Lie Gruppen

SS 2006

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten **1**
1.1 Definition und Grundlagen 1
1.2 Zerlegungen der Eins 4
1.3 Das Tangentialbündel 9
1.4 Das Inverse Function Theorem 17
1.5 Teilmannigfaltigkeiten 20

2 Lie Algebren **29**
2.1 Definition und Grundlagen 29
2.2 Beispiele von Lie Algebren 30

3 Vektorfelder und Vektorbündel **33**
3.1 Vektorfelder 33
3.2 Lokale Flüsse 38
3.3 Globale und vertauschbare Flüsse 44
3.4 Vektorbündel 50

4 Lie Gruppen **63**
4.1 Die Lie Algebra einer Lie Gruppe 63
4.2 Die Exponentialabbildung 67
4.3 Untergruppen 75

Literaturverzeichnis **83**

Index **84**

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Definition und Grundlagen

Sei M ein topologischer Raum. Ein Paar (U, φ) heißt *Karte* auf M, wenn U eine offene Teilmenge von M ist, und φ für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Homöomorphismus von U auf eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge ist.

Ein *Atlas* auf M ist eine Menge $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ von Karten auf M, sodaß gilt

(A1) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

(A2) Für $i, j \in I$ gilt: Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ eine C^∞-Abbildung.

Ein, bezüglich der mengentheoretischen Inklusion, maximaler Atlas heißt *differenzierbare Struktur* auf M.

1.1.1 Definition. Das Paar $(M, \mathcal{A})$ heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit* der Dimension $n \in \mathbb{N}$, wenn M ein topologischer Raum ist der Hausdorff ist, das 2te-Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und wenn $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur auf M ist die aus Karten in den $\mathbb{R}^n$ besteht.

1.1.2 Bemerkung. Ist $(M, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist M vollständig regulär und lokalkompakt. Dabei heißt M *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ist M lokalkompakt und Hausdorff, so hat sogar jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen. Der topolgische Raum M heißt *vollständig regulär*, wenn er Hausdorff ist und gilt: Ist $x \in M$ und $A \subseteq M$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so existiert eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ und $f(A) = \{0\}$.

Wir zeigen zuerst dass M lokalkompakt ist: Sei $x \in M$ und wähle eine Karte (U, φ) mit $x \in U$. Wähle eine kompakte Kugel B mit Mittelpunkt $\varphi(x)$ die ganz in $\varphi(U)$ liegt. Da $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(B)$ kompakt in U, und daher auch kompakt in M. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(B)$ eine Umgebung von x in U und, da U offen in M ist, daher auch eine Umgebung von x in M.

Um einzusehen, dass M vollständig regulär ist, sei $m \in M$ und $A \subseteq M$ mit A abgeschlossen und $x \notin A$ gegeben. Wähle eine Karte (U, φ) mit $m \in U$. Dann ist $\varphi(U \cap A^c)$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $\varphi(m)$. Wähle eine abgeschlossene Kugel B mit positiven Radius, Mittelpunkt m und $B \subseteq \varphi(U \cap A^c)$, und eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ mit $f(\varphi(m)) = 1$ und $f(x) = 0$, $x \notin B$. Definiere nun eine Funktion auf M durch

$$F(x) := \begin{cases} f \circ \varphi(x) & , \ x \in U \\ 0 & , \ x \notin U \end{cases}$$

Dann ist F stetig, denn ist $x \in U$, so stimmt F auf einer ganzen Umgebung mit $f \circ \varphi$ überein. Ist dagegen $x \notin U$, so hat x eine ganze Umgebung sodaß dort F gleich 0 ist. Klarerweise ist $F(m) = 1$ und $F(A) = \{0\}$.

Wir beschäftigen uns immer mit C^∞-Mannigfaltigkeiten. Verlangt man nur dass Kartenwechsel stetig (C^k, reell analytisch) sind, so spricht man auch von einer topologischen (C^k-, ω-) Mannigfaltigkeit. Im Kontext von Lie-Gruppen ist unsere Beschränkung auf C^∞-Mannigfaltigkeiten keine Einschränkung. Tatsächlich kann man Lie-Gruppen in rein topologischer Weise charakterisieren.

1.1.3 Proposition. *Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M. Dann existiert genau eine differenzierbare Struktur $\mathcal{B}$ auf M sodaß $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.*

Beweis. Setze

$$\mathcal{B} := \big\{(U, \varphi) \text{ Karte auf } M : \forall (V, \psi) \in \mathcal{A}, V \cap U \neq \emptyset :$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(V \cap U), \varphi(V \cap U)), \ \psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(V \cap U), \psi(V \cap U))\big\} .$$

Klarerweise haben wir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, und damit insbesodere auch $M = \bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{B}} U$. Seien $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{B}$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, und sei $x \in U_1 \cap U_2$. Wähle $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ sodaß $x \in V$ ist, dann sind

$$\varphi_1 \circ \psi^{-1} : \psi(U_1 \cap U_2 \cap V) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap V)$$

$$\psi \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2 \cap V) \to \psi(U_1 \cap U_2 \cap V)$$

C^∞-Abbildungen. Damit auch deren Hintereinanderausführung

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = (\varphi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi_2^{-1}) : \varphi_2(U_1 \cap U_2 \cap V) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap V) .$$

Da $x \in U_1 \cap U_2$ beliebig war, folgt $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \in C^\infty(\varphi_2(U_1 \cap U_2), \varphi_1(U_1 \cap U_2))$. Also ist $\mathcal{B}$ ein Atlas.

Ist $\mathcal{B}$ ein weiterer Atlas der $\mathcal{A}$ enthält, so gilt wegen (A2) insbesondere $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Es folgt dass $\mathcal{B}$ eine differenzierbare Struktur ist die $\mathcal{A}$ enthält, und das es nur eine solche geben kann.

❑

1.1.4 Beispiel. Sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{A} = \{(M, \mathrm{id})\}$ ein Atlas auf M. Sei $\mathcal{B}$ die differenzierbare Struktur auf M die $\mathcal{A}$ enthält. Dann ist $(M, \mathcal{B})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Denn: Zunächst erfüllt M als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ das 2te-Abzählbarkeitsaxiom. Sei $(U, \varphi) \in \mathcal{B}, \varphi : U \to \mathbb{R}^m$, dann ist $\varphi = \varphi \circ \mathrm{id}^{-1} \in C^\infty(U, \varphi(U))$ und $\varphi^{-1} = \mathrm{id} \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), U)$. Also ist $d\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ invertierbar und wir schliessen $n = m$.

1.1.5 Bemerkung. Das gleiche Argument wie oben zeigt: Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M und ist $x \in M$, so existiert $d(x) \in \mathbb{N}$ sodass jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $x \in U$ in den $\mathbb{R}^{d(x)}$ abbildet. Tatsächlich benötigt man die Differenzierbarkeit nicht. Man kann zeigen, dass jede Karte in den $\mathbb{R}^{d(x)}$ abbildet. Dies folgt aus dem Brouwer'schen Satz über die Gebietstreue: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U)$ offen.*

1.1.6 Beispiel. Sei $(M, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $N \subseteq M$ offen. Setze

$$\mathcal{B} := \left\{ (N \cap U, \varphi|_{N \cap U}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}, N \cap U \neq \emptyset \right\}.$$

dann ist $(N, \mathcal{B})$ wobei N mit der Spurtopologie von M versehen ist, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der gleichen Dimension wie $(M, \mathcal{A})$.

1.1.7 Beispiel. Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m bzw. n. Dann ist

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

ein Atlas auf $M \times N$, wobei $M \times N$ mit der Produkttopologie versehen ist. Sei $\mathcal{C}$ die differenzierbare Struktur welche Atlas enthält. Dann ist $(M \times N, \mathcal{C})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$, die sogenannte *Produktmannigfaltigkeit*.

1.1.8 Definition. Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *differenzierbar*, wenn für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$, mit $f(U) \subseteq V$ gilt dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \psi(V)).$$

Die Menge aller differenzierbaren Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^\infty(M, N)$.

Beachte, dass jede Abbildung $f \in C^\infty(M, N)$ stetig ist.

1.1.9 Definition. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann heißt f ein *Diffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist und $f^{-1} \in C^\infty(N, M)$.

1.1.10 Bemerkung. Die Relation

$$M \sim N :\iff \exists \text{ Diffeomorphismus von } M \text{ auf } N$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ein topologischer Raum kann verschiedene differenzierbare Strukturen haben, die nicht diffeomorph sind.

1.1.11 Proposition. *Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ und $(P, \mathcal{C})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten.*

(i) *Ist $f : M \to N$ und gibt es zu jedem $x \in M$ Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, mit $x \in U$, $f(U) \subseteq V$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \psi(V))$, so ist $f \in C^\infty(M, N)$.*

(ii) $\mathrm{id} \in C^\infty(M, M)$.

(iii) *Ist $f \in C^\infty(M, N), g \in C^\infty(N, P)$, so ist $g \circ f \in C^\infty(M, P)$.*

Beweis. Seien $(U', \varphi') \in \mathcal{A}$, $(V', \psi') \in \mathcal{B}$, Karten mit $f(U') \subseteq V'$ und sei $x \in U'$. Wähle $(U, \varphi), (V, \psi)$ wie in der Voraussetzung von (i). Dann gilt

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \psi'^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \in C^\infty(\varphi(U \cap U'), \psi(V \cap V')) .$$

Da $x \in U'$ beliebig war, folgt $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \psi(V))$. Wir haben (i) bewiesen.

Für (ii) seien $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ gegeben mit $U \subseteq V$. Dann gilt klarerweise $\psi \circ \mathrm{id} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \psi(V))$.

Um die Aussage (iii) einzusehen seien $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (W, \lambda) \in \mathcal{C}$ gegeben mit $(g \circ f)(U) \subseteq W$. Sei $x \in U$ und wähle $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ mit $f(x) \in V$, und wähle $U' \subseteq U$ offen sodaß $f(U') \subseteq V$. Dann gilt

$$\lambda \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\lambda \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \in C^\infty(\varphi(U'), \lambda(W)) .$$

Da $x \in U$ beliebig war, folgt $g \circ f \in C^\infty(M, P)$.

❑

1.2 Zerlegungen der Eins

Sei M ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F}$ heißt *offene Überdeckung* von M, wenn jede Menge $O \in \mathcal{F}$ offen ist und wenn $\bigcup_{O \in \mathcal{F}} O = M$. Eine offene Überdeckung $\mathcal{G}$ heißt *Verfeinerung* von $\mathcal{F}$, wenn gilt

$$\forall O \in \mathcal{G}\, \exists O' \in \mathcal{F} : O \subseteq O' .$$

Ist $\mathcal{F}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von M, so heißt $\mathcal{F}$ *lokal endlich*, wenn jeder Punkt aus M eine Umgebung besitzt die mit nur endlich vielen Mengen aus $\mathcal{F}$ nichtleeren Schnitt hat.

1.2.1 Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{f_i : i \in I\} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{R})$ heißt *differenzierbare Zerlegung der Eins*, wenn gilt

(i) Die Familie $\{\operatorname{supp} f_i : i \in I\}$ ist lokal endlich.

