# Mathematische Methoden in der speziellen Relativitätstheorie

Harald Woracek

Vorlesung SS 2003. Vers.14.5.2003

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Wir sind daran interessiert physikalische Ereignisse und Beziehungen zwischen solchen zu beschreiben. Wir verstehen unter “Ereignis“ in idealisierter Weise Punkt-Ereignisse, d.h. Erscheinungen die weder räumliche noch zeitliche Ausdehung besitzen. In dieser Weise wird also die Existenz eines Materieteilchens (Photons, etc.) beschrieben durch eine stetige Abfolge von Ereignissen, die Weltlinie des Teilchens.

Um Ereignisse zu beschreiben, müssen sie beobachtet werden. Wir benützen experimentell nachgewiesene Tatsachen um zu definieren was wir unter einem “zulässigen Beobachter“ verstehen und wie ein solcher ein Ereignis sieht. Es liegt in unserer Natur, daß Ereignisse durch ihren “Platz in Raum und Zeit“ identifiziert werden.

**1 Annahme.** *Ein zulässiger Beobachter verfügt über ein 3-dimensionales positiv orientiertes, rechtwinkeliges Raum-Koordinatensystem. In diesem bewegen sich Photonen geradlinig.*

Weiters liegt es in unserer Natur, daß wir Ereignissen auf unserer Weltlinie eine zeitliche Ordnung geben können, d.h. von zwei Ereignissen die wir unmittelbar erleben sagen können welches vorher und welches nachher stattfindet. Im Gegensatz dazu haben wir keinen genauen und verlässlichen Sinn für die quantitative Zeitdauer die von einem Ereignis zu einem anderen vergeht.

**2 Annahme.** *Ein zulässiger Beobachter verfügt über eine Uhr mit der er den Ereignissen auf seiner Weltlinie eine quantitative zeitliche Ordnung geben kann.*

Wir erinnern uns der experimentell nachgewiesenen Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: Sei $\mathcal{O}$ ein Beobachter der den Voraussetzungen Annahme 1 und Annahme 2 genügt. Sendet $\mathcal{O}$ von seinem Platz (dem Ursprung $O$ seines Koordinatensystems) zum Zeitpunkt $t_0$ ein Lichtsignal aus, das von einem Punkt $P$ nach $O$ zurückreflektiert wird und dann zum Zeitpunkt $t_1$ wieder bei $O$ eintrifft, so berechnet sich die Geschwindigkeit des Lichtsignals als

$$\frac{2 \cdot \mathrm{Abstand}(O, P)}{t_1 - t_0}$$

**3 Annahme.** *Für einen zulässigen Beobachter ist die Lichtgeschwindigkeit die in obiger Weise ermittelt wird unabhängig vom Zeitpunkt $t_0$ an dem das Experiment durchgeführt wird, unabhängig von der Wahl des Punktes $P$, und unabhängig von der Frequenz des benützten Lichtsignals.*

Aufgrund dieser Annahme können wir von allen zulässigen Beobachtern fordern ihre Zeitmessung so zu skalieren, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist.

Nun sind wir in der Lage einem zulässigen Beobachter zu ermöglichen nicht nur Ereignisse auf seiner Weltlinie eine quantitative Zeitmessung zuzuordnen, sondern beliebigen Ereignissen. Anschaulich verfährt man wie folgt: In jedem Punkt $P$ plaziere man eine Uhr genauso wie jene in $O$. Zu einem Zeitpunkt $t_0$ sende man von $O$ ein Lichtsignal in alle Richtungen. Wenn das Signal $P$ erreicht, so setze die dort stationierte Uhr auf $t_0$ + Abstand $(O, P)$.

In dieser Weise wird also jedem Ereignis $x$ ein Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zugewiesen, $(x_1, x_2, x_3)$ die räumlichen Koordinaten und $x_4$ der Zeitpunkt. Man spricht von einer solchen Koordinatisierung der Menge aller Ereignisse durch einen zulässigen Beobachter auch als Referenzrahmen.

Wesentlich für die Entwicklung der Relativitätstheorie ist die folgende Idee:

**Relativitätsprinzip:** Alle Referenzrahmen sind für die Formulierung der Gesetze der Physik vollständig äquivalent.

Seien $(x_1, \dots, x_4)$ und $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_4)$ zwei Referenzrahmen (d.h. zwei Koordinatisierungen der Ereigniswelt). Aufgrund des Relativitätsprinzips muß ein sinnvolles physikalisches Gesetz invariant sein unter der Koordinatentransformation $(x_1, \dots, x_4) \mapsto (\hat{x}_1, \dots \hat{x}_4)$. Damit stellen sich unmittelbar folgende Fragen: Wie sehen diese Koordinatentransformationen aus? Welche Größen (oder Beziehungen) sind invariant? Wie verhalten sich bekannte physikalische Größen bei einer solchen Transformation?

Wir treffen eine weitere Annahme, die der Tatsache Rechnung trägt, daß wir "vorher" und "nachher" unterscheiden können.

**4 Annahme (Kausalitätsprinzip).** *Je zwei zulässige Beobachter stimmen bezüglich der zeitlichen Ordnung zweier Ereignisse auf der Weltlinie eines Photons überein. D.h. haben die beiden Ereignisse im Referenzrahmen des einen Beobachters die Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $(y_1, y_2, y_3, y_4)$, in dem des anderen Beobachters $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ und $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4)$, so haben $y_4 - x_4$ und $\hat{y}_4 - \hat{x}_4$ das gleiche Vorzeichen.*

Wir benutzen die obigen Ausnahmen um das im folgenden untersuchte mathematische Modell zu motivieren. Seien $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ die Koordinaten eines zulässigen Beobachters $\mathcal{O}$ und $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ die eines anderen zulässigen Beobachters $\hat{\mathcal{O}}$, $F : (x_1, \dots, x_4) \mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_4)$ die entsprechende Koordinatentransformation.

Sind $x$ und $x_0$ zwei Ereignisse auf der Weltlinie eines Photons, $x = (x_1, \dots, x_4)$, $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,4})$, so gilt da sich Licht geradlinig mit Geschwindigkeit 1 bewegt

$$(x_i - x_{0,i}) = v_i(x_4 - x_{0,4}), \ i = 1, 2, 3,$$

mit gewissen $v_1, v_2, v_3$ wobei $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. D.h. es ist

$$(x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 - x_{0,2})^2 + (x_3 - x_{0,3})^2 - (x_4 - x_{0,4})^2 = 0, \tag{0.1}$$

geometrisch bedeutet das, dass $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ auf einem rechtwinkeligen Kegel mit Spitze in $(x_{0,1}, \dots, x_{0,4})$ liegt.

Diese Überlegung gilt genauso für den Beobachter $\hat{\mathcal{O}}$, d.h. für $(\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_4) = F(x_1, \dots, x_4), (\hat{x}_{0,1}, \dots, \hat{x}_{0,4}) = F(x_{0,1}, \dots, x_{0,4})$, gilt genauso

$$(\hat{x}_1 - \hat{x}_{0,1})^2 + (\hat{x}_2 - \hat{x}_{0,2})^2 + (\hat{x}_3 - \hat{x}_{0,3})^2 - (\hat{x}_4 - \hat{x}_{0,4})^2 = 0. \tag{0.2}$$

Weiters gilt: Sollte $x_4 > x_{0,4}$ sein folgt $\hat{x}_4 > \hat{x}_{0,4}$, und analog folgt aus $x_4 < x_{0,4}$ auch $\hat{x}_4 < \hat{x}_{0,4}$. Zusammenfassend ist $F$ also eine Bijektion von $\mathbb{R}^4$ auf sich mit der Eigenschaft daß jeder Kegel (0.1) auf den entsprechenden Kegel (0.2) abgebildet wird, daß für Punkte des Kegels $x_4 > x_{0,4}$ stets $\hat{x}_4 > \hat{x}_{0,4}$ impliziert, und daß auch $\mathcal{F}^{-1}$ diese Eigenschaften besitzt.

Nun gilt (Satz von Zeman, vgl.Satz 3.4): Jede Abbildung $F$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften läßt sich darstellen als Zusammensetzung von

$(i)$ Translationen: $\hat{x}_i = x_i + \lambda_i, i = 1, \ldots, 4$, wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ fest.

$(ii)$ Positive Vielfache: $\hat{x}_i = kx_i, i = 1, \ldots, 4$, wobei $k > 0$ fest.

$(iii)$ Lineare Abbildungen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix},$$

wobei die $4 \times 4$-Matrix $\Lambda$ die folgenden Eigenschaften hat

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta,$$

mit

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$(0,0,0,1)\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 1.$$

Die Abbildungen vom Typ $(i)$ und $(ii)$ sind offenbar ziemlich trivial, interessant sind also die linearen Abbildungen $(iii)$.

Es zeigt sich, daß diese genau jene linearen Abbildungen sind die die quadratische Form

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

invariant lassen,

$$Q(\Lambda x) = Q(x) \tag{0.3}$$

und für die, mit der $Q$ entsprechende Bilinearform

$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4, \tag{0.4}$$

gilt

$$Q(x) < 0 \implies [\Lambda x, x] < 0. \tag{0.5}$$

Es stellen sich also folgende Aufgaben: Untersuchung eines 4-dimensionalen reellen Vektorraumes mit einem inneren Produkt mit negativen Index 1 (vgl. (0.4)). Beweis des Satzes von Zeeman. Untersuchung jener linearen Abbildungen die die entsprechende quadratische Form invariant lassen (vgl. (0.3)) und der Bedingung (0.5) genügen. Die Resultate, die sich im Laufe dieser Untersuchungen ergeben, können dann interpretiert werden als Beziehungen zwischen den Raum-Zeitkoordinaten eines Ereignisses in der Sicht verschiedener zulässiger Beobachter.

# Kapitel 1

# Vektorräume mit inneren Produkt

## 1.1 Innere Produkte

**1.1 Definition.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $[.,.] : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *inneres Produkt*, wenn gilt

$(i)$ Bilinearität: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$ gilt

$$[\alpha v + \beta w, u] = \alpha[v, u] + \beta[w, u] \,,$$

$$[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w] \,.$$

$(ii)$ Symmetrie: Für alle $v, w \in V$ gilt

$$[v, w] = [w, v]$$

Hat man einen Vektorraum $V$ über $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$, modifiziert man diese Gesetze wie folgt: Bei "Symmetrie" hat man $[v, w] = \overline{[w, v]}$, und das zweite Gesetz bei "Bilinearität" ist $[u, \alpha v + \beta w] = \overline{\alpha}[u, v] + \overline{\beta}[u, w]$.

Wir erinnern an den Begriff einer Basis eines Vektorraumes. Eine Teilmenge $\{b_i : i \in I\}$ von $V$ heißt *Basis*, wenn gilt

$(i)$ Für jedes $x \in V$ gibt es skalare $x_i$, $i \in I$, wobei alle bis auf endlich viele der $x_i$ gleich Null sind, sodaß gilt $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$.

$(ii)$ Lineare Unabhängigkeit: Ist für gewisse skalare $x_i$, $i \in I$ (von denen wieder alle bis auf endlich viele gleich Null sind), $\sum_{i \in I} x_i b_i = 0$, so folgt $x_i = 0$ für alle $i \in I$.

Wir betrachten nur endlichdimensionale Vektorräume, das sind solche die eine Basis bestehend aus endlich vielen Vektoren besitzen. Die Anzahl der Vektoren einer Basis nennt man dann die Dimension des Vektorraumes, $\dim V$.

*1.2 Beispiel.* Betrachte z.B. den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ und schreibe einen Vektor $x \in V$ als $x = x_1 e_1 + \ldots + x_4 e_4$ bezüglich der kanonischen Basis $\{e_1, \ldots, e_4\}$. Dann definieren z.B. die folgenden Vorschriften ein inneres Produkt auf $V$:

(*i*) $[x, y] := x_1y_1 + \ldots + x_4y_4$ (Euklidische innere Produkt)

(*ii*) $[x, y] := x_1y_1 + x_2y_4 + x_4y_2$

(*iii*) $[x, y] := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ (Lorentz innere Produkt)

**1.3 Definition.** Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, $v \perp w$, wenn gilt $[v, w] = 0$. Ist $M \subseteq V$, so heißt

$$M^\perp := \{x \in V : v \perp w \text{ für alle } w \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von $M$ in $V$. Die Menge

$$V^\circ = \{v \in V : v \perp w \text{ für alle } w \in V\}$$

heißt der *isotrope Teil* von $V$. Das innere Produkt heißt *nicht-entartet*, wenn $V^\circ = \{0\}$.

Wegen der Bilinarität von $[.,.]$ ist $M^\perp$ stets ein *Teilraum* von $V$, d.h. abgeschlossen bezüglich Addition sowie skalarer Multiplikation, d.h. selbst wieder ein Vektorraum. Weiters gilt für jeden Teilraum $W \leq V$

$$W^\circ = W \cap W^\perp \ .$$

**1.4 Lemma.** *Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$. Dann ist $[.,.]$ auf $V$ genau dann nicht-entartet, wenn*

$$\det \left([b_i, b_j]\right)_{ij=1}^n \neq 0 \ . \tag{1.1}$$

*Beweis.* Es gilt $x \in V^\circ$ genau dann, wenn $x \perp b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Schreibe $x = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n$, dann ist

$$[x, b_j] = [\sum_{i=1}^n x_ib_i, b_j] = \sum_{i=1}^n x_i[b_i, b_j] \ .$$

Das Gleichungssystem $[x, b_j] = 0$, $j = 1, \ldots, n$, hat genau dann keine nichttriviale Lösung $x = x_1b_1 + \cdots + x_nb_n$, $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, wenn (1.1) gilt. □

*1.5 Bemerkung.* Ist $V_1$ ein Teilraum von $V$ mit $V = V_1 \dot{+} V^\circ$, d.h. $V_1 + V^\circ = V$ und $V_1 \cap V^\circ = \{0\}$, so ist $V_1$ nicht-entartet. Denn wäre $x \in V_1$, $x \perp V_1$, so wäre auch $x \perp (V_1 + V^\circ)$, also $x \perp V$ und daher $x \in V^\circ$. Daher kann man sich oft auf den Fall nicht-entarteter innerer Produkte beschränken.

Der *Dualraum* $V^*$ eines Vektorraumes $V$ ist die Menge aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{R}$. Er ist selbst ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit den Operationen $(f, g : V \to \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R})$

$$(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x),\ x \in V \ ,$$

$$(\lambda f) : x \mapsto \lambda f(x),\ x \in V \ .$$

Es hat $V^*$ die gleiche Dimension wie $V$.

Sei $x_0 \in V$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto [x, x_0]$ eine lineare Abbilgung von $V$ nach $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$x_0 \mapsto (x \mapsto [x, x_0])$$

bildet also $V$ in den Dualraum $V^*$ ab. Sie ist genau dann injektiv, wenn $[.,.]$ nicht-entartet ist. Da $\dim V = \dim V^* = n$ ist, ist Injektivität gleichbedeutend mit Surjektivität bzw. Bijektivität.

**1.6 Lemma.** *Sei $W \leq V$. Ist $W$ nicht-entartet, so folgt $W \dot{+} W^\perp = V$. Ist $V$ nicht-entartet und $W + W^\perp = V$, so ist $W$ nicht-entartet. Ist $W$ und $V$ nicht entartet, so auch $W^\perp$.*

*Beweis.*
·) Sei $W$ nicht-entartet. Dann ist $W \cap W^\perp = \{0\}$. Sei $x \in V$. Die Abbildung $w \mapsto [w, x], w \in W$, gehört zu $W^*$, läßt sich also darstellen als $w \mapsto [w, w_0], w \in W$, mit einem gewissen $w_0 \in W$. Nun gilt

$$x = w_0 + (x - w_0)$$

und es ist $[x - w_0, w] = 0$ für alle $w \in W$, d.h. $x - w_0 \in W^\perp$. Wir haben daher $V = W + W^\perp$.

·) Sei $V$ nicht-entartet und $V = W + W^\perp$. Angenommen $x_0 \in W^\circ$. Sei $x \in V, x = w + u$ mit $w \in W, u \in W^\perp$. Dann ist $[x_0, x] = [x_0, w] + [x_0, u] = 0$, d.h. $x_0 \in V^\circ = \{0\}$. Also ist $W^\circ = \{0\}$.

·) Es gilt $W \dot{+} W^\perp = V$. Wäre $x \in (W^\perp)^\circ$, so auch $x \in V^\circ$.

□

**1.7 Lemma.** *Sei $V$ nicht-entartet, $n = \dim V$, und $W \leq V$. Dann gilt*

$$\dim W^\perp = n - \dim W \ .$$

*Es ist $W^{\perp\perp} = W$ und $(W^\perp)^\circ = W^\circ$.*

*Beweis.* Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$ mit $W = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_r\}, r = \dim W$. Da $V$ nicht-entartet ist, ist die lineare Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \Big([b_i, b_j]\Big)_{j,i=1}^n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

bijektiv. Insbesondere erhält sie dimensionen. Nun gilt

$$\Phi(W^\perp) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : y_1 = \ldots = y_r = 0 \right\}. \tag{1.2}$$

Denn ist $x \in W^\perp$, so ist für $j = 1, \ldots, n$ $(x = \sum_{i=1}^n x_i b_i)$

$$0 = [x, b_j] = [\sum_{i=1}^n x_i b_i, b_j] = \sum_{i=1}^n x_i [b_i, b_j] = \Phi(x)_j \ .$$

Sei umgekehrt $y_1, \ldots, y_n$ mit $y_1 = \ldots = y_r = 0$ gegeben. Es existiert $x = \sum_{i=1}^n x_i b_j \in V$ mit $y_j = [x, b_j], j = 1, \ldots, n$. Daher ist $x \in W^\perp$ und es gilt $\Phi(x)_j = \sum_{i=1}^n x_i [b_i, b_j] = y_j$.

Die Dimension der rechten Seite von (1.2) ist gleich $n - r$.

$\cdot$) Stets gilt $W \subseteq W^{\perp\perp}$ denn jedes $x \in W$ ist orthogonal auf $W^\perp$. Nun ist nach dem bereits bewiesenen

$$\dim W^{\perp\perp} = n - \dim W^\perp = n - (n - \dim W) = \dim W \ .$$

Es folgt $W = W^{\perp\perp}$.

$\cdot$) Es gilt $(W^\perp)^\circ = W^\perp \cap (W^\perp)^\perp = W^\perp \cap W = W^\circ$ .

□

Zu einem inneren Produkt $[.,.]$ auf $V$ definiert man eine *quadratische Form* $Q : V \to \mathbb{R}$ durch

$$Q(v) := [v, v], \ \ v \in V \, .$$

**1.8 Lemma.** *Sei $[.,.]$ ein inneres Produkt auf $V$ und $Q$ die entsprechende quadratische Form. Dann gilt*

($i$) Parallelogrammregel*:*

$$Q(v + w) + Q(v - w) = 2Q(v) + 2Q(w), \ \ v, w \in V \, .$$

($ii$)

$$[v, w] = \frac{1}{4}\big(Q(v + w) - Q(v - w)\big), \ \ v, w \in V \, .$$

*Insbesondere ist $[.,.]$ durch $Q$ eindeutig bestimmt.*

($iii$) Satz von Pythagoras*: Es ist $v \perp w$ genau dann, wenn*

$$Q(v) + Q(w) = Q(v + w) \ .$$

*Weiters ist $v \perp w$ genau dann, wenn $Q(v + w) = Q(v - w)$.*

*Beweis.* Es gilt

$$Q(v+w) = [v+w, v+w] = [v, v]+[v, w]+[w, v]+[w, w] = [v, v]+2[v, w]+[w, w] \ .$$

und analog

$$Q(v - w) = [v, v] - 2[v, w] + [w, w] \ .$$

□

**1.9 Definition.** Sei $[.,.]$ ein inneres Produkt auf $V$ und $Q$ die entsprechende quadratische Form. Ein Vektor $v$ heißt *positiv* (*negativ*, *neutral*), wenn $Q(v) > 0$ ($< 0$, $= 0$). Das innere Produkt $[.,.]$ heißt *positiv (semi-) definit*, wenn für alle $v \in V\{0\}$ gilt $Q(v) > 0 (\geq 0)$. Analog heißt es *negativ (semi-) definiert*, wenn stets $Q(v) < 0 (\leq 0)$. Es heißt *indefinit*, wenn es sowohl Vektoren $v$ mit $Q(v) > 0$ als auch solche mit $Q(v) < 0$ gilt.

**1.10 Lemma (Schwarzsche Ungleichung).** *Sei $[.,.]$ auf $V$ positiv semidefinit. Dann gilt*

$$[v, w]^2 \leq [v, v] \cdot [w, w], v, w \in V \ .$$

*Beweis.* Seien $v, w, \in V$ gegeben. Betrachte das quadratische Polynom ($t \in \mathbb{R}$)

$$t^2[v,v] + t2[v,w] + [w,w] = Q(tv+w) \geq 0 \ .$$

Ist $[v,v] = 0$, so folgt $[v,w] = 0$ für alle $w$, da eine lineare nicht-konstante Funktion immer sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Sei $[v,v] > 0$. Das Polynom kann nicht zwei verschiedene reelle Nullstellen haben, denn sonst würde es auch negative Werte annehmen. Also folgt

$$4[v,w]^2 - 4[w,w] \cdot [v,v] \leq 0 \ .$$

□

Die Schwarzsche Ungleichung gilt auch im Falle eines negativ semidefiniten inneren Produktes. Denn ist $[.,.]$ negativ semidefinit, so ist $[.,.]_1 := -[.,.]$ positiv semidefinit.

Es folgt aus der Schwarzschen Ungleichung, daß in einem (positiv oder negativ) semi-definiten inneren Produkt jeder neutrale Vektor isotrop ist.

Ein Teilraum $M \leq V$ heißt *maximal positiv* wenn $[.,.]$ auf $M$ positiv definit ist, aber auf keinem größeren Teilraum diese Eigenschaft hat. Analog definiert man *maximal negative* Teilräume.

