(\overline{f})y, x]} = \overline{\varphi_{y,x}(\overline{f})},$$

und daher

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\mu_{x,y} = \overline{\int_{\overline{\mathbb{R}}} \overline{f} \, d\mu_{y,x}} = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f \, d\overline{\mu_{y,x}}, \ f \in C(\overline{\mathbb{R}}).$$

Also ist $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$. Wir schliessen, dass sogar für jedes $f \in B(\overline{\mathbb{R}})$

$$[\Psi_{\mathrm{bm}}(f)x, y] = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f\, d\mu_{x,y} = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f\, d\overline{\mu_{y,x}} = \overline{\int_{\overline{\mathbb{R}}} \overline{f}\, d\mu_{y,x}} =$$

$$= \overline{[\Psi_{\mathrm{bm}}(\overline{f})y, x]} = [x, \Psi_{\mathrm{bm}}(\overline{f})y]\,.$$

Es folgt $\Psi_{\mathrm{bm}}(\overline{f}) = \Psi_{\mathrm{bm}}(f)^*$.

❑

Beweis (von Satz 4.2.5, 3.Schritt). Sei $f \in \mathcal{F}$, dann schreibe $f = r + \hat{p}q$ mit gewissen $r \in \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}})$, $q \in B(\overline{\mathbb{R}})_c$, und setze

$$\Phi_{\mathrm{bm}}(f) := \Phi_{\mathrm{rat}}(r) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q)\,.$$

Als erstes müssen wir zeigen, dass durch diese Vorschrift die Abbildung $\Phi_{\mathrm{bm}} : \mathcal{F} \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ wohldefiniert ist. Seien also $f = r_1 + \hat{p}q_1 = r_2 + \hat{p}q_2$ zwei Darstellungen von f. Dann ist $(r_1 - r_2) + \hat{p}(q_1 - q_2) = 0$. Wegen der Linearität von Φ_{rat} und Ψ_{bm} genügt es nun zu zeigen, dass $r + \hat{p}q = 0$ stets $\Phi_{\mathrm{rat}}(r) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q) = 0$ impliziert, denn dann erhalten wir $\Phi_{\mathrm{rat}}(r_1) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_1) = \Phi_{\mathrm{rat}}(r_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_2)$. Sei also $r + \hat{p}q = 0$, dann folgt $q(t) = -r(t)\hat{p}(t)^{-1}$, $t \notin N(\hat{p})$. Da q überall beschränkt ist, ist die rationale Funktion $-r\hat{p}^{-1}$ stetig auf ganz $\overline{\mathbb{R}}$. Da q in den Punkten aus $N(\hat{p})$ stetig ist, folgt nun $q = -r\hat{p}^{-1}$. Wir erhalten

$$\Phi_{\mathrm{rat}}(r) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q) = \Phi_{\mathrm{rat}}(r) + \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q) = \Phi_{\mathrm{rat}}(r) + \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}(-r\hat{p}^{-1})) = 0\,.$$

Die Eigenschaft (i) ist klar aus der Definition. Ebenfalls klar ist, dass Φ_{bm} linear ist. Um zu zeigen, dass Φ_{bm} ein *-Homomorphismus ist, müssen wir also noch $\Phi_{\mathrm{bm}}(\overline{f}) = \Phi_{\mathrm{bm}}(f)^*$ und $\Phi_{\mathrm{bm}}(fg) = \Phi_{\mathrm{bm}}(f)\Phi_{\mathrm{bm}}(g)$ nachweisen.

Die Verträglichkeit mit der Konjugation ist einfach einzusehen:

$$\Phi_{\mathrm{bm}}(\overline{r + \hat{p}q}) = \Phi_{\mathrm{bm}}(r^{\#} + \hat{p}\overline{q}) = \Phi_{\mathrm{rat}}(r^{\#}) + \Psi_{\mathrm{bm}}(\overline{q}) =$$

$$= \Phi_{\mathrm{rat}}(r)^* + \Psi_{\mathrm{bm}}(q)^* = \Phi_{\mathrm{bm}}(r + \hat{p}q)^*\,.$$

Nun kommen wir zur Multiplikation. Dazu beweisen wir einige Zwischenergebnisse. Als erstes zeigen wir, dass

$$\Psi_{\mathrm{bm}}(sf) = \Psi_{\mathrm{rat}}(s)\Psi_{\mathrm{bm}}(f),\ \ s \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}}), f \in B(\overline{\mathbb{R}})\,. \tag{4.6}$$

Ist $q \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$, so gilt

$$\Psi(sq) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}sq) = \Phi_{\mathrm{rat}}(s)\Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}q) = \Phi_{\mathrm{rat}}(s)\Psi(q)\,.$$

Wegen der Stetigkeit von Ψ_c folgt

$$\Psi_c(sf) = \Phi_{\mathrm{rat}}(s)\Psi_c(f),\ \ s \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}}), f \in C(\overline{\mathbb{R}})\,.$$

Wir haben also

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} f \cdot s\, d\mu_{x,y} = [\Psi_c(sf)x, y] = [\Phi_{\mathrm{rat}}(s)\Psi_c(f)x, y] =$$

$$= [\Psi_c(f)x, \Phi_{\mathrm{rat}}(s^\#)y] = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f\, d\mu_{x,\Phi_{\mathrm{rat}}(s^\#)y},\ f \in C(\overline{\mathbb{R}}),$$

und es folgt

$$s\, d\mu_{x,y} = d\mu_{x,\Phi_{\mathrm{rat}}(s^\#)y}.$$

Man beachte hier, dass $s \in C(\overline{\mathbb{R}})$, also $s\, d\mu_{x,y}$ ein komplexes Borelmaß ist. Wir erhalten nun für jedes $f \in B(\overline{\mathbb{R}})$

$$[\Psi_{\mathrm{bm}}(sf)x, y] = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f \cdot s\, d\mu_{x,y} = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f\, d\mu_{x,\Phi_{\mathrm{rat}}(s^\#)y} =$$

$$= [\Psi_{\mathrm{bm}}(f)x, \Phi_{\mathrm{rat}}(s^\#)y] = [\Phi_{\mathrm{rat}}(s)\Psi_{\mathrm{bm}}(f)x, y],$$

also (4.6).

In analoger Weise zeigt man

$$\Psi_{\mathrm{bm}}(fs) = \Psi_{\mathrm{bm}}(f)\Phi_{\mathrm{rat}}(s),\ s \in \mathbb{C}(z) \cap C(\mathbb{R}), f \in B(\overline{\mathbb{R}}). \tag{4.7}$$

Dazu bemerke, dass für $q \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ stets $\Psi(qs) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}qs) = \Psi(q)\Phi_{\mathrm{rat}}(s)$ gilt, und wegen der Stetigkeit daher auch $\Psi_c(fs) = \Psi_c(f)\Phi_{\mathrm{rat}}(s),\ f \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Daher gilt

$$s\, d\mu_{x,y} = d\mu_{\Phi_{\mathrm{rat}}(s)x,y},$$

und es folgt $\Psi_{\mathrm{bm}}(fs) = \Psi_{\mathrm{bm}}(f)\Phi_{\mathrm{rat}}(s),\ f \in B(\overline{\mathbb{R}})$.

Schließlich zeigen wir mit der gleichen Argumentation

$$\Psi_{\mathrm{bm}}(\hat{p}fg) = \Psi_{\mathrm{bm}}(f)\Psi_{\mathrm{bm}}(g),\ f, g \in B(\overline{\mathbb{R}}). \tag{4.8}$$

Es ist für $f, g \in \mathbb{C}(z) \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ stets

$$\Psi(\hat{p}fg) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}\hat{p}fg) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}f)\Phi_{\mathrm{rat}}(\hat{p}g) = \Psi(f)\Psi(g).$$

Wieder wegen der Stetigkeit erhalten wir $\Psi_c(\hat{p}fg) = \Psi_c(f)\Psi_c(g),\ f, g \in C(\overline{\mathbb{R}})$, und es folgt dass

$$\hat{p}g\, d\mu_{x,y} = d\mu_{\Psi_c(g)x,y},\ g \in C(\mathbb{R}).$$

Wir erhalten

$$\Psi_{\mathrm{bm}}(\hat{p}fg) = \Psi_{\mathrm{bm}}(f)\Psi_c(g),\ f \in B(\overline{\mathbb{R}}), g \in C(\overline{\mathbb{R}}).$$

Damit ist also

$$\hat{p}f\, d\mu_{x,y} = d\mu_{x,\Psi_{\mathrm{bm}}(\overline{f}y)},$$

und es folgt (4.8)

Seien nun $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ gegeben, und schreibe $f_i = s_i + rq_i$ mit gewissen $s_i \in \mathbb{C}(z) \cap B(\overline{\mathbb{R}})$, $g_i \in B(\overline{\mathbb{R}})_c$. Dann gilt $f_1f_2 = s_1s_2 + s_1\hat{p}q_2 + \hat{p}q_1s_2 + \hat{p}q_1\hat{p}q_2$, und wir berechnen mit Hilfe von (4.6),(4.7) und (4.8)

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{bm}}(f_1f_2) &= \Phi_{\mathrm{bm}}(s_1s_2) + \Phi_{\mathrm{bm}}\Big(\hat{p}(s_1q_2 + q_1s_2 + \hat{p}q_1q_2)\Big) \\
&= \Phi_{\mathrm{rat}}(s_1s_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(s_1q_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_1s_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(\hat{p}q_1q_2) \\
&= \Phi_{\mathrm{rat}}(s_1)\Phi_{\mathrm{rat}}(s_2) + \Phi_{\mathrm{rat}}(s_1)\Psi_{\mathrm{bm}}(q_1) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_2)\Phi_{\mathrm{rat}}(s_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_1)\Psi_{\mathrm{bm}}(q_2) \\
&= \Big(\Phi_{\mathrm{rat}}(s_1) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_1)\Big) \cdot \Big(\Phi_{\mathrm{rat}}(s_2) + \Psi_{\mathrm{bm}}(q_2)\Big) \\
&= \Phi_{\mathrm{bm}}(f_1) \cdot \Phi_{\mathrm{bm}}(f_2).
\end{aligned}$$

❑

Beweis (von Satz 4.2.5, 4.Schritt). Sei λ wie in Proposition 4.2.3, und seien $\lambda_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, $\lambda_2 : \mathcal{F} \to B(\overline{\mathbb{R}})_c$, so dass $\lambda(f) = (\lambda_1(f), \lambda_2(f))$. Dann ist also

$$\Phi_{\mathrm{bm}}(f) = \Phi_{\mathrm{rat}}(\lambda_1(f)) + \Psi_{\mathrm{bm}}(\lambda_2(f))\,.$$

Nach Proposition 4.2.3, (iv), ist für jede Wahl von Umgebungen U_α die Abbildung $\lambda|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ stetig. Daher sind auch $\lambda_1|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ und $\lambda_2|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ stetig. Die Abbildung Ψ_{bm} ist stetig. Da $\mathcal{E}$ endlichdimensional ist, ist $\Phi_{\mathrm{rat}}|_{\mathcal{E}}$ sicher ebenfalls stetig. Also haben wir $\Phi_{\mathrm{bm}}|_{\mathcal{F}_{(U_\alpha)}}$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen geschrieben.

❑

Für den Beweis des letzten Schrittes benötigen wir den folgenden tiefliegenden Satz von Mergelyan. Wir verwenden diesen Satz ohne Beweis, siehe [R].