(ii) $f_i(m) \geq 0$, $i \in I, m \in M$.

(iii) $\sum_{i \in I} f_i(m) = 1$, $m \in M$.

Dabei bezeichnet $\operatorname{supp} f$ die Menge $\overline{\{m \in M : f(m) \neq 0\}}$. Man bemerke, dass die Summe $\sum_{i \in I} f_i(m)$ wohldefiniert und $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist, da lokal um jeden Punkt nur endlich viele der Funktionen f_i verschieden von Null sind.

1.2.2 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von M und sei $\{f_i : i \in I\}$ eine Zerlegung der Eins. Wir sagen das diese Zerlegung der Eins der Überdeckung $\mathcal{F}$ *untergeordnet* ist, wenn gilt

$$\forall i \in I\, \exists O \in \mathcal{F} : \operatorname{supp} f_i \subseteq O .$$

Schreibe $\mathcal{F} = \{O_j : j \in J\}$. Wir sagen das die Zerlegung der Eins $\{f_i : i \in I\}$ der Überdeckung $\mathcal{F}$ *mit gleichen Indizes untergeordnet* ist, wenn $I = J$ ist und gilt

$$\forall i \in I : \operatorname{supp} f_i \subseteq O_i .$$

1.2.3 Lemma. *Sei M ein topologischer Raum der lokalkompakt und Hausdorff ist, und der das 2te-Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{F}$ die aus nur abzählbar vielen Mengen besteht die sämtliche kompakten Abschluss haben.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Folge $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit

(i) $\overline{G_i}$ ist kompakt, $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $\overline{G_i} \subseteq G_{i+1}, i \in \mathbb{N}$.

(iii) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i = M$.

Dazu wähle eine Basis $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ der Topologie sodass $\overline{U_i}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ kompakt ist. Eine solche existiert, denn ist $\mathcal{L}$ eine Basis und $\mathcal{L}' := \{O \in \mathcal{L} : \overline{O} \text{ kompakt}\}$, so ist $\mathcal{L}'$ wieder eine Basis: Sei $W \subseteq M$ offen, $x \in W$. Es existiert eine kompakte Umgebung U_0 von x. Diese enthält eine offene Umgebung U_1 von x. Dann ist $W \cap U_1$ offen und $x \in W \cap U_1$. Also existiert $O \in \mathcal{L}$ mit $x \in O \subseteq W \cap U_1$. Wegen $O \subseteq U_0$ ist $\overline{O}$ kompakt, d.h. es ist sogar $O \in \mathcal{L}'$.

Definiere nun rekursiv: $G_1 := U_1$. Angenommen es gilt $G_k = U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}$, dann sei j_{k+1} die kleinste Zahl größer als j_k sodass $\overline{G_k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$. Eine solche existiert, denn $\overline{G_k} = \overline{U_1} \cup \ldots \cup \overline{U_{j_k}}$ ist kompakt und $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = M \supseteq \overline{G_k}$. Setze $G_{k+1} := \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$. Die so definierte Familie $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ hat offensichtlich die Eigenschaften $(i), (ii), (iii)$.

Sei nun $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von M. Die Menge $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}, i \geq 2$, ist kompakt. Die Menge $G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}, i \geq 3$, ist offen, und es gilt

$$\overline{G_i} \setminus G_{i-1} \subseteq G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}},\ i \geq 3\,.$$

Sei $i \geq 3$. Dann ist $\{O \cap (G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}) : O \in \mathcal{F}\}$ eine offeneÜberdeckung von $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$, und enthält daher eine endliche Teilüberdeckung $W_{i,1}, \ldots, W_{i,n_i}$. Weiters ist $\{O \cap G_3 : O \in \mathcal{F}\}$ eine offene Überdeckung von $\overline{G_2}$, und enthält daher eine endliche Teilüberdeckung $W_{2,1}, \ldots, W_{2,n_2}$.

Sei $\mathcal{G} := \bigcup_{i\geq 2}\{W_{i,1}, \ldots, W_{i,n_i}\}$. Klarerweise ist $\mathcal{G}$ eine abzählbare Familie offener Mengen. Wegen $\bigcup_{j=1}^{n_i} W_{i,j} \supseteq \overline{G_i}$ folgt $\bigcup_{W\in\mathcal{G}} W \supseteq \bigcup_{i\geq 2} G_i = M$, also ist $\mathcal{G}$ eine offene Überdeckung. Wegen $W_{i,j} \subseteq G_{i+1}$, ist $\overline{W_{i,j}}$ kompakt. Sei $x \in M$, dann gilt $x \in G_k$ für ein gewisses k. Wegen $G_k \cap W_{i,j} = \emptyset$ für $i \geq k+2$, ist G_k eine Umgebung von x die nur endlich viele der $W \in \mathcal{G}$ schneidet.

❑

1.2.4 Bemerkung. Lemma 1.2.3 impliziert auf rein topologischem Weg, dass eine Mannigfaltigkeit normal ist. Wir führen das hier nicht aus, denn es folgt auch aus dem später bewiesenen C^∞-Urysohn-Lemma, siehe Korollar 1.2.8. Im allgemeinen gilt "parakompakt + Hausdorff ⇒ normal".

Ebenso wollen wir bemerken (ohne Beweis), dass eine Mannigfaltigkeit stets metrisierbar ist. Im allgemeinen gilt "2tes-Abzählbarkeitsaxiom + regulär (inklusive T_1)⇒ metrisierbar".

1.2.5 Lemma. *Es existiert eine C^∞-Funktion $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$, und*

$$\alpha(x) = 1,\ x \in [-1,1]^n\,,$$
$$\alpha(x) = 0,\ x \notin (-2,2)^n\,.$$

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist f beliebig oft differenzierbar. Wegen $f(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$, und $f(t) > 0, t > 0$, ist auch

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

eine nichtnegative C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$. Weiters gilt $g(t) = 1, t \geq 1$, und $g(t) = 0$, $t \leq 0$. Setze

$$h(t) := g(t+2) \cdot g(2-t)\,,$$

dann ist $h(t) = 0$, $t \in (-2, 2)$, und $h(t) = 1$, $t \in [-1, 1]$. Die Funktion

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) := h(x_1) \cdot \ldots \cdot h(x_n)$$

leistet nun das Gewünschte.

❑

1.2.6 Satz. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine abzählbare Zerlegung der Eins die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist und so dass jede ihrer Funktionen kompakten Träger hat.*

Beweis. Zunächst zeigen wir das Folgende: Sei $O \subseteq M$ offen, $x \in O$. Dann existiert $W \subseteq M$ offen und $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sodass

$$x \in W \subseteq O, \operatorname{supp} \psi \subseteq O, \psi|_W = 1, \psi \geq 0\,. \tag{1.1}$$

Dazu wähle eine Karte $(V, \varphi), x \in V \subseteq O$, sodass $\varphi(V)$ den Würfel $[-2, 2]^{\dim M}$ enthält. Sei α wie in Lemma 1.2.5 und setze

$$\psi(m) := \begin{cases} (\alpha \circ \varphi)(m) & , \quad m \in V \\ 0 & , \quad m \notin V \end{cases}$$

Dann ist $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$: Um dies einzusehen sei $m \in M$ gegeben. Ist $m \in V$, so betrachte ψ in den Karten $(V, \varphi), (\mathbb{R}, \mathrm{id})$. Dann ist

$$\mathrm{id} \circ \psi \circ \varphi^{-1} = \alpha \in C^\infty(\varphi(V), \mathbb{R})\,.$$

Ist $m \notin V$, so wähle eine Karte (V', φ') mit $m \in V' \subseteq \varphi^{-1}([-2, 2]^{\dim M})^C$. Das ist möglich denn $\varphi^{-1}([-2, 2]^{\dim M})$ ist kompakt in M. Dann gilt wegen $\operatorname{supp} \psi \subseteq \varphi^{-1}([-2, 2]^{\dim M})$

$$\mathrm{id} \circ \psi \circ \varphi'^{-1} = 0 \in C^\infty(\varphi'(V'), \mathbb{R})\,.$$

Mit Proposition 1.1.11 folgt $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Setzt man $W := \varphi^{-1}((-1, 1)^{\dim M})$, so gilt (1.1).

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.2.3. Sei $\mathcal{G} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{F}$ mit den Eigenschaften aus Lemma 1.2.3. Wir konstruieren für $k \in \mathbb{N}$ induktiv Zahlen n_k, Mengen $W_{k,l}$, $l = 1, \ldots, n_k$, und Funktionen $\psi_{k,l}$, $l = 1, \ldots, n_k$, sodaß gilt (*i*) $\sum\limits_{\substack{i\leq k,\\ l=1,\dots,n_i}} W_{i,l} \supseteq \bigcup_{j=1}^k \overline{O_j}$

(*ii*) $\psi_{k,l}|_{W_{k,l}} = 1$,

(*iii*) $\operatorname{supp}\psi_{k,l} \cap O_i = \emptyset$, $i < k$, und $\exists i \geq k : \operatorname{supp}\psi_{k,l} \subseteq O_i$

Sei zuerst $k = 1$. Zu $x \in \overline{O_1}$ existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in O_i$. Wähle W_x, ψ_x mit den Eigenschaften (1.1) für x, O_i. Es gilt $\bigcup_{x\in\overline{O_1}} W_x \supseteq \overline{O_1}$, daher existiert eine endliche Teilüberdeckung $W_{x_1}, \dots, W_{x_{n_1}}$. Setze

$$W_{1,l} := W_{x_l}, \psi_{1,l} := \psi_{x,l},\ l = 1, \dots, n_1 .$$

Sei nun angenommen das $k \geq 2$ ist und das $n_j, W_{j,l}, \psi_{j,l}$ für alle $j < k$ bereits konstruiert ist. Zu $x \in \overline{O_k} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{O_j}$ existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in O_i$. Klarerweise ist $i \geq k$. Wähle W_x, ψ_x mit den Eigenschaften (1.1) für $x, O_i \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{O_j}$. Es gilt

$$\bigcup_{x\in\overline{O_k}\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}\overline{O_j}} W_x \cup \bigcup_{\substack{i<k\\ l=1,\dots,n_i}} W_{i,l} \supseteq \overline{O_k}\,,$$

und daher existiert eine endliche Teilüberdeckung. Seien $W_{x_1}, \dots, W_{x_{n_k}}$ jene von den W_x die in dieser Teilüberdeckung vorkommen. Setze

$$W_{k,l} := W_{x_l}, \psi_{k,l} := \psi_{x_l},\ l = 1, \dots, n_k .$$

Dann gelten $(i), (ii), (iii)$.