**1.11 Lemma.** *Sei $V$ nicht-entartet. Ein Teilraum $M \leq V$ ist genau dann maximal positiv, wenn $M^\perp$ maximal negativ ist bzw. genau dann, wenn $M$ positiv und $M^\perp$ negativ ist. Jeder maximal positive Teilraum hat die gleiche Dimension, den* positiven Index *$\kappa_+$ von $\langle V, [.,.]\rangle$. Analog ist $M \leq V$ genau dann maximal negativ, wenn $M^\perp$ maximal positiv ist, genau dann wenn $M$ negativ und $M^\perp$ positiv und jeder maximale negative Teilraum hat die gleiche Dimension $\kappa_-$, den* negativen Index *von $\langle V, [.,.]\rangle$. Es gilt $\kappa_+ + \kappa_- = \dim V$.*

*Beweis.*
$\cdot$) Sei $M$ maximal positiv. Insbesondere ist $M$ nicht-entartet und daher $M \dot{+} M^\perp = V$. Würde $M^\perp$ einen Vektor $x$ mit $[x,x] > 0$ enthalten, so wäre

$$\hat{M} := \operatorname{span}\{M, x\}$$

ein positiv definiter Teilraum von $V$ der $M$ echt enthält. Ein Widerspruch zur Maximalität von $M$. Es ist also $[x,x] \leq 0$ für alle $x \in M^\perp$. Ist $x \in M^\perp$ mit $[x,x] = 0$, so folgt $x \in (M^\perp)^\circ = M^\circ$ und daher $x = 0$. Also ist $M^\perp$ negativ definit. Ist $\hat{M} \gneq M^\perp$, so folgt $\hat{M} \cap M \neq \{0\}$. Daher kann $\hat{M}$ nicht negativ definit sein. Also ist $M^\perp$ maximal negativ. Die Umkehrung folgt genauso wenn man beachtet daß $M^{\perp\perp} = M$.

$\cdot$) Sei $M$ maximal positiv, dann ist insbesondere $M$ positiv und nach dem bereits bewiesenen $M^\perp$ negativ. Sei umgekehrt $M$ positiv und $M^\perp$ negativ. Ist $\hat{M} \gneq M$, so folgt $\hat{M} \cap M^\perp \neq \{0\}$, denn

$$\dim \hat{M} + \dim M^\perp \gneq \dim M + \dim M^\perp = \dim V \ .$$

Also kann $\hat{M}$ nicht positiv sein und damit ist $M$ maximal positiv.

$\cdot$) Seien $M_1, M_2$ maximal positive Teilräume. Da $M_1^\perp$ dann negativ ist, folgt $M_1^\perp \cap M_2 = \{0\}$ und daher

$$\dim M_1^\perp + \dim M_2 \leq \dim V = \dim M_1 + \dim M_1^\perp \ ,$$

also $\dim M_2 \leq M_1$. Vertauscht man die Rollen von $M_1$ und $M_2$, so folgt $\dim M_1 \leq \dim M_2$.

·) Der Rest der Aussage folgt aus dem bereits bewiesenen wenn man beachtet daß $M^{\perp\perp} = M$ gilt (oder man führt genau die selben Argumentationen noch einmal durch).

□

**1.12 Korollar.** *Sei $M$ ein neutraler Teilraum des nichtentarteten Raumes $V$, d.h. $[x,y] = 0$, $x, y \in M$. Dann gilt*

$$\dim M \leq \min\{\kappa_+, \kappa_-\} .$$

*Beweis.* Ist $\hat{M}$ ein maximal positiver Teilraum, so gilt $\hat{M} \cap M = \{0\}$, also folgt $\dim \hat{M} + \dim M \leq \dim V$, d.h. $\dim M \leq \dim V - \kappa_+ = \kappa_-$. Genauso findet man $\dim M \leq \kappa_+$.

□

## 1.2 Orthonormalbasen, Fundamentalzerlegung

**1.13 Definition.** Eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von $V$ heißt *Orthonormalbasis*, wenn gilt

$$[b_i, b_j] = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & i \neq j \\ \pm 1 & , & i = j \end{array} \right. , \ i, j = 1, \ldots, n .$$

**1.14 Satz.** *Sei $[.,.]$ ein nicht-entartetes inneres Produkt auf $V$. Dann existiert eine Orthonormalbasis. Für jede solche, $\{b_1, \ldots, b_n\}$, gilt*

$$\#\{b_j : [b_i, b_i] = +1\} = \kappa_+$$

$$\#\{b_j : [b_i, b_i] = -1\} = \kappa_-$$

*Beweis.*
·) Wir verwenden Induktion nach $n = \dim V$. Im Fall $n = 1$, also $V = \operatorname{span}\{v_1\}$ ist $[v_1, v_1] \neq 0$ denn sonst wäre $[.,.]$ entartet. Setze

$$b_1 := \frac{v_1}{\sqrt{|[v_1, v_1]|}} .$$

Sei nun $n > 1$. Wähle $b_n \in V$ mit $[b_n, b_n] \neq 0$. Ein solches Element existiert, denn $V$ ist nicht-entartet und daher insbesondere $[v, w]$ nicht identisch 0 und daher auch $[v, v]$ nicht identisch 0. Setze $M := \operatorname{span}\{b_n\}$, dann ist $M$ nicht-entartet und daher $M \dot{+} M^\perp = V$, $\dim M^\perp = n - 1$, und $M^\perp$ nicht-entartet. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von $M^\perp$. Dann ist

$$\{b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n\}$$

eine Orthonormalbasis von $V$.

·) Sei $\{b_1, \ldots b_n\}$ eine Orthonormalbasis. Setze

$$M_+ := \operatorname{span}\{b_i : [b_i, b_i] = +1\} ,$$

$$M_- := \operatorname{span}\{b_i : [b_i, b_i] = -1\} .$$

Dann ist $M_+^\perp = M_-, M_+$ positiv und $M_-$ negativ. Also ist $M_+$ maximal positiv und $M_-$ maximal negativ, die Dimension daher

$$\dim M_+ = \kappa_+, \dim M_- = \kappa_- .$$

□

*1.15 Bemerkung.* Die Aussage von Satz 1.14 ist gerade das Trägheitsgesetz von Sylvester für quadratische Formen.

**1.16 Satz.** *Sei $V$ indefinit. Dann existiert eine Basis von $V, \{b_1, \ldots, b_n\}$, bestehend aus neutralen Vektoren, $[b_i, b_i] = 0, i = 1, \ldots, n$.*

*Beweis.*
·) Schreibe $V = V_1 \dot{+} V^\circ$. Ist die Behauptung gezeigt für jeden nicht-entarteten Raum, so folgt sie auch für $V$, denn $V^\circ$ ist ein neutraler Teilraum also hat jede beliebige Basis von $V^\circ$ die verlangte Eigenschaft.

·) Sei also $V$ nicht-entartet. Wähle eine ONB $\{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots b_n\}$ mit

$$[b_i, b_i] = \begin{cases} +1 & , \quad i = 1, \ldots, r \\ -1 & , \quad i = r+1, \ldots, n \end{cases} .$$

Da $V$ indefinit ist, gilt $1 \leq r < n$, d.h. $[b_1, b_1] > 0, [b_n b_n] < 0$. Die Vektoren

$$b_1 - b_n, \ldots, b_r - b_n, b_{r+1} + b_1, \ldots, b_n + b_1$$

sind sämtliche neutral:

$$[b_1 - b_n, b_1 - b_n] = [b_1, b_1] + [b_n, b_n] = 0$$

usw. Sie sind linear unabhängig: Angenommen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(b_i - b_n) + \sum_{i=r-1}^{n} \lambda_i(b_i + b_1) = 0 ,$$

also

$$(\lambda_1 + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i)b_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i b_i + (-\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + \lambda_n)b_n = 0 .$$

Es folgt $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ und $\lambda_1 + \lambda_n = 0, -\lambda_1 + \lambda_n = 0$, also auch $\lambda_1, \lambda_n = 0$.

□

Sei $V$ ein nichtentarteter Raum mit dem inneren Produkt $[.,.]$. Wähle einen maximal positiven Teilraum $V_+$ und setze $V_- := V_+^\perp$. Dann ist also $V_-$ maximal negativ und es gilt $V = V_+[\dot{+}]V_-$. Man spricht von einer *Fundamentalzerlegung.* Ist $x \in V$, so läßt sich $x$ in eindeutiger Weise darstellen als $x = x_+ + x_-$ mit gewissen $x_+ \in V_+$ und $x_- \in V_-$. Die zu dieser Fundamentalzerlegung gehörige *Fundamentalsymetrie* ist die Abbildung

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x = x_+ + x_- & \mapsto & Jx := x_+ - x_- \end{array} \right. .$$

Weiters definiert man ein inneres Produkt $(.,.)$ auf $V$ durch

$$(.,.) : \left\{ \begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & [Jx,y] \end{array} \right. .$$

**1.17 Lemma.** *Das innere Produkt $(.,.)$ ist positiv definit. Es gilt für alle $x, y \in V$*

$$[Jx,y] = [x,Jy] = (x,y),$$
$$(Jx,y) = (x,Jy) = [x,y],$$
$$J^2 x = x.$$

*Beweis.* Sei $x \in V, x = x_+ + x_-$. Dann gilt

$$(x,x) = [Jx,x] = [x_+ - x_-, x_+ + x_-] = [x_+,x_+] - [x_-,x_-] \geq 0$$

wobei "=" nur gelten kann wenn $x_+ = x_- = 0$. Die übrigen Eigenschaften rechnet man genauso nach.

□

*1.18 Beispiel.* Ist zum Beispiel $\{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ eine ONB von $V$ mit $[b_1,b_1] = \dots = [b_r,b_r] = +1, [b_{r+1},b_{r+1}] = \dots = [b_n,b_n] = -1$, so ist

$$J : b_i \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} b_i & , & i = 1, \dots, r \\ -b_i & , & i = r+1, \dots, n \end{array} \right.$$

eine Fundamentalsymetrie. Sie gehört zu der Fundamentalzerlegung

$$V = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_r\}[\dot{+}]\operatorname{span}\{b_{r+1}, \dots, b_n\} .$$

Es ist $b_1, \dots, b_n$ eine ONB von $V$ bzgl. des inneren Produktes $(.,.)$.

**1.19 Satz.** *Sei $V$ nicht-entartet und sei $W$ ein Teilraum von $V$. Weiters seien Zerlegungen $W = W_1 \dot{+} W^\circ, W^\perp = W_2 \dot{+} W^\circ$, gegeben. Dann existiert ein neutraler Teilraum $W'$ sodaß*

$$V = W_1[\dot{+}](W^\circ \dot{+} W')[\dot{+}]W_2 .$$

*Es existiert eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von $V$ sodaß ($r = \dim W_1, d = \dim W^\circ$)*

$$\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_d\} = W^\circ, \operatorname{span}\{b_{d+1}, \dots, b_{2d}\} = W' ,$$
$$\{b_{2d+1}, \dots, b_{2d+r}\} \text{ ONB von } W_1 ,$$
$$\{b_{2d+r+1}, \dots, b_n\} \text{ ONB von } W_2 ,$$
$$[b_i, b_{d+j}] = \delta_{ij}, i,j = 1, \dots, d .$$

*Beweis.*
·) Der Raum $W_1$ ist nichtentartet, besitzt also eine ONB. Wir bezeichnen sie mit $\{b_{2d+1}, \dots, b_{2d+r}\}$ wobei $r = \dim W_1$. Sei $d = \dim W^\circ$, dann gilt

$$\dim W_2 = \dim W^\perp - d = n - \dim W - d = n - r - 2d \; .$$

Da $W_2$ nicht-entartet ist besitzt $W_2$ eine ONB. Wir bezeichnen sie mit $\{b_{2d+r+1}, \dots, b_n\}$.

·) Betrachte den nicht-entarteten Raum $\tilde{V} := (W_1 + W_2)^\perp$. Dann gilt $\dim \tilde{V} = 2d, W^\circ \leq \tilde{V}$. Wähle eine Fundamentalsymetrie $J$ von $\tilde{V}$ und bezeichne mit $(.,.)$ das entsprechende positive definite innere Produkt. Definiere

$$W' := JW^\circ \; .$$

Wähle eine ONB von $\langle W^\circ, (.,.)\rangle$, $b_1, \dots, b_d$ und setze

$$b_{d+i} := Jb_j, i = 1, \dots, d \; .$$

·) Es gilt $W^\circ \cap W' = \{0\}$, denn: Angenommen $Jy \in W^\circ$ für ein $y \in W^\circ$. Dann folgt $0 = [Jy, y] = (y, y)$ und damit $y = 0$. Da $J$ bijektiv ist ($J^2 = \text{id}$), ist $\dim W' = \dim W^\circ = d$ und damit $\dim(W^\circ \dot{+} W') = 2d = \dim \tilde{V}$, also $\tilde{V} = W^\circ \dot{+} W'$. Da $\{b_1, \dots, b_d\}$ Basis von $W^\circ$ ist, ist auch $\{b_{d+1}, \dots, b_{d+d}\} = \{Jb_1, \dots, Jb_d\}$ eine Basis von $W'$ und es gilt

$$[b_i, b_{d+j}] = [b_i, Jb_j] = (b_i, b_j) = \delta_{ij} \; .$$

Weiters ist für $x \in W^\circ$ stets

$$[Jx, Jx] = [x, J^2 x] = [x, x] = 0 \; ,$$

also ist $W'$ bzgl. $[.,.]$ neutral.

□

## 1.3 Orthogonale Transformationen

**1.20 Definition.** Sei $[.,.]$ ein inneres Produkt auf $V$. Eine lineare Abbildung $L : V \to V$ heißt *orthogonal*, wenn gilt

$$[Ux, Uy] = [x, y], x, y \in V \; .$$

**1.21 Lemma.** *Sei $V$ nicht-entartet. Die Menge der orthogonalen Transformationen auf $V$ bildet eine Gruppe (bzgl. der Hintereinanderausführung).*

*Beweis.*
·) Seien $L_1, L_2$ orthogonal. Dann gilt auch

$$[(L_1 L_2)x, (L_1 L_2)] = [L_1(L_2 x), L_1(L_2 y)] = [L_2 x, L_2 y] = [x, y] \; .$$

·) Sei $L = \text{id}$. Dann ist $[Lx, Ly] = [x, y]$.

$\cdot$) Sei $L$ orthogonal und sei $Lx = 0$. Dann gilt $0 = [Lx, Ly] = [x, y]$ für alle $y \in V$. Also ist $x = 0$. Damit ist $L$ injektiv, und da $V$ endlichdimensional ist daher bijektiv. Es existiert also $L^{-1}$ und es gilt

$$[L^{-1}x, L^{-1}y] = [L(L^{-1}x), L(L^{-1}y)] = [x, y] \ ,$$

d.h. $L^{-1}$ ist orthogonal.

□

**1.22 Lemma.** *Sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

*(i)* *$L$ ist orthogonal.*

*(ii)* $L^* = L^{-1}$.

*(iii)* *Für jedes $x \in V$ gilt $Q(Lx) = Q(x)$.*

*Beweis.* Sei $L$ orthogonal. Dann gilt

$$[L^{-1}x, y] = [LL^{-1}x, Ly] = [x, Ly] \ ,$$

d.h. es ist $L^{-1} = L^*$. Umgekehrt sei $L^* = L^{-1}$, dann folgt

$$[Lx, Ly] = [L^*Lx, y] = [x, y] \ .$$

Sei $L$ orthogonal. Dann gilt insbesondere

$$Q(Lx) = [Lx, Lx] = [x, x] = Q(x) \ .$$

Die Umkehrung folgt wegen der Parallelogrammregel.

□

**1.23 Lemma.** *Sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis. Sei $G$ die Matrix* (Gram-Matrix)

$$G := ([b_i, b_j])_{i,j=1}^n$$

*und sei $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{ij=1}^n$ die Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Dann ist $L$ orthogonal genau dann wenn gilt*

$$\Lambda^T G\ \Lambda = G \ .$$

*Beweis.*
$\cdot$) Sei $x = \sum_i x_i b_i$, $y = \sum_j y_j b_j$. Dann gilt

$$[Lx, Ly] = \sum_{i,j} x_i y_j [Lb_i, Lb_j] \tag{1.3}$$

und

$$[x, y] = \sum_{i,j} x_i y_j [b_i, b_j] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T ([b_i, b_j])_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ . \tag{1.4}$$

Die Abbildung $L$ ist daher genau dann orthogonal, wenn $[Lb_i, Lb_j] = [b_i, b_j]$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

·) Bezeichne $\hat{G} = ([Lb_i, Lb_j])_{i,j=1}^n$ die Gram-Matrix von $\{Lb_1, \ldots, Lb_n\}$, und sei $\Lambda$ die Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\{b_1, \ldots, b_1\}$. Dann gilt wegen (1.4)

$$[Lx, Ly] = \left[\Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^T ([b_i, b_j])_{i,j=1}^n \left[\Lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \Lambda^T G \Lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Andererseits wegen (1.3),

$$[Lx, Ly] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \hat{G} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

und es folgt $\hat{G} = \Lambda^T G \Lambda$. Wie im ersten Absatz festgestellt, ist $L$ orthogonal genau dann wenn $G = \hat{G}$ gilt.

□

**1.24 Lemma.** *Sei $L$ eine lineare Abbildung. Dann ist $L$ orthogonal genau dann, wenn für eine (und daher jede) ONB $\{e_1, \ldots, e_4\}$ auch die Menge $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ eine ONB ist (wobei die + und − auch gleich bleiben).*

*Beweis.* Sei $L$ orthogonal. Dann gilt

$$[Le_i, Le_j] = [e_i, e_j], i, j = 1, \ldots, n \; ;$$

also hat $L$ die geforderte Eigenschaft. Umgekehrt sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine ONB und $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ auch (mit den gleichen $\pm$). Dann ist also stets $[Le_i, Le_j] = [e_i, e_j]$. Sind $x, y \in V, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, so folgt

$$[x, y] = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j [e_i, e_j] = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j [Le_i, Le_j] = [Lx, Ly] \; .$$

□

**1.25 Korollar.** *Sei $L$ eine orthogonale Transformation des nichtentarteten Raumes $V$. Dann gilt*

$$\det L = \pm 1 \; .$$

*Beweis.* Sei $\Lambda$ die Matrix der linearen Abbildung $L$ bezüglich einer Basis $\{b_1, \ldots, b_4\}$ und sei $\xi$ die Gram-Matrix der Basis. Dann ist $\Lambda^T \xi \Lambda = \xi$, also folgt

$$\det(\Lambda^T) \cdot \det \xi \cdot \det \Lambda = \det \xi$$

und daher ist $(\det \Lambda)^2 = 1$.

□

**1.26 Lemma.** *Sei $L$ eine orthogonale Transformation des nichtentarteten Raumes $V$. Ist $U \leq V$ ein invarianter Teilraum von $L$, d.h. $LU \subseteq U$, so ist auch $U^\perp$ invarianter Teilraum.*

*Beweis.* Da $V$ nichtentartet ist, ist $L$ injektiv. Wegen $\dim U \leq V < \infty$ erhält man aus $LU \subseteq U$ also sogar $LU = U$. Sei nun $\hat{u} \in U^{\perp}$ und $u \in U$. Dann ist $L^{-1}u \in U$ und es folgt

$$[L\hat{u}, u] = [L\hat{u}, L(L^{-1}u)] = [\hat{u}, L^{-1}u] = 0 \ ,$$

d.h. $L\hat{u} \in U^{\perp}$.

□

**1.27 Korollar.** *Sei $L$ orthogonale Transformation des nichtentarteten Raumes $V$. Ist $e$ ein nicht-neutraler Eigenvektor von $L$, so zerlegt sich $V$ in die orthogonale direkte Summe der beiden $L$-invarianten Teilräume* $\operatorname{span}\{e\}$ *und* $\operatorname{span}\{e\}^{\perp}$.

*Beweis.* Wende Lemma 1.26 an mit $U = \operatorname{span}\{e\}$.

□

# Kapitel 2

# Minkowski Raumzeit

## 2.1 Licht- und Zeitkegel

**2.1 Definition.** *Minkowski Raumzeit* ist ein 4-dimensionaler Vektorraum $\mathbb{M}$ über $\mathbb{R}$ mit einem nicht-entarteten inneren Produkt $[.,.] : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ mit negativem Index 1. Die Elemente von $\mathcal{M}$ bezeichnen wir als *Ereignisse*, das innere Produkt als *Lorentz-inneres Produkt.* Die zu $[.,.]$ gehörige quadratische Form bezeichnen wir mit $Q$, d.h. $Q(v) = [v, v]$.

*2.2 Interpretation.* Die Elemente von $\mathcal{M}$ stellen denkbare physikalische Punkt-Ereignisse dar. Ist $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Orthonormalbasis (mit $[e_4, e_4] = -1$) und $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathcal{M}$, d.h. $v = x_1e_1 + \cdots + x_4e_4$, so fasst man $(x_1, \ldots, x_4)$ auf als die Koordinaten des Ereignisses $v$ im Referenzrahmen eines zulässigen Beobachters. Man identifiziert also die zulässigen Beobachter, d.h. ihre Referenzrahmen, mit einer ONB in $\mathcal{M}$. Die zum negativen Basisvektor $e_4$ gehörige, Koordinate $x_4$ heißt die *Zeitkoordinate*, $(x_1, x_2, x_3)$ die *Raumkoordinate* des Ereignisses $v$ im Referenzrahmen des Beobachters der über die ONB $\{e_1, \ldots, e_4\}$ verfügt. Das diese Vorgangsweis gerechtfertigt ist beruht auf dem Satz von Zeeman Satz 3.4. An dieser Stelle kann das Gesagte eigentlich noch nicht als "Interpretation" aufgefaßt werden! es soll nur eine Vorstellung vermittelt werden.

**2.3 Definition.** Sei $x \in \mathcal{M}$. Dann heißt $x$

($i$) *lichtartig*, wenn $Q(x) = 0$.

($ii$) *zeitartig*, wenn $Q(x) < 0$.

($iii$) *raumartig*, wenn $Q(x) > 0$.

*2.4 Bemerkung.* Es gilt:

($i$) Es gibt eine Basis aus vier lichtartigen Vektoren (vgl. Satz 1.16)

($ii$) Seien $v, w$ zwei von Null verschiedene lichtartige Vektoren. Dann gilt $v \perp w$ genau dann, wenn $v$ und $w$ linear abhängig sind.

($iii$) Sei $v$ zeitartig und $w \neq 0$. Gilt $v \perp w$, so ist $w$ raumartig.

**2.5 Lemma.** *Sei $Q(v) < 0$ und $Q(w) \leq 0, w \neq 0$, und sei $\{e_1, \dots, e_4\}$ eine ONB ($[e_4, e_4] = -1$), $v_1 e_1 + \dots + v_4 e_4$, $w = w_1 e_1 + \dots + w_4 e_4$. Dann gibt es die folgenden beiden Möglichkeiten:*

(*i*) $[v, w] < 0$, *in diesem Fall ist* $v_4 w_4 > 0$.

(*ii*) $[v, w] > 0$, *in diesem Fall ist* $v_4 w_4 < 0$.

*Beweis.* Es ist $[v, v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 < 0$ und $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - w_4^2 \leq 0$, also folgt ($w \neq 0$)

$$v_4^2 w_4^2 > (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \geq (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \ .$$

Daher ist

$$|v_4 w_4| > |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3| \ ,$$

und daher $v_4 w_4 \neq 0$ und $[v, w] \neq 0$. Angenommen $v_4 w_4 > 0$. Dann folgt

$$[v, w] = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4 < 0 \ .$$

Ist $v_4 w_4 < 0$ so folgt $[v, -w] < 0$, also $[v, w] > 0$.