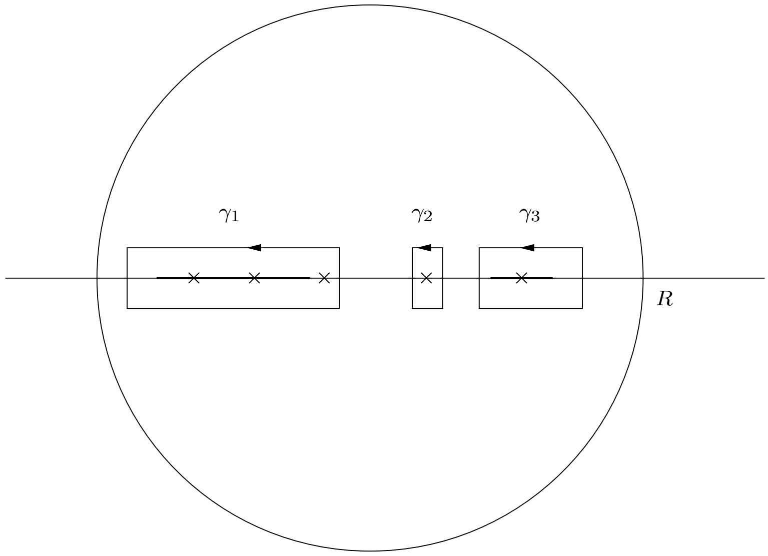
4.2.10 Satz. *Sei $K \subseteq S^2$ kompakt und habe K die Eigenschaft, dass $S^2 \setminus K$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt. Ist $g : K \to \mathbb{C}$ stetig und im Inneren von K analytisch, dann existieren rationale Funktion r_n, welche stetig auf K sind, sodass $\lim_{n\to\infty} r_n = g$ gleichmäßig auf K.*

Beweis (von Satz 4.2.5, 5.Schritt). Sei F analytisch auf einer Umgebung U von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$, und sei zunächst $f \in \mathcal{F} \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ mit $F|_{U\cap\overline{\mathbb{R}}} = f|_{U\cap\overline{\mathbb{R}}}$. Setze $\delta := \frac{1}{4} d(\sigma(A) \cup N(p), U^c)$, und lege ein Gitter mit Seitenlänge δ auf die Ebene. Sei L die Menge der abgeschlossenen Quadrate des Gitters welche die Menge $\sigma(A) \cup N(p)$ treffen. Weiters seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ die Wege die gemeinsam $\bigcup_{Q\in L} Q$ beranden.

Definiere eine in S^2 kompakte Menge K als

$$K := \begin{cases} \overline{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{Q\in L} Q & ,\ \infty \notin N(\hat{p}) \\ \overline{\mathbb{R}} \cup \bigcup_{Q\in L} Q \cup (S^2 \setminus U_R(0)) & ,\ \infty \in N(\hat{p}) \end{cases}$$

wobei R so groß gewählt ist, dass $S^2 \setminus U_{\frac{R}{2}}(0) \subseteq U$ und $\sigma(A) \cup N(p) \subseteq U_{\frac{R}{2}}(0)$.



$\times$ ...... $N(\hat{p})$

$\_\_$ ...... $\sigma(A)$

Definiere eine Funktion $g : K \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} F(z) & , \; z \in K \cap U \\ f(z) & , \; z \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Dann ist g stetig, denn U ist offen und für $z \in K \setminus U$ gibt es eine Umgebung V in S^2 mit $K \cap V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Die Menge $S^2 \setminus K$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $(S^2 \setminus K) \cap \mathbb{C}^+$ und $(S^2 \setminus K) \cap \mathbb{C}^-$. Nach dem Satz von Mergelyan gibt es eine Folge r_n von rationalen Funktionen deren Pole sämtliche in $S^2 \setminus K$ liegen sodass

$$\lim_{n\to\infty} \| r_n|_K - g|_K \|_\infty = 0 \,.$$

Offenbar ist $\sigma(A) \subseteq \mathring{K} \cap \mathbb{C}$ und $\mathring{K} \subseteq U$. Wir haben eine in $H(\mathring{K} \cap \mathbb{C})$ konvergente Folge, nämlich $r_n|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}} \to g|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}} = F|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}}$. Wegen der Stetigkeit des Riesz-Dunford'schen Funktionalkalküls folgt

$$\Phi_{\mathrm{RD}}(F) = \Phi_{\mathrm{RD}}(F|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{RD}}(r_n|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{rat}}(r_n)$$

wobei die Limiten in der Norm von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ zu verstehen sind.

Wähle (in $\overline{\mathbb{R}}$) offene Umgebungen U_α von $\alpha \in N(\hat{p})$ wie in Definition 4.2.1 sodass $\overline{U_\alpha} \subseteq \mathring{K}$, $\alpha \in N(\hat{p})$. Da $f|_{U_\alpha} = F|_{U_\alpha}$, ist insbesondere $f \in \mathcal{F}_{(U_\alpha)}$. Betrachte $\alpha \in N(p)$. Es gilt $r_n|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}} \to F|_{\mathring{K}\cap\mathbb{C}}$ in $H(\mathring{K} \cap \mathbb{C})$, also folgt dass auch für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \| r_n^{(l)}|_{\overline{U_\alpha}} - \underbrace{F^{(l)}|_{\overline{U_\alpha}}}_{=f^{(l)}|_{\overline{U_\alpha}}} \|_\infty = 0 \,.$$

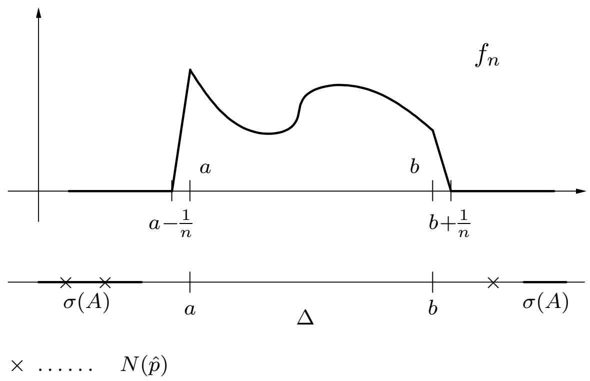
Den Fall $\alpha = \infty$ behandelt man mittels Substitution von $\frac{1}{z}$ genauso. Insgesamt folgt dass $r_n|_{\overline{\mathbb{R}}} \to f$ in $\mathcal{F}_{(U_\alpha)}$. Wegen der Stetigkeit des Funktionalkalküls Φ_{bm} folgt

$$\Phi_{\mathrm{bm}}(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{bm}}(r_n|_{\overline{\mathbb{R}}}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{rat}}(r_n) \,.$$

Es folgt, dass $\Phi_{\rm bm}(f) = \Phi_{\rm RD}(F)$.

Sei nun $f \in \mathcal{F} \cap C(\overline{\mathbb{R}})$ und sei $f(z) = 0$ auf einer Umgebung V (in $\overline{\mathbb{R}}$) von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$. Wähle U offen in S^2 sodass $U \cap \overline{\mathbb{R}} = V$, und setze $F = 0$ auf U. Dann ist F analytisch auf U und stimmt auf $U \cap \overline{\mathbb{R}}$ mit f überein. Nach dem eben gezeigten folgt dass $\Phi_{\rm bm}(f) = 0$.

Sei nun $\Delta = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $(\sigma(A) \cup N(\hat{p})) \cap \Delta = \emptyset$. Dann ist $\chi_\Delta \in \mathcal{F}$, und wegen $\chi_\Delta = 0 + \hat{p}(\frac{\chi_\Delta}{\hat{p}})$ gilt $\Phi_{\rm bm}(\chi_\Delta) = \Psi_{\rm bm}(\frac{\chi_\Delta}{\hat{p}})$. Seien $x, y \in \mathcal{K}$ festgehalten, und wähle eine Folge stetiger Funktionen f_n mit $\operatorname{supp} f_n \cap (\sigma(A) \cup N(\hat{p})) = \emptyset$ sodass $f_n \to \frac{\chi_\Delta}{\hat{p}}$ in $L^1(\mu_{x,y})$.



Dann folgt

$$[\Phi_{\rm bm}(\chi_\Delta)x, y] = [\Psi_{\rm bm}(\frac{\chi_\Delta}{\hat{p}})x, y] = \int_{\overline{\mathbb{R}}} (\frac{\chi_\Delta}{\hat{p}})\, d\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{\mathbb{R}}} f_n \, d\mu_{x,y} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\Psi_{\rm bm}(f_n)x, y] = \lim_{n\to\infty} [\Phi_{\rm bm}(\hat{p} f_n)x, y] = 0$$

Sei nun F analytisch auf einer Umgebung U von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$ und $f \in \mathcal{F}$ mit $F|_{U\cap\overline{\mathbb{R}}} = f|_{U\cap\overline{\mathbb{R}}}$. Wähle disjunkte abgeschlossene Intervalle Δ_j, $j = 1, \dots, n$, sodass

$$\sigma(A) \cup N(\hat{p}) \subseteq \Big(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j \Big)^c \subseteq U\,.$$

Definiere eine Funktion $f_1 : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ durch $f_1|_{(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j)^c} := f|_{(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j)^c}$ und irgendwie stetig auf $\bigcup_{j=1}^n \Delta_j$. Dann gilt

$$\Phi_{\rm RD}(F) = \Phi_{\rm bm}(f_1) = \Phi_{\rm bm}\big(\chi_{(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j)^c} f_1\big) + \sum_{j=1}^n \underbrace{\Phi_{\rm bm}(\chi_{\Delta_j})}_{=0} \Phi_{\rm bm}(f_1) =$$

$$= \Phi_{\rm bm}\big(\chi_{(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j)^c} f\big) + \sum_{j=1}^n \underbrace{\Phi_{\rm bm}(\chi_{\Delta_j})}_{=0} \Phi_{\rm bm}(f) = \Phi_{\rm bm}(f)$$

Sei schliesslich $f \in \mathcal{F}$ gleich Null auf einer Umgebung V (in $\overline{\mathbb{R}}$) von $\sigma(A) \cup N(\hat{p})$. Wähle wieder U offen in S^2 sodass $U \cap \overline{\mathbb{R}} = V$, und setze $F = 0$ auf U. Dann ist F analytisch auf U und gleich f auf $U \cap \overline{\mathbb{R}}$. Nach dem eben gezeigten folgt dass $\Phi_{\rm bm}(f) = 0$.

❑

Anhang A

Gegenbeispiele zu Geometrie und Topologie

Die meisten der Sätze die wir in den Kapiteln 1 und 2 angegeben haben sind scharf in dem Sinne, dass man keine der Voraussetzungen ersatzlos streichen kann. Um dieses zu illustrieren wollen wir hier ein paar Beispiele anführen. Zuerst eine Zusammenfassung:

- Ein positiver und maximal nichtnegativer Teilraum $\mathcal{M}$ eines Raumes $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ mit inneren Produkt, für den $\mathcal{M}^\perp$ nicht maximal nichtpositiv ist: Beispiel A.1.1

- Ein Teilraum $\mathcal{L}$ eines Pontryaginraumes $\langle \mathcal{P}, [.,.] \rangle$, sodass $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ ein Hilbertraum ist, der aber nicht ortho-komplementiert (äquivalent: nicht-abgeschlossen) ist: Beispiel A.1.7

- Ein nicht-zerlegbarer Raum mit inneren Produkt: Beispiel A.1.2

- Ein Raum mit inneren Produkt der keine Majorante besitzt: Beispiel A.1.3

- Ein abgeschlossener positiv definiter Teilraum eines Krein Raumes der nicht-orthokomplementiert ist: Beispiel A.1.4

- Ein abgeschlossener positiv definiter Teilraum eines Krein Raumes der selbst kein Krein Raum ist: Beispiel A.1.4

- Ein nicht-zerlegbarer Raum der eine Majorante besitzt die von einem inneren Produkt induziert wird: Beispiel A.1.5

- Ein nicht-zerlegbarer Raum der eine Majorante besitzt die von einer Banachraum-Norm induziert wird: Beispiel A.1.6

- Ein dichter Teilraum eines Krein Raumes der nicht zerlegbar ist: Beispiel A.1.5

A.1 Beispiele

A.1.1 Beispiel. Betrachte den Raum $\mathcal{L} := \ell^2(\mathbb{N}_0)$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\big[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0},(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\big] := -\xi_0\overline{\eta_0} + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\overline{\eta_j}\,.$$

Dieses innere Produkt ist offensichtlich nicht-entartet und indefinit. Sei $\mathcal{M}$ der Teilraum

$$\mathcal{M} := \Big\{(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} : \xi_0 = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\Big\}\,.$$

Für $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{M}$ gilt

$$\big[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0},(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\big] = -\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\cdot\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\overline{\xi_j} + \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\overline{\xi_j}\,.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung im gewichteten ℓ^2-Raum $\ell^2((\frac{1}{2^j})_{j\in\mathbb{N}})$ haben wir

$$\Big|\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\Big|^2 = \big|\big((\xi_j)_{j\in\mathbb{N}},(1)_{j\in\mathbb{N}}\big)\big|^2 \le$$

$$\le \big((\xi_j)_{j\in\mathbb{N}},(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}\big)\cdot\big((1)_{j\in\mathbb{N}},(1)_{j\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j}\xi_j\overline{\xi_j}\cdot 1\,,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist. Die einzige konstante Folge im $\ell^2(\mathbb{N})$ ist die Nullfolge, also erhalten wir

$$\big[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0},(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\big] > 0,\ (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{M}\setminus\{0\}\,,$$

d.h. $\mathcal{M}$ ist positiv definit. Weiters ist offenbar $\dim\mathcal{L}/\mathcal{M} = 1$, und da $\mathcal{L}$ selbst indefinit ist, muss $\mathcal{M}$ maximal nichtnegativ sein.