Die Familie $\{\psi_{k,l} : k \in \mathbb{N}, l = 1, \dots, n_k\}$ ist abzählbar. Sei $x \in M$ und sei W eine Umgebung von x die mit nur endlich viele Mengen O_i nichtleeren Schnitt hat. Sei $N \in \mathbb{N}$ sodaß $W \cap O_i = \emptyset$, $i > N$. Dann folgt wegen $\operatorname{supp}\psi_{k,l} \subseteq O_j$ für ein $j \geq k$ dass $\operatorname{supp}\psi_{k,l} \cap W = \emptyset$, $k > N$. Also hat W mit nur endlich vielen der Mengen $\operatorname{supp}\psi_{k,l}$ nichtleeren Schnitt. Weiters existiert zu jedem $\psi_{k,l}$ ein $O \in \mathcal{F}$ mit $\operatorname{supp}\psi_{k,l} \subseteq O$ und $\operatorname{supp}\psi_{k,l}$ ist kompakt, da $\overline{O_j}$ kompakt ist. Ist $x \in M$, so existiert $W_{k,l}$ mit $x \in W_{k,l}$, also existiert $\psi_{k,l}$ mit $\psi_{k,l}(x) > 0$. Daher ist die Summe

$$\psi := \sum_{\substack{k\in\mathbb{N},\\ l=1,\dots,n_k}} \psi_{k,l}$$

eine auf ganz M positive $C^\infty(M, \mathbb{R})$ Funktion. Dann folgt das $\frac{1}{\psi} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und daher auch $\frac{\psi_{k,l}}{\psi} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Die Familie $\{\frac{\psi_{k,l}}{\psi} : k \in \mathbb{N}, l = 1, \dots, n_k\}$ ist eine Zerlegung der Eins mit den gewünschten Eigenschaften.

❑

1.2.7 Korollar. *Sei $\mathcal{F}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine Zerlegung der Eins die $\mathcal{F}$ mit gleichen Indizes untergeordnet ist und die höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Funktionen enthält.*

Beweis. Schreibe $\mathcal{F} = \{O_i : i \in I\}$. und sei $\{\psi_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Zerlegung der Eins mit den Eigenschaften aus Satz 1.2.6. Wir konstruieren induktiv eine (endliche oder unendliche) Folge von paarweise verschiedenen Indizes $i(1), i(2), \dots \in I$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{N}$ mit (*i*) $k \in \bigcup_{j \leq k} A_j$,

(*ii*) $\operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_{i(k)}$, $j \in A_k$.

Sei $k = 1$. Wähle $i(1) \in I$ sodass $\operatorname{supp} \psi_1 \subseteq O_{i(1)}$ und setze $A_1 := \{j \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_{i(1)}\}$.

Sei angenommen das $i(j)$ und A_j bereits konstruiert ist für alle $j < k$. Ist $\bigcup_{j<k} A_j = \mathbb{N}$, so bricht die Konstruktion ab. Anderenfalls wähle $i(k) \in I$ sodaß

$$\operatorname{supp} \psi_{\min(\bigcup_{j<k} A_j)^c} \subseteq O_{i(k)} \,,$$

und setze $A_k := \{j \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_{i(k)}\}$

Sei nun $i \in I$ ist $i \notin \{i(1), i(2), \ldots\}$ setze $\tilde{\psi}_i := 0$. Ist $i = i(k)$, so setze $\tilde{\psi}_i := \sum_{j \in A_k} \psi_j$. Dann ist $\{\tilde{\psi}_i :\in I\}$ eine Zerlegung der Eins mit nur höchstens abzählbar vielen von Null verschiedenen Funktionen. Da die Familie $\{\operatorname{supp} \psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich ist, gilt $(i = i(k))$

$$\operatorname{supp} \tilde{\psi}_i \subseteq \overline{\bigcup_{j \in A_k} \operatorname{supp} \psi_j} = \bigcup_{j \in A_k} \operatorname{supp} \psi_j \subseteq O_i \,,$$

also ist $\{\tilde{\psi}_i : i \in I\}$ der Überdeckung $\mathcal{F}$ mit gleichen Indizes untergeordnet.

❑

1.2.8 Korollar (C^∞-Urysohn Lemma)**.** *Seien $A, B \subseteq M$, A abgeschlossen, B offen, und $A \subseteq B$. Dann existiert eine Funktion $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit*

(*i*) $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $x \in M$,

(*ii*) $\psi(x) = 1, x \in A, \operatorname{supp} \psi \subseteq B$

Beweis. Sei $\{\psi, \psi'\}$ eine Zerlegung der Eins die der Überdeckung $\{B, M \backslash A\}$ mit gleichen Indizes untergeordnet ist. Dann hat ψ die gewünschten Eigenschaften.

❑

1.2.9 Korollar. *Sei $U \subseteq M$ offen, $x \in U$, und sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Dann existiert eine offene Umgebung V von x und $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sodass $g|_V = f|_V$.*

Beweis. Wähle eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ und $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ wie in Korollar 1.2.8 für $\overline{V} \subseteq U$. Definiere $g : M \to \mathbb{R}$ durch

$$g(m) := \begin{cases} \psi(m) \cdot f(m) & , \quad m \in U \\ 0 & , \quad m \notin U \end{cases}$$

Genauso wie im Beweis von Satz 1.2.6 sieht man ein dass $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

❑

1.3 Das Tangentialbündel

Sei K ein Körper. Ein Paar $(A, \cdot)$ heißt *K-Algebra*, wenn A ein Vektorraum über K ist, und $\cdot : A \times A \to A$ bilinear.

1.3.1 Definition. Sei K ein Körper, A eine K-Algebra und sei $e : A \to K$ ein K-Algebra Homöomorphismus. Eine Abbildung $D : A \to K$ heißt eine *Ableitung*, wenn

(i) D ist linear.

(ii) Es gilt $D(a \cdot b) = D(a) \cdot e(b) + e(a) \cdot D(b), a, b \in A$.

Die Menge aller Ableitungen bezeichnen wir mit $\mathrm{Abl}_e(A)$

Offenbar ist $\mathrm{Abl}_e(A)$ ein linearer Teilraum von A^*.

1.3.2 Lemma. *Sei A eine K-Algebra mit Einselement und $e : A \to K$ ein Homöorphismus dieser Algebra (inklusive $e(1_A) = e(1_K)$). Dann gilt*

$$\mathrm{Abl}_e(A) \cong (\ker e/(\ker e)^2)^* \,.$$

Beweis. Sei $D \in \mathrm{Abl}_e(A)$. Dann gilt für $a, b \in \ker e$

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot e(b) + e(a) \cdot D(b) = 0 \,.$$

Also ist $D((\ker e)^2) = \{0\}$. Daher existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi(D)$ mit

$$\begin{tikzcd}
\ker e \arrow[r, "D|_{\ker e}"] \arrow[d] & K \\
\ker e/(\ker e)^2 \arrow[ur, dashed, "\Phi(D)"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\Phi : \mathrm{Abl}_e(A) \to (\ker e/(\ker e)^2)^*$ ist offenbar linear. Für $D \in \mathrm{Abl}_e(A)$ gilt stets $D(1_A) = 0$, denn es ist

$$D(1_A) = D(1_A \cdot 1_A) = D(1_A) \cdot e(1_A) + e(1_A) \cdot D(1_A) = D(1_A) + D(1_A) \,.$$

Seien nun $D, D' \in \mathrm{Abl}_e(A)$ mit $\Phi(D) = \Phi(D')$ gegeben. Für $a \in A$ gilt stets $a - e(a) \cdot 1_A \in \ker e$, also ist

$$D(a) = D(a - e(a) \cdot 1_A) = \Phi(D)\big([a - e(a) \cdot 1_A]/_{(\ker e)^2}\big) \,.$$

Das gleiche Argument funktioniert mit D' anstelle von D und wir schliessen dass $D(a) = D'(a)$ gilt. Da $a \in A$ beliebig war folgt $D = D'$.

Sei nun $f \in (\ker e/(\ker e)^2)^*$ gegeben. Wir definieren $D_f : A \to K$ durch

$$D_f(a) := f\big([a - e(a) \cdot 1_A]/_{(\ker e)^2}\big)$$

Dann ist offenbar D_f linear. Weiters haben wir

$$D_f(a \cdot b) = f\big([a \cdot b - e(a \cdot b)1_A]/_{(\ker e)^2}\big) \,.$$

Nun ist

$$a \cdot b - e(a \cdot b)1_A = (a - e(a)1_A)e(b) + e(a)(b - e(b)1_A) +$$

$$+(a - e(a)1_A)(b - e(b)1_A)\,,$$

also

$$[a \cdot b - e(a \cdot b)1_A]/_{(\ker e)^2} = [a - e(a)1_A]/_{(\ker e)^2} \cdot e(b) +$$

$$+ e(a) \cdot [b - e(b)1_A]/_{(\ker e)^2}\,.$$

Es folgt

$$D_f(a \cdot b) = f\big([a - e(a)1_A]/_{(\ker e)^2}\big)e(b) + e(a)f\big([b - e(b)1_A]/_{(\ker e)^2}\big) =$$

$$= D_f(a)e(b) + e(a)D_f(b)\,,$$

d.h. $D_f \in \mathrm{Abl}_e(A)$. Weiters ist für $a \in \ker e$

$$\Phi(D_f)([a]/_{(\ker e)^2}) = D_f(a) = f([a - e(a)1_A]/_{(\ker e)^2} =$$

$$= f\big([a]/_{(\ker e)^2}\big)\,,$$

d.h. $\Phi(D_f) = f$.

❑

Wir wenden diese Konstruktion in einer speziellen Situation an. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $m \in M$. Betrachte die Menge $\mathcal{P}_m$ aller Paare (U, f) wobei $U \subseteq M$ offen ist und $m \in U$ liegt, und wobei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Auf dieser Menge definiere eine Relation $\sim$ durch

$$(U, f) \sim (V, g) :\Longleftrightarrow \exists W \subseteq M \text{ offen}, m \in W \subseteq U \cup V : f|_W = g|_W\,.$$

Offenbar ist das eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}_m$.

1.3.3 Bemerkung. Ist $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so gilt $(M, f) \in \mathcal{P}_m$, d.h. man hat eine Abbildung $C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}_m/_\sim$. Diese ist nicht injektiv, aber surjektiv. Siehe dazu Korollar 1.2.9.

Definiert man auf $\mathcal{P}_m$ punktweise auf geeigneten Umgebungen Operationen der Addition, skalaren Multiplikation und Multiplikation, so wird $\mathcal{P}_m$ zu einer (assoziativen) $\mathbb{R}$-Algebra. Offenbar ist die Relation $\sim$ mit diesen Operationen verträglich. Daher wird auch $\mathcal{P}_{m/\sim}$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra, der $\mathbb{R}$-Algebra der *Funktionskeime*.

Offenbar ist $\mathcal{P}_m/_\sim$ eine assoziative und kommutative $\mathbb{R}$-Algebra. Weiters hat sie ein Einselement, nämlich die Klasse $[1]/_\sim$ der konstanten Funktion 1.

Auf P_m hat man den $\mathbb{R}$-Algebren Homorphismus des punktauswertens an der Stelle m: $(U, f) \mapsto f(m)$. Offenbar gilt für $(U, f) \sim (V, g)$ auch $f(m) = g(m)$, also existiert ein eindeutiger $\mathbb{R}$-Algebren Homorphismus $e_m : \mathcal{P}_m/_\sim \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_m \arrow[r, "(U,f)\mapsto f(m)"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{R} \\
\mathcal{P}_m/_\sim \arrow[ur, dashed, "e_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Dieser erfüllt klarerweise $e_m([1]/\sim) = 1$.