□

Bezeichne mit $\tau$ die Menge aller zeitartigen Vektoren in $\mathcal{M}$. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\tau$ durch ($v, w \in \tau$)

$$v \sim w :\Longleftrightarrow [v, w] < 0 \ ,$$

d.h. $v \sim w$ genau dann, wenn $v_4$ und $w_4$ das gleiche Vorzeichen haben. Diese Tatsache hängt nicht von der Wahl der ONB ab.

**2.6 Lemma.** *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\tau$ mit zwei Äquivalenzklassen, $\tau_+$ und $\tau_-$. Die Elemente von $\tau_+$ heißen* zukunftsorientiert, *die von $\tau_-$* vergangenheitsorientiert. *Die Klassen $\tau_+$ und $\tau_-$ sind Kegel, d.h. mit $v, w \in \tau_+$ (bzw. $\tau_-$) und $r > 0$ gilt $rv \in \tau_+$ (bzw. $\tau_-$) und $v + w \in \tau_+$ (bzw. $\tau_-$).*

*Beweis.* Seien $u, v, w \in \tau$. Es gilt $[v, v] = Q(v) < 0$, also $v \sim v$. Ist $v \sim w$, so folgt $[w, v] = [v, w] < 0$, also $w \sim v$. Sei $u \sim v$ und $v \sim w$. Wähle eine ONB, dann haben $u_4$ und $v_4$ sowie auch $v_4$ und $w_4$ das gleiche Vorzeichen. Also haben auch $u_4$ und $w_4$ das gleiche Vorzeichen und daher gilt $u \sim w$.

Sei $v_0 \in \tau$ fest gewählt und sei $w \in \tau$. Wähle wieder eine ONB. Dann hat $w_4$ entweder das gleiche Vorzeichen wie $v_{0,4}$ oder wie $-v_{0,4}$. Also ist entweder $w \sim v_0$ oder $w \sim -v_0$. Es gibt also höchstens zwei Äquivalenzklassen. Wegen $v_0 \not\sim -v_0$ sind die Klassen von $v_0$ und $-v_0$ verschieden.

Sei $v \in \tau$ und $r > 0$, dann gilt $[rv, v] = r[v, v] < 0$, also $rv \sim v$. Daher gehören $rv$ und $v$ entweder beide zu $\tau_+$ oder beide zu $\tau_-$. Sei $v, w \in \tau$, $v \sim w$. Dann folgt

$$[v + w, v] = \underbrace{[v, v]}_{=Q(v)<0} + \underbrace{[w, v]}_{<0} < 0 \ ,$$

also $v + w \sim v$.

□

Man beachte, daß $\tau_- = \{-x : x \in \tau+\}$.

**2.7 Lemma.** *Sei $n \in \mathcal{M}, n \neq 0$, lichtartig. Dann hat $[n, v]$ für alle $v \in \tau_+$ das gleiche Vorzeichen. Der Vektor $n$ heißt* zukunftsorientiert, *wenn $[n, v] < 0$ für ein (und daher für alle) $v \in \tau_+$, und anderenfalls* vergangenheitsorientiert. *Seien $n_1, n_2$ lichtartig und $e_1, \dots, e_4$ eine ONB. Dann sind $n_1$ und $n_2$ beide zukunftsorientiert oder beide vergangenheitsorientiert genau dann, wenn $n_{1,4}$ und $n_{2,4}$ das gleiche Vorzeichen haben.*

*Beweis.* Seien $v_1, v_2 \in \tau_+$ und sei angenommen $[n, v_1] > 0, [n, v_2] < 0$. Beachte, daß wegen Bemerkung 2.4, *(iii)*, stets $[n, v] \neq 0$ für $v \in \tau_+ \subseteq \tau$ gilt. Da mit $v_i$ auch $v_i \cdot |[n, v_i]|^{-1}$ zu $\tau_+$ gehört $(i = 1, 2)$ sei o.B.d.A.

$$[n, v_1] = 1, [n, v_2] = -1 \ .$$

Es folgt $[n, v_1 + v_2] = 0$, ein WS, denn $v_1 + v_2 \in \tau_+$.

Seien $n_1, n_2$ beide zukunftsorientiert. Wähle $v \in \tau_+$, dann gilt also $[n_1, v], [n_2, v] < 0$. Wegen Lemma 2.5 haben $n_{1.4}$ und $v_4$, sowie $n_{2,4}$ und $v_4$ das gleiche Vorzeichen. Also haben $n_{1,4}$ und $n_{2,4}$ das gleiche Vorzeichen. Sei $n_1$ zukunftsorientiert und $n_2$ vergangenheitsorientiert. Dann sind $n_1, -n_2$ beide zukunftsorientiert, also haben $n_{1,4}$ und $-n_{2,4}$ das gleiche Vorzeichen. Die anderen Fälle erledigt man analog.

□

Ist $x_0 \in \mathcal{M}$, so bezeichnen wir

$$\mathcal{C}_N(x_0) := \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) = 0\} \ ,$$
$$\mathcal{C}_N^+(x_0) := \{x \in \mathcal{C}_N(x_0) : x - x_0 \text{ zukunftsorientiert}\} \ ,$$
$$\mathcal{C}_N^-(x_0) := \{x \in \mathcal{C}_N(x_0) : x - x_0 \text{ vergangenheitsorientiert}\} \ ,$$

und für $x_0 \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{C}_N(x_0)$, sei

$$R_{x_0,x} := \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\} \ .$$

Beachte das gilt $R_{x_0,x} = R_{x,x_0}$, denn ist $z = x_0 + t(x - x_0)$, so gilt auch $z = x + (1 - t)(x_0 - x)$.

*2.8 Interpretation.* Die Tatsache $Q(x - x_0) = 0$ bedeutet

$$(x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 - x_{0,2})^2 + (x_3 - x_{0,3})^2 - (x_4 - x_{0,4})^2 = 0 \ ,$$

das also $x$ und $x_0$ auf der Weltlinie eines Photons liegen, d.h. durch einen Lichtstrahl verbunden werden können. Wir bezeichnen $R_{x_0,x}$ als den *Lichtstrahl* der $x_0$ und $x$ erbindet, und $\mathcal{C}_N(x_0)$ den *Lichtkegel* bei $x_0$. Es ist $x \in \mathcal{C}_N^+(x_0)$ wenn man $x_0$ und $x$ auffassen kann als senden und empfangen eines Lichtsignals. Ganz $\mathcal{C}_N^+(x_0)$ kann also interpretiert werden als: Zum Zeitpunkt $x_{0,4}$ wird an der Stelle $(x_{0,1}, \dots, x_{0,3})$ eine elektromagnetische Welle ausgesandt, und man verfolgt die Ausbreitung dieser Welle. Wir bezeichnen $\mathcal{C}_N^+(x_0)$ als den *Zukunftslichtkegel*, und $\mathcal{C}_N^-(x_0)$ als den *Vergangenheitslichtkegel.*

Bezeichne für $x_0 \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{C}_T(x_0) := \{x \in \mathcal{M} : Q(x - x_0) < 0\} \ ,$$
$$\mathcal{C}_T^+(x_0) := \{x \in \mathcal{C}_T(x_0) : x - x_0 \in \tau^+\} \ ,$$
$$\mathcal{C}_T^-(x_0) := \{x \in \mathcal{C}_Z(x_0) : x - x_0 \in \tau^-\} \ .$$

$\mathcal{C}_T(x_0)$ ist das Innere des Lichtkegels $\mathcal{C}_N(x_0)$ und heißt Zeitkegel. $\mathcal{C}_T^+(x_0)$ bzw. $\mathcal{C}_T^-(x_0)$ der *Zukunfts-* bzw. *Vergangenheitskegel.*

*2.9 Interpretation.* Liegt $x$ außerhalb von $\mathcal{C}_T(x_0) \cup \mathcal{C}_N(x_0)$, d.h. das $x - x_0$ raumartig ist, so ist der räumliche Abstand von $x$ und $x_0$ so groß daß nicht einmal ein Photon so schnell ist diese Distanz in der vorgegebenen Zeit zu überwinden.

**2.10 Lemma.** *Seien $x, x_0 \in \mathcal{M}$, $x \neq x_0$, $Q(x - x_0) = 0$. Dann gilt*

$$R_{x_0,x} = \mathcal{C}_N(x_0) \cap \mathcal{C}_N(x) \ .$$

*Beweis.* Sei $z = x_0 + t(x - x_0) \in R_{x_0,x}$. Dann gilt $z - x_0 = t(x - x_0)$, also $Q(z - x_0) = 0$, d.h. $z \in \mathcal{C}_N(x_0)$. Wegen $R_{x_0,x} = R_{x,x_0}$ folgt genauso $z \in \mathcal{C}_N(x)$.

Sei umgekehrt $z \in \mathcal{C}_N(x_0) \cap \mathcal{C}_N(x)$. Dann ist

$$Q((z - x) + (x - x_0)) = Q(z - x_0) = 0 = Q(z - x) + Q(x - x_0) \ .$$

Mit Lemma 1.8, $(iii)$, folgt $z - x \perp x - x_0$. Es folgt, daß $z - x$ und $x - x_0$ linear abhängig sind (beide sind neutral), d.h. es gilt $z - x = t(x - x_0)$ für ein gewisses $t \in \mathbb{R}$. Daher ist $z \in R_{x_o,x}$.

□

**2.11 Lemma.** *Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{M}$ zeitartig oder lichtartig und alle zukunftsorientiert. Weiters seien nicht alle lichtartig und parallel. Dann ist $v := v_1 + \cdots + v_n$ zeitartig und zukunftsorientiert, d.h. $v \in \tau_+$.*

*Beweis.* Wir zeigen zur Vorbereitung vier Teilbehauptungen:

$(i)$ Seien $w_1, w_2 \in \tau_+$. Wie in Lemma 2.6 gezeigt wurde folgt auch $w_1 + w_2 \in \tau_+$.

$(ii)$ Sei $w_1 \in \tau_+, w_2$ lichtartig und zukunftsorientiert. Dann folgt

$$Q(w_1 + w_2) = [w_1 + w_2, w_1 + w_2] = \underbrace{[w_1, w_1]}_{<0} + 2\underbrace{[w_1, w_2]}_{<0} < 0 \ ,$$

also ist $w_1 + w_2$ zeitartig. Weiters gilt

$$[w_1 + w_2, w_1] = [w_2, w_1] < 0 \ ,$$

also ist $w_1 + w_2 \sim w_1$ und gehört daher auch zu $\tau_+$.

$(iii)$ Seien $w_1, w_2$ lichtartig und zukunftsorientiert (und nicht parallel). Wegen Bemerkung 2.4, $(iii)$, gilt $[w_1, w_2] \neq 0$. Ist $[w_1, w_2] < 0$, so folgt

$$Q(w_1 + w_2) = [w_1 + w_2, w_1 + w_2] = 2[w_1, w_2] < 0 \ ,$$

also ist $w_1 + w_2$ zeitartig. Weiters ist

$$[w_1, w_1 + w_2] = [w_1, w_2] < 0 \ ,$$

und daher wegen Lemma 2.7 auch $w_1 + w_2 \in \tau_+$ .

Sei nun angenommen daß $[w_1, w_2] > 0$. Wir leiten einen Widerspruch her. Es gilt

$$Q(w_1 - w_2) = [w_1 - w_2, w_1 - w_2] = -2[w_1, w_2] < 0 \ ,$$

d.h. $w_1 - w_2$ ist zeitartig. Wegen

$$[w_1, w_1 - w_2] = -[w_1, w_2] < 0 \ ,$$

also, wegen Lemma 2.7, $w_1 - w_2 \in \tau_+$. Andererseits gilt

$$[w_2, -w_1 + w_2] = -[w_2, w_1] < 0 \ ,$$

also, wieder mit Lemma 2.7, $-w_1 + w_2 \in \tau_+$ und daher $w_1 - w_2 \in \tau_-$, WS ! .

$(iv)$ Seien $w_1, w_2$ lichtartig, zukunftsorientiert und parallel. Dann ist $w_1 + w_2$ ebenfalls lichtartig und zukunftsorientiert: Schreibe

$$w_2 = \lambda w_1 \ .$$

Ist $u \in \tau_+$, so gilt $[w_1, u] < 0, [w_2, u] < 0$, also folgt $\lambda > 0$. Damit ist auch $[w_1 + w_2, u] = (1 + \lambda)[w_1, u] < 0$, d.h. $w_1 + w_2$ zukunftsorientiert.

Wir kommen zum Beweis des Lemmas. Induktion nach $n$: Fall $n = 2$ wurde in $(i) - (iii)$ behandelt. Weiter $n \mapsto n + 1$: Seien $v_1, \ldots, v_{n+1}$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $v_1 + \cdots + v_n \in \tau_+$ oder $v_1 + \cdots + v_n$ lichtartig und zukunftsorientiert (nämlich wenn $v_1, \ldots, v_n$ alle lichtartig, zukunftsorientiert und parallel sind). Mit $(i) - (iii)$ folgt

$$(v_1 + \cdots + v_n) + v_{n+1} \in \tau_+$$

denn es kann nicht $v_{n+1}$ lichtartig, zukunftsorientiert und parallel zu $v_1 + \cdots + v_n$ sein.

$\square$

**2.12 Lemma.** *Sei $x_0 \in \mathcal{M}$. Der Zukunftskegel $\mathcal{C}_T^+(x_0)$ ist offen. Es gilt*

$$\overline{\mathcal{C}_T^+(x_0)} = \mathcal{C}_T^+(x_0) \cup \mathcal{C}_N^+(x_0) \cup \{x_0\} \ .$$

*Die analogen Aussagen gelten für $\mathcal{C}_T^-(x_0), \mathcal{C}_N^-(x_0)$ sowie auch für $\mathcal{C}_T(x_0), \mathcal{C}_N(x_0)$.*

*Beweis.* Es genügt die Aussage für den Fall $x_0 = 0$ zu zeigen, denn die Translation $x \mapsto x + x_0$ ist ein Homöomorphismus und bildet $\mathcal{C}_T^+(0)$ auf $\mathcal{C}_T^+(x_0), \mathcal{C}_N^+(0)$ auf $\mathcal{C}_N^+(x_0)$, etc. ab.

Sei $v \in \tau_+$ fest gewählt. Wegen

$$\mathcal{C}_T^+(0) = \tau_+ = \{x \in \mathcal{M} : Q(x) < 0, [x, v] < 0\}$$

und der Stetigkeit von $[.,.]$ folgt daß $\mathcal{C}_T^+(0)$ offen ist.

Wir zeigen als nächstes $\overline{\mathcal{C}_T^+(0)} \subseteq \mathcal{C}_T^+(0) \cup \mathcal{C}_N^+(0) \cup \{0\}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \tau_+$, eine konvergente Folge, $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Wegen $Q(x_n) < 0$ und $[x_n, v] < 0$ folgt

$$Q(x) \leq 0, [x, v] \leq 0 \ .$$

Betrachte zuerst den Fall das $x$ und $v$ linear abhängig sind, $x = \lambda v$. Wegen $[v, v] < 0$ folgt $\lambda \geq 0$. Ist $\lambda = 0$, so ist $x = 0$, ist $\lambda > 0$ folgt $x \in \tau_+$ (wegen Lemma 2.6). Seien $x$ und $v$ linear unabhängig. Dann kann nicht $[x, v] = 0$ gelten (Bemerkung 2.4), d.h. es ist $[x, v] < 0$. Ist $Q(x) < 0$ so ist also $x \in \tau_+$. Ist $Q(x) = 0$, so ist $x \in \mathcal{C}_N^+(0)$.

Sei nun $x \in \mathcal{C}_N^+(0) \cup \{0\}$. Wähle $w \in \tau_+$, dann folgt mit Punkt $(ii)$ im Beweis von Lemma 2.11 das für jedes $\lambda > 0$ gilt $x + \lambda w \in \tau_+$. Da $\lim_{\lambda\to 0+}(x + \lambda w) = x$ ist folgt $x \in \overline{\tau_+}$.

$\square$

## 2.2 Kausalitätsrelationen

**2.13 Definition.** Seien $x, y \in \mathcal{M}$. Wir sagen $x$ *ist chronologisch vor* $y$, $x \ll y$, wenn $y - x$ zeitartig und zukunftsorientiert ist, d.h. wenn $y \in \mathcal{C}_T^+(x)$. Es heißt $x$ *kausal vor* $y$, $x < y$, wenn $y - x$ lichtartig und zukunftsorientiert ist, d.h. wenn $y \in \mathcal{C}_N^+(x)$.

*2.14 Interpretation.* Die Relationen $\ll$ und $<$ nennt man auch *Kausalitätsrelationen.* Die Tatsache $x \ll y$ bedeutend daß $y$ durch ein materielles Ereignis $x$ beeinflußt werden kann, $x < y$ heißt daß $y$ durch einen elektromagnetischen Effekt $x$ beeinflußt werden könnte.

**2.15 Lemma.** *Die Relation $\ll$ ist transitiv, d.h. es gilt*

$$x \ll y, y \ll z \Rightarrow x \ll z \ .$$

*Weiters gilt*

$$x \ll y, y < z \Rightarrow x \ll z$$

$$x < y, y \Rightarrow x \ll z \ .$$

*Die Relation $\prec$ definiert durch*

$$x \prec y :\Longleftrightarrow \ x = y \ \textit{oder} \ x \ll y$$

*ist eine Ordnungsrelation (d.h. reflexiv, antisymmetrisch, transitiv).*

*Beweis.* Wegen $z - x = (z - y) + (y - x)$ folgenden die drei behaupteten Implikationen aus den Punkten $(i)$ und $(ii)$ des Beweises von Lemma 2.11.

Wir zeigen, daß $\prec$ eine Ordnungsrelation ist. Es gilt per definitionem $x \prec x$. Sei $x \prec y$ und $y \prec x$. Ist nicht $x = y$, so folgt $x \ll y$ und $y \ll x$, d.h. $y - x \in \tau_+$ und $x - y = -(y - x) \in \tau_+$, ein WS! . Die Transitivität ist klar wegen der von $\ll$.

□

**2.16 Lemma.** *Seien $x, y \in \mathcal{M}, x \neq y$. Dann gilt*

$$x < y \iff (x \not\ll y) \ \textit{und} \ (y \ll z \Rightarrow x \ll z) \ ,$$

*und auch*

$$x \ll y \iff (x \not< y) \ \textit{und} \ (\exists z \in \mathcal{M} : x < z < y) \ .$$

*Beweis.*
·) Sei $x < y$. Dann gilt nach Definition nicht $x \ll y$ und wegen Lemma 2.15 folgt die verlangte Implikation. Gelte umgekehrt die rechte Seite der ersten behaupteten Äquivalenz. Die Implikation bedeutet gerade $\mathcal{C}_T^+(y) \subseteq \mathcal{C}_T^+(x)$ und wir erhalten

$$y \in \overline{\mathcal{C}_T^+(y)} \subseteq \overline{\mathcal{C}_T^+(x)} = \mathcal{C}_T^+(x) \cup \mathcal{C}_N^+(x) \cup \{x\} \ .$$

Wegen $y \neq x, y \notin \mathcal{C}_T^+(x)$, folgt damit $y \in \mathcal{C}_N^+(x)$, d.h. $x < y$.

·) Es gelte die rechte Seite der zweiten behaupteten Äquivalenz. Dann sind $y - z$ und $z - x$ also lichtartig und zukunftsorientiert. Sie sind nicht parallel, denn in diesem Fall wäre (vgl. $(iv)$ im Beweis von Lemma 2.11) auch $y - x = (y - z) + (z - x)$ lichtartig und zukunftsorientiert, ein WS! denn es ist ja $x \not< y$. Also folgt $y - x \in \tau_+$ (wieder Lemma 2.11), d.h. $x \ll y$. Sei umgekehrt $x \ll y$. Dann gilt nach Definition nicht $x < y$. Wir müssen nach $z \in \mathcal{M}$ konstruieren sodaß $x < z < y$. Dazu genügt es zu jedem $w \in \tau_+$ ein $v$ anzugeben mit $0 < v < w$, denn für $w := y - x$ erhält man dann $0 < v < y - x$ und damit $x < v + x < y$, also ($z := v + x$) das Gewünschte.

Sei also $w \in \tau_+$ und wähle $v_0 \in \mathcal{C}_N^-(w)$. Dann gilt $[w, w] < 0$ und $[v_0 - w, w] > 0$, also existiert $t > 0$ sodaß für $v := w + t(v_0 - w)$ gilt

$$[v, v] = [w + t(v_0 - w), w + t(v_0 - w)] = [w, w] + 2t[v_0 - w, w] = 0 \ .$$

D.h. $v$ ist lichtartig. Wegen $w \in \tau_+$ und

$$[v, w] = [w + t(v_0 - w), w] = [w, w] + t[v_0 - w, w] < [w, w] + 2t[v_0 - w, w] = 0 \ ,$$

ist $v$ zukunftsorientiert (vgl. Lemma 2.7).