Sei nun $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{M}^\perp$. Die Folge $x^{(n)} := (1,0,\dots,0,2^n,0,\dots)$ wobei der Eintrag „2^n“ an der n-ten Stelle steht gehört zu $\mathcal{M}$, also ist

$$0 = [(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}, x^{(n)}] = -\eta_0 + \eta_n$$

Wir sehen, dass $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge ist, und daher gleich 0. D.h. es ist $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Insbesondere ist $\mathcal{M}^\perp$ nicht maximal nichtpositiv.

A.1.2 Beispiel. Sei $\mathcal{L}$ der Vektorraum aller Folgen $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ für die es ein $n\in\mathbb{Z}$ gibt mit $\xi_j = 0$, $j < n$. Weiters sei $[.,.] : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathbb{C}$ definiert als

$$[(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}},(\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}}] := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \xi_j\overline{\eta_{-j-1}}\,.$$

Beachte, dass in der Summe nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind. Offensichtlich ist $[.,.]$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{L}$.

Setzt man $e_k := (\delta_{jk})_{j\in\mathbb{Z}}$, den k-ten Einheitsvektor, so gilt $[(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}, e_k] = \xi_{-k-1}$. Insbesondere folgt dass $\mathcal{L}^\circ = \{0\}$.

Betrachte die Abbildung $\varphi : (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto (\xi_j\chi_{-\mathbb{N}}(j))_{j\in\mathbb{Z}}$. Es ist $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ker\varphi$ genau dann, wenn $\xi_j = 0$ für alle $j \ge 0$. Es folgt, dass $\ker\varphi$ neutral ist.

Daher ist für jeden definiten Teilraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ die Abbildung $\varphi|_{\mathcal{M}}$ injektiv. Nun ist $\operatorname{ran}\varphi = \{(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L} : \xi_j = 0, j \geq 0\}$, also ist $\{e_{-1}, e_{-2}, ...\}$ eine Basis von $\operatorname{ran}\varphi$. Es folgt, dass jeder definite Teilraum eine abzählbare Basis besitzt.

Hätte $\mathcal{L}$ eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{J} = (\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$, so wäre also $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+[\dot{+}]\mathcal{L}_-$, und daher hätte $\mathcal{L}$ eine abzählbare Basis. Dann hätte aber auch $\ker\varphi \cong \{(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} : \xi_j \in \mathbb{C}\}$ eine abzählbare Basis. Das ist ein Widerspruch, denn dieser Raum kann keine abzählbare Basis haben.

Ein elementarer Beweis dafür wäre zum Beispiel wie folgt: Angenommen $\{(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} : \xi_j \in \mathbb{C}\}$ hat eine Basis $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ...\}$. Wähle $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{C}$ sodaß

$$(\xi_0, \xi_1), (x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \text{ linear unabhängig}.$$

Whle $\xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{C}$ sodaß

$$(\xi_2, \xi_3, \xi_4), (x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}), (x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}) \text{ linear unabhängig}.$$

Verfährt man induktiv weiter, so erhält man eine Folge $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ die die Eigenschaft hat, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschnitte $(\xi_{\alpha(n)}, \ldots, \xi_{\beta(n)}), (x^{(1)}_{\alpha(n)}, \ldots, x^{(1)}_{\beta(n)}), \ldots, (x^{(n)}_{\alpha(n)}, \ldots, x^{(n)}_{\beta(n)})$ linear unabhängig sind. Insbesondere kann $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ nicht in $\operatorname{span}\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\}$ liegen.

A.1.3 Beispiel. Betrachte wieder den Raum $\langle\mathcal{L}, [.,.]\rangle$ aus Beispiel A.1.2. Angenommen es existiert eine Norm $\|.\|$ auf $\mathcal{L}$, sodaß $[.,.]$ stetig in der Normtopologie ist. Insbesondere existiert dann zu jedem $y \in \mathcal{L}$ eine Konstante $\beta(y) > 0$, sodaß $|[x, y]| \leq \beta(y)\|x\|$, $x \in \mathcal{L}$.

Ist $e_k := (\delta_{jk})_{j\in\mathbb{Z}}$ der k-te Einheitsvektor, so gilt für jedes $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, dass

$$|\xi_k| = |[x, e_{-k-1}]| \leq \beta(e_{-k-1})\|x\|.$$

Wählt man speziell die Folge $x := (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\xi_j := \begin{cases} 0 & , \; j < 0 \\ (j+1)\beta(e_{-j-1}) & , \; j \geq 0 \end{cases}$$

so ist also für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$(k+1)\beta(e_{-k-1}) \leq \beta(e_{-k-1})\|x\|,$$

und daher $k + 1 \leq \|x\|$. Ein Widerspruch da $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig war.

Wegen Proposition 1.4.3 kann also $\langle\mathcal{L}, [.,.]\rangle$ keine Majorante besitzen.

A.1.4 Beispiel. Sei $\mathcal{K} := \ell^2(\mathbb{N})$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\Big[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}\Big] := \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \xi_j \overline{\eta_j}.$$

Der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)_{l^2(\mathbb{N})}$ ist

$$G : \begin{cases} l^2(\mathbb{N}) & \to \quad l^2(\mathbb{N}) \\ (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} & \mapsto \quad \big((-1)^j \xi_j\big)_{j\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Dieser ist offenbar bijektiv und isometrisch, insbesondere also beschränkt invertierbar. Also ist $\langle\mathcal{K}, [.,.]\rangle$ ein Krein Raum.

Betrachte den Teilraum

$$\mathcal{L} := \Big\{ (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K} : \xi_{2j} = \frac{2j}{2j-1}\xi_{2j-1}, j \in \mathbb{N} \Big\} .$$

Dieser ist positiv definit, denn es gilt für $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$

$$\Big[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}\Big] = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j |\xi_j|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\Big(\frac{2k}{2k-1}\Big)^2 - 1\Big] |\xi_{2k-1}|^2 \geq 0$$

Ist diese Summe gleich 0, so muß $\xi_{2k-1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sein, und damit sind alle ξ_j, $j \in \mathbb{N}$, gleich 0.

Die kanonischen Projektionen $\pi_k : (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \xi_k$ sind stetig bzgl. der $\ell^2(\mathbb{N})$-Norm. Nun ist

$$\mathcal{L} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\pi_{2k} - \frac{2k}{2k-1}\pi_{2k-1})^{-1}(\{0\})$$

und daher abgeschlossen.

Wir zeigen nun das das orthogonale Komplement von $\mathcal{L}$ gleich

$$\mathcal{L}^{\perp} = \Big\{ (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} : \eta_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\eta_{2k-1}, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

ist. Denn: Zunächst ist für jedes Element $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\eta_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\eta_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, und jedes $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$

$$[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}, (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}] = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \xi_j \overline{\eta_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\xi_{2k}\overline{\eta_{2k}} - \xi_{2k-1}\overline{\eta_{2k-1}}\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2k}{2k-1}\xi_{2k-1}\frac{2k-1}{2k}\overline{\eta_{2k-1}} - \xi_{2k-1}\overline{\eta_{2k-1}}\Big) = 0 .$$

Umgekehrt, ist $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\perp}$, so ist $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ insbesondere orthogonal auf den Vektor

$$(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, 0, \frac{2k-1}{2k}, 1, 0, \ldots)$$

wo die 1 an der $2k$-ten Stelle steht. Es folgt $\eta_{2k} - \frac{2k-1}{2k}\eta_{2k-1} = 0$.

Betrachte nun den Vektor $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\zeta_j := \begin{cases} 0 & , \ j \text{ ungerade} \\ \frac{1}{j} & , \ j \text{ gerade} \end{cases}$$

Angenommen es wäre $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} + (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ und $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\perp}$. Dann gilt also

$$\xi_{2k-1} + \eta_{2k-1} = 0,\ \xi_{2k} + \eta_{2k} = \frac{1}{2k},\ k \in \mathbb{N} .$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{2k} = \frac{2k}{2k-1}\xi_{2k-1} + \frac{2k-1}{2k}\eta_{2k-1} = \Big(\frac{2k}{2k-1} - \frac{2k-1}{2k}\Big)\xi_{2k-1} =$$

$$= \frac{(2k)^2 - (2k-1)^2}{(2k-1)2k} \xi_{2k-1} = \frac{4k-1}{(2k-1)2k} \xi_{2k-1} \,.$$

Es folgt $\xi_{2k-1} = \frac{2k-1}{4k-1}$ und damit $\xi_{2k} = \frac{2k}{4k-1}$. Ein Widerspruch, denn diese Folge ist nicht in $l^2(\mathbb{N})$.

Wir sehen, dass $\mathcal{L}$ nicht orthokomplementiert ist. Nach Satz 2.2.3 kann $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ kein Krein Raum sein.

Addendum: Wir wollen explizit zeigen, dass $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ nicht vollständig ist. Dazu betrachte man die Folge $x_n := (\xi_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\xi_{n,j} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{j}} & , \; j \text{ ungerade} \quad , \; j \le 2n \\ \frac{j}{\sqrt{(j-1)^3}} & , \; j \text{ gerade} \quad , \; j \le 2n \\ 0 & , \; j > 2n \end{cases}$$

Es gilt

$$\xi_{n,2k} = \frac{2k}{\sqrt{(2k-1)^3}} = \frac{2k}{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} = \frac{2k}{2k-1} \xi_{n,2k-1}, \; k \le n \,,$$

$$\xi_{n,2k} = 0 = \frac{2k}{2k-1} \xi_{n,2k-1}, \; k > n \,,$$

also ist $x_n \in \mathcal{L}$. Es gilt $(m > n)$

$$[x_n - x_m, x_n - x_m] = \sum_{k=1}^{\infty} \Big((\frac{2k}{2k-1})^2 - 1 \Big) |\xi_{n,2k-1} - \xi_{m,2k-1}|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \Big((\frac{2k}{2k-1})^2 - 1 \Big) \frac{1}{2k-1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4k-1}{(2k-1)^2} \frac{1}{2k-1} \,,$$

Es folgt, dass $\lim_{n,m \to \infty} [x_n - x_m, x_n - x_m] = 0$, und damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. der vom positiv definiten Skalarprodukt $[.,.]|_{\mathcal{L} \times \mathcal{L}}$ induzierten Norm, eine Cauchy-Folge. Sei nun angenommen, dass $\langle \mathcal{L}, [.,.] \rangle$ vollständig ist. Dann müßte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert in $x_0 \in \mathcal{L}$ haben. Da $\mathcal{L}$ in $\mathcal{K}$ abgeschlossen ist, und daher auch bzgl. der Norm von $\mathcal{K}$, also $\|.\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$, vollständig ist, sind die Normen $\|.\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$ und $\sqrt{[.,.]|_{\mathcal{L} \times \mathcal{L}}}$ äquivalent. Wir sehen, dass also auch $x_n \to x_0$ bzgl. $\|.\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$. Da die kanonischen Projektionen stetig sind, folgt daraus

$$x_{0,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{j}} & , \; j \text{ ungerade} \\ \frac{j}{\sqrt{(j-1)^3}} & , \; j \text{ gerade} \end{cases}$$

ein Widerspruch, denn diese Folge ist nicht im $l^2(\mathbb{N})$.