1.3.4 Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $m \in M$. Dann heißt

$$T_m M := \mathrm{Abl}_{e_m}(\mathcal{P}_m/_\sim)$$

Der *Tangentialraum* an M im Punkt m. Die Elemente von $T_m M$ bezeichnet man als *Tangentialvektoren*. Das *Tangentialbündel* ist die disjunkte Vereinigung

$$T(M) := \bigsqcup_{m \in M} T_m(M)\,.$$

Die Abbildung $\pi : T(M) \to M$ die definiert ist durch $\pi(D) = m$ wenn $D \in T_m(M)$, heißt die *Bündelprojektion.*

1.3.5 Lemma. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $f \in C^\infty(M, N)$, und sei $m \in M$. Dann ist durch*

$$df_m(D)([h]/_\sim) := D([h \circ f]/_\sim),\ \ D \in T_m(M), h \in \mathcal{P}_{f(m)}(N)\,,$$

eine lineare Abbildung $df_m : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ wohldefiniert.

Beweis. Da für $h_1, h_2 \in \mathcal{P}_{f(m)}(N), h_1 \sim h_2$, auch $h_1 \circ f, h_2 \circ f \in \mathcal{P}_m(M)$ und $h_1 \circ f \sim h_2 \circ f$ gilt, ist $df_m(D) : \mathcal{P}_{f(m)}(N)/_\sim \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Offenbar ist $df_m(D)$ auch linear.

Seien $h, k \in \mathcal{P}_{f(m)}(N)$. Dann berechnen wir

$$df_m(D)([h]/_\sim \cdot [k]/_\sim) = df_m(D)([h \cdot k]/_\sim) = D([(h \cdot k) \circ f]/_\sim) =$$
$$= D([h \circ f]/_\sim \cdot [k \circ f]/_\sim) = D([h \circ f]/_\sim) \cdot e_m([k \circ f]/_\sim) +$$
$$+ e_m([h \circ f]/_\sim) \cdot D([k \circ f]/_\sim) = df_m(D)([h]/_\sim) \cdot e_{f(m)}(k) +$$
$$+ e_{f(m)}(h) \cdot df_m(D)([k]/_\sim)\,,$$

also ist $df_m(D) \in \mathrm{Abl}_{e_{f(m)}}(\mathcal{P}_{f(m)}(N)/_\sim) = T_{f(m)}(N)$. Klarerweise ist df_m in D linear.

❑

1.3.6 Definition. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann ist das *Differential* $df(D) : T(M) \to T(N)$ von f die Abbildung die definiert ist durch

$$df(D) := df_m(D),\ \ D \in T_m(M)\,.$$

1.3.7 Bemerkung. Sei $f \in C^\infty(M, N)$ und bezeichne mit π_M bzw. π_N die jeweiligen Bündelprojektionen. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi_M"'] & T(N) \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

1.3.8 Proposition. *Es gilt stets $d(f \circ g) = df \circ dg$ und $d(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.*

Beweis. Um die erste Beziehung einzusehen seien M, N, P Mannigfaltigkeiten und $g \in C^\infty(M,N), f \in C^\infty(N,P)$. Weiters sei $D \in T_m(M)$ und $h \in \mathcal{P}_{(f\circ g)(m)}(P)$. Dann gilt

$$d(f\circ g)(D)([h]/_\sim) = D([h\circ(f\circ g)]/_\sim) = D([(h\circ f)\circ g]/_\sim =$$

$$= dg(D)([h\circ f]/_\sim) = df(dg(D))([h]/_\sim) = (df\circ dg)(D)([h]/_\sim)\,.$$

Die zweite Beziehung folgt, da stets gilt

$$d(\mathrm{id})(D)([h]/_\sim) = D([h\circ \mathrm{id}]/_\sim) = D([h]/_\sim)\,.$$

❏

1.3.9 Satz. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $m \in M$. Dann gilt* $\dim T_m(M) = \dim M$.

Zum Beweis des Satzes verwenden wir (ohne Beweis) das folgende elementare Lemma.

1.3.10 Lemma. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $g: O\to\mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, und seien $p=(p_1,\dots,p_n), q=(q_1,\dots,q_n)\in O$. Dann gilt*

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)\cdot(q_i-p_i) +$$

$$+\sum_{i,i=1}^n \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(p+t(q-p))dt\cdot(q_i-p_i)(q_j-p_j)$$

Beweis (von Satz 1.3.9). Sei $\dim M = n$. Wir konstruieren eine Basis von $\ker e_m/(\ker e_m)^2$ die n Elemente hat. Mit Lemma 1.3.2 folgt dann $\dim T_m(M) = n$.

Sei (U,φ) eine Karte von M mit $m \in U$, und seien π_i, $i = 1,\dots,n$, die Projektionen $\pi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ auf die i-te Komponente. Setze

$$\alpha_i := \pi_i\circ\varphi - (\pi_i\circ\varphi)(m) \in \mathcal{P}_m,\ i = 1,\dots,n\,,$$

dann gilt $\alpha_i \in \ker e_m$. Sei $a_i := [\alpha_i]/_\sim$.

Sei $(W,f)\in\mathcal{P}_m$, $f(m)=0$, $W\subseteq U$, $\varphi(W)$ konvex. Betrachte die Funktion

$$g := f\circ\varphi^{-1} : \varphi(W)\to\mathbb{R}$$

Mit Lemma 1.3.10 folgt für $p,q\in W$, $\varphi(p) = (\varphi(p)_1,\dots,\varphi(p)_n)$, $\varphi(m) = (\varphi(m)_1,\dots,\varphi(m)_n)$,

$$(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) = (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(m)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m))\cdot(\varphi(p)_i - \varphi(m)_i) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n \Big[\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}\big(\varphi(m)+t(\varphi(p)-\varphi(m)\big)dt\cdot$$

$$\cdot(\varphi(p)_i - \varphi(m)_i)(\varphi(p)_j - \varphi(m)_j)\Big] .$$

Nun gilt $\varphi(p)_i = (\pi_i \circ \varphi)(p)$, also $\varphi(p)_i - \varphi(m)_i = \alpha_i(p)$. Weiters ist das Integral

$$h_{ij}(p) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}\big(\varphi(m) + t(\varphi(p) - \varphi(m))\big)dt \in C^\infty(W, \mathbb{R}) .$$

Die obige Formel schreibt sich wegen $f(m) = 0$ also als

$$f(p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i(p) + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(p)\alpha_i(p)\alpha_j(p),\ p \in W ,$$

mit $\lambda_i := \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)) \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$[f]/_\sim \in \sum_{i=1}^n \lambda_i[\alpha_i]/_\sim + (\ker e_m)^2 ,$$

also gilt

$$\operatorname{span}\{a_i/_{(\ker e_m)^2} : i = 1, \dots, n\} = \ker e_m/(\ker e_m)^2 .$$

Betrachte die Abbildung

$$D_i : \begin{cases} \mathcal{P}_m/_\sim & \to \quad \mathbb{R} \\ [f]/_\sim & \mapsto \quad \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)) \end{cases} \tag{1.2}$$

Dann ist $D_i \in \mathrm{Abl}_{e_m}(\mathcal{P}_m/_\sim)$, denn

$$D_i([f]/_\sim \cdot [g]/_\sim) = \frac{\partial((f\cdot g)\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)) = \frac{\partial((f\circ\varphi^{-1})\cdot(g\circ\varphi^{-1}))}{\partial x_i}(\varphi(m)) =$$

$$= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m))\cdot(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(m)) + (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(m))\cdot\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)) =$$

$$= D_i([f]/_\sim)\cdot e_m([g]/_\sim) + e_m([f]/_\sim)\cdot D_i([g]/_\sim) .$$

Weiters gilt

$$D_i(a_j) = \frac{\partial(\alpha_j\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(m)) = \frac{\partial(\pi_j - (\pi_j\circ\varphi)(m))}{\partial x_i}(\varphi(m)) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases} \tag{1.3}$$

Da $(\ker e_m)^2 \subseteq \ker D_i$ folgt das $\{a_1, \dots, a_n\}$ modulo $(\ker e_m)^2$ linear unabhängig ist.

❑

1.3.11 Korollar. *Sei (U, φ) eine Karte mit $m \in U$ und seien $D_i, i = 1 \dots, n$, wie in* (1.2). *Dann ist $\{D_i : i = 1, \dots, n\}$ eine Basis von $T_m(M)$.*

Beweis. $\{D_i : i = 1, \dots, n\}$ ist in der Identifikation von Lemma 1.3.2 die zu $\{a_i + (\ker_{e_m})^2 : i = 1, \dots, n\}$ duale Basis, vgl.(1.3).

❑

1.3.12 Beispiel. Betrachte $M = \mathbb{R}^n$, wie immer versehen mit dem Atlas $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$. Dann ist

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & T(\mathbb{R}^n) \\ (m_1, \dots, m_{2n}) & \longmapsto & D_{(m_1,\dots,m_{2n})} \in T_{(m_1,\dots,m_n)}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

mit

$$D_{(m_1,\dots,m_{2n})} : \begin{cases} \mathcal{P}_{(m_1,\dots,m_n)}/\sim & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [f]/\sim & \longmapsto & \sum_{j=1}^n m_{n+j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(m_1, \dots, m_n) \end{cases} \tag{1.4}$$

eine Bijektion. Wir definieren nun auf $T(\mathbb{R}^n)$ eine Topologie sodass Φ ein Homöomorphismus ist, und eine differenzierbare Struktur sodass Φ und Φ^{-1} C^∞-Abbildungen sind. Explizit hat man den Atlas $\{(T(\mathbb{R}^n), \Phi^{-1})\}$.

Damit wird $T(\mathbb{R}^n)$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

Die Bündelprojektion $\pi : T(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ ist in $C^\infty(T(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ und daher insbesondere stetig. Denn die Abbildung $\mathrm{id} \circ \pi \circ \Phi$ ist die Projektion des $\mathbb{R}^{2n}$ auf die ersten n Koordinaten.

Mit Beispiel 1.1.6 ist insbesondere auch für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ das Tangentialbündel $T(U)$ eine Mannigfaltigkeit.