□

Sei $L$ eine (lineare) orthogonale Transformation von $\mathcal{M}$. Dann bildet $L$ die Menge $\tau$ bijektiv auf sich ab, denn $[x, x] < 0 \iff [Lx, Lx] < 0$ da $[x, x] = [Lx, Lx]$. Weiters läßt $L$ die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\tau$ invariant, denn

$$[v, w] < 0 \iff [Lv, Lw] < 0$$

da ja $[Lv, Lw] = [v, w]$. Es folgt also das die Äquivalenzklasse $\tau_+$ entweder auf $\tau_+$ oder auf $\tau_-$ (und entsprechend $\tau_-$ auf $\tau_-$ oder $\tau_+$) abgebildet wird. Entsprechend bildet $L$(vgl. Lemma 2.7) auch $\mathcal{C}_N^+(0)$ auf $\mathcal{C}_N^+(0)$ oder eben $\mathcal{C}_N^-(0)$ (und $\mathcal{C}_N^-(0)$ auf $\mathcal{C}_N^-(0)$ oder $\mathcal{C}_N^+(0)$) ab. Wir erhalten also:

**2.17 Lemma.** *Sei $L$ eine orthogonale Transformation auf $\mathcal{M}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) $L\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0)$

(*ii*) $\exists\, x \in \mathcal{C}_T^+(0) : Lx \in \mathcal{C}_T^+(0)$

(*iii*) $L\mathcal{C}_N^+(0) = \mathcal{C}_N^+(0)$

(*iv*) $\exists\, x \in \mathcal{C}_N^+(0) : Lx \in \mathcal{C}_N^+(0)$

(*v*) *Für alle $x \in \mathcal{C}_T(0) \cup \mathcal{C}_N(0)$, gilt $[x, Lx] \leq 0$.*

Eine orthogonale Transformation mit diesen Eigenschaften heißt *orthochronous.*

*Beweis.* Wir führen das vor dem Lemma Gesagte im Detail durch. Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ sind trivial. Für $(ii) \Rightarrow (i)$ sei $x \in \mathcal{C}_T^+(0)$ gegeben mit $Lx \in \mathcal{C}_T^+(0)$ und sei $y \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Dann gilt $x \sim y$, also auch $Lx \sim Ly$, also $Ly \in \mathcal{C}_T^+(0)$, d.h. $L\mathcal{C}_T^+(0) \subseteq \mathcal{C}_T^+(0)$. Die gleiche Argumentation angewandt auf $L^{-1}$ zeigt $L\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0)$. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (iii)$: Da eine lineare Abbildung stetig ist folgt $L\overline{\mathcal{C}_T^+(0)} \subseteq \overline{\mathcal{C}_T^+(0)} = \mathcal{C}_T^+(0) \cup \mathcal{C}_N^+(0) \cup \{0\}$. Ist $x \in \mathcal{C}_N^+(0)$, so folgt in jeden Fall $Lx \in \mathcal{C}_N(0)$, also unter der Voraussetzung $(i)$ das $Lx \in \mathcal{C}_N^+(0)$. Wir zeigen $(iv) \Rightarrow (i)$: Angenommen es gilt nicht $(i)$, dann ist also $L\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^-(0)$. Das gleiche Stetigkeitsargument wie oben zeigt $L\mathcal{C}_N^+(0) = \mathcal{C}_N^-(0)$, ein Widerspruch zu $(iv)$. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (v)$: Gilt $(i)$, so ist für $x \in \mathcal{C}_T^+(0)$ stets $x \sim Lx$, also $[x, Lx] < 0$. Das gleiche gilt für $x \in \mathcal{C}_T^-(0)$ denn dann ist $-x \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Wegen

$$\mathcal{C}_T(0) \cup \mathcal{C}_N(0) = \overline{\mathcal{C}_T^+(0) \cup \mathcal{C}_T^-(0)}$$

folgt

$$[x, Lx] \leq 0, x \in \mathcal{C}_T(0) \cup \mathcal{C}_N(0) \ .$$

Wir zeigen $(v) \Rightarrow (i)$: Sei $x \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Dann gilt entweder $[x, Lx] < 0$ oder $[x, Lx] > 0$ denn zwei linear unabhängige negative Vektoren können nicht orthogonal sein und sind $x$ und $Lx$ linear abhängig so ist wegen $Lx \neq 0$ erst recht $[x, Lx] \neq 0$. Nach Voraussetzung $(v)$ muß $[x, Lx] < 0$ sein, d.h. $x \sim Lx$.

□

**2.18 Korollar.** *Die Menge aller orthochronous Transformationen bildet eine Untergruppe der Gruppe aller orthogonalen Transformationen.*

*Beweis.* Seien $L_1, L_2$ orthochronous, d.h. gelte $L_1\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0)$ und $L_2\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0)$. Es folgt

$$(L_1 \circ L_2)\mathcal{C}_T^+(0) = L_1(L_2\mathcal{C}_T^+(0)) = L_1\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0) \ ,$$

$$L_1^{-1}\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0) \ .$$

□

Wir bezeichnen eine Basis $\{e_1, \ldots, e_4\}$ als *zulässige Basis* wenn sie eine ONB mit $Q(e_4) = -1$ ist und $e_4 \in \mathcal{C}_T^+(0)$ ist.

**2.19 Lemma.** *Sei $L$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}$. Dann ist $L$ orthochronous genau dann, wenn für eine (und daher jede) zulässige Basis $\{e_1, \ldots, e_4\}$ die Menge $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ wieder eine zulässige Basis ist.*

*Beweis.* Sei $L$ orthochronous. Da $L$ insbesondere orthogonal ist, ist $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ eine ONB mit $Q(Le_4) = -1$. Wegen $L\mathcal{C}_T^+(0) = \mathcal{C}_T^+(0)$ gilt $Le_4 \in \mathcal{C}_T^+(0)$, also ist $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ zulässig.

Sei umgekehrt $L$ linear und $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine zulässige Basis sodaß $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ ebenfalls diese Eigenschaft hat. Dann ist $L$ orthogonal (vgl. Lemma 1.24) und es gilt $Le_4 \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Wegen Lemma 2.17 ist $L$ orthochronous.

□

**2.20 Lemma.** *Sei $L$ eine orthogonale Transformation von $\mathcal{M}$. Sei $e \in \mathcal{C}_T(0)$. Dann gilt*

$$\left| \frac{[Le, e]}{Q(e)} \right| \geq 1 \ .$$

*In dieser Beziehung gilt Gleichheit genau dann, wenn $e$ ein Eigenvektor von $L$ ist.*

*Beweis.* Wegen $Q(e) < 0$ ist $V = \operatorname{span}\{e\}[+]\operatorname{span}\{e\}^\perp$ und $\operatorname{span}\{e\}^\perp$ ist ein positiver Teilraum. Schreibe $Le = \alpha e + a$ bezüglich dieser Zerlegung. Dann folgt

$$Q(e) = Q(Le) = Q(\alpha e) + Q(a) = \alpha^2 Q(e) + Q(a) \ ,$$

oder

$$Q(e)(1-\alpha^2) = Q(a) \ .$$

Wegen $Q(e) < 0$ und $Q(a) \geq 0$ folgt $1-\alpha^2 \leq 0$ und $1-\alpha^2 = 0$ genau dann wenn $Q(a) = 0$. Nun ist $Q(a)$ nur gleich Null wenn $a = 0$ da $\operatorname{span}\{e\}^\perp$ positiv ist. Weiters ist

$$[Le, e] = [a + \alpha e, e] = \alpha Q(e) \ .$$

$\square$

# Kapitel 3

# Der Satz von Zeeman

**3.1 Definition.** Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ eine Abbildung. $F$ heißt *kausaler Automorphismus*, wenn $F$ bijektiv ist und für alle $x, y \in \mathcal{M}$ gilt

$$x < y \iff F(x) < F(y) .$$

Wir bezeichnen die Menge aller kausalen Automorphismen mit $\mathcal{A}$.

*3.2 Bemerkung.* $(i)$ Wegen Lemma 2.16 ist eine Bijektion $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ genau dann ein kausaler Automorphismus, wenn für $x, y \in \mathcal{M}$ stets

$$x \ll y \iff F(x) \ll F(y)$$

gilt.

$(ii)$ Die Menge aller kausalen Automorphismen bildet eine Gruppe.

Eine Abbildung $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ heißt *Translation*, wenn sie von der Gestalt

$$T : v \mapsto v + v_0, v \in \mathcal{M} \ ,$$

für ein gewisses $v_0 \in \mathcal{M}$ ist. Eine Abbildung $K : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ heißt *Dilatation*, wenn sie von der Gestalt

$$K : v \mapsto kv, v \in \mathcal{M} \ ,$$

für ein gewisses $k \in \mathbb{R}, k > 0$, ist.

Sowohl die Menge aller Translationen, also auch die Menge aller Dilationen, sind Untergruppen von $\mathcal{A}$.

**3.3 Lemma.** *Sei $L$ eine orthochronous Transformation, dann ist $L \in \mathcal{A}$.*

*Beweis.* Gelte $x < y$, dann ist also $y - x \in \mathcal{C}_N^+(0)$. Wegen Lemma 2.17 folgt

$$Ly - Lx = L(y - x) \in \mathcal{C}_N^+(0) \ ,$$

d.h. $Lx < Ly$.

□

**3.4 Satz (Zeeman).** *Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein kausaler Automorphismus. Dann existiert eine orthochronous Transformation $L$, eine Translation $T$ und eine Dilation $K$ sodaß*

$$F = T \circ K \circ L \ .$$

*3.5 Interpretation.* Eine Translation entspricht einer Verschiebung des Ursprungs im Referenzrahmen des Beobachters. Wir wollen voraussetzen, daß je zwei Beobachter insofern kooperieren, daß sie ein festes Ereignis als Ursprung wählen, dann kommen Translationen also nicht mehr vor. Eine Dilation entspricht einer (gleichzeitigen) Reskalierung der Raum- und Zeitkoordinaten ist also auch kein "essentieller" Unterschied zwischen Beobachtern.

Seien nun $\mathcal{O}, \hat{\mathcal{O}}$ zulässige Beobachter. $\mathcal{O}$ sehe ein Ereignis $v$ an den Koordinaten $(x_1(v), \ldots, x_4(v)), \hat{\mathcal{O}}$ sehe das Ereignis bei $(\hat{x}_1(v), \ldots, \hat{x}_4(v))$. Wir wollen, entsprechend dem oben Gesagten, verlangen das jenes Ereignis $v$ mit $(x_1(v), \ldots, x_4(v)) = (0, \ldots, 0)$ auch $(\hat{x}_1(v), \ldots, \hat{x}_4(v)) = (0, \ldots, 0)$ erfüllt und das $\hat{\mathcal{O}}$ sein Koordinatensystem gesamt so skaliert das für jenes Ereignis $v$ mit $(x_1(v), \ldots, x_4(v)) = (0, 0, 0, 1)$ gilt $\hat{x}_1(v)^2 + \hat{x}_2(v)^2 + \hat{x}_3(v)^2 - \hat{x}_4(v)^2 = 1$.

Wir abstrahieren nun die Ereigniswelt von den Koordinaten eines Beobachters. Sei $\mathcal{M}$ ein 4-dimensionaler Vektorraum mit einem inneren Produkt mit negativen Index 1 und sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine fest gewählte ONB (mit $[e_4, e_4] = -1$). Weiters sei bei der Äquivalenzrelation $\sim$ die Klasse $\tau_+$ so gewählt das $e_1 - e_4 \in \mathcal{C}_N^+(0)$, d.h. $e_4 \in \tau_+$. Wir definieren

$$\text{Ereignis } v \cong \text{Vektor} \sum_{i=1}^{4} x_i(v) e_i$$

Betrachte die Abbildung

$$F : \sum x_i(v) e_i \mapsto \sum \hat{x}_i(v) e_i \ .$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion und aufgrund der Annahmen (vgl. Einleitung) ein kausaler Automorphismus. Also ist $F = T \circ K \circ L$ mit $T, K, L$ wie in Satz 3.4. Wegen der oben getroffenen Annahme über die Wahl der Koordinaten von $\mathcal{O}$ bzw. $\hat{\mathcal{O}}$ kommt $T$ und $K$ nicht vor. Die Abbildung $F$, und daher auch $F^{-1}$, ist also linear orthochronous. Daher bilden die Vektoren $\hat{e}_i := F^{-1} e_i, i = 1, \ldots, 4$, eine ONB mit $[\hat{e}_4, \hat{e}_4] = -1$ und $\hat{e}_4 \in \tau_+$. Weiters gilt

$$\sum \hat{x}_i(v) \hat{e}_i = \sum \hat{x}_i(v) F^{-1} e_i = F^{-1}(\sum \hat{x}_i(v) e_i) = \sum x_i(v) e_i \ .$$

D.h. die $(\hat{x}_1(v), \ldots, \hat{x}_4(v))$ und $(x_1(v), \ldots, \hat{x}_4(v))$ kann man auffassen als Koordinaten des Vektors der dem Ereignis $v$ entspricht bezüglich der Basen $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_4\}$ bzw. $\{e_1, \ldots, e_4\}$.

In dieser Weise wird also jedem zulässigen Beobachter $\mathcal{O}$ eine zulässige Basis des Vektorraumes "Ereigniswelt" zugeordnet. Umgekehrt geht man davon aus, daß es zu jeder zulässigen Basis auch einen Beobachter gibt der die Ereigniswelt so sieht. Dann kann man also den Begriff "zulässiger Beobachter" mit "zulässiger Basis" identifizieren.

Für den Beweis von Satz 3.4 benötigen wir einige Vorbereitungen.

**3.6 Lemma.** *Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein kausaler Automorphismus und seien $x, y \in \mathcal{M}, x < y$. Dann gilt ($R_{x,y}$ ist der Lichtstrahl durch $x$ und $y$)*

$$F(R_{x,y}) = R_{F(x),F(y)} \ .$$

*Beweis.* Ein Lichtstrahl $R_{x,y}$ läßt sich schreiben als (vgl.Lemma 2.10)

$$R_{x,y} = \mathcal{C}_N(x) \cap \mathcal{C}_N(y) \ .$$

Wegen

$$\mathcal{C}_N(x) = \{z \in \mathcal{M} : x < z \text{ oder } x > z \text{ oder } x = z\}$$

ist $F(\mathcal{C}_N(x)) = \mathcal{C}_N(F(x))$ und daher $F(R_{x,y}) = R_{F(x),F(y)}$. □

**3.7 Lemma.** *Sei $x_0 \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{C}_N^+(0)$, und bezeichne mit $R$ den Lichtstrahl $\{x_0 + \lambda a : \lambda \in R\} = R_{x_0, x_0+a}$. Weiters setze $c := F(x_0 + a) - F(x_0) \in \mathcal{C}_N^+(0)$. Dann gilt*

$$F(x_0 + \lambda a) = F(x_0) + \ell(\lambda)c, \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

*mit einer Funktion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion $\ell$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und erfüllt $\ell(0) = 0$. Insbesondere ist $F|_R : R \to R_{F(x_0),F(x_0+a)}$ stetig.*

*Beweis.* Die Funktion $F$ bildet $R$ bijektiv auf $R_{F(x_0),F(x_0+a)}$ ab, also gilt für $x = x_0 + \lambda a \in R$

$$F(x) = F(x_0) + \ell(\lambda)(F(x_0 + a) - F(x_0))$$

mit einer Bijektion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen $a \in \mathcal{C}_N^+(0)$, gilt auch $F(x_0) < F(x_0 + a)$, d.h. $c \in \mathcal{C}_N^+(0)$. Es folgt daß

$$x_0 + \lambda_1 a < x_0 + \lambda_2 a \iff \lambda_1 < \lambda_2$$

und auch

$$F(x_0) + \mu_1 c < F(x_0) + \mu c \iff \mu_1 < \mu_2 \ .$$

Da $F$ die Relation $<$ erhält gilt daher $\lambda_1 < \lambda_2 \iff \ell(\lambda_1) < \ell(\lambda_2)$, d.h. $F$ ist monoton wachsend. Nach Definition gilt $\ell(0) = 0$. Da eine monotone Bijektion von $\mathbb{R}$ auf sich stetig ist, folgt das $F|_R : R \to F(R)$ stetig ist. Beachte hier, daß die Topologie von $\mathcal{M}$ auf einer Geraden stets die von $\mathbb{R}$ induziert, d.h. das stets gilt ($x_0 \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$) das $x_0+\lambda a \to x_0+\lambda_0 a$ genau dann wenn $\lambda \to \lambda_0$. □

**3.8 Lemma.** *Seien $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{M}$ so daß*

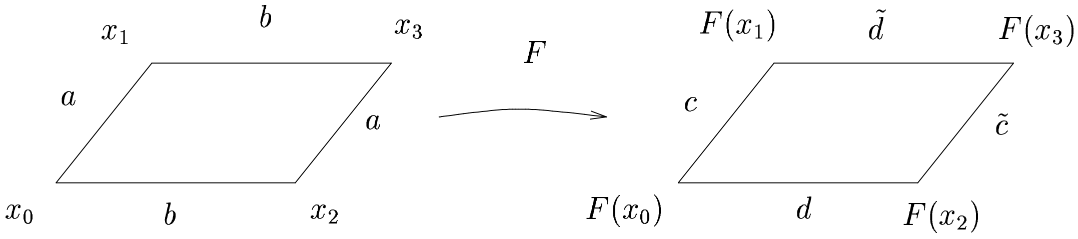
$$x_3 - x_2 = x_1 - x_0 =: a \in \mathcal{C}_N(0), \ x_3 - x_1 = x_2 - x_0 =: b \in \mathcal{C}_N(0)$$

*und so daß $a, b$ linear unabhängig sind. Dann gilt*

$$F(x_3) - F(x_2) = F(x_1) - F(x_0), \ F(x_3) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_0) \ .$$

*Bezeichnet man den ersten Vektor mit $c$, den zweiten mit $d$, so sind $c$ und $d$ in $\mathcal{C}_N(0)$ und linear unabhängig.*

*Beweis.* Wir sind in der folgenden Situation:



und haben zu zeigen, daß $\tilde{c} = c, \tilde{d} = d$ gilt. Der Rest der Aussage folgt dann leicht, denn (Fall $a, b \in \mathcal{C}_N^+(0)$) wegen $x_0 < x_1, x_0 < x_2, x_1 < x_3, x_2 < x_3$ gilt auch $F(x_0) < F(x_1), F(x_0) < F(x_2), F(x_1) < F(x_3), F(x_2) < F(x_3)$, also sind $c, d, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathcal{C}_N^+(0)$ und da die Geraden $R_{F(x_0),F(x_1)}$ und $R_{F(x_0),F(x_2)}$ genau einen Schnittpunkt haben ($F$ ist bijektiv und $R_{x_0,x_1}$, $R_{x_0,x_2}$ haben genau einen Schnittpunkt), sind ihre Richtungsvektoren $c$ und $d$ linear unabhängig.
·) Fall "$\{c, d, \tilde{d}\}$ linear abhängig": Dann liegen die Punkte $F(x_0), \ldots, F(x_3)$ alle in der Ebene $F(x_0) + \mathrm{span}\{c, d\}$. Da die Geraden $R_{F(x_0),F(x_2)}$ und $R_{F(x_1),F(x_3)}$ daher auch in dieser Ebene liegen und keinen Schnittpunkt haben, muß dann $\{d, \tilde{d}\}$ linear abhängig sein, $\tilde{d} = k_1 d$. Genauso sieht man das gilt $\tilde{c} = k_2 c$. Es folgt

$$F(x_3) - F(x_0) = c + \tilde{d} = c + k_1 d = d + \tilde{c} = k_2 c + d \ .$$

Da $\{c, d\}$ linear unabhängig ist folgt $k_1 = k_2 = 1$, d.h. $\tilde{c} = c, \tilde{d} = d$.

·) Wir werden im folgenden zeigen das der Fall "$\{c, d, \tilde{d}\}$ linear unabhängig" nicht auftreten kann. Sei also indirekt angenommen es wäre $\{c, d, \tilde{d}\}$ linear unabhängig.

·) Betrachte den 3-dimensionalen Teilraum $V := \mathrm{span}\{c, d, \tilde{d}\}$. Dieser Teilraum ist nichtentartet: Sei $x \in V^\circ$, dann ist $\mathrm{span}\{c, x\}$ ein neutraler Teilraum von $\mathcal{M}$ und kann daher höchstens 1-dimensional sein, d.h. $x = k_1 c$. Genauso folgt durch Betrachtung von $\mathrm{span}\{d, x\}$, daß $x = k_2 d$. Da $\{c, d\}$ linear unabhängig ist folgt $k_1 = k_2 = 0$, also $x = 0$. Mit dem selben Argument sieht man daß $\mathrm{span}\{c, d\}$ nicht-entartet ist. Da $\mathrm{span}\{c, d\}$ neutrale Vektoren enthält folgt daß er nicht semidefinit sein kann, also positiven Index 1 und negativen Index 1 haben muß (seine Dimension ist ja 2). Da $V$, als Teilraum von $\mathcal{M}$, negativen Index $\leq 1$ hat folgt daß das orthogonale Komplement von $\mathrm{span}\{c, d\}$ in $V$ positiv definit (und eindimensional) ist. Wähle $e \in V$ sodaß $[e, e] = 1$ und $e \perp \mathrm{span}\{c, d\}$, sodaß also $V = \mathrm{span}\{c, d, e\}$ ist.

·) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte den Vektor

$$u(\lambda) := F(x_0 + a + \lambda b) - F(x_0 + \lambda b) \in \mathcal{C}_N(0)$$

Da $F(x_0 + a + \lambda b)$ auf der Geraden $R_{F(x_0+a),F(x_0+a+b)}$ und $F(x_0 + \lambda b)$ auf der Geraden $R_{F(x_0),F(x_0+b)}$ liegt und diese Geraden in $F(x_0) + V$ liegen, gilt $u(\lambda) \in V$. Daher erlaubt $u(\lambda)$ eine Darstellung als

$$u(\lambda) = u_1(\lambda)c + u_2(\lambda)d + u_3(\lambda)e \ .$$

Es gilt $u(0) = F(x_0 + a) - F(x_0) = c$, also $u_1(0) = 1$.

·) Wir zeigen daß $u_1(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: Angenommen $u_1(\lambda_0) = 0$. Dann ist sicher $\lambda_0 \neq 0$. Es ist $u(\lambda_0) = u_2(\lambda_0)d + u_3(\lambda_0)e$, und $u(\lambda_0) \in \mathcal{C}_N(0)$, also folgt

$$0 = [u(\lambda_0), u(\lambda_0)] = u_3(\lambda_0)^2 \ ,$$

d.h. $u_3(\lambda_0) = 0$. Schreibe nach Lemma 3.7

$$F(x_0 + a + \lambda b) = F(x_0 + a) + \tilde{\ell}(\lambda)\tilde{d}$$

$$F(x_0 + \lambda b) = F(x_0) + \ell(\lambda)d \ ,$$

dann gilt

$$u_2(\lambda_0)d = u(\lambda_0) = \underbrace{(F(x_0 + a) - F(x_0))}_{=c} + \tilde{\ell}(\lambda_0)\tilde{d} - \ell(\lambda_0)d \ .$$

Also folgt

$$c + \tilde{\ell}(\lambda_0)\tilde{d} + (-\ell(\lambda_0) - u_2(\lambda_0))d = 0 \ ,$$

ein WS! zur Annahme das $\{c, d, \tilde{d}\}$ linear unabhängig ist.

·) Betrachte die Ebene $E := F(x_0) + \operatorname{span}\{d, e\}$ und die Gerade $R = \{F(x_0 + a + \lambda b) : \lambda \in \mathbb{R}\} = R_{F(x_0+a), F(x_0+a+b)}$. Wir zeigen das $E \cap R = \emptyset$ ist: Sei angenommen $F(x_0 + a + \lambda_0 b) \in E$. Da stets

$$F(x_0 + \lambda b) = F(x_0) + \ell(\lambda)d \in E$$

liegt, folgt

$$u(\lambda_0) = F(x_0 + a + \lambda_0 b) - F(x_0 + \lambda_0 b) \in \operatorname{span}\{d, e\} \ .$$

Damit wäre also $u_1(\lambda_0) = 0$, ein WS!

Also ist $R$ eine Gerade in dem 3-dimensionalen Raum $F(x_0) + V$ die mit der, ebenfalls in $F(x_0) + V$ liegenden Ebene $E = F(x_0) + \operatorname{span}\{d, e\}$ keinen Schnittpunkt hat. Es muß daher ihr Richtungsvektor, das ist $\tilde{d}$, in $\operatorname{span}\{d, e\}$ liegen. Nun ist $\operatorname{span}\{d, e\}$ positiv semidefinit und

$$\operatorname{span}\{d, e\}^\circ = \operatorname{span}\{d\} \ .$$

Da $\tilde{d}$ neutral ist folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung daß sogar

$$\tilde{d} \in \operatorname{span}\{d, e\}^\circ \ ,$$

also $\tilde{d} \in \operatorname{span}\{d\}$ gilt. Damit sind aber $d$ und $\tilde{d}$ und daher erst recht $c, d, \tilde{d}$ linear abhängig, ein WS!.