A.1.5 Beispiel. Sei $\mathcal{K} := l^2(\mathbb{Z})$ versehen mit dem inneren Produkt

$$[(\xi_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}}] := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \xi_j \overline{\eta_{-j-1}} \,.$$

Der Gram-Operator von $[.,.]$ bzgl. $(.,.)_{l^2(\mathbb{Z})}$ ist gleich

$$G : \begin{cases} l^2(\mathbb{Z}) & \to \quad l^2(\mathbb{Z}) \\ (\eta_j)_{j \in \mathbb{Z}} & \mapsto \quad (\eta_{-j-1})_{j \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

denn offenbar gilt $[(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}},(\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}}]=(G(\xi_i)_{j\in\mathbb{Z}},(\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}})_{l\in\mathbb{Z}}$. Nun ist G bijektiv und isometrisch, insbesondere haben wir $0\in\rho(G)$ und erhalten dass $\langle\mathcal{L}^2,[.,.]\rangle$ ein Krein Raum ist.

Betrachte nun den Teilraum $\mathcal{L}$ aller links-endlichen Elemente von $\mathcal{K}$. Klarerweise ist $\mathcal{L}$ dicht in $\mathcal{K}$. Man sieht genauso wie in Beispiel A.1.2, dass $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ nicht zerlegbar ist. Als Teilraum eines Krein Raumes besitzt er insbesondere eine Majorante die von einem inneren Produkt induziert wird, in unserem Beispiel z.B. $\|.\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.

A.1.6 Beispiel. Sei X ein reflexiver Banachraum dessen Norm nicht äquivalent ist zu einer von einem inneren Produkt induzierten Norm. Zum Beispiel hat ℓ^p mit $1<p<\infty$, $p\neq 2$, diese Eigenschaft, denn man kann zeigen dass ℓ^p für solche p nicht-komplementierte Teilräume enthält. Betrachte den Raum

$$\mathcal{L}:=X\times X',\ \|(x;\varphi)\|:=\|x\|_X+\|\varphi\|_{X'},$$

$$[(x;\varphi),(y;\psi)]:=\psi(x)+\varphi(y).$$

Dann ist $\langle\mathcal{L},\|.\|\rangle$ ein Banachraum und $[.,.]$ ein inneres Produkt. Da die Abbildung $(x;\varphi)\mapsto\varphi(x)$ stetig bzgl. $\|.\|$ ist, ist auch $[.,.]$ stetig bzgl. $\|.\|$. Damit ist jedes Funktional der Form $(x;\varphi)\mapsto[(x;\varphi),(y;\psi)]$ mit festem $(y;\psi)\in\mathcal{L}$ stetig.

Wir zeigen, dass bereits jedes stetige Funktional so dargestellt werden kann: Sei dazu $\Phi:\mathcal{L}\to\mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Abbildung

$$\psi: x\mapsto\Phi((x;0)),\ x\in X,$$

ein stetiges Funktional auf X. Weiters ist die Abbildung

$$a:\varphi\mapsto\Phi((0;\varphi)),\ \varphi\in X',$$

ein stetiges Funktional auf X'. Da X reflexiv ist, existiert $y\in X$ mit

$$a(\varphi)=\varphi(y),\ \varphi\in X'.$$

Es folgt

$$\Phi((x;\varphi))=\Phi((x;0))+\Phi((0;\varphi))=\psi(x)+\varphi(y)=[(x;\varphi),(y;\psi)].$$

Sei nun angenommen dass $\mathcal{L}$ zerlegbar ist, und sei $\mathcal{J}$ eine Fundamentalzerlegung. Wie wir im Beweis von Satz 1.4.7, (ii), gesehen haben (für den hier relevante Beweisteil genügt es wenn die dort gegebene Majorante $\mathcal{T}$ von einer Banachraum-Norm induziert wird), ist $\mathcal{T}_\mathcal{J}$ gröber als $\mathcal{T}_{\|.\|}$. Es folgt

$$\big\{[.,(y;\psi)]:(y;\psi)\in\mathcal{L}\big\}\subseteq\langle\mathcal{L},\|.\|_\mathcal{J}\rangle'\subseteq\langle\mathcal{L},\|.\|\rangle'=$$

$$=\big\{[.,(y;\psi)]:(y;\psi)\in\mathcal{L}\big\},$$

und daher haben wir $\langle\mathcal{L},\|.\|_\mathcal{J}\rangle'=\langle\mathcal{L},\|.\|\rangle'$. Nun folgt aus Proposition B.1.2, dass $\|.\|_\mathcal{J}$ und $\|.\|$ äquivalent sind. Insbesondere sind $\|.\|_X$ und $\|.\|_\mathcal{J}|_{X\times\{0\}}$ äquivalent, ein Widerspruch denn das zweitere wird von einem inneren Produkt induziert.

A.1.7 Beispiel. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und wähle ein unstetiges lineares Funktional $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$. Betrachte den Raum

$$\mathcal{P}:=\mathcal{H}[\dot+](\mathbb{C}\dot+\mathbb{C})$$

versehen mit dem inneren Produkt

$$\big[(x_1;\alpha_1,\beta_1),(x_2;\alpha_2,\beta_2)\big] := (x_1,x_2)_{\mathcal{H}} + \alpha_1\overline{\beta_2} + \alpha_2\overline{\beta_1}\,.$$

Dann ist $\langle\mathcal{P},[.,.]\rangle$ ein Pontryagin Raum. Eine Fundamentalzerlegung ist zum Beispiel gegeben als

$$\mathcal{P}_+ := \mathcal{H}[\dot{+}]\,\mathrm{span}\{(0;1,1)\},\ \mathcal{P}_- := \mathrm{span}\{(0;1,-1)\}\,.$$

Die entsprechende Zerlegungsmajorante ist die Produkttopologie von $\mathcal{H}$ und $\mathbb{C}^2$. Wir definieren eine Abbildung $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{P}$ durch

$$\iota x := (x; f(x), 0),\ x \in \mathcal{H}\,.$$

Dann gilt

$$[\iota x, \iota y] = \big[(x;f(x),0),(y;f(y),0)\big] = (x,y)_{\mathcal{H}},\ x,y \in \mathcal{H}\,,$$

d.h. ι ist isometrisch.

Sei nun $\mathcal{L} := \iota(\mathcal{H})$. Dann ist $\langle\mathcal{L},[.,.]\rangle$ isometrisch isomorph zu $\langle\mathcal{H},(.,.)\rangle$, also ein Hilbertraum. Wir werden zeigen, dass

$$\overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}} = \mathcal{H}[\dot{+}]\,\mathrm{span}\{(0;1,0)\}$$

gilt. Insbesondere ist $\overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}}$ entartet und daher $\mathcal{L}$ nicht abgeschlossen in $\mathcal{P}$.

Zunächst ist

$$\mathcal{H}[\dot{+}]\,\mathrm{span}\{(0;1,0)\} = \mathrm{span}\{(0;1,0)\}^{\perp}$$

und daher abgeschlossen. Klarerweise gilt $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}[\dot{+}]\,\mathrm{span}\{(0;1,0)\}$.

Da f unstetig ist, existiert eine Folge $x_n \in \mathcal{H}$ mit $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} 0$ und $f(x_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\iota(x_n) = (x_n;1,0)$ und damit $\iota(x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} (0;1,0)$. Also ist $(0;1,0) \in \overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}}$. Damit ist auch für jedes $x \in \mathcal{H}$

$$(x;0,0) = \iota(x) - f(x)(0;1,0) \in \overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}}\,.$$

Insgesamt folgt $\overline{\mathcal{L}}^{\mathcal{P}} = \mathcal{H}[\dot{+}]\,\mathrm{span}\{(0;1,0)\}$.

Anhang B

Banach- und Hilbertraum Theorie

B.1 Verschiedenes

B.1.1 Proposition. *Sei* $\langle X, (.,.)\rangle$ *ein Raum mit einem positiv definiten inneren Produkt,* $\|.\| := \sqrt{(x,x)}$*. Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* X*. Dann ist* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *genau dann, wenn* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ *und es eine dichte Teilmenge* M *von* X *gibt mit* $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x_0, y)$, $y \in M$.

Beweis. Ist $x_n \to x_0$ bzgl. $\|.\|$, so folgt auch $\|x_n\| \to \|x_0\|$ sowie $(x_n, y) \to (x_0, y)$, $y \in X$. Wir können für M also ganz X wählen. Seien umgekehrt die angegebenen Bedingungen erfüllt. Es gilt

$$\begin{gathered}\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0) = \\ (x_n, x_n) + (x_0, x_0) - (x_n, x_0) - (x_0, x_n).\end{gathered} \tag{B.1}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann wähle $y \in M$ mit $\|x_0 - y\| < \epsilon$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|(x_n, y) - (x_0, y)| < \epsilon,\ |(x_n, x_n) - (x_0, x_0)| < \epsilon,\ n \geq N\,.$$

Dann gilt

$$|(x_n, x_0) - (x_0, x_0)| \leq |(x_n, x_0) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x_0, y)| +$$

$$+|(x_0, y) - (x_0, x_0)|\,.$$

Nun ist, für $n \geq N$,

$$|(x_n, x_0) - (x_n, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|x_0 - y\| \leq (\|x_0\|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}\epsilon\,,$$

$$|(x_n, y) - (x_0, y)| \leq \epsilon,\ |(x_0, y) - (x_0, x_0)| \leq \|x_0\|\epsilon\,.$$

Wir schließen dass $\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) = (x_0, x_0)$, und erhalten mit (B.1) $\|x_n - x_0\| \to 0$.

❑

B.1.2 Proposition. *Seien $\|.\|_1, \|.\|_2$ Normen auf X. Ist $\langle X, \|.\|_1\rangle' = \langle X, \|.\|_2\rangle'$, so sind $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ äquivalent.*

Beweis. Die Dualräume $\Big\langle \langle X, \|.\|_1\rangle', \|.\|_1' \Big\rangle$ und $\Big\langle \langle X, \|.\|_2\rangle', \|.\|_2' \Big\rangle$ sind Banachräume. Ihre Dualräume enthalten beide X vermöge der Abbildung

$$\iota : x \longmapsto \big(\varphi \mapsto \varphi(x)\big) .$$

Betrachte die identische Abbildung $\mathrm{id} : \langle X, \|.\|_1\rangle' \to \langle X, \|.\|_2\rangle'$. Ist $\varphi_n \to \varphi$ bzgl. $\|.\|_1'$, und $\mathrm{id}(\varphi_n) \to \psi$ bzgl. $\|.\|_2'$, so folgt

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \psi(x),\ x \in X ,$$

d.h. $\varphi = \psi$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist id stetig und damit auch ein Homöomorphismus. Also sind die Normen $\|.\|_1'$ und $\|.\|_2'$ äquivalent, $\alpha\|.\|_1' \le \|.\|_2' \le \beta\|.\|_1'$. Es folgt für $x \in X$

$$\|x\|_1 = \sup\big\{|\varphi(x)| : \|\varphi\|_1' \le 1\big\} \le \sup\big\{|\varphi(x)| : \|\varphi\|_2' \le \beta\big\} = \beta\|x\|_2 ,$$

und genauso $\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2$.

❑

B.1.3 Definition. Seien X, Y Hilberträume. Die *schwache Operatortopologie* ist die von dem linearen Raum linearer Funktionale

$$f_{x,y} : \left\{ \begin{array}{rcl} B(X,Y) & \to & \mathbb{C} \\ T & \mapsto & (Tx, y) \end{array} \right. , \quad x \in X, y \in Y,$$

auf $B(X,Y)$ erzeugte schwache Topologie.

Ist $(T_i)_{i\in I}$ ein Netz in $B(X,Y)$ welches in der schwachen Operatortopologie gegen T konvergiert, so schreibt man $T_i \xrightarrow{w} T$.