Sei nun $h : U \to V$ eine C^∞-Abbildung der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ in die offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Betrachte $dh : T(U) \to T(V)$. Wir wollen zeigen dass $dh \in C^\infty(T(U), T(V))$. Dazu betrachte

$$\Phi^{-1} \circ dh \circ \Phi : \Phi^{-1}(T(U)) \to \Phi^{-1}(T(V)),$$

und dabei ist $\Phi^{-1}(T(U)) = U \times \mathbb{R}^n$, $\Phi^{-1}(T(V)) = V \times \mathbb{R}^n$. Sei $(m_1, \dots, m_{2n}) \in U \times \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\Phi(m_1, \dots, m_{2n})([f]/\sim) = \sum_{j=1}^n m_{n+j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(m_1, \dots, m_n), \; f \in \mathcal{P}_{(m_1,\dots,m_n)}.$$

Wir erhalten

$$(dh \circ \Phi)(m_1, \dots, m_{2n})([g]/\sim) = \Phi(m_1, \dots, m_{2n})([g \circ h]/\sim), g \in \mathcal{P}_{h(m_1,\dots,m_n)}.$$

Die rechte Seite ist weiter gleich ($h = (h_1, \dots, h_n)$)

$$\sum_{j=1}^n m_{n+j} \frac{\partial (g \circ h)}{\partial x_j}(m_1, \dots, m_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^n m_{n+j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(h(m_1, \dots, m_n)) \cdot \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(m_1, \dots, m_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{n+j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(m_1, \dots, m_n) \right) \frac{\partial g}{\partial x_i}(h(m_1, \dots, m_n)),$$

und daher erhalten wir

$$(\Phi^{-1}\circ dh\circ\Phi)(m_1,\dots,m_n)=\Big(h_1(m_1,\dots,m_n),\dots h_n(m_1,\dots,m_n),$$

$$,\sum_{j=1}^n m_{n+j}\frac{\partial h_1}{\partial x_j}(m_1,\dots,m_n),\dots,\sum_{j=1}^n m_{n+j}\frac{\partial h_n}{\partial x_j}(m_1,\dots,m_n)\Big)\,.$$

Diese Abbildung ist offenbar C^∞, und wir sehen dass $dh\in C^\infty(T(U),T(V))$.

1.3.13 Bemerkung. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $N\subseteq M$ offen, sodaß N vermöge Beispiel 1.1.6 selbst eine Mannigfaltigkeit ist. Sei weiters $\pi_M\cdot T(M)\to M$ die Bündelprojektion. Dann gilt $T(N)=\pi_M^{-1}(N)$, denn, da N offen ist, ist $\mathcal{P}_m(N)/_\sim=\mathcal{P}_m(M)/_\sim$ für $m\in N$. Insbesondere ist $T(N)$ offen in $T(M)$.

Mit Hilfe von Beispiel 1.3.12 und Bemerkung 1.3.13 können wir nun $T(M)$ zu einer Mannigfaltigkeit der Dimension $2\dim M$ machen.

Für eine Karte (U,φ) von M bezeichne $\tilde\varphi:=\Phi^{-1}\circ d\varphi$. Da $\varphi\in C^\infty(U,\varphi(U))$ und $\varphi^{-1}\in C^\infty(\varphi(U),U)$ ist, folgt

$$d\varphi\circ d(\varphi^{-1})=\mathrm{id}_{T(\varphi(U))},\;\; d(\varphi^{-1})\circ d\varphi=\mathrm{id}_{T(U)}\ .$$

Also ist $\tilde\varphi$ eine Bijektion von $T(U)$ auf $\Phi^{-1}(T(\varphi(U)))$. Wegen $T(\varphi(U))=\pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}(\varphi(U))$, ist $T(\varphi(U))\subseteq T(\mathbb{R}^n)$ offen. Daher ist auch $\Phi^{-1}(T(\varphi(U))\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ offen.

Sei $\mathcal{T}$ die Topologie auf $T(M)$ die von der Subbasis

$$\big\{\tilde\varphi^{-1}(O):\,O\subseteq\mathbb{R}^{2n}\text{ offen},(U,\varphi)\text{ Karte von }M\big\}$$

erzeugt wird. Weiters setze $\mathcal{A}:=\{(T(U),\tilde\varphi):(U,\varphi)\text{ Karte von }M\}$.

1.3.14 Lemma. *Die Topologie $\mathcal{T}$ erfüllt das 2te-Abzählbarkeitsaxiom. Die Familie $\mathcal{A}$ ist ein Atlas auf $T(M)$.*

Beweis. Als erstes betrachten wir eine Abbildung $\tilde\varphi\circ\tilde\psi^{-1}$, wobei $(U,\varphi),(V,\psi)$ Karten sind. Es ist $T(U)\cap T(V)\neq\emptyset$ genau dann wenn $U\cap V\neq\emptyset$, und dann ist $T(U)\cap T(V)=T(U\cap V)$. Weiters ist

$$\tilde\varphi\circ\tilde\psi^{-1}=\Phi^{-1}\circ d\varphi\circ(d\psi)^{-1}\circ\Phi=\Phi^{-1}\circ d(\varphi\circ\psi^{-1})\circ\Phi\,.$$

Die Abbildung $\varphi\circ\psi^{-1}$ ist C^∞, und nach Beispiel 1.3.12 auch $\Phi^{-1}\circ d(\varphi\circ\psi^{-1})\circ\Phi$.

Als nächstes zeigen wir, dass es auf M eine abzählbare Basis der Topologie gibt sodaß auf jeder Basismenge eine Kartenabbildung definiert ist. Dazu sei $\mathcal{L}_0$ eine abzählbare Basis von M und sei

$$\mathcal{L}:=\big\{B\in\mathcal{L}_0:\,\exists\varphi\text{ mit }(B,\varphi)\text{ Karte}\big\}\,.$$

Sei $O\subseteq M$ offen und $x\in O$. Wähle $B_0\in\mathcal{L}_0$ mit $x\in B_0\subseteq O$ und wähle (U,φ) eine Karte mit $x\in U$. Wähle $B\in\mathcal{L}_0$ mit $x\in B\subseteq B_0\cap U$, dann ist $(B,\varphi|_B)$ eine Karte und $x\in B\subseteq O$. Also ist $\mathcal{L}$ eine Basis.

Zu jedem $B\in\mathcal{L}$ wähle φ_B sodaß (B,φ_B) eine Karte ist. Weiters sei $\mathcal{L}'$ eine abzählbare Basis der Topologie des $\mathbb{R}^{2n}$. Sei nun eine Karte $(U,\varphi),O\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ offen, und $x\in\tilde\varphi^{-1}(O)$ gegeben. Wähle $B\in\mathcal{L}$ mit $\pi_M(x)\in B$. Es gilt

$$\tilde\varphi(T(U)\cap T(B))=\tilde\varphi(T(U\cap B))=\Phi^{-1}(T(\varphi(U\cap B)))=\varphi(U\cap B)\times\mathbb{R}^n\,.$$

Also ist $O \cap \tilde{\varphi}(T(U \cap B))$ offen im $\mathbb{R}^{2n}$. Da $\tilde{\varphi}_B \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ein Diffeomorphismus von $\tilde{\varphi}(T(U) \cap T(B))$ auf $\tilde{\varphi}_B(T(U) \cap T(B))$ ist, und $\tilde{\varphi}_B(T(U) \cap T(B))$ nach dem obigen Argument für $\tilde{\varphi}$ genauso offen im $\mathbb{R}^{2n}$ ist, folgt dass $(\tilde{\varphi}_B \circ \tilde{\varphi}^{-1})(O \cap \tilde{\varphi}(T(U \cap B))) = \tilde{\varphi}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(O) \cap T(U \cap B))$ offen im $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Weiters gilt $\tilde{\varphi}_B(x) \in \tilde{\varphi}_B(\tilde{\varphi}^{-1}(O) \cap T(U \cap B))$ da auch $\pi(x) \in U$. Wähle $B' \in \mathcal{L}'$ mit

$$\tilde{\varphi}_B(x) \in B' \subseteq \tilde{\varphi}_B\big(\tilde{\varphi}^{-1}(O) \cap T(U \cap B)\big)\,,$$

dann gilt

$$x \in \tilde{\varphi}_B^{-1}(B') \subseteq \tilde{\varphi}^{-1}(O)\,.$$

Also ist die Menge $\{\tilde{\varphi}_B^{-1}(B') : B \in \mathcal{L}, B' \in L'\}$ eine abzählbare Subbasis von $\mathcal{T}$. Daher existiert auch eine abzählbare Basis.

Wir zeigen, dass jedes $\tilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus von $T(U)$ auf $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ ist: Die Stetigkeit ist klar. Sei $O \subseteq T(U)$ offen, $x \in O$. Dann existieren (φ_i, U_i), $i = 1, \dots, n$, Karten von M, und $O_i \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ offen, mit $x \in \bigcap_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i^{-1}(O_i) \subseteq O$. Die Menge $O_i \cap (\varphi_i(U \cap U_i))$ ist offen und nichtleer, denn $\tilde{\varphi}_i(x) \in O_i$ und $\pi_M(x) \in U$ da $x \in T(U)$. Wegen $x \in \tilde{\varphi}^{-1}(O_i)$ ist $\pi_M(x) \in U_i$, also folgt $\pi_M(x) \in U \cap U_i$. Daher ist $\tilde{\varphi}_i(x) \in \varphi_i(U \cap U_i) \times \mathbb{R}^n$. Weiters ist $\tilde{\varphi}_i^{-1}(\varphi_i(U \cap U_i) \times \mathbb{R}^n) \subseteq T(U \cap U_i) \subseteq T(U)$. Wir erhalten

$$\tilde{\varphi}(x) \in \bigcap_{i=1}^n (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}\big(O_i \cap (\varphi_i(U \cap U_i) \times \mathbb{R}^n)\big) \subseteq \tilde{\varphi}(O)\,.$$

❏

1.3.15 Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Das Tangentialbündel $T(M)$ wird immer mit der von der Subbasis ($\tilde{\varphi} = \Phi^{-1} \circ d\varphi$)

$$\big\{\tilde{\varphi}^{-1}(O) :\ O \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ offen }, (U, \varphi) \text{ Karte von } M\big\}$$

erzeugten Topologie, und mit der von

$$\big\{(T(U), \tilde{\varphi}) :\ (U, \varphi) \text{ Karte von } M\big\}$$

erzeugten differenzierbaren Struktur versehen. Damit wird $T(M)$ zu einer Mannigfaltigkeit der Dimension $2 \cdot \dim M$.

1.3.16 Proposition. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann ist die Bündelprojektion $\pi : T(M) \to M$ in $C^\infty(T(M), M)$. Ist N eine weitere Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M, N)$, so ist $df \in C^\infty(T(M), T(N))$.*

Beweis. Sei $x \in T(M)$. Wähle eine Karte (U, φ) von M um $\pi(x)$, dann ist $(T(U), \tilde{\varphi})$ eine Karte von $T(M)$ um x. Es gilt

$$\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \varphi \circ \pi \circ (d\varphi)^{-1} \circ \Phi = \varphi \circ \pi \circ d(\varphi^{-1}) \circ \Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n\,.$$

Für $p = (p_1, \dots, p_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ ist $\Phi(p)$ ein gewisses Element von $T_{(p_1, \dots, p_n)}(\mathbb{R}^n)$. Also ist $d(\varphi^{-1})(\Phi(p)) \in T_{\varphi^{-1}(p_1, \dots, p_n)}(M)$. Wir sehen dass

$$(\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(p) = (p_1, \dots, p_n)$$

gilt, d.h. $\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ist die Projektion auf die ersten n Komponenten und diese ist C^∞.