Wir schließen also, daß der Fall "$\{c, d, \tilde{d}\}$ linear unabhängig" nicht eintreten kann.

□

**3.9 Lemma.** *Sei zusätzlich vorausgesetzt, daß $F(0) = 0$ gilt. Dann ist $F$ linear.*

*Beweis.*
·) Zuerst eine vorbereitende Bemerkung: Sei $a \in \mathcal{C}_N(0)$, dann existiert eine Basis $\{a_1, \ldots, a_4\}$ von $\mathcal{M}$ sodaß $a_i \in \mathcal{C}_N(0)$ und $\{a, a_i\}$ linear unabhängig, $i = 1, \ldots, 4$.

Wegen Satz 1.19 existiert eine ONB $\{e_1, \ldots, e_4\}$ von $\mathcal{M}$ ($[e_4, e_4] = -1$) sodaß für ein gewisses $\lambda \in \mathbb{R}$

$$a = \lambda(e_3 + e_4)$$

gilt. Setze

$$a_1 := e_1 - e_4, a_2 := e_1 + e_4, a_3 := e_2 - e_4, a_4 = e_3 - e_4$$

Dann gilt $Q(a_1) = Q(a_2) = Q(a_3) = Q(a_4) = 0$. Ist

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_4 a_4 = 0 \ ,$$

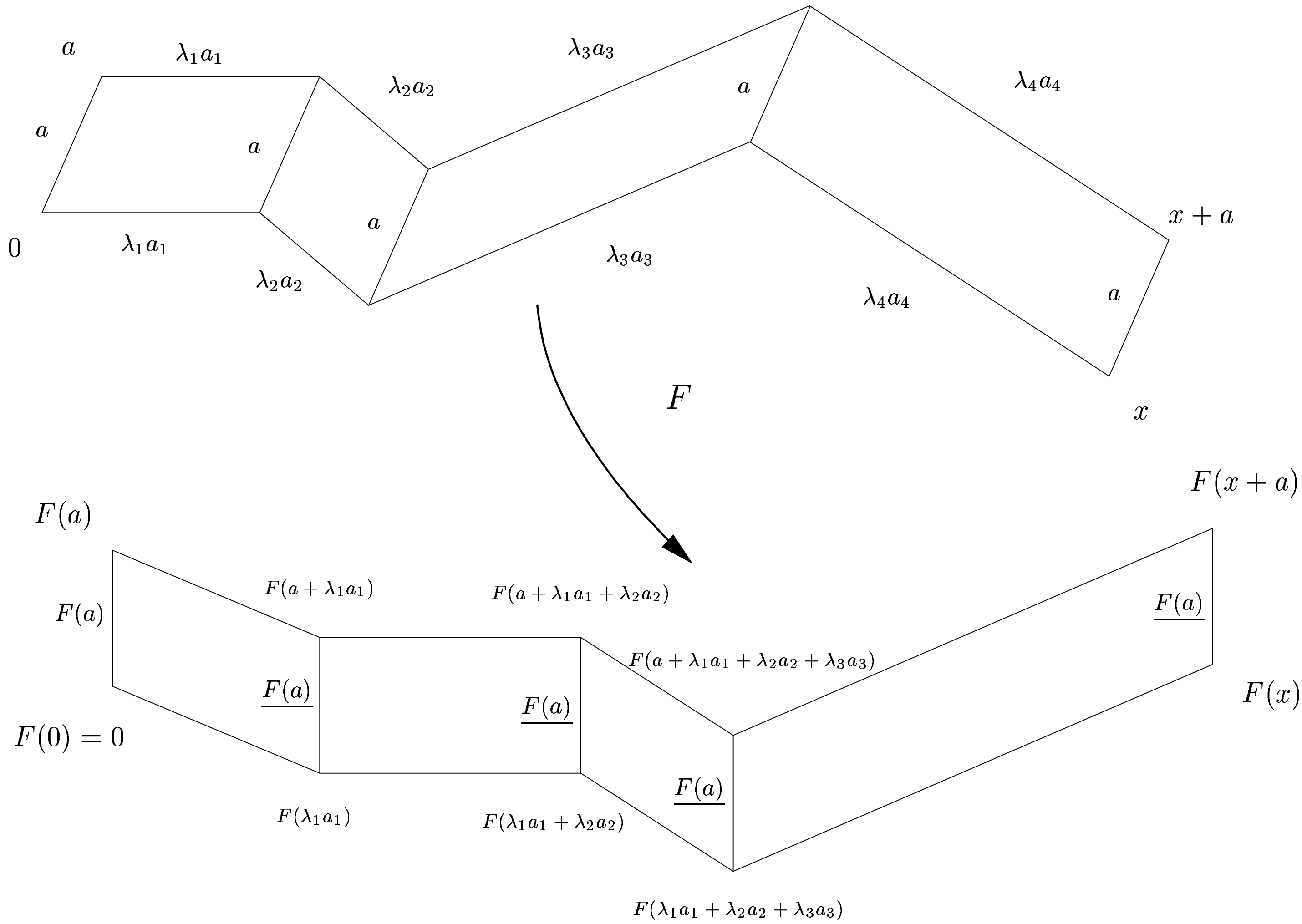
d.h.

$$0 = \lambda_1(e_1 - e_4) + \lambda_2(e_1 + e_4) + \lambda_3(e_2 - e_4) + \lambda_4(e_3 - e_4) =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 e_3 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)e_4 \ ,$$

so folgt also $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, und damit auch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Weiters sind $a, a_i$ für jedes $i = 1, \dots, 4$ linear unabhängig.

$\cdot$) Sei $x \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{C}_N(0)$. Schreibe $x$ in der Basis $\{a_1, \dots, a_4\}$ die wie oben gewählt wurde $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_4 a_4$. Wir betrachten die folgende Situation:




Die schrittweise Anwendung von Lemma 3.8 auf die Parallelogramme $[0, a, \lambda_1 a_1, a + \lambda_1 a_1], [\lambda_1 a_1, a + \lambda_1 a_1, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2]$, usw. zeigt daß die vertikalen Seiten in unteren Diagramm alle gleich, also alle gleich $F(a)$ sind. Wir erhalten $F(x + a) - F(x) = F(a)$, also

$$F(x + a) = F(x) + F(a) \ .$$

·) Seien $x, y \in \mathcal{M}$ und sei $\{a_1, \ldots, a_4\}$ eine Basis aus neutralen Vektoren. Schreibe $y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_4 a_4$, dann gilt

$$F(x+y) = F(x + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_4 a_4) = F((x + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_3 a_3) + \lambda_4 a_4) =$$

$$= F(x + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_3 a_3) + F(\lambda_4 a_4) = \cdots = F(x) + F(\lambda_1 a_1) + \cdots + F(\lambda_4 a_4) \ .$$

Genauso sieht man

$$F(y) = F(\lambda_1 a_1) + \cdots + F(\lambda_4 a_4) \ ,$$

also folgt $F(x+y) = F(x) + F(y)$.

·) Sei $a \in \mathcal{C}_N(0)$. Nach dem bereits bewiesenen gilt (mittels Induktion)

$$F(na) = nF(a), n \in \mathbb{N} \ . \tag{3.1}$$

Weiters ist

$$0 = F(0) = F(a-a) = F(a) + F(-a) \ ,$$

d.h. $F(-a) = -F(a)$. Wir erhalten, daß (3.1) sogar für $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Sei $m \in \mathbb{N}$, dann ist also

$$nF(\frac{a}{n}) = F(n \cdot \frac{a}{n}) = F(a) \ ,$$

d.h.

$$F(\frac{a}{n}) = \frac{1}{n} F(a) \ .$$

Es folgt daß (3.1) sogar für $n \in \mathbb{Q}$ gilt. Wegen Lemma 3.7 ist $F$ eine stetige Funktion auf $R_{0,a}$, d.h. $F(\lambda a)$ hängt stetig von $\lambda \in \mathbb{R}$ ab. Es folgt

$$F(\lambda a) = \lambda F(a), \ \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

·) Sei $x \in \mathcal{M}$ und schreibe $x$ als Summe von neutralen Vektoren, $x = b_1 + \cdots + b_4$. Dann gilt $\lambda x = \lambda b_1 + \cdots + \lambda b_4$ und

$$F(x) = F(b_1) + \cdots + F(b_4) \ .$$

Es folgt

$$F(\lambda x) = F(\lambda b_1) + \cdots + F(\lambda b_4) = \lambda F(b_1) + \cdots + \lambda F(b_4) =$$

$$= \lambda(F(b_1) + \cdots + F(b_4)) = \lambda F(x) \ .$$

□

*Beweis. (von Satz 3.4)* Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein kausaler Anhomorphismus, $F \in \mathcal{A}$. Sei weiters $T$ die Translation $T : x \mapsto x - F(0)$. Wähle eine zulässige ONB $\{e_1, \ldots, e_4\}$ von $\mathcal{M}$ ($e_4 \in \mathcal{C}_T^+(0)$) und setze $k := -Q((T \circ F)e_4)$. Da $T \circ F \in \mathcal{A}$ folgt $(T \circ F)(e_4) \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Insbesondere gilt $k > 0$. Sei $K$ die Dilation $K : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{k}} x$. Die Abbildung $L := K \circ T \circ F$ liegt in $\mathcal{A}$ und hat die Eigenschaft $L(0) = 0, Le_4 \in \mathcal{C}_T^+(0)$ und $Q(Le_4) = -1$. Nach Lemma 3.9 ist $L$ linear.

Betrachte die Vektoren $e_1 + e_4, e_1 - e_4 \in \mathcal{C}_N(0)$. Dann gilt auch $L(e_1 + e_4), L(e_1 - e_4) \in \mathcal{C}_N(0)$. Also folgt $Le_1 \pm Le_4 = L(e_1 \pm e_4) \in \mathcal{C}_N(0)$, also

$$0 = [Le_1, Le_1] + 2[Le_1, Le_4] + [Le_4, Le_4]$$

$$0 = [Le_1, Le_1] - 2[Le_1, Le_4] + [Le_4, Le_4]$$

Man erhält $[Le_1, Le_4] = 0$ und $[Le_1, Le_1] = 1$. Analog sieht man $[Le_i, Le_4] = 0, [Le_i, Le_i] = 1$, für $i = 2, 3$.

Betrachte den Vektor $e_1 + e_2 + \sqrt{2}e_4 \in \mathcal{C}_N(0)$. Es folgt das auch $L(e_1 + e_2 + \sqrt{2}e_4) = L(e_1) + L(e_2) + \sqrt{2}L(e_4) \in \mathcal{C}_N(0)$. Unter Ausnützung der bereits bekannten Beziehungen erhält man

$$0 = \underbrace{[Le_1, Le_1]}_{=1} + 2[Le_1, Le_2] + \underbrace{[Le_2, Le_2]}_{=1} + 2\underbrace{[Le_4, Le_4]}_{=-1}$$

Es folgt $[Le_1, Le_2] = 0$. Analog erhält man $[Le_1, Le_3] = 0$ und $[Le_2, Le_3] = 0$.

Insgesamt bildet die lineare Abbildung $L$ die zulässige ONB $\{e_1, \ldots, e_4\}$ auf eine zulässige ONB $\{Le_1, \ldots, Le_4\}$ ab. Nach Lemma 2.19 ist $L$ orthochronous. Wir haben also für $F$ die Darstellung

$$F = T^{-1} \circ K^{-1} \circ L$$

gefunden.

$\square$

# Kapitel 4

# Die Lorentz Gruppe

Sei $\mathcal{O}$ ein zulässiger Beobachter, $\{e_1, \ldots, e_4\}$ seine zulässige Basis, d.h. ein Ereignis $x$ wird von $\mathcal{O}$ an der Stelle $(x_1, \ldots, x_4)$ beobachtet wenn $x_1, \ldots, x_4$ gerade die Koordinaten in $x = x_1e_1 + \ldots + x_4e_4$ sind. Der Zeitpunkt $x_4$ an dem sich $x$ befindet läßt sich einfach berechnen als

$$x_4 = -[x, e_4] \ .$$

*4.1 Beispiel.* Seien $\mathcal{O}, \hat{\mathcal{O}}$ zwei Beobachter mit zulässigen Basen $\{e_1, \ldots, e_4\}$ und $\{\hat{e}_4, \ldots, \hat{e}_4\}$ und sei die Koordinatentransformation $L$ von $\mathcal{O}$ zu $\hat{\mathcal{O}}$ orthochronous (d.h. $\mathcal{O}, \hat{\mathcal{O}}$ verwenden den gleichen Ursprung und Skalierungsfaktor). Sei $\gamma$ die Konstante

$$\gamma := [\hat{e}_4, e_4] \ ,$$

wegen Lemma 2.20 und da $\hat{e}_4, e_4$ zukunftsorientiert sind gilt $\gamma \geq 1$.

Betrachte nun zwei Ereignisse $x, y$ die $\mathcal{O}$ an dem gleichen Ort aber zu verschiedenen Zeiten beobachtet, d.h. es sei

$$x = a + x_4e_4, y = a + y_4e_4 \ ,$$

mit $a \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$. Wir fragen zu welchen Zeitpunkten $\hat{\mathcal{O}}$ diese Ereignisse wahrnimmt:

$$\hat{x}_4 = -[x, \hat{e}_4] = -[a, \hat{e}_4] + x_4\gamma$$

$$\hat{y}_4 = -[y, \hat{e}_4] = -[a, \hat{e}_4] + y_4\gamma$$

Insbesondere ergibt sich

$$\hat{x}_4 - \hat{y}_4 = \gamma(x_4 - y_4) \ ,$$

d.h. für $\hat{\mathcal{O}}$ vergeht zwischen $x$ und $y$ mehr Zeit als für $\mathcal{O}$. Dieses Phänomen nennt man *Zeitdilatation.* Man beachte, daß $x$ und $y$ für $\hat{\mathcal{O}}$ auch an im allgemeinen verschiedenen Orten stattfinden. Tatsächlich beobachtet $\hat{\mathcal{O}}$ das Ereignis $x$ am Ort $x - \hat{x}_4\hat{e}_4 \in \operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ und $y$ bei $y - \hat{y}_4\hat{e}_4$. Nun ist

$$x - \hat{x}_4\hat{e}_4 = a + x_4e_4 - \hat{x}_4\hat{e}_4 \ ,$$

$$y - \hat{y}_4\hat{e}_4 = a + y_4e_4 - \hat{y}_4\hat{e}_4 \ .$$

Sieht $\mathcal{O}$ die beiden Ereignissse am selben Ort, so folgt also

$$(y_4 - x_4)e_4 = (\hat{y}_4 - \hat{x}_4)\hat{e}_4 \ ,$$

d.h. $e_4$ ist ein Eigenvektor von $L$. Damit folgt also (vgl. wieder Lemma 2.20) $\gamma = 1$. Ist umgekehrt $\gamma = 1$, so ist $\hat{e}_4 = e_4$ und daher $\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ und daher sieht $\hat{\mathcal{O}}$ die beiden Ereignisse auch am gleichen Ort:

$$x = a + x_4\hat{e}_4, \ y = a + y_4\hat{e}_4$$

sind die Zerlegungen von $x$ und $y$ in Komponenten in $\operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ und $\operatorname{span}\{\hat{e}_4\}$.

*4.2 Beispiel.* Wir betrachten zwei Ereignisse $x, y$ die von $\mathcal{O}$ zur gleichen Zeit (aber an verschiedenen Orten) beobachtet werden,

$$x = a + \lambda e_4, y = b + \lambda e_4 \ .$$

Dann beobachtet $\hat{\mathcal{O}}$ diese Ereignisse an den Zeitpunkten

$$\hat{x}_4 = -[x, \hat{e}_4] = -[a, \hat{e}_4] + \lambda\gamma \ ,$$

$$\hat{y}_4 = -[y, \hat{e}_4] = -[b, \hat{e}_4] + \lambda\gamma \ .$$

Es gilt also im allgemeinen

$$\hat{x}_4 \neq \hat{y}_4 \ .$$

Dieses Phänomen nennt man die *Relativität der Gleichzeitigkeit.*

Beobachtet $\hat{\mathcal{O}}$ je zwei für $\mathcal{O}$ gleichzeitige Ereignisse ebenfalls gleichzeitig, so muß also stets gelten

$$[b - a, \hat{e}_4] = 0 \ ,$$

d.h. für alle $a, b \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ gilt $b - a \perp \hat{e}_4$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Es folgt (vgl. Lemma 1.26) das $e_4$ Eigenvektor von $L$ und damit $\hat{e}_4 = e_4$ ist. Daher ist auch $\gamma = 1$. Ist umgekehrt $\gamma = 1$, so ist $\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ und daher $b - a \perp \hat{e}_4$.

Es scheint also, das jene Transformationen $L$ mit $\gamma = 1$ zu Beobachtern $\hat{\mathcal{O}}$ überleiten deren Sicht der Welt nicht allzu verschieden ist von der von $\mathcal{O}$.

*4.3 Beispiel.* Wir betrachten die Weltlinie eines Teilchens daß sich im Raum-Koordinatensystem des Beobachters $\hat{\mathcal{O}}$ nicht bewegt, d.h. zum Zeitpunkt $\lambda$ wird das Teilchen durch das Ereignis $\hat{a} + \lambda\hat{e}_4$, wobei $\hat{a} \in \operatorname{span}\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ fest ist, beschrieben. Wir fragen mit welcher Geschwindigkeit der Beobachter $\mathcal{O}$ dieses Teilchen sich bewegen sieht. Beachte das, da $L$ linear ist, der Beobachter $\mathcal{O}$ das Teilchen sich längs einer Geraden (mit, ad hoc, nicht notwendig konstanter Geschwindigkeit) bewegen sieht.

Betrachten wir also zwei Ereignisse $x = \hat{a} + \hat{x}_4\hat{e}_4, y = \hat{a} + \hat{y}_4\hat{e}_4$, sodaß gilt $y - x = (\hat{y}_4 - \hat{x}_4)\hat{e}_4$, und berechnen

$$\beta^2 := \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}{(y_4 - x_4)^2} \ .$$

Nun gilt

$$y_i - x_i = [y - x, e_i] = (\hat{y}_4 - \hat{x}_4)[\hat{e}_4, e_i], \ i = 1, 2, 3 \ ,$$

und

$$y_4 - x_4 = -[y-x, e_4] = (\hat{y}_4 - \hat{x}_4)\gamma \ .$$

Schreibt man $\hat{e}_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \gamma e_4$, so hat man also

$$\beta^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\gamma^2} \ .$$

Wegen

$$-1 = \mathcal{Q}(\hat{e}_4) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma^2 \ ,$$

folgt

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \ .$$

Der Beobachter $\mathcal{O}$ sieht also das Teilchen sich bewegen längs einer Geraden mit Richtung $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und Geschwindigkeit $|\beta|$. Man beachte, daß $\beta$ nicht von der Wahl des Teilchens abhängt, sondern nur von der Größe $\gamma = -[\hat{e}_4, e_4]$. Dabei ist $\beta = 0$ genau dann, wenn $\gamma = 1$ und $-1 < \beta < 1$ sonst.

*4.4 Bemerkung.* Die in den vorangegangenen Beispielen beobachteten Effekte sind völlig symmetrisch bezüglich $\mathcal{O}$ und $\hat{\mathcal{O}}$. Denn sie hängen nun von der Größe

$$\gamma = -[Le_4, e_4]$$

ab. Geht man nun nicht von $\mathcal{O}$ aus sondern von $\hat{\mathcal{O}}$, so hat man anstelle von $\gamma$ die Größe

$$\hat{\gamma} := -[L^{-1}\hat{e}_4, \hat{e}_4]$$

zu betrachten. Nun ist aber

$$\hat{\gamma} = -[L^{-1}\hat{e}_4, \hat{e}_4] = -[e_4, \hat{e}_4] = -[e_4, Le_4] = \gamma \ .$$

*4.5 Bemerkung.* Sei $L$ orthochronous, $e \in \mathcal{M}, \mathcal{Q}(e) = -1$, und $\gamma := -[Le, e]$. Weiters sei $\mathcal{M}_1 := \operatorname{span}\{e\}^\perp$. Dann gilt $\gamma = 1$ genau dann wenn $Le = e$, genau dann wenn $L|_{\mathcal{M}_1}$ eine orthogonale Transformation von $\mathcal{M}_1$ auf sich ist. D.h. wenn sich $L$ anschreiben läßt in der Form

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{M}_1 \\ [\dot{+}] \\ \operatorname{span} e \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{M}_1 \\ [\dot{+}] \\ \operatorname{span} e \end{array} \ .$$

mit einer orthogonalen Transformation $L_1$ des 3-dimensionalen positiv definiten Raumes $\mathcal{M}_1$.

*4.6 Interpretation.* Ist $L$ die Koordinatentransformation zwischen zwei zulässigen Beobachtern und ist $\gamma = 1$, d.h. man ist in der oben beschriebenen Situation mit $e = e_4$ so unterscheiden sich $\mathcal{O}$ und $\hat{\mathcal{O}}$ nur um eine feste Verdrehung ihres Raum-Koordinatensystems.

Wir untersuchen nun die Struktur der Gruppe

$$\mathcal{L}_{OC} := \{L : \mathcal{M} \to \mathcal{M} : L \text{ orthochronous}\} \ .$$

Zunächst sei $\mathcal{L}$ die Untergruppe

$$\mathcal{L} := \{L \in \mathcal{L}_{OC} : \det L = +1\} \ .$$

Die Gruppe $\mathcal{L}$ heißt *Lorentz-Gruppe.* Sie ist als Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler von $\mathcal{L}_{OC}$. Ist $L_0 \in \mathcal{L}_{OC} \setminus \mathcal{L}$, so gilt

$$\mathcal{L}_{OC} = \mathcal{L} \cup L_0\mathcal{L} \ .$$

*4.7 Interpretation.* Sei $\{e_1, \dots, e_4\}$ zulässige Basis und sei $L_0$ jene lineare Abbildung die bezüglich dieser Basis die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Dann ist $L_0 \in \mathcal{L}_{OC} \setminus \mathcal{L}$, also gilt für jedes $L \in \mathcal{L}_{OC}$ entweder $L \in \mathcal{L}$ oder $L_0 L \in \mathcal{L}$. Anwendung von $L_0$ heißt aber nur bei der $e_1$-Achse die Richtung zu vertauschen, was sicher keine essentielle Änderung des Koordinatensystems ist. Die Einschränkung auf Betrachtung der Untergruppe $\mathcal{L}$ anstelle von $\mathcal{L}_{OC}$ heißt also nur, daß die Koordinatensysteme der Beobachter gleich orientiert sein sollen.