B.1.4 Satz. *Seien X, Y Hilberträume. Dann ist die Einheitskugel U von $B(X,Y)$ in der schwachen Operatortopologie kompakt.*

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\iota : \left\{ \begin{array}{rcl} B(X,Y) & \to & \prod_{x\in X} Y' \\ T & \mapsto & ((., Tx))_{x\in X} \end{array} \right.$$

Klarerweise ist ι injektiv. Wegen $\|(., Tx)\| = \|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|$, ist $\iota(U) \subseteq \prod_{x\in X} \|x\| V$ wobei V die Einheitskugel in Y' ist. Bezeichne $\pi_x : \prod_{x\in X} Y' \to Y'$ die Projektion auf die x-te Koordinate, und sei für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in X$

$$h_{\lambda,\mu,x,y} := \pi_{\lambda x + \mu y} - \overline{\lambda}\pi_x - \overline{\mu}\pi_y .$$

Dann ist

$$\iota(U) = \bigcup_{\substack{\lambda,\mu\in\mathbb{C}\\ x,y\in X}} h^{-1}_{\lambda,\mu,x,y}(\{0\}) \cap \prod_{x\in X} \|x\| \cdot V .$$

Sei nun jeder der Faktoren Y' versehen mit der w^*-Topologie, und $\prod_{x\in X} Y'$ mit der entsprechenden Produkttopologie. Dann sind die Funktionen $h_{\lambda,\mu,x,y}$ alle stetig. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist V kompakt, und nach Tychonoff daher auch $\prod_{x\in X} \|x\| V$. Wir sehen, daß$\iota(U)$ kompakt ist.

Versieht man $B(X,Y)$ mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bzgl. ι, so wird also U in dieser Topologie kompakt. Nun hat man

$$\begin{tikzcd}
\prod_{x\in X} Y' \arrow[r, "\pi_x"] & Y' \arrow[r, "(.,y)"] & \mathbb{C} \arrow[r, "\overline{\cdot}"] & \mathbb{C} \\
B(X,Y) \arrow[u, "\iota"] \arrow[urrr, dotted, "P_{x,y}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Also ist $\mathcal{T}$ gleich der schwachen Operatortopologie.

❑

B.1.5 Proposition. *Seien W, X, Y, Z Hilberträume, $T_i \in B(X,Y)$, $i \in I$, ein Netz mit $T_i \xrightarrow{w} T$, und $A \in B(W,X)$, $B \in B(Y,Z)$. Dann gilt*

$$T_i A \xrightarrow{w} TA,\ BT_i \xrightarrow{w} BT\,,$$

in $B(W,Y)$ bzw. $B(X,Z)$.

Beweis. Sei $w \in W, y \in Y$, dann ist

$$f_{w,y}(SA) = (SAw, y)_Y = f_{Aw,y}(S),\ S \in B(X,Y)\,.$$

Also gilt $f_{w,y}(T_i A) = f_{Aw,y}(T_i) \to f_{Aw,y}(T) = f_{w,y}(TA)$.

Genauso ist für $x \in X, z \in Z$ stets

$$f_{x,z}(BS) = (BSx, z)_Z = (Sx, B^* z)_Y = f_{x,B^*z}(S)\,,$$

und wir erhalten $f_{x,z}(BT_i) \to f_{x,z}(T)$.

❑

B.1.6 Proposition. *Seien W, X, Y, Z Hilberträume, $T_i \in B(W,X)$, $S_i \in B(Y,Z)$, $i \in I$, Netze mit $T_i \xrightarrow{w} T$, $S_i \xrightarrow{w} S$, und sei $A \in B(X,Y)$ kompakt. Dann gilt*

$$S_i A T_i \xrightarrow{w} SAT\,.$$

Zum Beweis benötigen wir noch eine Vorbereitung.

B.1.7 Lemma. *Seien X, Y Hilberträume.*

(*i*) *Ist $T_i \in B(X,Y)$, $i \in I$, und $T_i \xrightarrow{w} T$, so folgt $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.*

(*ii*) *Ist $T_i \in B(X,Y)$, $i \in I$, und $T_i \xrightarrow{w} T$, so folgt $T_i^* \xrightarrow{w} T^*$.*

(*iii*) *Ist $T \in B(X,Y)$ kompakt und $x_i \in X$, $i \in I$, mit $x_i \xrightarrow{w} x$, so ist $Tx_i \xrightarrow{s} Tx$.*

Beweis. Zum Beweis von (i) verwenden wir zweimal den Satz von Banach-Steinhaus: Betrachte die Familie ($x \in X$ fest)

$$\big\{(.,T_i x) : i \in I\big\} \subseteq B(Y,\mathbb{C})$$

Dann gilt für jedes $y \in Y$ dass $(y,T_i x) \to (y,Tx)$, und daher ist diese Familie punktweise beschränkt. Daher ist sie sogar gleichmäßig beschränkt. Wegen $\|(.,T_i x)\| = \|T_i x\|$, und wir haben also $\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty$.

Nun betrachten wir die Familie $\{T_i : i \in I\} \subseteq B(X,Y)$. Wie wir eben gesehen haben, ist sie punktweise beschränkt, und daher sogar gleichmäßig beschränkt.

Um (ii) einzusehen, genügt es zu bemerken dass stets ($x \in X, y \in Y$)

$$f_{y,x}(S^*) = (S^*y,x)_X = (y,Sx)_Y = \overline{f_{x,y}(S)}\,.$$

Wir kommen zum Beweis von (iii). ObdA sei $x = 0$. Sei V die Einheitskugel in Y. Wir berechnen

$$\|Tx_i\| = \sup\big\{|(Tx_i,y)_Y| : y \in V\big\} = \sup\big\{|(x_i,T^*y)_X| : y \in V\big\} =$$
$$= \sup\big\{|(x_i,z)_X| : z \in T^*(V)\big\}\,.$$

Da T kompakt ist, ist auch T^* kompakt und daher $T^*(V)$ total beschränkt.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $z_1,\dots,z_n \in T^*(V)$ mit

$$\bigcup_{j=1}^n U_\epsilon(z_j) \supseteq T^*(V)\,.$$

Weiters wähle $i_0 \in I$ mit

$$|(x_i,z_j)| < \epsilon,\ i \geq i_0, j = 1,\dots,n\,.$$

Ist $z \in T^*(V)$, so wähle $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $z \in U_\epsilon(z_j)$. Dann gilt für $i \geq i_0$

$$|(x_i,z)| \leq |(x_i,z-z_j)| + |(x_i,z_j)| \leq \|x_i\|\cdot\|z-z_j\| + |(x_i,z_j)| \leq$$
$$\leq \Big(\sup_{i\in I}\|x_i\| + 1\Big)\cdot\epsilon\,.$$

Da $x_i \xrightarrow{w} x$ ist $\sup_{i\in I}\|x_i\| < \infty$ (wieder nach Banach-Steinhaus), also sehen wir dass $\|Tx_i\| \leq C\cdot\epsilon$, $i \geq i_0$.

❑

Beweis (von Proposition B.1.6). Es gilt für $w \in W$, $z \in Z$, stets

$$|(S_iAT_iw,z)_Z - (SATw,z)_Z| \leq$$
$$\leq |(S_iAT_iw,z)_Z - (S_iATw,z)_Z| + |(S_iATw,z)_Z - (SATw,t)_Z| =$$
$$= |(A(T_i-T)w,S_i^*z)_Y| + |((S_i-S)ATw,z)_Z|\,.$$

Nun ist $S_i \xrightarrow{w} S$, und daher auch $(S_i-S)AT \xrightarrow{w} 0$ also gilt

$$|((S_i-S)ATw,z)_Z| \to 0\,.$$

Wegen $S_i^* \xrightarrow{w} S^*$ ist $\sup_{i\in I}\|S_i^*\| < \infty$. Weiters ist $(T_i-T)w \xrightarrow{w} 0$, und, da A kompakt ist, daher $A(T_i-T)w \xrightarrow{s} 0$. Es folgt

$$|(A(T_i-T)w,S_i^*z)_Y| \leq \|A(T_i-T)w\|\cdot\sup_{i\in I}\|S_i^*\|\cdot\|z\| \to 0\,.$$

❑

B.2 Der Fixpunktsatz von Ky-Fan

Wir benützen (ohne Beweis) den *Fixpunktsatz von Brouwer*. Dieser Satz ist äusserst tiefliegend und einer der wichtigsten Fixpunktsätze. Viele Fixpunktsätze bauen auf ihm auf.

B.2.1 Satz. *Sei $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, und sei $f : B^n \to B^n$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt in B^n, d.h. es existiert $x_0 \in B^n$ mit $f(x_0) = x_0$.*

Man kann diese Aussage auch auf andere Mengen als die Einheitskugel verallgemeinern (ohne Beweis).

B.2.2 Korollar. *Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und konvex, und sei $f : C \to C$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt in C.*

Der Fixpunktsatz von Ky-Fan beschäftigt sich mit Abbildungen die Punkten eines Raumes Teilmengen desselben zuordnen. Wir beweisen zuerst:

B.2.3 Satz. *Sei X ein topologischer Vektorraum, sei $C \subseteq X$ nichtleer, kompakt und konvex, und sei*

$$f : C \to \mathcal{P}(C)\,.$$

Sei vorausgesetzt, dass gilt

(i) *Für jedes $x \in X$ ist die Menge $f(x)$ nichtleer und konvex.*

(ii) *Für jedes $y \in C$ ist die Menge*

$$f^-(y) := \big\{x \in C : y \in f(x)\big\}$$

offen.

Dann existiert $x_0 \in C$ sodass $x_0 \in f(x_0)$.

Beweis. Sei $x \in C$, dann ist $f(x)$ nichtleer. Für jedes $y \in f(x)$ gilt $x \in f^-(y)$. Wir sehen, dass $\{f^-(y) : y \in C\}$ eine Überdeckung von C ist. Da $f^-(y)$ stets offen ist und C kompakt, existieren $y_1, \ldots, y_n \in C$ mit

$$\bigcup_{i=1}^n f^-(y_i) = C\,.$$

Wähle stetige Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : C \to \mathbb{R}$ mit

(i) $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, $x \in C$, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) = 1$, $x \in C$.

(iii) $\alpha_i(x) = 0$ für $x \in C \setminus f^-(y_i)$.

Die Existenz solcher Funktionen folgt da kompakte Räume normal sind, und daher das Lemma von Urysohn gilt.

Sei $Y := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{y_1, \ldots, y_n\}$, und definiere eine stetige Abbildung durch

$$p : \left\{ \begin{array}{rcl} Y \cap C & \to & Y \cap C \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) y_i \end{array} \right.$$

Da Y endlichdimensional und daher abgeschlossen ist, ist die Menge $Y \cap C$ kompakt in Y bzgl. der Spurtopologie von X. Diese ist, wieder da Y endlichdimensional ist, gleich der euklidischen Topologie. Klarerweise ist $Y \cap C$ konvex und nichtleer. Wir erhalten aus dem Korollar zum Brouwerschen Fixpunktsatz einen Punkt $x_0 \in C$ mit $p(x_0) = x_0$.

Ist $\alpha_i(x_0) \neq 0$ für ein gewisses i, so folgt $x_0 \in f^-(y_i)$ d.h. $y_i \in f(x_0)$. Wir sehen, dass $x_0 = p(x_0)$ eine konvex-Kombination von Punkten aus $f(x_0)$ ist. Da $f(x_0)$ konvex ist, folgt $x_0 \in f(x_0)$.