Sei nun $f \in C^\infty(M, N)$ gegeben, und betrachte $df : T(M) \to T(N)$. Sei $x \in T(M)$, und wähle Karten $(U, \varphi), (V, \psi)$ von M bzw. N mit $\pi_M(x) \in U, \pi_N(df(x)) \in V$ und $f(U) \subseteq V$. Dann sind $(T(U), \tilde{\varphi})$ und $(T(V), \tilde{\psi})$ Karten von $T(M)$ bzw. $T(N)$ um x bzw. $df(x)$. Es gilt

$$\tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \Phi^{-1} \circ d\psi \circ df \circ (d\varphi)^{-1} \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \Phi\,.$$

Nun ist $f \in C^\infty(M, N)$, also $h := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \psi(V))$. Beachte hier dass $f(\pi_M(x)) = \pi_N(df(x))$ nach Bemerkung 1.3.7. Wie wir in Beispiel 1.3.12 gesehen haben, ist die Abbildung $\Phi^{-1} \circ dh \circ \Phi \in C^\infty$. Wir sehen, dass $df \in C^\infty(T(M), T(N))$.

❑

1.3.17 Beispiel. Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, und sei die Abbildung $\alpha_f : T(M) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha_f(x) := x([f]/_\sim)$ wobei $[f]/_\sim \in \mathcal{P}_{\pi(x)/\sim}$. Dann ist $\alpha_f \in C^\infty(T(M), \mathbb{R})$. Denn: Sei $x \in T(M)$ und sei (U, φ) eine Karte von M um $\pi(x)$. Dann ist $\tilde{\varphi} = \Phi^{-1} \circ d\varphi$ eine Karte von $T(M)$ nun x. Es gilt $(n = \dim M)$

$$(\alpha_f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(m_1, \ldots, m_{2n}) = \sum_{j=1}^{n} m_{n+j} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(m_1, \ldots, m_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})\,.$$

Also folgt das $\alpha_f \in C^\infty(T(M), \mathbb{R})$.

1.4 Das Inverse Function Theorem

Ist $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus, so ist $df : T(M) \to T(N)$ ebenfalls ein Diffeomorphismus, denn $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$. Insbesondere ist für jedes $m \in M$ die Abbildung $df_m : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ ein Isomorphismus.

1.4.1 Satz (*Inverse Function Theorem*). *Sei $f \in C^\infty(M, N), m \in M$, und sei $df_m : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ ein Isomorphismus. Dann existiert eine offene Umgebung $U \in M$ von m sodaß $f(U) \subseteq N$ offen ist und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Da df_m ein Isomorphismus ist, ist $\dim M = \dim N =: d$. Wähle Karten (V, φ) in M und (W, ψ) in N mit $m \in V$, $f(m) \in W$. Setze $\varphi(m) =: p \in \mathbb{R}^d$, $\psi(f(m)) =: q \in \mathbb{R}^d$, und betrachte die Abbildung $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \to \psi(W)$. Dann ist $dg_p = d\psi \circ df \circ d(\varphi^{-1})_p$, und daher ist dg_p ein Isomorphismus von $T_p(\varphi(V))$ auf $T_q(\psi(W))$. Also ist auch $\Phi^{-1} \circ dg_p \circ \Phi$ eine Bijektion von $\{p\} \times \mathbb{R}^d$ auf $\{q\} \times \mathbb{R}^d$. Da diese Abbildung nach Beispiel 1.3.12 in den hinteren Komponenten genau multiplizieren mit der Jacobi-Matrix von g an der Stelle p ist, ist diese invertierbar. Nach dem Satz über die Inverse Funktion existiert eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in \tilde{U} \subseteq \varphi(V)$, sodaß g ein Diffeomorphismus von $\tilde{U}$ auf $g(\tilde{U})$ ist und das $g(\tilde{U})$ offen ist. Betrachte die Abbildung $h := \varphi^{-1} \circ (g|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})}$. Diese bildet die in N offene Menge $\psi^{-1}(\tilde{U})$ auf die in M offene Menge $\varphi^{-1}(\tilde{U})$ ab, und erfüllt $h \circ f|_{\varphi^{-1}(\tilde{U})} = \mathrm{id}_{\phi^{-1}(\tilde{U})}$, $f|_{\varphi^{-1}(\tilde{U})} \circ h = \mathrm{id}_{\psi^{-1}(\tilde{U})}$. Weiters ist sie $C^\infty(\psi^{-1}(\tilde{U}), \varphi^{-1}(\tilde{U}))$, denn $\varphi \circ h \circ \psi^{-1} = (g|_{\tilde{U}})^{-1}$.

❑

Sei $m \in M$ und $(U, f) \in \mathcal{P}_m$. Dann ist $df_m : T_m(U) \to T_{f(m)}(\mathbb{R})$. Nun ist einerseits $T_m(U) = T_m(M)$, wegen Bemerkung 1.3.3 könnten wir auch gleich mit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ beginnen, andererseits ist $T_{f(m)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ vermöge der Abbildung

$$D \in T_{f(m)}(\mathbb{R}) \mapsto D([\mathrm{id}]/_\sim)\,,$$

vgl. Beispiel 1.3.12, (1.4). Damit können wir df_m auffassen als Element $\underline{df_m}$ von $T_m(M)^*$. Explizit ist

$$\underline{df_m} : \begin{cases} T_m(M) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad D & \longmapsto \quad df_m(D)([\mathrm{id}]/_\sim) = D([\mathrm{id} \circ f]/_\sim) = D([f]/_\sim) \end{cases}$$

Sei nun $\psi : M \to N, m \in M$, und $f \in \mathcal{P}_{\psi(m)}(N)$. Dann ist also $d\psi_m : T_m(M) \to T_{\psi(m)}(N)$, daher die duale Abbildung $(d\psi_m)^* : T_{\psi(m)}(N)^* \to T_m(M)^*$, und $\underline{df_m} \in T_{\psi(m)}(N)^*$. Wir zeigen

$$(d\psi_m)^*(\underline{df_{\psi(m)}}) = \underline{d(f \circ \psi)_m}\,. \tag{1.5}$$

Sei dazu $D \in T_m(M)$ gegeben. Dann gilt

$$(d\psi_m)^*(\underline{df_{\psi(m)}})(D) = \underline{df_{\psi(m)}}(d\psi_m(D)) = d\psi_m(D)([f]/_\sim) =$$

$$= D([f \circ \psi]/_\sim) = \underline{d(f \circ \psi)_m}(D)\,.$$

Sei nun (U, φ) eine Karte von M um m, $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$, und bezeichne mit $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Koordinate, $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$. Wir zeigen dass in dieser Situation $\{\underline{(d\varphi_i)_m} : i = 1, \dots, d\}$ die zu $\{D_i : i = 1, \dots, d\}$ duale Basis ist, wobei D_i wie in $\overline{(1.2)}$ definiert ist. Dazu berechnen wir

$$\underline{(d\varphi_i)_m}(D_j) = D_j(\pi_i \circ \varphi) = \frac{\partial((\pi_i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(m)) = \delta_{ij}\,. \tag{1.6}$$

1.4.2 Proposition. *Sei* $\dim M = d$, $m \in M$, *und* $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{P}_m$. *Ist* $\{\underline{(df_j)_m} : j = 1, \dots, d\}$ *eine Basis von* $T_m(M)^*$, *so existiert eine offene Umgebung* U *von* m *sodaß* $(f_1, \dots, f_d) : U \to \mathbb{R}^d$ *eine Karte von* M *ist.*

Beweis. Klarerweise gilt, auf einer Umgebung V von m wo alle f_j definiert sind, $f := (f_1, \dots, f_d) \in C^\infty(V, \mathbb{R}^d)$. Wieder sei $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die i-te Projektion. Dann ist, nach dem oben bemerkten, $\{\underline{(d\pi_i)_{f(m)}} : i = 1, \dots, d\}$ eine Basis von $T_{f(m)}(\mathbb{R}^d)^*$. Es gilt nach (1.5)

$$(df_m)^*\big(\underline{(d\pi_i)_{f(m)}}\big) = \underline{d(\pi_i \circ f)_m} = \underline{(df_i)_m}\,,$$

und das ist nach Voraussetzung ebenfalls eine Basis. Also ist $(df_m)^*$, und daher auch df_m, ein Isomorphismus. Nach Satz 1.4.1 existiert eine offene Umgebung U von m sodaß $f(U)$ offen ist und $f : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus. Ist (W, ψ) eine Karte von M mit $W \cap U \neq \emptyset$, so gilt also $\psi \circ f^{-1}$, $f \circ \psi$ sind C^∞. Daher ist (U, f) eine Karte.

❑

1.4.3 Korollar. *Sei $m \in M$ und $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{P}_m$. Setze $d := \dim M$.*

(i) Ist $\{\underline{(df_j)_m} : j = 1, \dots, k\} \subseteq T_m(M)^*$ linear unabhängig, so existiert eine Karte (U, f) von M um m mit

$$\pi_i \circ f = f_i, \; i = 1, \dots, k\,.$$

(ii) Ist $\operatorname{span}\{\underline{(df_j)_m} : j = 1, \dots, k\} = T_m(M)^*$, so existiert eine Teilmenge $\{j_1, \dots, j_d\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ und U offen sodaß $(U, (f_{j_1}, \dots, f_{j_d}))$ eine Karte von M um m ist.

Beweis. Wir zeigen (i). Sei (V, g) eine Karte von M um m. Dann ist $\operatorname{span}(\{\underline{(df_j)_m} : j = 1, \dots, k\} \cup \{\underline{d(\pi_i \circ g)_m}\}) = T_m(M)^*$, also existieren $i_1, \dots, i_{d_k}$ sodaß

$$\big\{\underline{(df_j)_m} : j = 1, \dots, k\} \cup \{\underline{d(\pi i_l \circ g)_m} : l = 1, \dots, d - k\big\}$$

eine Basis von $T_m(M)^*$ ist. Die Behauptung folgt aus Proposition 1.4.2.

Wir zeigen (ii). Wähle eine Teilmenge $\{\underline{(df_{j_l})_m} : l = 1, \dots, d\}$ die eine Basis ist, und wende Proposition 1.4.2 an.

❑

1.4.4 Korollar. *Sei $f \in C^\infty(M, N), m \in M$, und sei (U, φ) eine Karte von N um $f(m)$.*

(i) Ist df_m surjektiv, dann existiert eine Karte (V, ψ) von M um m, sodaß

$$\pi_i \circ \psi = \pi_i \circ \varphi \circ f, \; i = 1, \dots, \dim N\,.$$

(ii) Ist df_m injektiv, so existiert (mindestens) eine Teilmenge $\{j_1, \dots, j_{\dim M}\}$ von $\{1, \dots, \dim N\}$ und eine offene Umgebung V von m, sodaß

$$(V, (\pi_{j_1} \circ \varphi \circ f, \dots, \pi_{j_{\dim M}} \circ \varphi \circ f))$$

eine Karte von M um m ist.