Sei im folgenden eine zulässige Basis $\{e_1, \dots, e_4\}$ festgehalten, und setze

$$V := \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}, U = \operatorname{span}\{e_2, e_3\} \ .$$

Wir definieren die beiden Untergruppen von $\mathcal{L}$

$$\mathcal{R} := \{L \in \mathcal{L} : LV \subseteq V\} \ ,$$

$$\mathcal{B} := \{L \in \mathcal{L} : L|_U = \mathrm{id}_U\} \ .$$

Die Gruppe $\mathcal{R}$ besteht aus allen $L \in \mathcal{L}$ mit $Le_4 = e_4$ und heißt *Rotationsgruppe.*

Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ definiere eine lineare Abbildung $L(\vartheta)$ durch ihre Matrix bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_4\}$:

$$L(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & 0 & 0 & -\sinh\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta & 0 & 0 & \cosh\vartheta \end{pmatrix}.$$

**4.8 Satz.** *Die Abbildung $\vartheta \mapsto L(\vartheta)$ ist ein Gruppenisomorphismus von* $(\mathbb{R}, +)$ *auf $\mathcal{B}$.*

*Beweis.* Es gilt $L \in \mathcal{B}$ genau dann, wenn sich $L$ zerlegt als

$$L = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \operatorname{span}\{e_1, e_4\} \\ [+] \\ U \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \operatorname{span}\{e_1, e_4\} \\ [+] \\ U \end{array}$$

wobei $M : \operatorname{span}\{e_1, e_4\} \to \operatorname{span}\{e_1, e_4\}$ eine orthogonale Abbildung ist mit $\det M = +1$ und $-[Me_4, e_4] \geq 1$.

Die Matrix bezüglich der Basis $\{e_1, e_4\}$ von der Komponente $M(\vartheta)$ von $L(\vartheta)$ ist

$$M(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\det M(\vartheta) = \cosh^2 - \sinh^2\vartheta = 1,$$

$$-[M(\vartheta)e_4, e_4] = -\cosh\vartheta \cdot [e_4, e_4] = \cosh\vartheta \geq 1.$$

Es gilt mit

$$\eta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(\vartheta)^T \eta_1 M(\vartheta) = M(\vartheta)^T \cdot (\eta_1 M(\vartheta))$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ -\sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & -\cosh\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_1 .$$

also ist wegen Lemma 1.23 die Abbildung $M(\vartheta) : \mathrm{span}\{e_1, e_4\} \to \mathrm{span}\{e_1, e_4\}$ orthogonal.

Wir berechnen weiters für $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$

$$M(\vartheta_1)M(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta_1 & -\sinh\vartheta_1 \\ -\sinh\vartheta_1 & \cosh\vartheta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh\vartheta_2 & \sinh\vartheta_2 \\ -\sinh\vartheta_2 & \cosh\vartheta_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\vartheta_1 \cosh\vartheta_2 + \sinh\vartheta_1 \sinh\vartheta_2 & -\sinh\vartheta_2 \cosh\vartheta_1 - \sinh\vartheta_1 \cosh\vartheta_2 \\ -\sinh\vartheta_1 \cosh\vartheta_2 - \cosh\vartheta_1 \sinh\vartheta_2 & \sinh\vartheta_1 \sinh\vartheta_2 + \cosh\vartheta_1 \cosh\vartheta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) & -\sinh(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ -\sinh(\vartheta_1 + \vartheta_2) & \cosh(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{pmatrix} = M(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

Wir haben also gezeigt, daß $\vartheta \mapsto L(\vartheta)$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in $\mathcal{B}$ ist. Dieser ist injektiv, denn ist $\cosh\vartheta_1 = \cosh\vartheta_2$ und $\sinh\vartheta_1 = \sinh\vartheta_2$, so folgt $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Es bleibt zu zeigen daß obiger Homomorphismus auch surjektiv ist. Sei also $L \in \mathcal{B}$, oder äquivalent, $M : \mathrm{span}\{e_1, e_4\} \to \mathrm{span}\{e_1, e_4\}$ gegeben sodaß $M$ orthogonal ist, $\det M = +1, -[Me_4, e_4] \geq 1$. Habe $M$ bezüglich der Basis $\{e_1, e_4\}$ die Darstellung

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Me_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_4, Me_4 = a_{12}e_1 + a_{22}e_4$, also folgt

$$1 = [e_1, e_1] = [Me_1, Me_1] = a_{11}^2 - a_{21}^2 \ ,$$

$$-1 = [e_4, e_4] = [Me_4, Me_4] = a_{12}^2 - a_{22}^2 \ ,$$

$$0 = [e_1, e_4] = [Me_1, Me_4] = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} \ ,$$

$$1 = \det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ ,$$

$$1 \leq -[Me_4, e_4] = a_{22} \ .$$

Die dritte Beziehung besagt daß

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

also sind die Vektoren $(a_{11}, a_{22})$ und $(a_{21}, a_{12})$ linear abhängig. Wegen $a_{22} \neq 0$ ist der erste nicht der Nullvektor und daher folgt

$$(a_{21}, a_{12}) = \lambda(a_{11}, a_{22})$$

für ein gewisses $\lambda \in \mathbb{R}$. Die ersten beiden Beziehungen sagen nun

$$1 = a_{11}^2(1 - \lambda^2), 1 = a_{22}^2(1 - \lambda^2) \ .$$

Es folgt daß $\lambda \in (-1,1)$ und $a_{11} = \pm a_{22}$. Die vierte Beziehung ist

$$1 = a_{11}a_{22}(1-\lambda^2) \ ,$$

also ist $a_{11}a_{22} > 0$. Damit folgt $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = a_{21}$.

Wegen $a_{22} \geq 1$ gilt es eine Zahl $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $a_{22} = \cosh\vartheta$. Wegen $a_{12}^2 = a_{22}^2 - 1$ folgt $a_{12}^2 = \sinh^2\vartheta$, also

$$a_{12} = \pm\sinh\vartheta \ .$$

Steht hier das $-$, so haben wir $M = M(\vartheta)$. Anderenfalls gilt $M = M(-\vartheta)$. □

*4.9 Interpretation.* Sei $L = L(\vartheta) \in \mathcal{B}$ Setzt man $\gamma := \cosh\vartheta$ und $\beta := \tanh\vartheta$, so gilt

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

und es ist

$$Le_4 = -\beta\gamma e_1 + \gamma e_4 \ .$$

Fasst man $L$ auf als die Koordinatentransformation von $\mathcal{O}$ zu $\hat{\mathcal{O}}$ so heißt das (vgl.Beispiel 4.3), daß $\mathcal{O}$ den Beobachter $\hat{\mathcal{O}}$ sich in Richtung der negativen $e_1$-Achse mit der (vorzeichenbehafteten) Geschwindigkeit $\beta$ entfernen sieht, und das die $e_2, e_3$-Achse dabei gleichbleiben (daher auch die $e_1$-Achse).

*4.10 Beispiel.* Seien $\mathcal{O}, \hat{\mathcal{O}}, \mathcal{O}'$ drei Beobachter. Die Koordinatentransformationen von $\mathcal{O}$ zu $\hat{\mathcal{O}}$ bzw. von $\hat{\mathcal{O}}$ zu $\mathcal{O}'$ seinen von der Gestalt $L(\vartheta_1)$ bzw. $L(\vartheta_2)$, sodaß also $\mathcal{O}$ den Beobachter $\hat{\mathcal{O}}$ sich mit Geschwindigkeit $\beta_1 = \tanh\vartheta_1$ entfernen sieht und $\hat{\mathcal{O}}$ den Beobachter $\mathcal{O}'$ sich mit Geschwindigkeit $\beta_2 = \tanh\vartheta_2$ entfernen sieht.

Die Koordinatentransformation von $\mathcal{O}$ zu $\mathcal{O}'$ ist gegeben durch $L = L(\vartheta_2) \circ L(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, sodaß also $\mathcal{O}$ den Beobachter $\mathcal{O}'$ sich mit Geschwindigkeit $\beta = \tanh(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ entfernen sieht. Es folgt

$$\beta = \tanh(\vartheta_1+\vartheta_2) = \frac{\tanh\vartheta_1 + \tanh\vartheta_2}{1+\tanh\vartheta_1\tanh\vartheta_2} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \ .$$

Diese Beziehung nennt man *relativistische Addition der Geschwindigkeiten.*

**4.11 Satz.** *Sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine fest gewählte zulässige Basis und seien die Gruppen $\mathcal{R}, \mathcal{B}$ wie oben bezüglich dieser Basis definiert. Dann gilt*

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}\cdot\mathcal{B}\cdot\mathcal{R} \ .$$

*Ist $L \in \mathcal{L}$ und sind*

$$L = R_1 B R_2 = R_1' B' R_2'$$

*zwei entsprechende Zerlegungen, so gilt entweder $B' = B$ oder $B' = B^{-1}$.*

*Beweis.* Sei $L \in \mathcal{L}$ gegeben und sei $a \in V$ sodaß $Le_4 = a + \gamma e_4$. Wähle eine orthogonale Transformation $\tilde{R}_1$ des Raumes $V$ auf sich mit Determinante $+1$, die den Vektor $a$ auf ein positives Vielfaches von $e_1$ abbildet, $\tilde{R}_1 a = \alpha e_1, \alpha > 0$. Sei $R_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ die Rotation die gegeben ist als

$$R_1 := \begin{pmatrix} \tilde{R}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} V \\ [\dot{+}] \\ \mathrm{span}\{e_4\} \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c} V \\ [\dot{+}] \\ \mathrm{span}\{e_4\} \end{array} \ .$$

Es gilt

$$(R_1 \circ L)e_4 = R_1 a + \gamma R_1 e_4 = \alpha e_1 + \gamma e_4 \ .$$

Dabei gilt

$$-1 = Q(e_4) = Q(R_1 L e_4) = \alpha^2 - \gamma^2 \ ,$$

also ist $(\alpha, \gamma > 0)$ stets $\gamma > \alpha$. Sei $\vartheta \in \mathbb{R}$. Wir betrachten $L(\vartheta)$. Es gilt

$$L(\vartheta)(\alpha e_1 + \gamma e_4) = \alpha L(\vartheta)e_1 + \gamma L(\vartheta)e_4 =$$

$$= \alpha(\cosh\vartheta\, e_1 - \sinh\vartheta\, e_4) + \gamma(-\sinh\vartheta\, e_1 + \cosh\vartheta\, e_4) =$$

$$= (\alpha\cosh\vartheta - \gamma\sinh\vartheta)e_1 + (-\alpha\sinh\vartheta + \gamma\cosh\vartheta)e_4 \ .$$

Wähle $\vartheta \in \mathbb{R}$ so daß

$$\tanh\vartheta = \frac{\alpha}{\gamma} \ ,$$

wegen $0 < \alpha < \gamma$ ist so eine Wahl möglich. Dann gilt also $L(\vartheta)(\alpha e_1 + \gamma e_4) \in \mathrm{span}\{e_4\}$ und damit

$$(L(\vartheta) \circ R_1 \circ L)e_4 \in \mathrm{span}\{e_4\} \ .$$

Es folgt daß $R_2 := L(\vartheta) \circ R_1 \circ L \in \mathcal{R}$ ist und wir haben eine Zerlegung

$$L = R_1^{-1} \circ L(-\vartheta) \circ R_2$$

erhalten.

Um die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen bemerken wir das folgende: Für $L \in \mathcal{L}$ setze $\gamma(L) := -[Le_4, e_4]$. Dann gilt für je zwei $L \in \mathcal{L}$ und $R \in \mathcal{R}$

$$\gamma(RL) = \gamma(LR) = \gamma(L) \ .$$

Denn mit $R$ ist auch $R^{-1}$ eine Rotation und wir erhalten

$$[(RL)e_4, e_4] = [R^{-1}(RL)e_4, R^{-1}e_4] = [Le_4, e_4] \ ,$$

$$[(LR)e_4, e_4] = [L(Re_4), e_4] = [Le_4, e_4] \ .$$

Nun gilt stets

$$\gamma(L(\vartheta)) = \cosh\vartheta \ ,$$

und wir schließen das wegen $(B = L(\vartheta), B' = L(\vartheta'))$

$$\gamma(L) = \gamma(R_1 B R_2) = \gamma(B) = \cosh\vartheta$$

$$\gamma(L) = \gamma(R_1' B' R_2') = \gamma(B') = \cosh\vartheta'$$

entweder $\vartheta = \vartheta'$ oder $\vartheta = -\vartheta'$ gelten muß .

□

# Kapitel 5

# Die Pfadtopologie

## 5.1 Zukunftsorientierte Kurven

**5.1 Definition.** Wir verstehen unter einer *$E$-stetigen Kurve in $\mathcal{M}$* eine stetige Abbildung

$$\alpha : I \to (\mathcal{M}, \mathcal{T}_E)$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Interval (offen, abgeschlossen oder halb-offen) ist welches die Spurtopologie von $\mathbb{R}$ trägt und wobei $\mathcal{T}_E$ die Euklidische Topologie des Vektorraumes $\mathcal{M}$ bezeichnet.

*5.2 Bemerkung.* (*i*) Ist $\{b_1, \ldots, b_4\}$ irgend eine Basis von $\mathcal{M}$ so ist

$$\phi : \begin{cases} (\mathcal{M}, \mathcal{T}_E) & \to \quad (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|_2) \\ x = \sum x_i b_i & \to \quad (x_1, \ldots, x_4) \end{cases}$$

ein Homöomorphismus. Hierbei ist z.B. $\|(x_1, \ldots, x_4)\|_2^2 = x_1^2 + \cdots + x_4^2$.

(*ii*) Das innere Produkt

$$[.,.] : (\mathcal{M}, \mathcal{T}_E)^2 \to \mathbb{R}$$

ist stetig. Denn: sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ ONB, dann gilt ($x = x_1 e_1 + \ldots + x_4 e_4, y = y_1 e_1 + \cdots + y_4 e_4$)

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

und daher ist $[\cdot, \cdot]$ eine stetige Funktion der Koordinaten $(x_1, \ldots, x_4), (y_1, \ldots, y_4)$.

(*iii*) Ist $\|.\|$ eine Norm auf $\mathcal{M}$, so stimmt $\mathcal{T}_E$ mit der von dieser Norm induzierten Topologie überein. Insbesondere wird eine Umgebungsbasis eines Punktes $x \in \mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{T}_E$ gegeben durch die offenen Kugeln.

$$N_\epsilon^E(x) := \{y \in \mathcal{M} : \|y - x\| < \epsilon\} .$$

Diese Mengen sind natürlich von der gewählten Norm abhängig. Wir halten im folgenden eine Norm $\|.\|$ auf $\mathcal{M}$ fest und verwenden die bzgl. dieser definierten $N_\epsilon^E(x)$. Und zwar verwenden wir eine Norm die auf die folgende Art definiert wird: Sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ eine zulässige Basis, und sei für $x = x_1e_1 + \cdots + x_4e_4$

$$\|x\|^2 := x_1^2 + \cdots + x_4^2 \ .$$

D.h. $\|.\|$ ist die vom inneren Produkt $(\cdot, \cdot) = [J., .]$ kommende Norm wobei $J$ die Fundamentalsymmetrie $e_i \mapsto e_i, i = 1, 2, 3,\ e_4 \mapsto -e_4$, ist.

**5.3 Definition.** Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ eine $E$-stetige Kurve. Wirnennen $\alpha$ *zukunftsorientiert an der Stelle* $t_0 \in I$, wenn es eine Umgebung $U$ von $t_0$ in $I$ gibt, sodaß gilt

$$\forall t \in U, t > t_0 : \alpha(t) \gg \alpha(t_0)$$
$$\forall t \in U, t < t_0 : \alpha(t) \ll \alpha(t_0) \ .$$

Die Kurve heißt *vergangenheitsorientiert an der Stelle* $t_0 \in I$, wenn es eine Umgebung $U$ gibt mit

$$t \in U, t > t_0 \Rightarrow \alpha(t) \ll \alpha(t_0)$$

$$t \in U, t^{<} t_0 \Rightarrow \alpha(t) \gg \alpha(t_0) \ .$$

Die Kurve $\alpha$ heißt *zukunftsorientiert*, wenn sie an jeder Stelle $t_0 \in I$ zukunftsorientiert ist. Analog definiert man $\alpha$ *vergangenheitsorientiert*.

**5.4 Lemma.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert. Dann ist $\alpha$ injektiv und ein Ordnungshomomorphismus von $(I, \leq)$ in $(\mathcal{M}, \prec)$.*

*Beweis.* Sei $t_-, t_+ \in I, t_- < t_+$. Wir zeigen $\alpha(t_-) \ll \alpha(t_+)$, dann folgen alle Behauptungen des Lemmas.

Betrachte die Menge

$$M := \{t \in (t_-, t_+] : \alpha(t) \gg \alpha(t_-)\} \ .$$

$\cdot$) Die Menge $M$ ist nicht leer: Sei $U_t$ die Umgebung von $t_-$ aus der Definition von zukunftsorientiert. Da $t_-$ nicht rechter Endpunkt von $I$ ist, enthält $U_{t_-}$ ein Intervall der Gestalt $[t_-, t_- + \epsilon]$. Es folgt $(t_-, t_- + \epsilon] \subseteq M$. Wobei hier $\epsilon$ so klein gewählt wurde, daß $t_- + \epsilon \leq t_+$.

$\cdot$) Sei $T := \sup M$ und sei $t_n \in M$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = T$. Wegen $[t_-, t_+] \subseteq I$ und $M \subseteq [t_-, t_+]$ folgt $t_n, T \in I$. Da $I$ die Spurtopologie trägt, folgt das $t_n \to T$ in der Topologie von $I$. Sei $U_T$ die Umgebung von $T$ aus der Definition von zukunftsorientiert. Dann existiert ein $t_N$ mit $t_N \in U_T$. Da jedenfalls $t_N < T$ folgt

$$\alpha(t_-) \ll \alpha(t_N) \ll \alpha(T) \ ,$$

d.h. $T \in M$.

$\cdot$) Es gilt $T = t_+$: Angenommen es wäre $T < t_+$. Dann ist insbesondere $T$ nicht rechter Endpunkt von $I$. Also existiert ein Intervall der Gestalt $[T, T + \epsilon] \subseteq U_T$. Hier wählen wir $\epsilon$ so klein, daß $T + \epsilon \leq t_+$. Es folgt $T + \epsilon \in M$, ein WS! denn $T = \sup M$.

Wir schließen also $\alpha(t_-) \ll \alpha(t_+)$.

□

**5.5 Korollar.** *Seien $x, y \in \mathcal{M}$. Dann gilt $x \ll y$ genau dann, wenn es eine zukunftsorientierte Kurve $\alpha : [0,1] \to \mathcal{M}$ gibt mit $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.*

*Beweis.* Ist $\alpha : [0,1] \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert, so folgt aus Lemma 5.4

$$x = \alpha(0) \ll \alpha(1) = y \ .$$

Sei umgekehrt $x \ll y$, d.h. $y - x \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Dann gilt für $r > 0$ stets $r(y-x) \in \mathcal{C}_T^+(0)$ (vgl.Lemma 2.6). Also die Kurve

$$\alpha(t) := x + t(y-x), t \in [0,1] \ ,$$

zukunftsorientiert.

□

Ist $\alpha : I \to \mathcal{M}$ eine $E$-stetige Kurve, und ist $c \in \mathcal{M}$ festgehalten, so ist die Funktion

$$\alpha_c : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha_c(t) := -[\alpha(t), c] \end{cases}$$

stetig.

**5.6 Lemma.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert in $t_0$ und sei $c \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Weiters sei $U$ die Umgebung von $t_0$ aus der Definition von zukunftsorientiert. Dann gilt*

$$\forall t \in U, t < t_0 : \alpha_c(t) < \alpha_c(t_0)$$

$$\forall t \in U, t > t_0 : \alpha_c(t) > \alpha_c(t_0) \ .$$

*Eine analoge Aussage gilt falls $\alpha$ bei $t_0$ vergangenheitsorientiert ist.*

*Beweis.* Sei $t \in U, t > t_0$. Dann gilt $\alpha(t) \gg \alpha(t_0)$, d.h. $\alpha(t) - \alpha(t_0) \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Also ist $\alpha(t) - \alpha(t_0) \sim c$ und wir erhalten

$$\alpha_c(t) - \alpha(t_0) = -[\alpha(t), c] + [\alpha(t_0), c] =$$

$$= -[\alpha(t) - \alpha(t_0), c] > 0 \ .$$

Alle anderen Fälle folgen genauso.

□

**5.7 Lemma.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ eine $E$-stetige Kurve. Ist $\alpha$ an jeder Stelle $t_0 \in \operatorname{Int} I$ zukunfts- oder vergangenheitsorientiert, so ist $\alpha$ insgesamt zukunftsorientiert oder vergangenheitsorientiert. D.h. so ein $\alpha$ kann nicht an einer Stelle zukunftsorientiert und an einer anderen vergangenheitsorientiert sein.*

*Beweis.*
·) Angenommen es wäre $t_0, t_1 \in \operatorname{Int} I$ und $\alpha$ bei $t_0$ zukunftsorientiert und bei $t_1$ vergangenheitsorientiert. Sei z.B. $t_0 < t_1$. Wähle $c \in \mathcal{C}_T^+(0)$ und betrachte die Funktion $\alpha_c$. Als stetige Funktion auf $[t_0, t_1]$ besitzt $\alpha_c$ ein Maximum auf $[t_0, t_1]$. Dieses kann wegen Lemma 5.6 nicht bei $t_0$ und nicht bei $t_1$ angenommen werden, wird also an einer Stelle $t_{\max} \in (t_0, t_1)$ angenommen. Da $\alpha$ bei $t_{\max}$ entweder zukunfts- oder vergangenheitsorientiert ist, können aber nicht die Werte von $\alpha_c(t)$ sowohl für $t < t_{\max}$ als auch für $t > t_{\max}$ kleiner sein als $\alpha_c(t_{\max})$.

·) Sei nun $T \in I \setminus \operatorname{Int} I$, z.B. sei $T$ rechter Endpunkt von $I$. Sei $t_0 \in \operatorname{Int} I$ und $t_n \in \operatorname{Int} I$ mit $t_n \nearrow T, t_n > t_0$. Dann gilt $\alpha(t_0) \ll \alpha(t_n)$ d.h. $\alpha(t_n) - \alpha(t_0) \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Da $\alpha$ stetig ist folgt mit Lemma 2.12 daß

$$\alpha(T) - \alpha(t_0) = \lim_{n\to\infty} (\alpha(t_0) - \alpha(t_0)) \in \mathcal{C}_T^+(0) \cup \mathcal{C}_N^+(0) \cup \{0\} \ .$$

Wähle $t_1 \in \operatorname{Int} I$ mit $t_0 < t_1 < T$. Wegen Lemma 5.4 gilt $\alpha(t_0) \ll \alpha(t_1)$, d.h. $\alpha(t_1) - \alpha(t_0) \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Die obige Argumentation mit $t_1$ statt $t_0$ zeigt daß

$$\alpha(T) - \alpha(t_1) \in \mathcal{C}_T^+(0) \cup \mathcal{C}_N^+(0) \cup \{0\} \ .$$

Lemma 2.11 zeigt daß

$$\alpha(T) - \alpha(t_0) = (\alpha(T) - \alpha(t_1)) + (\alpha(t_1) - \alpha(t_0) \in \mathcal{C}_T^+(0) \ .$$

Wir können also für die verlangte Umgebung $U_T$ aus der Definition von zukunftsorientiert die Menge

$$U_T := \operatorname{Int} I \cup \{T\}$$

nehmen.