❑

B.2.4 Korollar. *Sei X ein topologischer Vektorraum, sei $C \subseteq X$ nichtleer, kompakt und konvex, und sei $\phi : C \to X'$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in C$ sodass*

$$\operatorname{Re} \phi(x_0)(x_0 - y) \geq 0, \; y \in C .$$

Beweis. Betrachte die Abbildung $f : C \to \mathcal{P}(C)$ die definiert ist als

$$f(x) := \big\{ y \in C : \operatorname{Re} \phi(x)(x - y) < 0 \big\} .$$

Klarerweise ist $f(x)$ stets konvex. Ist $y \in C$ fest, so ist die Abbildung $\alpha_y : x \mapsto \operatorname{Re} \phi(x)(x - y)$ stetig, da nämlich $\phi : C \to X'$ und $(x, x') \mapsto x'(x) : X \times X' \to \mathbb{C}$ stetig sind. Nun ist

$$f^-(y) = \big\{ x \in C : y \in f(x) \big\} = \big\{ x \in C : \operatorname{Re} \phi(x)(x - y) < 0 \big\} = \alpha_y^{-1}(\mathbb{R}^-) ,$$

also ist für jedes $y \in C$ die Menge $f^-(y)$ offen.

Angenommen die Behauptung des Korollars wäre falsch. Dann ist $f(x)$ für jedes $x \in C$ auch nichtleer, und wir können Satz B.2.3 anwenden. Wir erhalten einen Punkt $x_0 \in C$ mit $x_0 \in f(x_0)$, d.h. mit $\operatorname{Re} \phi(x_0)(x_0 - x_0) < 0$. Ein Widerspruch, denn offensichtlich ist $\phi(x_0)(x_0 - x_0) = 0$.

❑

Wir kommen nun zum *Fixpunktsatz von Ky-Fan.*

B.2.5 Satz. *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, sei $C \subseteq X$ nichtleer, kompakt und konvex, und sei*

$$f : C \to \mathcal{P}(C) .$$

Sei vorausgesetzt, dass gilt

(i) *Für jedes $x \in X$ ist die Menge $f(x)$ nichtleer, abgeschlossen und konvex.*

(ii) *Die Menge*

$$G(f) := \big\{ (x, y) \in C \times C : y \in f(x) \big\}$$

ist abgeschlossen.

Dann existiert $x_0 \in C$ sodass $x_0 \in f(x_0)$.

Beweis. Für $w \in X'$ betrachte die Menge

$$N_w := \big\{ x \in C : \operatorname{Re} w(y) > 0 \text{ für alle } y \in f(x) - x \big\} .$$

Wir zeigen, dass für jedes $w \in X'$ die Menge N_w^c abgeschlossen ist: Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in N_w^C mit $x_i \to x \in C$. Dann existiert für jedes $i \in I$ ein Element $y_i \in f(x_i) - x_i$ mit $\operatorname{Re} w(y_i) \leq 0$. Setze $z_i := y_i + x_i$, dann ist $z_i \in f(x_i) \subseteq C$. Da C kompakt ist, existiert ein konvergentes Teilnetz $(z_{i_k})_{k\in K}$, $z_{i_k} \to z \in C$. Nun ist $(x_{i_k}, z_{i_k}) \in G(f)$, also auch $(x, z) \in G(f)$ d.h. $z \in f(x)$. Setze $y := z - x$, dann ist $y \in f(x) - x$. Weiters ist $y = \lim_{k\in K}(z_{i_k} - x_{i_k}) = \lim_{k\in K} y_{i_k}$, und daher $\operatorname{Re} w(y) = \lim_{k\in K} \operatorname{Re} w(y_{i_k}) \leq 0$. Wir sehen, dass $x \in N_w^c$.

Sei nun angenommen, dass für jedes $x \in C$ gilt $x \notin f(x)$. Dann ist also stets $0 \notin f(x) - x$. Die Menge $f(x) - x$ ist nichtleer, abgeschlossen und konvex, da $f(x)$ diese Eigenschaften hat. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach existiert $\psi_x \in X'$ und $\gamma_x > 0$ sodass

$$\operatorname{Re} \psi_x(y) \geq \gamma_x, \ y \in f(x) - x \,.$$

Insbesondere haben wir $x \in N_{\psi_x}$. Wir sehen, dass die Familie $\{N_w : w \in X'\}$ eine offene Überdeckung von C ist. Da C kompakt ist, existieren $w_1, \ldots, w_n \in X'$ sodass

$$\bigcup_{i=1}^{n} N_{w_i} = C \,.$$

Wähle stetige Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : C \to \mathbb{R}$ mit

(*i*) $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, $x \in C$, $i = 1, \ldots, n$,

(*ii*) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = 1$, $x \in C$,

(*iii*) $\alpha_i(x) = 0$ für $x \in C \setminus N_{w_i}$,

und definiere eine Funktion $\phi : C \to X'$ als

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) w_i \,.$$

Klarerweise ist ϕ stetig. Nach Korollar B.2.4 existiert ein $x_0 \in C$, sodass

$$0 \leq \operatorname{Re} \phi(x_0)(x_0 - y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_0) \operatorname{Re} w_i(x_0 - z), \ z \in C \,.$$

Wähle $z \in f(x_0)$. Ist $\alpha_i(x_0) \neq 0$, so folgt $x_0 \in N_{w_i}$, d.h. $\operatorname{Re} w_i(z - x_0) > 0$. Da sicher mindestens eine der Funktionen α_i an der Stelle x_0 verschieden von Null sein muss, folgt dass $\operatorname{Re} \phi(x_0)(z - x_0) > 0$. Wir haben einen Widerspruch erhalten.

❑

B.3 Der Riesz-Dunfordsche Funktionalkalkül

Als erstes kommen wir zu einem elementaren Funktionalkalkül für rationale Funktionen.

B.3.1 Definition. Sei X ein Banachraum und $T \in B(X)$. Weiters sei $\mathcal{R}_T$ die Menge aller rationalen Funktionen deren Pole sämtliche in $\rho(T)$ liegen. Sei $r \in \mathcal{R}_T$, und schreibe $r(z) = a\prod_{i=1}^n (z-z_i)^{\alpha_i}$ wobei $a \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, und $z_i \in \rho(T)$ falls $\alpha_i < 0$. Setze

$$r(T) := a\prod_{i=1}^n (T-z_i)^{\alpha_i} .$$

Die Abbildung

$$\Phi^T_{\mathrm{rat}} : \begin{cases} \mathcal{R}_T & \to & \mathcal{B}(X) \\ r & \mapsto & r(T) \end{cases}$$

heißt der *rationale Funktionalkalkül* für T.

Die Menge $\mathcal{R}_T$ ist, versehen mit der skalaren Multiplikation, der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation eine $\mathbb{C}$-Algebra. Die Abbildung Φ^T_{rat} ist, wie man unmittelbar aus den Rechenregeln sieht, ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus.

B.3.2 Proposition. *Ist $r \in \mathcal{R}_T$, so gilt $r(\sigma(T)) \subseteq \sigma(r(T))$.*

Beweis. Schreibe $r = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden Polynomen p, q. Dann liegen alle Nullstellen von q in $\rho(T)$. Sei $r(\lambda) \in \rho(r(T))$. Es ist

$$r(z) - r(\lambda) = \frac{p(z)q(\lambda) - p(\lambda)q(z)}{q(z)q(\lambda)} = (z-\lambda)\frac{s(z)}{q(z)q(\lambda)}$$

mit einem geeigneten Polynom s. Also erhalten wir

$$(T-\lambda)\Big[\frac{s(T)}{q(T)q(\lambda)}\big(r(T) - r(\lambda)\big)^{-1}\Big] = I$$

und, da die beiden Faktoren kommutieren, folgt $\lambda \in \rho(T)$.

❑

Wir werden nun den rationalen Funktionalkalkül ausdehnen auf holomorphe Funktionen. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$ und bezeichne mit $\mathcal{F}_T$ die Menge aller Funktionen die auf einer offenen Umgebung von $\sigma(T)$ holomorph sind.

B.3.3 Definition. Sei $f \in \mathcal{F}_T$ holomorph auf $U \supseteq \sigma(T)$. Wähle eine endliche Anzahl $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossener rektifizierbarer Wege in $U \setminus \sigma(T)$ mit

$$\sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) = \begin{cases} 0 & , \ z \notin U \\ 1 & , \ z \in \sigma(T) \end{cases} \tag{B.2}$$

und setze

$$\Phi^T_{\mathrm{RD}}(f) := \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta .$$

Die Abbildung Φ^T_{RD} heißt der *Riesz-Dunfordsche Funktionalkalkül*.

Als erstes müssen wir uns überlegen, dass Φ^T_{RD} überhaupt wohldefiniert ist.

B.3.4 Lemma. *Sei ein achsenparalleles Gitter von Quadraten mit Seitenlänge $\delta > 0$ gegeben, welches die ganze Ebene überdeckt. Weiters sei L eine endliche Teilmenge von Quadraten dieses Gitters, und setze $A = \bigcup_{Q\in L} \overline{Q}$. Dann ist A abgeschlossen und ∂A ist die Vereinigung aller (abgeschlossenen) Strecken welche Seiten eines Quadrates Q von L sind und die Eigenschaft haben, dass das zweite Quadrat des Gitters, welches ausser Q noch an die Strecke grenzt, nicht zu L gehört. Weiters existieren geschlossene Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ welche aus einer endlichen Abfolge orientierter Seiten von Quadraten des Gitters bestehen, sodass*

(*i*) $\partial A = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$

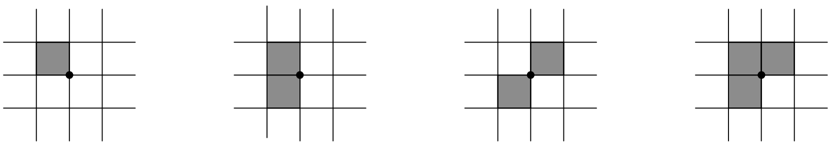
(*ii*) *Jede Seite die in γ_k vorkommt wird so durchlaufen, dass das zu L gehörende angrenzende Quadrat links liegt.*

(*iii*) *Keine Seite kommt in einem Weg γ_k mehrfach vor, und keine Seite wird von zwei verschiedenen Wegen durchlaufen.*

(*iv*) *Es gilt*

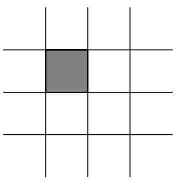
$$\sum_{k=1}^n n(\gamma_k, z) = \begin{cases} 0 & , \ z \in A^c \\ 1 & , \ z \in \operatorname{Int} A \end{cases}$$

Beweis. Liegt ein Punkt w auf einer abgeschlossenen Strecke die gemeinsame Seite von zwei Quadraten ist von denen eines zu L gehört und das andere nicht, so ist klarerweise w ein Randpunkt von A. Sei nun $w \in \partial A$, dann kann w nicht im Inneren eines Quadrates liegen, denn jedes offene Quadrat gehört entweder ganz zu A oder ganz zu A^c. Liegt w im Inneren einer Seite, so muß eines der angrenzenden Quadrate zu L gehören und eines nicht. Liegt schließlich w in einem Kreuzungspunkt des Gitters, so muß von den vier angrenzenden Quadraten mindestens eines zu L gehören, und mindestens eines nicht zu L gehören.

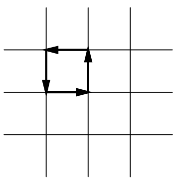


Wir sehen, dass in jedem Fall w auch auf einer abgeschlossenen Seite liegt an die ein zu L gehörendes und ein nicht zu L gehörendes Quadrat angrenzt. Insgesamt haben wir die gewünschte Darstellung für ∂A gezeigt.