Beweis. Wir zeigen (i). Da df_m surjektiv ist, ist $(df_m)^*$ injektiv. Also ist das Bild von $\{\underline{d(\pi_i \circ \varphi)_{f(m)}} : i = 1, \dots, \dim N\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $T_m(M)^*$. Nun gilt

$$(df_m)^*(\underline{d(\pi_i \circ \varphi)_{f(m)}}) = \underline{d(\pi_i \circ \varphi \circ f)_m}, \; i = 1, \dots, \dim N\,.$$

Die Behauptung folgt aus Korollar 1.4.3,(i).

Wir zeigen (ii). Da df_m injektiv ist, ist $(df_m)^*$ surjektiv, und daher $\operatorname{span}\{\underline{d(\pi_i \circ \varphi \circ f)_m} : i = 1, \dots, \dim N\} = T_m(M)^*$. Die Behauptung folgt aus Korollar 1.4.3,(ii).

❑

1.4.5 Bemerkung. In der Situation von Korollar 1.4.4,(ii), ist insbesondere f auf einer Umgebung von m injektiv.

1.5 Teilmannigfaltigkeiten

1.5.1 Definition. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann heißt f eine

(*i*) *Immersion*, wenn für jedes $m \in M$ die Abbildung $df_m : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ injektiv ist.

(*ii*) *Einbettung*, wenn f eine injektive Immersion ist, und zusätzlich ein Homöomorphismus von M auf $f(M)$ wobei $f(M)$ mit der Spurtopologie von N versehen ist.

(*iii*) *echte Einbettung*, wenn f eine Einbettung ist und $f(M)$ abgeschlossen in N ist.

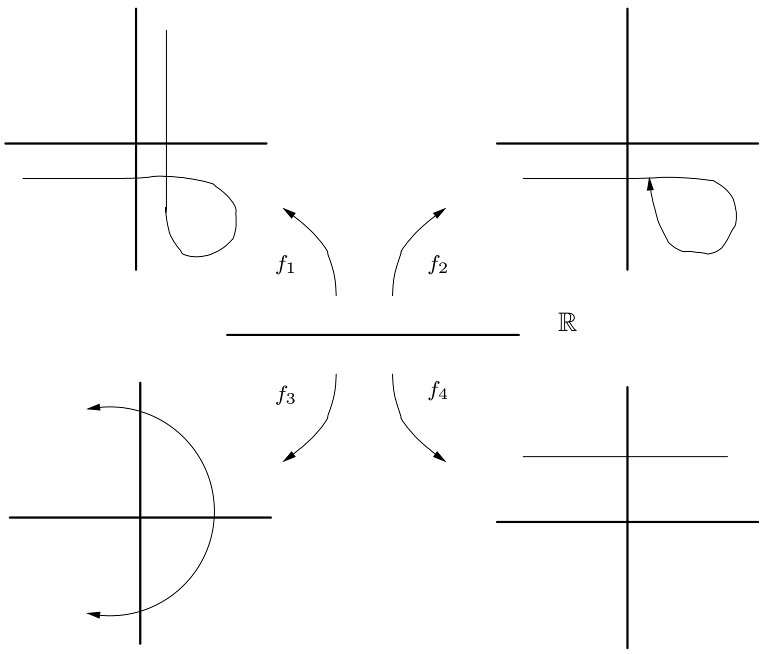
1.5.2 Definition. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f \in C^\infty(M, N)$. Dann heißt (M, f) eine

(*i*) *immersed Teilmannigfaltigkeit von* N, wenn f eine injektive Immersion ist.

(*ii*) *eingebettete Teilmannigfaltigkeit von* N, wenn f eine Einbettung ist.

(*iii*) *echt eingebettete Teilmannigfaltigkeit von* N, wenn f eine echte Einbettung ist.

1.5.3 Bemerkung. Die verschiedenen Typen von Teilmannigfaltigkeiten müssen tatsächlich unterschieden werden. Dann betrachte das Beispiel $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}^2$ und die Abbildungen $f_1, \ldots, f_4$ wie in den folgenden Figuren:



Dann ist f_1 eine Immersion aber nicht injektiv, f_2 eine injektive Immersion aber keine Einbettung, f_3 eine Einbettung aber keine echte Einbettung, und f_4 eine echte Einbettung.

1.5.4 Beispiel. Sei (U, φ) eine Karte und seien $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{\dim M} \in \mathbb{R}, k \leq \dim M$ gegeben. Betrachte die Menge

$$S := \big\{ m \in U : (\pi_i \circ \varphi)(m) = \alpha_i, i = k+1, \dots, \dim M \big\} .$$

Sie kann leer sein. Ist jedoch $D \neq \emptyset$, so versehe S mit der Spurtopologie von M und dem Atlas

$$\big\{ (S, (\pi_1 \circ \varphi, \dots, \pi_k \circ \varphi)) \big\} .$$

Dann wird S zu einer Mannigfaltigkeit, und es ist (S, ι), wobei $\iota : S \to M$ die Inklusion ist, eine eingebettete Teilmannigfaltigkeit von M. Man spricht von einer *Scheibe* der Karte (U, φ).

1.5.5 Proposition. *Sei $f \in C^\infty(M, N)$ eine Immersion, $m \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung U von m und eine Karte (V, ψ) von N um $f(m)$, sodaß $f|_U$ injektiv ist und $f(U)$ eine Scheibe von (V, ψ) ist.*

Beweis. Wähle eine Karte (W, φ) von N um $f(m)$. Nach Korollar 1.4.4,(ii), ist, nach eventuellen permutieren der Koordinaten von φ,

$$\tau := (\pi_1 \circ \varphi \circ f, \dots, \pi_{\dim M} \circ \varphi \circ f)$$

auf einer geeigneten Umgebung V' von m, $f(V') \subseteq W$, eine Karte von M und $f|_{V'}$ ist injektiv, vgl. Bemerkung 1.4.5. Schreibe $\tau = \pi \circ \varphi \circ f$ wobei π die Projektion des $\mathbb{R}^{\dim N}$ auf die ersten $\dim M$ Komponenten bezeichnet. Definiere $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{\dim N})$ auf $(\pi \circ \varphi)^{-1}(\tau(V'))$ durch

$$\psi_i = \begin{cases} \varphi_i & , \ i = 1, \dots, \dim M \\ \varphi_i - \varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi & , \ i = \dim M + 1, \dots, \dim N \end{cases}$$

wobei wieder $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$. Dann ist ψ eine C^∞-Funktion nach $\mathbb{R}^{\dim N}$. Für einen Punkt von der Gestalt $f(x)$ gilt

$$\psi_i(f(x)) = (\varphi_i \circ f)(x) - (\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \underbrace{\pi \circ \varphi \circ f}_{=\tau})(x) = 0, i = \dim M + 1, \dots, \dim N .$$

Schreibe nun

$$\underline{d(\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi)_{f(m)}} = \sum_{j=1}^{\dim N} \lambda_j \underline{(d\varphi_j)_{f(m)}} .$$

Wir zeigen $\lambda_j = 0$, $j = \dim M + 1, \dots, \dim N$. Dazu berechne für die zu $\{ \underline{(d\varphi_j)_{f(m)}}, : j = 1, \dots, \dim N \}$ duale Basis D_j, vgl. (1.6), (1.2),

$$\lambda_j = \underline{d(\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi)_{f(m)}}(D_j) = D_j([\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi]/_\sim) =$$

$$= \frac{\partial((\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(f(m))) = 0, \ j > \dim M ,$$

denn π ist die Projektion auf die ersten $\dim M$ Koordinaten. Es folgt

$$\underline{(d\psi_i)_{f(m)}} = \begin{cases} \underline{(d\varphi_i)_{f(m)}} & , \ i = 1, \dots, \dim M \\ \underline{(d\varphi_i)_{f(m)}} - \sum_{j=1}^{\dim M} \lambda_{ij} \underline{(d\varphi_j)_{f(m)}} & , \ i = \dim M + 1, \dots, \dim N \end{cases}$$

und daher ist $\{\underline{(d\psi_i)_{f(m)}} : i = 1, \dots, \dim N\}$ eine Basis. Nach Proposition 1.4.2 ist, auf einer geeigneten Umgebung V von $f(m)$ sicher (V, ψ) eine Karte. Setze $U = f^{-1}(V) \cap V'$.

Sei S die Scheibe von (V, ψ) die entsteht durch die Einschränkung $\psi_i(x) = 0$, $i = \dim M + 1, \dots, N$. Wie wir gesehen haben gilt $f(U) \subseteq S$. Sei nun umgekehrt $x \in S$. Dann ist $x \in V \subseteq (\pi \circ \varphi)^{-1}(\tau(V'))$, also $(\pi \circ \varphi)x \in \tau(V')$. Wir können daher definieren $y \in V'$ als $y := \tau^{-1}(\pi \circ \varphi)x$. Dann gilt

$$\varphi_i(f(y)) = (\varphi_i \circ f)(y) = (\varphi_i \circ f \circ \tau^{-1} \circ \pi \circ \varphi)(x) \,.$$

Für $i = \dim M + 1, \dots, \dim N$ ist wegen $x \in S$ daher $\varphi_i(f(y)) = \varphi_i(x)$. Wegen der Wahl von y gilt

$$(\pi \circ \varphi)(f(y)) = \tau y = (\pi \circ \varphi)(x) \,,$$

d.h. $\varphi_i(f(y)) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, \dim M$. Da φ eine Karte ist, folgt $f(y) = x$. Also auch $y \in f^{-1}(V)$ und damit $y \in U$.

❑

Wir wollen bemerken, dass man (V, ψ) so wählen kann dass $\psi(V)$ ein Würfel ist.

1.5.6 Proposition. *Sei $f \in C^\infty(M, N)$ eine bijektive Immersion. Dann ist f ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 1.4.1 genügt es zu zeigen dass df_m stets surjektiv ist. Angenommen es ist df_m für ein $m \in M$ nicht surjektiv. Dann ist $\dim M < \dim N$. Wähle eine Karte (W, φ) von N um $f(m)$ mit $\varphi(W) = \mathbb{R}^{\dim N}$. Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Basis der Topologie von M aus Mengen mit kompakten Abschluß, vgl. Beweis von Lemma 1.2.3. Sei $n \in f^{-1}(W)$, dann wähle eine offene Umgebung U von n und eine Karte (V, ψ) von N um $f(n)$ wie in Proposition 1.5.5, sodaß also $f(U)$ eine Scheibe in (V, ψ) ist. Wähle $U_n \in \mathcal{L}$ mit $n \in \overline{U}_n \subseteq U \cap f^{-1}(W)$, dann ist wegen $\dim M < \dim N$ sicher $\psi(f(\overline{U}_n))$ enthalten in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^{\dim N}$ und daher nirgends dicht. Da (W, φ) und (V, ψ) Karten von N um $f(n)$ sind, ist

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(W \cap V), \varphi(W \cap V))$$
$$\psi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(W \cap V), \psi(W \cap V))$$

Es folgt das auch $\varphi(f(\overline{U}_n)) = (\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(f(\overline{U}_n)))$ keine in $\mathbb{R}^{\dim N}$ offene Menge enthält. Da $\overline{U}_n$ kompakt ist, folgt das $\varphi(f(\overline{U}_n))$ nirgends dicht ist. Nun gilt aber

$$\mathbb{R}^{\dim N} = \varphi(W) = \varphi(f(f^{-1}(W))) \subseteq$$
$$\subseteq \varphi\big(f\big(\bigcup_{n \in f^{-1}(W)} \overline{U_n}\big)\big) = \bigcup_{n \in f^{-1}(W)} \varphi(f(\overline{U}_n)) \,.$$

Da $\mathcal{L}$ abzählbar ist, steht auf der rechten Seite eine höchstens abzählbare Vereinigung. Wir haben einen Widerspruch zum Satz von Baire.