Der Fall das $T \in I \setminus \operatorname{Int} I$ linker Endpunkt von $I$ ist wird analog behandelt.

□

*5.8 Bemerkung.* Ist $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert, so ist

$$\alpha^- : \begin{cases} -I & \to & \mathcal{M} \\ t & \mapsto & \alpha(-t) \end{cases}$$

vergangenheitsorientiert.

## 5.2 Die Pfadtopologie

Die Euklidische Topologie $\mathcal{T}_E$ auf $\mathcal{M}$ hat keine wirkliche physikalische Bedeutung. Die sogenannte *Pfadtopologie* $\mathcal{T}_p$ die im folgenden untersucht wird ist dagegen "interpretierbar".

**5.9 Definition.** Eine Menge $V \subseteq \mathcal{M}$ heißt $P$-offen, $V \in \mathcal{T}_p$, wenn gilt: Für jede zukunfts- oder vergangenheitsorientierte Kurve $\alpha : I \to \mathcal{M}$ existiert eine Menge $U \in \mathcal{T}_E$ sodaß

$$\alpha(I) \cap V = \alpha(I) \cap U \ . \tag{5.1}$$

Aufgrund von Bemerkung 5.8 ist $V \in \mathcal{T}_p$ genau dann, wenn für jede zukunftsorientierte Kurve $\alpha$ ein $U \in \mathcal{T}_E$ existiert sodaß (5.1) gilt.

**5.10 Lemma.** *$\mathcal{T}_p$ ist eine Topologie auf $\mathcal{M}$.*

*Beweis.*

·) Ist $V = \emptyset$ bzw. $V = \mathcal{M}$, so leistet $U = \emptyset \in \mathcal{T}_E$ bzw. $U = \mathcal{M} \in \mathcal{T}_E$ das Gewünschte.

$\cdot$) Sei $V_j \in \mathcal{T}_p, j \in J$, und sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert. Weiters seien $U_j \in \mathcal{T}_E$ wie in (5.1) für $V_j$. Dann gilt $\bigcup_{i\in J} U_j \in \mathcal{T}_E$ und

$$\alpha(I) \cap \bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{j\in J} (\alpha(I) \cap V_j) = \bigcup_{j\in J} (\alpha(I) \cap U_j) = \alpha(I) \cap \bigcup_{j\in J} U_j \ .$$

$\cdot$) Ist, mit den obigen Bezeichnungen, $J$ endlich sodaß also $\bigcap_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}_E$. Dann ist

$$\alpha(I) \cap \bigcap_{j\in J} V_j = \bigcap_{j\in J} (\alpha(I) \cap V_j) = \bigcap_{j\in J} (\alpha(I) \cap U_j) = \alpha(I) \cap \bigcap_{j\in J} U_j$$

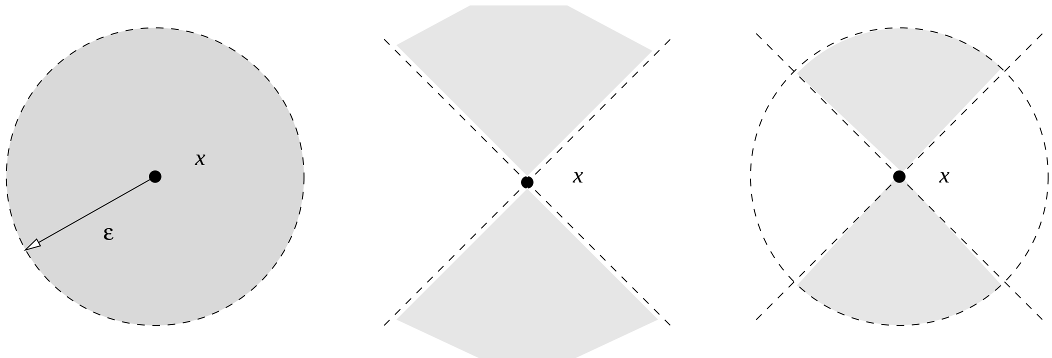
$\square$

*5.11 Bemerkung.* $\mathcal{T}_p$ ist feiner als $\mathcal{T}_E$. Dann ist $V \in \mathcal{T}_E$, so gilt für jede Kurve $\alpha$ klarerweise $\alpha(I) \cap V = \alpha(I) \cap V$, d.h. $U = V$ in Definition 5.9. Es gilt also $\mathcal{T}_E \subseteq \mathcal{T}_p$.

**5.12 Lemma.** *Für $x \in \mathcal{M}$ und $\epsilon > 0$ setze*

$$\mathcal{C}(x) := \mathcal{C}_T(x) \cup \{x\} \ ,$$

$$N_\epsilon^P(x) := \mathcal{C}(x) \cap N_\epsilon^E(x) \ .$$




$N^E$ C(x) $N_\varepsilon^p$

*Dann gilt $\mathcal{C}(x), N_\epsilon^P(x) \in \mathcal{T}_p \setminus \mathcal{T}_E$.*

*Beweis.* Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert. Ist $x \notin \alpha(I)$, so gilt

$$\alpha(I) \cap \mathcal{C}(x) = \alpha(I) \cap \mathcal{C}_T(x)$$

und $\mathcal{C}_T(x) \in \mathcal{T}_E$ (vgl. Lemma 2.12). Ist $x \in \alpha(I)$, so gilt wegen Lemma 5.4 das $\alpha(I) \subseteq \mathcal{C}(x)$, und damit ist

$$\alpha(I) \cap \mathcal{C}(x) = \alpha(I) = \alpha(I) \cap \mathcal{M}$$

und $\mathcal{M} \in \mathcal{T}_E$. Wir haben gezeigt, daß $\mathcal{C}(x) \in \mathcal{T}_p$ liegt. Nun ist stets $N_\epsilon^E(x) \not\subseteq \mathcal{C}(x)$, denn ist $x_0 \in \mathcal{M}$ mit $Q(x_0) > 0$, so gilt für $\delta$ hinreichend klein

$$x + \delta x_0 \in N_\epsilon^E(x) \setminus \mathcal{C}(x) \ .$$

Also kann $\mathcal{C}(x)$ bezüglich der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}_E$ nicht offen sein.

Es gilt $\mathcal{C}(x), N_\epsilon^E(x) \in \mathcal{T}_p$, also auch $N_\epsilon^P(x) = \mathcal{C}(x) \cap N_\epsilon^E(x) \in \mathcal{T}_p$. Wegen $N_\epsilon^P(x) \subseteq \mathcal{C}(x)$ ist ebenfalls für jedes $\epsilon > 0$

$$N_\epsilon^E(x) \not\subseteq N_\epsilon^P(x) \ ,$$

also $N_\epsilon^P(x) \notin \mathcal{T}_E$.

□

Wenn wir klar herausstellen wollen bzgl. welcher Topologie $\mathcal{T}_E$ bzw. $\mathcal{T}_p$ die Bildung des Inneren-, Abschlusses-, Randes - einer Menge $A \subseteq \mathcal{M}$ zu verstehen ist, so schreiben wir $\mathrm{Int}_E\, A, \mathrm{Cl}_E\, A, \mathrm{Bd}_E\, A$ oder eben $\mathrm{Int}_p\, A, \mathrm{Cl}_p\, A, \mathrm{Bd}_p\, A$.

**5.13 Satz.** *Sei $x \in \mathcal{M}$. Die Familie*

$$\{N_\epsilon^P(x) : \epsilon > 0\}$$

*bildet eine Umgebungsbasis von $x$ bzgl. $\mathcal{T}_p$.*

*Beweis.* Sei $x \in \mathcal{M}, V \subseteq \mathcal{M}$ offen bzgl. $\mathcal{T}_p$, $x \in V$. Wir zeigen, daß es eine Menge $N_\epsilon^P(x)$ gibt mit $N_\epsilon^P(x) \subseteq V$.

Angenommen es gilt $N_\epsilon^P(x) \not\subseteq V$ für alle $\epsilon > 0$. Dann muß entweder eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathcal{C}_T^+(x)\backslash V, x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_E} x$, oder eine solche mit $x_n \in \mathcal{C}_T^-(x)\backslash V$, existieren: Denn : Wir konstruieren induktiv eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $r_1 = 1$ und wähle $y_1 \in N_{r_1}^P(x) \setminus V$. Wähle $r_2 \in (0, \min\{\|y_1\|\})$ und $y_2 \in N_{r_2}^P(x) \setminus V$. Wähle $r_3 \in (0, \min\{\|y_2\|, \frac{1}{3}\})$ usw. Wegen $y_n \in N_1^P(x) \setminus \{x\} \subseteq \mathcal{C}_T(x) = \mathcal{C}_T^+(x) \cup \mathcal{C}_T^-(x)$ gibt es eine Teilfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit entweder $x_n \in \mathcal{C}_T^+(x)$, $n \in \mathbb{N}$, oder eine Teilfolge mit $x_n \in \mathcal{C}_T^-(x), n \in \mathbb{N}$, (oder beides). Wegen $y_n \in N_{\frac{1}{n}}^E(x)$ gilt $y_n \to x$ in $\mathcal{T}_E$ und daher erst recht $x_n \to x$ in $\mathcal{T}_E$.

OBdA betrachten wir den Fall $x_n \in \mathcal{C}_T^+(x)\backslash V, x_n \to x$ in $\mathcal{T}_E$. Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_1} \gg x_{n_2} \gg \cdots \gg x \ .$$

Setze $\delta_1 = 1, n_1 = 1$. Nun gilt $x_{n_1} \in \mathcal{C}_T^+(x)$, also $x \in \mathcal{C}_T^-(x_{n_1})$. Wegen Lemma 2.12 gibt es $\delta_2 > 0$ sodaß $N_{\delta_2}^E(x) \subseteq \mathcal{C}_T^-(x_{n_1})$. Wähle $n_2 > n_1$ sodaß $x_{n_2} \in N_{\delta_2}^E(x)$. u.s.w. Da stets $x_n \gg x$ gilt haben wir eine Teilfolge mit der gewünschten Eigenschaft erhalten.

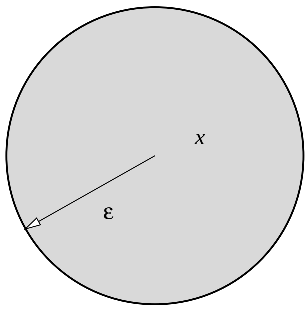
Definiere eine Abbildung $\alpha : [0,1] \to \mathcal{M}$ wie folgt: Für $t = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, setze $\alpha(t) := x_{n_k}$. Weiters sei $\alpha(0) := x$ und sei $\alpha(t)$ für $t \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1})$ jeweils die lineare Verbindungsstrecke von $x_{n_k}$ zu $x_{n_{k+1}}$. Dann ist $\alpha$ eine bzgl. $\mathcal{T}_E$ stetige Kurve und es gilt für $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ stets $\alpha(t_1) \ll \alpha(t_2)$, d.h. $\alpha$ ist zukunftsorientiert.

Da $V \in \mathcal{T}_p$ liegt, existiert $U \in \mathcal{T}_E$ sodaß $\alpha([0,1]) \cap V = \alpha([0,1]) \cap U$. Wegen $x \in \alpha([0,1]) \cap V$ folgt $x \in U$. Wegen $x_{n_k} \in \alpha([0,1])$ und $x_{n_k} \notin V$ folgt $x_{n_k} \notin U$. Jedoch gilt $x_{n_k} \to x$ bzgl. $\mathcal{T}_E$ und $U$ offen bzgl. $\mathcal{T}_E$, ein WS!.

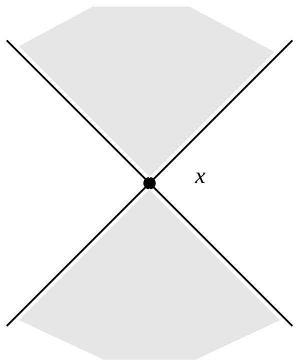
□

**5.14 Satz.** *Sei $x \in \mathcal{M}, \epsilon > 0$. Dann gilt*

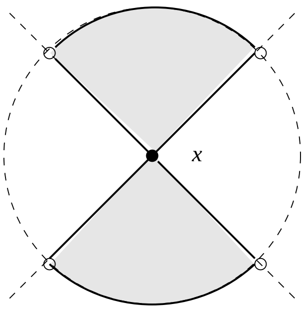
$$\mathrm{Cl}_P\left(N_\epsilon^P(x)\right) = \mathrm{Cl}_E\left(N_\epsilon^P(x)\right) \setminus \left(\mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathrm{Bd}_E(\mathcal{C}(x))\right)$$




$\mathrm{Cl}_{\mathrm{E}}\, N_{\varepsilon}^{E}(x)$




$\mathrm{Cl}_{\mathrm{E}}\, C(x)$




$\mathrm{Cl}_{\mathrm{P}}\, N_{\varepsilon}^{P}(x)$

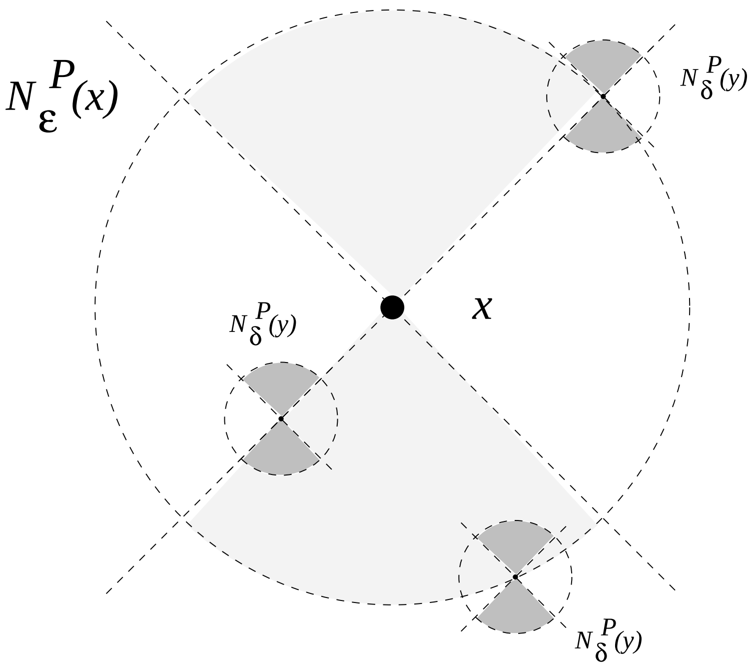
*Beweis.* Da $\mathcal{T}_P \supseteq \mathcal{T}_E$ ist, gilt

$$\mathrm{Cl}_P\left(N_\epsilon^P(x)\right) \subseteq \mathrm{Cl}_E\left(N_\epsilon^P(x)\right) \; .$$

Wegen $N_\epsilon^P(x) = N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}(x)$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_E(N_\epsilon^P(x)) = \mathrm{Cl}_E(N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}(x)) \subseteq \mathrm{Cl}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathrm{Cl}_E(\mathcal{C}(x)) = \\
= [N_\epsilon^E(x) \cup \mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x))] \cap [\mathcal{C}(x) \cup \mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x)] = \\
= [N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}(x)] \cup [\mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathcal{C}(x)] \cup [N_\epsilon^E(x) \cap \mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x)] \cup \\
\cup [\mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x)]
\end{aligned}$$

müssen wir drei Fälle überprüfen.



·) Sei $y \in \mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathcal{C}(x)$ und sei $\delta > 0$ gegeben. Wähle $1 > r > 0$ so klein, daß $y_0 := y + r(x - y) \in N_\delta^E(y)$. Wegen $y_0 = x + (1 - r)(y - x)$ und $\|y - x\| = \epsilon$ gilt $y_0 \in N_\epsilon^E(x)$. Wegen $y \in \mathcal{C}(x)$, d.h. $y - x \in \mathcal{C}_T(0)$, gilt $y_0 \in \mathcal{C}(y)$ und auch $y_0 \in \mathcal{C}(x)$. Wir haben also

$$y_0 \in N_\delta^P(y) \cap N_\epsilon^P(x) \neq \emptyset \ ,$$

und da $\delta$ beliebig war und die $N_\delta^P(y)$ eine Umgebungsbasis sind folgt $y \in \mathrm{Cl}_P(N_\epsilon^P(x))$.

·) Sei $y \in N_\epsilon^E(x) \cap \mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x)$ und sei $\delta > 0$. Da $\mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_N(x)$ gilt entweder $y = x, y < x$ oder $y > x$. Im ersten Fall gilt $y \in N_\delta^P(x)$ trivialerweise. Der zweite Fall wird genauso behandelt wie der Dritte: Sei also $y > x$. Wähle $v \in \mathcal{C}_T^+(0)$ mit $\|v\| < \min\{\delta, \epsilon - \|y - x\|\}$, und setze $y_0 := y + v$. Dann gilt $y_0 \in N_\delta^E(y), y_0 \in N_\epsilon^E(x), y_0 \in \mathcal{C}_T^+(y)$ und wegen $x < y \ll y_0$ auch $y_0 \in \mathcal{C}_T^+(x)$. Insgesamt also

$$y_0 \in N_\epsilon^P(x) \cap N_\delta^P(y) \neq \emptyset$$

und wir schließen wieder $y \in \mathrm{Cl}_p(N_\epsilon^P(x))$.

·) Sei $y \in \mathrm{Bd}_E(N_\epsilon^E(x)) \cap \mathrm{Bd}_E\, \mathcal{C}(x)$. Dann ist also $\|y - x\| = \epsilon$ und entweder $y \in \mathcal{C}_N^+(x)$ oder $y \in \mathcal{C}_N^-(x)$. Wir behandeln oBdA den Fall $y > x$. Dann gilt $y \notin \mathrm{Cl}_E(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(x) \cup \mathcal{C}_N^-(x) \cup \{x\}$, also existiert ein $\delta > 0$ sodaß $N_\delta^E(y) \cap \mathrm{Cl}_E(\mathcal{C}_T^-(x)) = \emptyset$.

Angenommen $N_\epsilon^P(x) \cap N_\delta^P(y) \neq \emptyset$. Existiere also

$$y_0 \in N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}(x) \cap N_\delta^E(y) \cap \mathcal{C}(y) \ .$$

Wegen obiger Wahl von $\delta$ gilt $y_0 \in \mathcal{C}_T^+(x)$. Ist $y_0 \ll y$, so folgt damit $x \ll y_0 \ll y$ also $x \ll y$, ein WS!. Sei $y \ll y_0$, also $y_0 - y \in \mathcal{C}_T^+(0)$. Sei $\{e_1, \ldots, e_4\}$ die zulässige Basis mit deren Hilfe die Norm $\|.\|$ definiert ist (vgl. Bemerkung 5.2) und schreibe

$$y - x = a + \alpha e_4, \ \ y_0 - y = b + \beta e_4 \ ,$$

mit $a, b \in \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wegen $y - x \in \mathcal{C}_N^+(0)$ und $y_0 - y \in \mathcal{C}_T^+(0)$ folgt (vgl. Lemma 2.7)

$$\alpha = -[y - x, e_4] > 0, \beta = -[y_0 - y, e_4] > 0 \ .$$

Bezeichnet $(.,.)$ das innere Produkt von dem $\|.\|$ kommt, so gilt

$$\begin{aligned} \|y_0 - x\|^2 = \|(y_0 - y) + (y - x)\|^2 = \|(a + b) + (\alpha + \beta)e_4\|^2 = \\ = (a + b, a + b) + (\alpha + \beta)^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2(a, b) + \\ + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \end{aligned}$$

Nun ist

$$\|y - x\|^2 = (a + \alpha e_4, a + \alpha e_4) = \|a\|^2 + \alpha^2 \ ,$$

und sämtliche

$$\|b\|^2, 2(a, b), \beta^2, 2\alpha\beta \geq 0 \ ,$$

also

$$\|y_0 - x\| \geq \|y - x\| = \epsilon \ ,$$

ein WS! zu $y_0 \in N_\epsilon^E(x)$.

□

**5.15 Korollar.** *Wir erhalten aus den obigen Sätzen einige topologische Eigenschaften von $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$.*

(i) *$(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, d.h. jeder Punkt besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

(ii) *$(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ ist separabel, d.h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge.*

(iii) *Jede Gerade $R := \{x_0 + tv : t \in \mathbb{R}\}$ mit $Q(v) \geq 0$ ist ein abgeschlossener diskreter Teilraum von $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$.*

(iv) *$(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ ist Hausdorff aber nicht regulär und daher auch nicht lokalkompakt.*

(v) *$(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ ist weder abzählbar kompakt, Lindelöf, noch erfüllt er das 2. Abzählbarkeitsaxiom.*

## 5.3 Homöomorphismen von $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$

Unter einer *$P$-stetigen Kurve* verstehen wir eine Funktion $\alpha : I \to \mathcal{M}$ auf einem Intervall $I$, die stetig bzgl. $\mathcal{T}_p$ ist. Da $\mathcal{T}_p$ feiner als $\mathcal{T}_E$ ist, ist jede $P$-stetige Kurve auch $E$-stetig.

**5.16 Lemma.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert (oder vergangenheitsorientiert). Dann ist $\alpha$ auch $P$-stetig.*

*Beweis.* Sei $V \in \mathcal{T}_p$. Dann existiert $U \in \mathcal{T}_E$ sodaß

$$\alpha(I) \cap V = \alpha(I) \cap U \ .$$

Daher ist

$$\alpha^{-1}(V) = \alpha^{-1}(\alpha(I) \cap V) = \alpha^{-1}(\alpha(I) \cap U) = \alpha^{-1}(U) \ .$$

Da $\alpha$ insbesondere $E$-stetig ist, ist $\alpha^{-1}(U)$ offen in $I$.

□

**5.17 Lemma.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$. Dann ist $\alpha$ $P$-stetig genau dann, wenn $\alpha$ $E$-stetig ist und wenn zu jedem $t_0 \in I$ eine Umgebung $U$ von $t_0$ in $I$ existiert sodaß $\alpha(U) \subseteq \mathcal{C}(\alpha(t_0))$.*

*Beweis.* Sei $\alpha$ $P$-stetig. Da $\mathcal{C}(\alpha(t_0)) \in \mathcal{T}_p$ liegt ist $U := \alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha(t_0)))$ offen in $I$. Nun gilt

$$t_0 \in \alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha(t_0))) \ ,$$

also ist $U$ eine Umgebung von $t_0$. Wie oben bemerkt ist $\alpha$ auch $E$-stetig.