Um die Existenz von Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mit den Eigenschaften $(i) - (iv)$ zu zeigen, verwenden wir Induktion nach der Anzahl der Quadrate in L. Besteht L aus nur einem Quadrat, so ist die Behauptung klar:

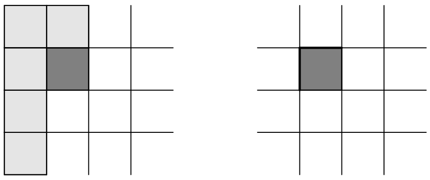


L

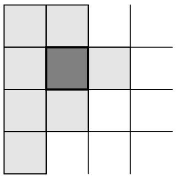


γ

Sei nun eine Menge L die mehr als ein Quadrat enthält gegeben. Sei Q jenes Quadrat in L welches unter allen Quadraten in L mit minimaler x-Koordinate die maximale y-Koordinate hat. Dann gehört zumindest die linke und die obere Seite von Q zu ∂A:



Fall 1: Alle Seiten von Q gehören zu ∂A. Dann sind wir also in der Situation

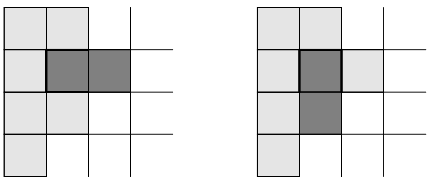


Setze $L' := L \setminus \{Q\}$ und definiere A' entsprechend. Dann ist $\partial A = \partial A' \cup \partial Q$ und $\partial A'$ hat mit ∂Q keine ganze Strecke gemeinsam. Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege aus der Induktionsvoraussetzung für L', und sei γ der positiv orientierte Rand von Q. Wir zeigen, dass $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma\}$ Wege mit den Eigenschaften $(i) - (iv)$ für L sind. Die Gültigkeit von (i) haben wir schon festgestellt, (ii) und (iii) sind auch klar. Um (iv) einzusehen genügt es zu bemerken, dass $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A' \dot\cup \operatorname{Int} Q$ und dass der Weg γ die Eigenschaft

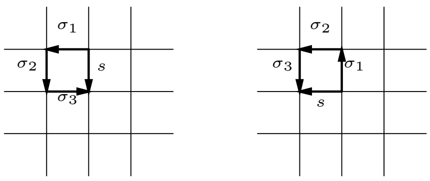
$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \notin \overline{Q} \\ 1 & , \quad z \in \operatorname{Int} Q \end{cases}$$

hat.

Fall 2: Drei Seiten von Q gehören zu ∂A. Dann sind wir also in einer der beiden folgenden Situationen



Setze wieder $L' := L \setminus \{Q\}$, sei s die Seite von Q die nicht in ∂L liegt, und seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die anderen Seiten orientiert gemäß



Nun gilt $\partial A' = (\partial A \setminus \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}) \cup \{s\}$, denn das Weglassen eines Quadrates kann die im Rand vorkommenden Seiten nur in den an es angrenzenden Seiten verändern. Seien nun $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ aus der Induktionsvoraussetzung für L'. Dann ist s in genau einem der Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ enthalten, und zwar mit der Orientierung so dass Q rechts liegt. Sei oBdA $s \in \gamma_1$ und schreibe γ_1 als Abfolge von orientierten Seiten $s, s_1, s_2, \ldots, s_m$.

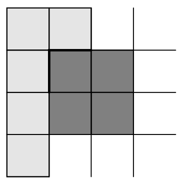
Definiere nun γ als Abfolge der orientierten Seiten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, s_1, s_2, \ldots, s_m$ wobei $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ so orientiert sind, dass Q links liegt. Wir zeigen, dass $\gamma, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ geeignete Wege für Wege für L sind. Dabei ist $(i), (ii)$ und (iii) klar. Schließlich gilt

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial Q} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

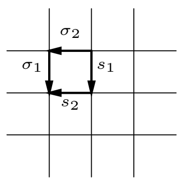
$$= \begin{cases} 0 & , \quad z \notin A' \cup \overline{Q} = A \\ 1 & , \quad z \in \operatorname{Int} A' \cup \operatorname{Int} Q \end{cases}$$

Wegen der Stetigkeit der Umlaufzahl folgt auch $n(\gamma, z) = 1$, $z \in s$, und damit (iv).

Fall 3: Zwei Seiten von Q gehören zu ∂A und das rechts unter Q gelegene Quadrat gehört zu L. Wir sind also in der Situation



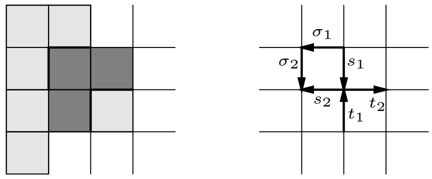
Sei s_1 die rechte Seite von Q, s_2 die untere, σ_1 die obere und σ_2 die linke. Dabei seien s_1, s_2 so orientiert, dass Q rechts liegt, und σ_1, σ_2 so dass Q links liegt.



Wieder sei $L' := L \setminus \{Q\}$, dann ist $\partial A' = (\partial A \setminus \{\sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{s_1, s_2\}$. Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ aus der Induktionsvoraussetzung für L' und enthalte oBdA γ_1 die Seite s_1. Da das Quadrat rechts unter Q zu L' gehört, muß die Seite die im Weg γ_1 auf s_1 folgt, gleich s_2 sein. Wir können also γ_1 schreiben als Abfolge der Seiten $s_1, s_2, t_1, \ldots, t_m$.

Sei γ definiert als die Abfolge der Seiten $\sigma_1, \sigma_2, t_1, \ldots, t_m$. Dann sieht man genauso wie im Fall 2, dass $\gamma, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ geeignete Wege für L sind.

Fall 4: Zwei Seiten von Q gehören zu ∂A und das rechts unter Q gelegene Quadrat gehört nicht zu L, d.h. also



Es gilt dann für $L' := L \setminus \{Q\}$, dass $\partial A' = (\partial A \setminus \{\sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{s_1, s_2\}$. Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ wieder Wege für L'.

Sei zuerst angenommen, dass alle vier Seiten s_1, s_2, t_1, t_2 auf einem Weg liegen, oBdA sei dieser γ_1. Dann hat man entweder

(*a*) $\gamma_1 = s_1, s_2, u_1, \ldots, u_n, t_1, t_2, u_{n+1}, \ldots, u_m$

oder

(*b*) $\gamma_1 = s_1, t_2, u_1, \ldots, u_n, t_1, s_2, u_{n+1} u_m$

Im ersten Fall setzte

$$\gamma := \sigma_1, \sigma_2, u_1, \ldots, u_n, t_1, t_2 u_{n+1}, \ldots, u_m\,,$$

im zweiten Fall

$$\gamma := \sigma_1, \sigma_2, u_{n+1}, \ldots, u_m,\ \gamma' := t_2, u_1, \ldots, u_n, t_1\,.$$

Sei nun angenommen, dass die vier Seiten s_1, s_2, t_1, t_2 auf zwei Wege verteilt sind, oBdA $s_1 \in \gamma_1$ und $t_1 \in \gamma_2$. Dann gilt entweder

(*c*) $\gamma_1 = s_1, s_2, u_1, \ldots, u_n, \gamma_2 = t_1, t_2, v_1, \ldots, v_m$

oder

(*d*) $\gamma_1 = s_1, t_2, u_1, \ldots, u_n,\ \gamma_2 = t_1, s_2, v_1, \ldots, v_m$

Im ersten Fall setze

$$\gamma := \sigma_1, \sigma_2, u_1, \ldots, u_n\,,$$

Im zweiten Fall

$$\gamma := \sigma_1, \sigma_2, v_1, \ldots, v_m, t_1, t_2, u_1, \ldots, u_m\,.$$

Betrachte die Wege

(*a*) $\gamma, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

(*b*) $\gamma, \gamma', \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

(*c*) $\gamma, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

(*d*) $\gamma, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$

Diese Wege erfüllen dann (*i*)–(*iii*). In den Fällen (*a*) und (*c*) sieht man genauso wie oben, dass (*iv*) gilt. Im Fall (*b*) haben wir

$$n(\gamma_1, z) = n(\gamma', z) + n(\gamma, z) - \oint\limits_{\partial Q} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in \operatorname{Int} A' \cap \operatorname{Int} Q\,,$$

also

$$n(\gamma, z) + n(\gamma', z) + \sum_{k=2}^{n} n(\gamma_k, z) = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma_n, z) + \oint_{\partial Q} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta,\ \ z \in \operatorname{Int} A' \cap \operatorname{Int} Q\,,$$

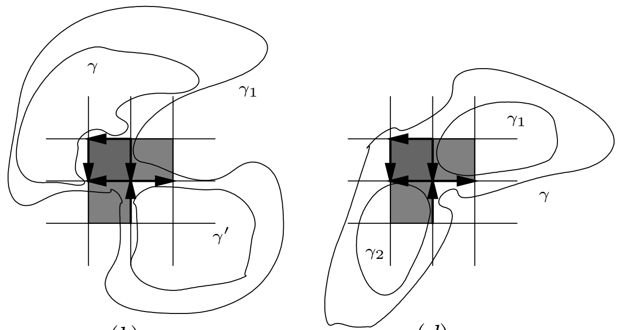
Im Fall (d) haben wir

$$n(\gamma, z) = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + \oint_{\partial Q} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta,\ \ z \in \operatorname{Int} A' \cap \operatorname{Int} Q\,,$$

also

$$n(\gamma, z) + \sum_{k=3}^{n} n(\gamma_k, z) = \sum_{k=1}^{n} + \oint_{\partial Q} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta,\ \ z \in \operatorname{Int} A' \cap \operatorname{Int} Q\,.$$

In beiden Fällen erhalten wir wieder (iv).



(b) (d)

❑

B.3.5 Proposition. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und K kompakt mit $K \subseteq U$. Dann gilt*

(i) *Es gibt geschlossene rektifizierbare Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in $U \setminus K$ mit der Eigenschaft* (B.2).

(ii) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\mathcal{R} : K^c \to \mathcal{B}(X)$ holomorph. Dann hängt der Wert von*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)\mathcal{R}(\zeta)\, d\zeta$$

nicht von der Wahl der Wege $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ mit (B.2) *ab.*

Beweis. Setze $d := d(U^c, K)$, dann ist $d > 0$. Nach Lemma B.3.4, angewendet mit $\delta := \frac{d}{2}$ und der Menge L' aller Quadrate deren Abschluß K trifft, existieren Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mit der Eigenschaft (B.2). Diese erfüllen $d(\gamma_k, K) \leq \delta$, also muß γ_k in U liegen, und wir haben (i) gezeigt.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Seien dazu $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ und $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m\}$ Mengen geschlossener rektifizierbarer Wege die jeweils (B.2) erfüllen. Die Funktion $\varphi(f(\zeta)\mathcal{R}(\zeta)x)$, $x \in X$, $\varphi \in X'$, ist holomorph in $U \setminus K$, und

$\gamma_1, \dots, \gamma_n, -\gamma'_1, \dots, -\gamma'_m$ sind geschlossene rektifizierbare Wege in $U \setminus K$. Weiters gilt

$$\sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, z) + \sum_{k=1}^{m} n(-\gamma'_k, z) = 0, \ z \notin U \setminus K .$$

Also folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz (Homologieversion)

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \varphi(f(\zeta)\mathcal{R}(\zeta)x) \, d\zeta - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma'_k} \varphi(f(\zeta)\mathcal{R}(\zeta)x) \, d\zeta = 0 .$$

❑

Wir können auf $\mathcal{F}_T$ algebraische Operationen definieren, und zwar wie folgt: Seien $f, g \in \mathcal{F}_T$ und bezeichne U, V die Definitionsbereiche von f bzw. g. Dann setze

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z), \ (f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z), \quad z \in U \cap V .$$

Klarerweise sind dann $f+g$ und $f \cdot g$ in $\mathcal{F}_T$. Weiters sei $(\lambda f)(z) := \lambda f(z)$, $z \in U$, für $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit diesen Operationen wird $\mathcal{F}_T$ zu einer $\mathbb{C}$-Algebra.

Für eine offene Menge U bezeichne mit $\mathcal{H}(U)$ die Menge aller auf U analytischen Funktionen. Auf $\mathcal{H}(U)$ haben wir nicht nur eine $\mathbb{C}$-Algebra Struktur, sondern auch die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \sigma(T)$, so gilt klarerweise $\mathcal{H}(U) \subseteq \mathcal{F}_T$. Ebenso gilt klarerweise $\mathcal{R}_T \subseteq \mathcal{F}_T$.

B.3.6 Satz. *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt:*

(i) Die Abbildung $\Phi^T_{\mathrm{RD}} : \mathcal{F}_T \to \mathcal{B}(X)$ ist ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus.