Erfülle nun umgekehrt $\alpha$ die Bedingungen des Lemmas, und sei $V \in \mathcal{T}_p$. Sei $t_0 \in I$ sodaß $\alpha(t_0) \in V$, d.h. $t_0 \in \alpha^{-1}(V)$. Da $V \in \mathcal{T}_p$ existiert eine Menge $N_\epsilon^P(\alpha(t_0)) \subseteq V$. Nun gilt $N_\epsilon^P(\alpha(t_0)) = N_\epsilon^E(\alpha(t_0)) \cap \mathcal{C}(\alpha(t_0))$, also ist

$$\alpha^{-1}(N_\epsilon^P(\alpha(t_0))) = \alpha^{-1}(N_\epsilon^E(\alpha(t_0))) \cap \alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha(t_0))) \ .$$

Da $\alpha$ $E$-stetig ist, ist $\alpha^{-1}(N_\epsilon^P(\alpha(t_0)))$ eine Umgebung von $t_0$. Nach Voraussetzung des Lemmas ist auch $\alpha^{-1}(\mathcal{C}(\alpha(t_0)))$ eine Umgebung von $t_0$. Insgesamt ist $U := \alpha^{-1}(N_\epsilon^P(\alpha(t_0)))$ eine Umgebung von $t_0$ und es ist $\alpha(U) \subseteq V$. $\square$

**5.18 Korollar.** $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ *ist wegzusammenhängend (und daher insbesondere zusammenhängend).*

*Beweis.* Seien $x, y \in \mathcal{M}$. Wähle $v \in \mathcal{M}$ mit $Q(v) < 0$ und betrachte den Punkt $z(t) := x + tv$ für ein $t \in \mathbb{R}$ dann ist also $z(t) \in \mathcal{C}(x)$. Es gilt

$$Q(z(t) - y) = Q((x - y) + tv) = Q(x - y) + 2[x - y, v]t + Q(v)t^2 \ .$$

Wegen $Q(v) < 0$ ist dieser Wert für hinreichend großes $t \in \mathbb{R}$ sicher negativ, d.h. es gilt $z(t_0) \in \mathcal{C}(y)$ für ein geeignetes $t_0 \in \mathbb{R}$. Setze $z := z(t)$. Die Kurven

$$\alpha_1 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathcal{M} \\ r & \mapsto & x + r(z - x) \end{cases}$$

$$\alpha_2 : \begin{cases} [1,2] & \to & \mathcal{M} \\ r & \mapsto & z + (r - 1)(y - z) \end{cases}$$

sind zukunfts- oder vergangenheitsorientiert, also auch $P$-stetig. Wegen $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ ist auch

$$\alpha : \begin{cases} [0,2] & \to & \mathcal{M} \\ r & \mapsto & \begin{cases} \alpha_1(r) & , & r \in [0,1] \\ \alpha_2(r) & , & r \in [1,2] \end{cases} \end{cases}$$

$P$-stetig. Es gilt $\alpha(0) = x, \alpha(2) = y$. $\square$

**5.19 Korollar.** *Sei* $\epsilon > 0$ *und* $x \in \mathcal{M}$. *Die Menge*

$$N_\epsilon^{P,+}(x) := N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}_T^+(x)$$

*ist in* $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ *wegzusammenhängend. Gleiches gilt für die Menge* $N_\epsilon^{P,-}(x) := N_\epsilon^E(x) \cap \mathcal{C}_T^-(x)$.

*Beweis.* Seien $y_1, y_2 \in N_\epsilon^{P,+}(x)$. Betrachte den Punkt

$$z(t) := x + t(y_1 - x), t \in [0,1] \ .$$

Dann ist für $t > 0$ stets $z(t) \in N_\epsilon^{P,+}(x)$, denn $y_1 \gg x$ und daher auch

$$x \ll x + t(y_1 - x) \ ,$$

und $\|y_1 - x\| < \epsilon$ und daher auch

$$\|z(t) - x\| = \|t(y_1 - x)\| < \epsilon \ .$$

Weiters hängt $z(t)$ stetig von $t$ ab (bzgl. $\mathcal{T}_E$, wegen $y_1 \ll x$ sogar auch bzgl. $\mathcal{T}_p$). Jedenfalls ist $Q(z(t) - y_2)$ eine stetige Funktion von $t \in [0,1]$. Nun gilt $Q(z(0) - y_2) = Q(x - y_2) < 0$, also gibt es ein $t_0 > 0$ sodaß $Q(z(t_0) - y_2) < 0$.

Die Kurve $\alpha : [0,2] \to \mathcal{M}$ die definiert ist als

$$\alpha(r) := \begin{cases} y_1 + r(z(t_0) - y_1) & , \quad r \in [0,1] \\ z(t_0) + (r-1)(y_2 - z(t_0)) & , \quad r \in [1,2] \end{cases}$$

ist daher $P$-stetig. Sie erfüllt $\alpha(0) = y_1, \alpha(2) = y_2$. Da sowohl $N_\epsilon^E(x)$ als auch $\mathcal{C}_T^+(x)$ konvex (Lemma 2.6) und $\alpha([0,2])$ gerade die beiden Verbindungsstrecken von $y_1$ zu $(t_0)$ und von $z(t_0)$ zu $y_2$ ist, liegt $\alpha([0,2])$ zur Gänze in $N_\epsilon^{P,+}(x)$. □

**5.20 Satz.** *Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ gegeben. Dann ist $\alpha$ zukunftsorientiert oder vergangenheitsorientiert genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *$\alpha$ ist $P$-stetig und injektiv.*

(ii) *Für jedes $t_0 \in I$ gibt es eine Umgebung $U$ von $t_0$ in $I$ und eine Umgebung $V$ von $\alpha(t_0)$ in $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ sodaß*

   (a) *$\alpha(U) \subseteq V$*

   (b) *Für alle $a, b \in U$ mit $a \le t_0 \le b$ und jede $P$-stetige Kurve $\gamma : [a,b] \to V$ mit $\gamma(a) = \alpha(a), \gamma(b) = \alpha(b)$, gilt $\alpha(t_0) \in \gamma([a,b])$.*

*Beweis.*
·) Sei $\alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunftsorientiert. Nach Lemma 5.16 ist $\alpha$ $P$-stetig und nach Lemma 5.4 injektiv. Sei $t_0 \in I$ gegeben. Setze $V := \mathcal{C}(\alpha(t_0))$, dann ist $V$ eine Umgebung von $\alpha(t_0)$. Setze $U := I$, dann ist $U$ eine Umgebung von $t_0$ in $I$. Wegen Lemma 5.4 gilt für jedes $t \in U$ entweder $\alpha(t) \ll \alpha(t_0), \alpha(t) = \alpha(t_0), \alpha(t) \gg \alpha(t_0)$. In jedem Fall ist $\alpha(t) \in \mathcal{C}(\alpha(t_0))$, d.h. es ist $\alpha(U) \subseteq V$. Sei nun $a, b \in U, a \le t_0 \le b$ und $\gamma : [a,b] \to V$ eine $P$-stetige Funktion mit $\gamma(a) = \alpha(a)$ und $\gamma(b) = \alpha(b)$. Ist $a = t_0$, so ist

$$\alpha(t_0) = \gamma(t_0) \in \gamma([a,b]) \ .$$

Genauso folgt im Fall $b = t_0$ das $\alpha(t_0) \in \gamma([a,b])$. Sei $a < t_0 < b$, dann ist $\gamma(a) \in \mathcal{C}_T^-(\alpha(t_0))$ und $\gamma(b) \in \mathcal{C}_T^+(\alpha(t_0))$, also

$$\gamma^{-1}(\mathcal{C}_T^+(\alpha(t_0))), \gamma^{-1}(\mathcal{C}_T^-(\alpha(t_0))) \neq \emptyset$$

Da $\gamma$ insbesondere $E$-stetig ist sind diese beiden Mengen offen in $I$. Wäre $\alpha(t_0) \notin \gamma([a,b])$, so wäre wegen

$$\mathcal{C}(\alpha(t_0)) = \mathcal{C}_T^+(\alpha(t_0)) \cup \mathcal{C}_T^-((\alpha(t_0))) \cup \{\alpha(t_0)\}$$

und $\gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{C}(\alpha(t_0))$ sogar

$$\gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{C}_T^+(\alpha(t_0)) \cup \mathcal{C}_T^-(\alpha(t_0)) \ ,$$

also

$$[a,b] = \gamma^{-1}(\mathcal{C}_T^+(\alpha(t_0))) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{C}_T^-(\alpha(t_0))) \ .$$

Wir hätten also eine nichttriviale Zerlegung von $[a,b]$ in zwei disjunkte offene Mengen gefunden. Ein WS!, denn ein Intervall (versehen mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$) ist zusammenhängend.

·) Erfülle nun $\alpha : I \to \mathcal{M}$ die Bedingungen $(i)$ und $(ii)$. Dann ist insbesondere $\alpha$ eine $E$-stetige Funktion.

Sei $t_0 \in I$ und $U, V$ wie in $(ii)$. Wir zeigen, daß wir oBdA $V = N_\epsilon^P(\alpha(t_0))$ und $U$ Intervall voraussetzen können. Sei $\tilde{V}$ eine Umgebung von $\alpha(t_0)$ (bzgl. $\mathcal{T}_p$) mit $\tilde{V} \subseteq V$. Dann ist $\alpha^{-1}(\tilde{V})$ eine Umgebung (in $I$) von $t_0$ und daher auch $\alpha^{-1}(\tilde{V}) \cap U$. Sei $\tilde{U}$ eine Umgebung von $t_0$ mit $\tilde{U} \subseteq U \cap \alpha^{-1}(\tilde{V})$. Dann gilt

$$\alpha(\tilde{U}) \subseteq \alpha(U \cap \alpha^{-1}(\tilde{V})) \subseteq V \cap \tilde{V} = \tilde{V} \ .$$

Ist $a, b \in \tilde{U}$ mit $a \leq t_0 \leq b$ und $\gamma : [a, b] \to \tilde{V}$ $P$-stetig mit $\gamma(a) = \alpha(a), \gamma(b) = \alpha(b) = \alpha(b)$, so ist insbesondere auch $a, b \in U$ und $\gamma : [a, b] \to V$, sodaß folgt $\alpha(t_0) \in \gamma([a, b])$. Die Bedingungen $(a), (b)$ gelten also genauso für $\tilde{U}, \tilde{V}$.

Da $V$ eine Umgebung von $\alpha(t_0)$ bzgl. $\mathcal{T}_p$ ist, existiert eine Menge $\tilde{V} := N_\epsilon^P(\alpha(t_0)) \subseteq V$. Da $U \cap \alpha^{-1}(\tilde{V})$ eine Umgebung von $t_0$ in $I$ ist, existiert ein Intervall $\tilde{U}$ in $I$ mit $t_0 \in \tilde{U} \subseteq U \cap \alpha^{-1}(\tilde{V})$.

Sei also oBdA angenommen das $V = N_\epsilon^P(\alpha(t_0))$ und $U$ Intervall. Setze

$$U_+ := \{t \in U : t > t_0\}, \ U_- := \{t \in U : t < t_0\} \ ,$$

dann sind $U_+$ und $U_-$ wieder Intervalle (möglicherweise $= \emptyset$), jedenfalls zusammenhängend. Wegen der Injektivität von $\alpha$ gilt

$$\alpha(t_0) \notin \alpha(U_+), \alpha(U_-) \ .$$

Wegen

$$\alpha(U_+) \subseteq N_\epsilon^P(\alpha(t_0)) = N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0)) \cup N_\epsilon^{P,-}(\alpha(t_0)) \cup \{\alpha(t_0)\}$$

folgt

$$U_+ \subseteq \alpha^{-1}(N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))) \cup \alpha^{-1}(N_\epsilon^{P,-}(\alpha(t_0))) \ .$$

Da $U_+$ zusammenhängend ist muß eine dieser beiden Mengen leer sein, d.h.

$$\alpha(U_+) \subseteq N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0)) \text{ oder } \alpha(U_+) \subseteq N_\epsilon^{P,-}(\alpha(t_0)) \ .$$

Genauso zeigt man

$$\alpha(U_-) \subseteq N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0)) \text{ oder } \alpha(U_-) \subseteq N_\epsilon^{P,-}(\alpha(t_0)) \ .$$

Ist eines von $U_+$ und $U_-$ leer, so folgt bereits das $\alpha$ an der Stelle $t_0$ entweder zukunftsorientiert oder vergangenheitsorientiert ist. Sind beide, $U_+$ und $U_-$, nicht leer, so müssen wir noch zeigen das es nicht passieren kann, das beide $\alpha(U_+)$ und $\alpha(U_-)$ in dem gleichen von $N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$ oder $N_\epsilon^{P,-}(\alpha(t_0))$ enthalten sind.

Sei angenommen $\alpha(U_+), \alpha(U_-) \subseteq N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$. Wähle $a \in U_-$ und $b \in U_+$, sodaß also $a < t_0 < b$. Dann sind $\alpha(a), \alpha(b) \in N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$. Nach Korollar 5.19 ist $N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$ wegzusammenhängend (bzgl. $\mathcal{T}_p$). Also existiert eine $P$-stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$ mit $\gamma(a) = \alpha(a), \gamma(b) = \alpha(b)$. Da $\gamma([a, b]) \subseteq N_\epsilon^{P,+}(\alpha(t_0))$, folgt $\alpha(t_0) \notin \gamma([a, b])$ ein WS! zu $(b)$.

$\square$

**5.21 Korollar.** *Sei $h : (\mathcal{M}, \mathcal{T}_p) \to (\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ ein Homöomorphismus und $\alpha : I \to \mathcal{M}$. Dann ist $\alpha$ zukunfts- oder vergangenheitsorientiert genau dann, wenn $h \circ \alpha : I \to \mathcal{M}$ zukunfts- oder vergangenheitsorientiert ist (die Orientierung kann sich dabei ändern).*

*Beweis.* Die Bedingungen von Satz 5.20 sind unter Anwendung von Homöomorphismen invariant: Sei $\alpha$ zukunfts- und vergangenheitsorientiert. Dann ist $\alpha$ $P$-stetig und injektiv. Also ist auch $h \circ \alpha$ $P$-stetig und injektiv. Sei $U, V$ wie im Satz für $\alpha$. Dann erfüllt $U, h(V)$ die Bedingungen $(a), (b)$ für $h \circ \alpha$. Also folgt das $h \circ \alpha$ zukunfts- oder vergangenheitsorientiert ist.

Sei umgekehrt $h \circ \alpha$ zukunfts- oder vergangenheitsorientiert. Dann hat nach dem bereits bewiesenen auch $\alpha = h^{-1} \circ (h \circ \alpha)$ diese Eigenschaft. □

**5.22 Satz.** *Sei $h$ eine Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}$. Dann ist $h$ ein $P$-Homöomorphismus genau dann, wenn entweder $h$ oder $-h$ ein kausaler Automorphismus ist.*

*Beweis.*
·) Sei $h \in \mathcal{A}$. Dann ist $h$ bijektiv. Nach dem Satz von Zeeman ist $h$ Zusammensetzung einer Translation und einer linearen Abbildung, und daher ist $h$ $E$-stetig. Sei $x \in \mathcal{M}$ festgehalten. Da $x \ll y$ genau dann, wenn $h(x) \ll h(y)$ gilt

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x)) \ .$$

Genauso folgt $h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x))$, insgesamt also

$$h(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{C}(h(x)) \ .$$

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert, da $h$ $E$-stetig ist, ein $\delta > 0$ sodaß

$$h(N_\delta^E(x)) \subseteq N_\epsilon^E(h(x)) \ .$$

Es folgt (da $h$ injektiv ist)

$$h(N_\delta^P(x)) = h(N_\delta^E(x) \cap \mathcal{C}(x)) = h(N_\delta^E(x)) \cap h(\mathcal{C}(x)) \subseteq$$
$$\subseteq N_\epsilon^E(h(x)) \cap \mathcal{C}(h(x)) = N_\epsilon^P(h(x)) \ .$$

Also ist $h$ $P$-stetig. Da mit $h$ auch $h^{-1}$ ein kausaler Automorphismus ist, ist auch $h^{-1}$ $P$-stetig. Insgesamt folgt das $h$ ein $P$-Homöomorphismus ist.

Ist $-h \in \mathcal{A}$, so folgt das $-h$ ein $P$-Homöomorphismus ist, und daher auch $h$.

·) Sei $h$ ein $P$-Homöomorphismus und sei $x \in \mathcal{M}$ festgehalten. Wir zeigen das entweder

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x)) \text{ und } h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x)) \ , \tag{5.2}$$

oder

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x)) \text{ und } h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x)) \ . \tag{5.3}$$

Im ersten Fall sagen wir das $h$ bei $x$ die Ordnung erhält, im zweiten Fall das $h$ bei $x$ die Ordnung umkehrt.

Sei $y \gg x$, dann existiert eine zukunftsorientierte Kurve $\alpha : [0,1] \to \mathcal{M}$ mit $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$. Wegen Korollar 5.21 ist $h \circ \alpha$ entweder zukunfts- oder vergangenheitsorientiert, also gilt entweder $h(x) = (h \circ \alpha)(0) \ll (h \circ \alpha)(1) = h(y)$ oder $h(x) = (h \circ \alpha)(0) \gg (h \circ \alpha)(1) = h(y)$. Wir schließen das

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) \subseteq \mathcal{C}_T^+(h(x)) \cup \mathcal{C}_T^-(h(x)) \ .$$

Da $h$ insbesondere $E$-stetig ist, $\mathcal{C}_T^+(x)$ bzgl. $\mathcal{T}_E$ zusammenhängend, und $\mathcal{C}_T^+(h(x)), \mathcal{C}_T^-(h(x))$ bzgl. $\mathcal{T}_E$ offen und disjunkt, folgt das entweder

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) \subseteq \mathcal{C}_T^+(h(x)) \text{ oder } h(\mathcal{C}_T^+(x)) \subseteq \mathcal{C}_T^-(h(x)) \ . \tag{5.4}$$

Das gleiche Argument angewandt auf $h^{-1}$ zeigt

$$h^{-1}(\mathcal{C}_T^+(h(x))) \subseteq \mathcal{C}_T^+(x) \text{ oder } h^{-1}(\mathcal{C}_T^+(h(x))) \subseteq \mathcal{C}_T^-(x) \ . \tag{5.5}$$

Sei in (5.4) z.B. der erste Fall eingetreten. Dann gilt insbesondere $h^{-1}(\mathcal{C}_T^+(h(x))) \cap \mathcal{C}_T^+(x) \neq \emptyset$, also kann in (5.5) nicht der zweite Fall eintreten. Genauso sieht man, daß falls in (5.4) der zweite Fall eintritt auch in (5.5) der zweite Fall eintreten muß . Es folgt also

$$h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x)) \text{ oder } h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x)) \ .$$

Das gleiche Argument, beginnend mit $y \ll x$ anstelle von $y \gg x$, zeigt das

$$h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x)) \text{ oder } h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x)) \ .$$

Da $h$ injektiv ist, kann nicht gleichzeitig $h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x))$ und $h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x))$ gelten (bzw. gleichzeitig $h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x))$ und $h(\mathcal{C}_T^-(x)) = \mathcal{C}_T^-(h(x))$). Es gilt also entweder (5.2) oder (5.3).

·) Betrachte die Menge

$$S := \{x \in \mathcal{M} : h \text{ erhält die Ordnung bei } x\} \ .$$

Sei $x \in S$ und $y \in \mathcal{C}_T^+(x)$. Dann folgt $\mathcal{C}_T^+(y) \subseteq \mathcal{C}_T^+(x)$ und daher $h(\mathcal{C}_T^+(y)) \subseteq h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x))$. Nun gilt entweder $h(\mathcal{C}_T^+(y)) = \mathcal{C}_T^+(h(y))$ oder $h(\mathcal{C}_T^+(y)) = \mathcal{C}_T^-(h(y))$. Im ersten Fall folgt $y \in S$. Im zweiten Fall müßte gelten

$$\mathcal{C}_T^-(h(y)) \subseteq \mathcal{C}_T^+(h(x)) \ ,$$

das ist ein Widerspruch, denn es gilt stets $\mathcal{C}_T^-(a) \nsubseteq \mathcal{C}_T^+(b)$ : Das sieht man wie folgt: Wähle $v \in \mathcal{C}_T^-(0)$, dann ist für $t > 0$ stets $a + tv \in \mathcal{C}_T^-(a)$. Es gilt

$$Q((a+tv)-b) = Q(a-b) + 2t[a-b,v] + t^2 \underbrace{Q(v)}_{<0} \ ,$$

also $a + tv \in \mathcal{C}_T(b)$ für hinreichend großes $t$. Nun gilt auch

$$[(a+tv)-b, v] = [a-b, v] + t \underbrace{Q(v)}_{<0} \ ,$$

also ist $(a+tv) - b \sim v$ für hinreichend großes $t$ und daher $a + tv \in \mathcal{C}_T^-(b)$ für solche $t$.

Wir schließen, daß $\mathcal{C}_T^+(x) \subseteq S$. Analog sieht man das auch $\mathcal{C}_T^-(x) \subseteq S$, insgesamt ist also $\mathcal{C}(x) \subseteq S$.

·) Wir haben gezeigt das $S$ offen ist (bzgl. $\mathcal{T}_p$). Analog zeigt man das $\mathcal{M} \setminus S = \{x \in \mathcal{M} : h \text{ kehrt die Ordnung bei } x \text{ um }\}$ offen in $\mathcal{T}_p$ ist. Nun haben wir in Korollar 5.18 gesehen, daß $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ zusammenhängend ist. Es folgt das entweder $S = \emptyset$ oder $\mathcal{M} \setminus S = \emptyset$. Im zweiten Fall ist $h$ ein kausaler Antomorphismus, im ersten Fall $-h$. Denn: Sei z.B. $S = \mathcal{M}$. Ist $x \ll y$, d.h. $y \in \mathcal{C}_T^+(x)$, so folgt $h(y) \in h(\mathcal{C}_T^+(x)) = \mathcal{C}_T^+(h(x))$, d.h. $h(y) \gg h(x)$. Ist umgekehrt $h(x) \ll h(y)$, also $h(y) \in \mathcal{C}_T^+(h(x)) = h(\mathcal{C}_T^+(x))$, so ist wegen Injektivität von $h$ auch $y \in \mathcal{C}_T^+(x)$, d.h. $y \gg x$.

□

**5.23 Korollar.** *Die Homöomorphismengruppe $H(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ von $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p)$ wird erzeugt von den Untergruppen der Translationen, Dilatationen, orthochronous Transformationen und* $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

*Beweis.* Nach Satz 5.22 ist

$$H(\mathcal{M}, \mathcal{T}_p) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \cdot \mathcal{A} .$$

Die Behauptung des Korollars folgt aus dem Satz von Zeeman.

□