(ii) Für jede offene Menge U mit $U \supseteq \sigma(T)$, ist die Einschränkung $\Phi^T_{\mathrm{RD}}|_{\mathcal{H}(U)}$ stetig (bzgl. der Normtopologie auf $\mathcal{B}(X)$).

(iii) Es gilt $\Phi^T_{\mathrm{RD}}|_{\mathcal{R}_T} = \Phi^T_{\mathrm{rat}}$.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{F}_T$ mit Definitionsbereichen U bzw. V. Wähle geschlossene rektifizierbare Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ in $(U \cap V) \setminus \sigma(T)$ mit (B.2). Dann gilt

$$\Phi^T_{\mathrm{RD}}(f+g) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} (f+g)(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} g(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \, d\zeta =$$

$$= \Phi^T_{\mathrm{RD}}(f) + \Phi^T_{\mathrm{RD}}(\rho) ,$$

$$\Phi^T_{\mathrm{RD}}(\lambda f) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} (\lambda f)(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \, d\zeta =$$

$$= \lambda \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \, d\zeta = \lambda \Phi^T_{\mathrm{RD}}(f) .$$

Die Multiplikativität ist schwieriger einzusehen. Dazu sei $d > 0$ mit $d \leq \min_{k=1,\dots,n} d(\gamma_k, \sigma(T))$ und $d \leq d((U \cap V)^c, \sigma(T))$, und wende Lemma B.3.4 an mit $\delta := \frac{d}{2}$ und der Menge L aller jener Quadrate die $\sigma(T)$ treffen. So erhalten wir Wege $\gamma_1', \dots, \gamma_m'$ mit (B.2) und $d(\gamma_l', \sigma(T)) \leq \delta$. Weiters gilt für jeden Punkt $z \in \bigcup_{Q \in L} \overline{Q}$ dass $d(z, \sigma(T)) \leq \delta$. Also ist

$$\sum_{l=1}^{m} n(\gamma_l', z) = 0,\ \ z \in \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k\,.$$

Weiters können wir einen Punkt $z \in \bigcup_{l=1}^{m} \gamma_l'$ mit einer Strecke der Länge $\leq \sqrt{2}\delta = \frac{d}{\sqrt{2}} < d$ mit einem Punkt w von $\sigma(T)$ verbinden. Also liegen z und w in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, und wir haben

$$\sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, z) = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, w) = 1\,.$$

Nun berechnen wir

$$\Phi_{\mathrm{RD}}^T(f) \cdot \Phi_{\mathrm{RD}}^T(g) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta \cdot \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \int_{\gamma_l'} g(\lambda)(\lambda - T)^{-1}\, d\lambda =$$

$$= \big(\frac{1}{2\pi i}\big)^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_l'} f(\zeta) g(\lambda) (\zeta - T)^{-1} (\lambda - T)^{-1}\, d\lambda\, d\zeta =$$

$$= \big(\frac{1}{2\pi i}\big)^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_l'} f(\zeta) g(\lambda) \frac{(\zeta - T)^{-1} - (\lambda - T)^{-1}}{\lambda - \zeta}\, d\lambda\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)(\zeta - T)^{-1} \cdot \Big(\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{n} \int_{\gamma_l'} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \zeta}\, d\lambda\Big)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \int_{\gamma_l'} g(\lambda)(\lambda - T)^{-1} \cdot \Big(\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta\Big)\, d\lambda\,.$$

Im inneren Integral des ersten Summanden ist $\zeta \in \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, und daher

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \int_{\gamma_l'} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \zeta}\, d\lambda = g(\zeta) \sum_{l=1}^{m} n(\gamma_l', \zeta) = 0\,.$$

Im inneren Integral des zweiten Summanden ist $\lambda \in \bigcup_{l=1}^{m} \gamma_l'$, und daher

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta = f(\lambda) \sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, \lambda) = f(\lambda)\,.$$

Insgesamt erhalten wir $\Phi_{\mathrm{RD}}^T(f) \cdot \Phi_{\mathrm{RD}}^T(g) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(fg)$. Wir haben gezeigt, dass Φ_{RD}^T ein $\mathbb{C}$-Algebra Homomorphismus ist.

Zum Beweis von (ii) sei nun U offen, $U \supseteq \sigma(T)$ festgehalten, und seien f_n, $n \in \mathbb{N}$, holomorph in U und lokal gleichmäßig konvergent zu f. Wähle Wege γ_k in $U \setminus \sigma(T)$ mit (B.2), dann konvergiert $f_n|_{\bigcup_{k=1}^n \gamma_k}$ gleichmäßig gegen $f|_{\bigcup_{k=1}^n \gamma_k}$. Da $(\zeta - T)^{-1}$ eine stetige Funktion für $\zeta \in \bigcup_{k=1}^n \gamma_n$ ist, folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{RD}}^T(f_n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_k} f_n(\zeta)(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(f)\,.$$

Um (iii) einzusehen, betrachten wir zuerst die Funktion $f(z) := z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Diese ist holomorph in ganz $\mathbb{C}$. Ein einmal in positiver Richtung durchlaufener Kreis $\gamma = \{|\zeta| = r\}$ mit $r > \|T\|$ ist also ein Weg im Holomorphiegebiet von f und es gilt $\gamma \cap \sigma(T) = \emptyset$. Weiters ist

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} 0 & , \ |z| > r \\ 1 & , \ |z| < r \end{cases}$$

insbesondere gilt (B.2). Wir haben also

$$\Phi_{\mathrm{RD}}^T(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \zeta^n (\zeta - T)^{-1}\, d\zeta\,.$$

Nun gilt für $\zeta \in \gamma$ stets $(\zeta - T)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{z^{k+1}} T^k$, und diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ in der Operatornorm. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \zeta^n (\zeta - T)^{-1}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=0}^\infty \zeta^{n-k-1} T^k\, d\zeta =$$

$$\sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \zeta^{n-k-1}\, d\zeta \Big) T^k = T^n\,.$$

Wir sehen, dass $\Phi_{\mathrm{RD}}^T(z^n) = T^n = \Phi_{\mathrm{rat}}^T(z^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $\Phi_{\mathrm{RD}}^T(p) = \Phi_{\mathrm{rat}}^T(p)$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$.

Ist nun $f \in \mathcal{R}_T$, und schreibe $f = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden Polynomen p, q. Dann hat q keine Nullstellen in $\sigma(T)$, also ist $\frac{1}{q} \in \mathcal{F}_T$. Wir erhalten

$$I = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(1) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(q \cdot \frac{1}{q}) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(q) \Phi_{\mathrm{RD}}^T(\frac{1}{q})\,,$$

und damit $\Phi_{\mathrm{RD}}^T(\frac{1}{q}) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(q)^{-1}$. Man beachte hier, dass das homomorphe Bild einer kommutativen Algebra wieder kommutativ ist. Es folgt

$$\Phi_{\mathrm{RD}}^T(f) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(p \cdot \frac{1}{q}) = \Phi_{\mathrm{RD}}^T(p) \Phi_{\mathrm{RD}}^T(q)^{-1} = \Phi_{\mathrm{rat}}^T(p) \Phi_{\mathrm{rat}}^T(q)^{-1} =$$

$$= \Phi_{\mathrm{rat}}^T(p \cdot \frac{1}{q}) = \Phi_{\mathrm{rat}}^T(f)\,.$$

❑

Der Riesz-Dunfordsche Funktionalkalkül kann benützt werden um Operatoren deren Spektrum zerfällt in entsprechender Weise zu zerlegen.

B.3.7 Proposition. *Sei $T \in \mathcal{B}(X)$ und zerfalle das Spektrum von T in zwei Teile, $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ und σ_1, σ_2 abgeschlossen. Dann existieren abgeschlossene Teilräume X_1 und X_2 von X mit $X = X_1 \dot{+} X_2$ die invariant unter T sind, d.h. $T(X_1) \subseteq X_1$, $T(X_2) \subseteq X_2$, und sodaß gilt*

$$\sigma(T|_{X_1}) = \sigma_1,\ \sigma(T|_{X_2}) = \sigma_2 \,.$$

Beweis. Wähle disjunkte offene Mengen U_1, U_2 mit $\sigma_1 \subseteq U_1$ und $\sigma_2 \subseteq U_2$. Die Funktionen $\chi_1, \chi_2 : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ die definiert sind als

$$\chi_1(z) := \begin{cases} 1 & , \ z \in U_1 \\ 0 & , \ z \in U_2 \end{cases} \qquad \chi_2(z) := \begin{cases} 0 & , \ z \in U_1 \\ 1 & , \ z \in U_2 \end{cases}$$

gehören zu $\mathcal{F}_T$ und erfüllen

$$\chi_1^2 = \chi_1,\ \chi_2^2 = \chi_2,\ \chi_1\chi_2 = 0,\ \chi_1 + \chi_2 = 1|_{U_1 \cup U_2} \,.$$

Also sind

$$P_1 := \Phi_{\mathrm{RD}}^T(\chi_1),\ P_2 := \Phi_{\mathrm{RD}}^T(\chi_2)\,,$$

stetige Projektionen mit $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ und $P_1 + P_2 = I$. Wir haben also die Zerlegung $X = X_1 \dot{+} X_2$ mit den abgeschlossenen Teilräumen

$$X_1 := \operatorname{ran} P_1,\ X_2 := \operatorname{ran} P_2 \,.$$

Da auch T im Bild von Φ_{RD}^T liegt, haben wir $P_1T = TP_1$ und $P_2T = TP_2$, also sind X_1 und X_2 unter T invariant. Tatsächlich gilt für jedes $f \in \mathcal{F}_T$ dass X_1 und X_2 unter $\Phi_{\mathrm{RD}}^T(f)$ invariant sind.

Um die Behauptungen über das Spektrum von $T|_{X_1}$ und $T|_{X_2}$ zu zeigen, sei $\lambda \notin \sigma_1$ gegeben. Dann ist $\frac{1}{z-\lambda}\chi_1(z) \in \mathcal{F}_T$. Weiters gilt $(z-\lambda)\chi_1(z) \cdot \frac{1}{z-\lambda}\chi_1(z) = \chi_1(z)$, also haben wir

$$(T-\lambda)P_1 \cdot \Phi_{\mathrm{RD}}^T(\frac{1}{z-\lambda}\chi_1) = P_1 \,.$$

Für $x \in X_1$ gilt also

$$(T-\lambda)\Phi_{\mathrm{RD}}^T(\frac{1}{z-\lambda}\chi_1)x = x\,,$$

und damit ist $\lambda \in \rho(T|_{X_1})$. Genauso behandelt man $T|_{X_2}$, und erhält

$$\sigma(T|_{X_1}) \subseteq \sigma_1,\ \sigma(T|_{X_2}) \subseteq \sigma_2 \,.$$

Umgekehrt, ist $\lambda \in \rho(T|_{X_1}) \cap \rho(T|_{X_2})$, so ist

$$T - \lambda = \begin{pmatrix} T|_{X_1} - \lambda & 0 \\ 0 & T|_{X_2} - \lambda \end{pmatrix} : \begin{matrix} X_1 \\ \dot{+} \\ X_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} X_1 \\ \dot{+} \\ X_2 \end{matrix}$$

invertierbar. Die Inverse ist nämlich gegeben durch

$$\begin{pmatrix} (T|_{X_1} - \lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (T|_{X_2} - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$

Würde nun zum Beispiel $\lambda \in \sigma_1 \setminus \sigma(T|_{X_1})$ sein, so wäre $\lambda \in \rho(T|_{X_1}) \cap \rho(T|_{X_2})$ aber $\lambda \in \sigma(T)$, ein Widerspruch.

❑

Literaturverzeichnis

[B] J.Bognar: *Indefinite inner product spaces,* Springer Verlag, Berlin 1974.

[IKL] I.S.Iohvidov, M.G.Krein, H.Langer: *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric,* Akademie Verlag, Berlin 1982.

[J] P.Jonas: *On the functional calculus and spectral function for definitizable operators in Krein space,* Beiträge zur Analysis 16 (1981), 121-135.

[R] W.Rudin: *Real and complex analysis,* McGraw Hill, 3rd edition, New York 1987.