❑

1.5.7 Satz. *Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f \in C^\infty(M, N)$. Dann hat man die Abbildung*

$$\circ f : \begin{cases} C^\infty(N, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{cases}$$

Diese ist genau dann surjektiv, wenn f eine echte Einbettung ist. In diesem Fall ist die Abbildung $\circ f$, sogar wenn man sie als Abbildung von $C^\infty(N, \mathbb{R}^k)$ nach $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ auffasst, surjektiv.

Beweis. Als erstes zeigen wir den Zusatz, nämlich dass die Surjektivität von $\circ f : C^\infty(N, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ jene von $\circ f : C^\infty(N, \mathbb{R}^k) \to C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ impliziert. Das folgt aber, da eine Funktion $g : M \to \mathbb{R}^k$ genau dann C^∞ ist, wenn jede der Funktionen $\pi_i \circ g : M \to \mathbb{R}$ in C^∞ ist. Hat man also $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ gegeben, so betrachte $g_i := \pi \circ g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann existieren $h_i \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ mit $g_i = h_i \circ f$. Setze

$$h : \begin{cases} N & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ n & \longmapsto & (h_1(n), \ldots, h_k(n)) \end{cases}$$

Dann ist $h \in C^\infty(N, \mathbb{R}^k)$ und es gilt $g = h \circ f$.

Sei nun f eine echte Einbettung, wir zeigen dass $\circ f$ surjektiv ist. Sei $m \in M$. Wähle U und (V, ψ) wie in Proposition 1.5.5 und so daß $\psi(V)$ ein Würfel ist. Weiters bezeichne wieder π die Projektion von $\mathbb{R}^{\dim N}$ auf die ersten $\dim M$ Komponenten.

Betrachte die Abbildung $\pi \circ \psi \circ f : U \to \pi(\psi(V))$. Diese ist injektiv, denn ist $(\pi \circ \psi \circ f)(x) = (\pi \circ \psi \circ f)(y)$, so folgt $(\psi \circ f)(x) = (\psi \circ f)(y)$ da $f(U)$ die Scheibe von (V, ψ) ist deren hintere Koordinaten Null sind. Sie ist surjektiv, denn ist $x \in V$ so ist auch jenes Element in $\psi(V)$ welches an den vorderen Koordinaten gleich $\psi(x)$ und an den hinteren gleich Null da V ein Würfel ist. Da $f(U)$ Scheibe ist, liegt es in $f(U)$.

Sei $x \in U$, dann existiert nach Korollar 1.4.4,(ii), eine Auswahl $i_1, \ldots, i_d$ sodaß $(\pi_{i_1} \circ \psi \circ f, \ldots, \pi_{i_d} \circ \psi \circ f)$ lokal um x eine Karte ist. Da $\pi_l \circ \psi \circ f = 0$ für $l > \dim M$, muß diese Karte lokal gleich $\pi \circ \psi \circ f$ sein. Also ist $(\pi \circ \psi \circ f)^{-1} : \pi(\psi(V)) \to U$ eine C^∞-Abbildung.

Sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und setze $h_m := g \circ (\pi \circ \psi \circ f)^{-1} \circ \pi \circ \psi : V \to \mathbb{R}$. Dann ist h_m eine C^∞-Abbildung und es gilt für $x \in U$

$$(h_m \circ f)(x) = \big(g \circ (\pi \circ \psi \circ f)^{-1} \circ \pi \circ \psi \circ f\big)(x) = g(x)\,.$$

Wir bezeichnen in folgenden $U =: U_m, V =: V_m$. Die Menge $M \setminus U_m$ ist abgeschlossen. Da f ein Homöomorphismus auf $f(M)$ mit der Spurtopologie ist, ist also $f(M \setminus U_m)$ abgeschlossen in $f(M)$ mit der Spurtopologie. Da $f(M)$ abgeschlossen in N ist, ist $f(M \setminus U_m)$ abgeschlossen in N.

Setze $V'_m := V_m \cap f(M \setminus U_m)^c$, dann ist V'_m offen in N und enthält $f(U_m)$ da f injektiv ist.

Sei $p \in f(M)$, setze $m(p) := f^{-1}(p)$. Dann ist $\{V'_{m(p)} : p \in f(M)\} \cup \{N \setminus f(M)\}$ eine offene Überdeckung von N. Also existiert eine C^∞-Partition der Eins die dieser untergeordnet ist. Sei diese $\{\varphi_j \in C^\infty(N,\mathbb{R}) : j \in J\}$. Sei

$$J' := \left\{j \in J : \operatorname{supp}\varphi_j \cap f(M) \neq \emptyset\right\}.$$

Zu $j \in J'$ wähle $p_j \in f(M)$ mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq V'_{m(p_j)}$. Dann gilt $\sum_{j\in J'}\varphi_j(x) = 1$ für $x \in f(M)$. Betrachte die Funktion

$$h := \sum_{j\in J'} \varphi_j h_{m(p_j)}.$$

Sei $x \in M$ und $f(x) \in \operatorname{supp}\varphi_j$, dann ist auch $f(x) \in V'_{m(p_j)}$ und daher $x \in U_{m(p_j)}$. Also gilt $h_{m(p_j)}(f(x)) = g(x)$, und es folgt

$$h(f(x)) = \sum_{j\in J'} \varphi_j(f(x))h_{m(p_j)}(f(x)) = \sum_{\substack{j\in J'\\ \varphi_j(f(x))\neq 0}} \varphi_j(f(x))g(x) = g(x).$$

Wir kommen zum Beweis der Umkehrung. Wegen des ersten Beweisschrittes können wir also annehmen dass sich jede Funktion $g \in C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$ darstellen läßt als $g = h \circ f$ mit $h \in C^\infty(N,\mathbb{R}^k)$.

Seien $x, y \in M$, $x \neq y$, dann existiert $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $g(x) = 1, g(y) = 0$. Es folgt $f(x) \neq f(y)$, d.h. f ist injektiv.

Sei $O \subseteq M$ offen und $x \in O$. Dann existiert $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ mit $g(x) = 1$, $\operatorname{supp} g \subseteq O$. Sei $h \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ sodaß $g = h \circ f$ und setze $U := h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Dann ist U offen in N und daher $U \cap f(M)$ offen in $f(M)$. Ist $y \in U \cap f(M)$, $m := f^{-1}(y)$, so ist

$$g(m) = h(f(m)) = h(y) > 0,$$

also $m \in \operatorname{supp} g \subseteq O$. D.h. es ist $y \in f(O)$, und wir haben $f(x) \in U \cap f(M) \subseteq f(O)$. Also ist $f(O)$ offen in der Spurtopologie auf $f(M)$.

Wir zeigen als nächstes dass f eine Immersion ist. Sei $x \in M$ und wähle eine Karte (U,φ) mit $x \in U$. Sei $U_1 \subseteq U$ eine abgeschlossene Umgebung von x und sei $\{\phi_1,\phi_2\}$ eine Partition der Eins, die der Überdeckung $\{U, U_1^c\}$ untergeordnet ist. Setze $g := \varphi \cdot \phi_1$, wegen $\operatorname{supp}\phi_1 \subseteq U$ ist diese Abbildung wohldefiniert und in $C^\infty(M,\mathbb{R}^{\dim M})$. Sei $h \in C^\infty(N,\mathbb{R}^{\dim M})$ sodaß $g = h \circ f$. Dann gilt $dg_x = dh_{f(x)} \circ df_x$. Nun ist U_1 eine Umgebung von x, und $g|_{U_1} = \varphi|_{U_1}$. Daher ist $dg_x = d\varphi_x$, und daher bijektiv. Es folgt, dass df_x injektiv ist.

Es bleibt zu zeigen dass $f(M)$ abgeschlossen in N ist. Angenommen es existiert eine Folge (m_k) in M mit $f(m_k) \to n \in N \setminus f(M)$. Wähle eine Karte (U,φ) von N um n, und setze $x_k := \varphi(f(m_k))$. Dann gilt $x_k \to \varphi(n)$ und wir können, nötigenfalls durch Übergang zu einer Teilfolge, voraussetzen dass $\|x_k - \varphi(n)\|$ streng monoton gegen 0 strebt. Wähle offene Kugeln U_k mit Mittelpunkt x_k und Radien r_k sodaß r_k streng monoton gegen 0 strebt, und $\inf_{x\in U_k}\|x-\varphi(n)\| > \sup_{x\in U_{k+1}}\|x-\varphi(n)\|$. Dann sind die U_k sicher paarweise disjunkt. Bezeichne mit B_k die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x_k und Radius $\frac{r_k}{2}$. Dann ist die Menge

$$B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \cup \{\varphi(n)\}$$

abgeschlossen und beschränkt, und daher kompakt in $\mathbb{R}^{\dim N}$ und daher auch in $\varphi(U)$. Also ist $\varphi^{-1}(B)$ kompakt in U und daher in N. Also ist $\varphi^{-1}(B)$ auch abgeschlossen in N, und daher $f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$ abgeschlossen in M. Es ist U_k offen in $\varphi(U)$, also ist $\varphi^{-1}(U_k)$ offen in U und, da U offen in N ist, also auch offen in N. Daher ist $f^{-1}(\varphi^{-1}(U_k))$ offen in M. Betrachte die Familie

$$\{f^{-1}(\varphi^{-1}(B))^c\} \cup \{f^{-1}(\varphi^{-1}(U_k)) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Das ist eine offene Überdeckung von M. Denn: Sei $x \in f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$, dann ist $\varphi(f(x)) \in B$. Wegen $n \notin f(M)$, muss sogar $\varphi(f(x)) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ liegen, und daher auch $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(\varphi^{-1}(U_k))$. Sei $\{\phi\} \cup \{\phi_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Partition der Eins die dieser Überdeckung mit gleichen Indizes untergeordnet ist. Betrachte die Funktion $g := \sum_{k\in\mathbb{N}} k\phi_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Da jeder Punkt m_k in genau einer der Mengen der obigen Überdeckung vorkommt, nämlich in $f^{-1}(\varphi^{-1}(U_k))$, gilt $g(m_k) = k$. Sei $h \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ mit $g = h \circ f$. Dann muss also $h(f(m_k)) = k$ gelten. Das ist ein Widerspruch, denn da $m_k \to n$ muss $h(f(m_k)) \to h(n)$.

❑

1.5.8 Proposition. *Sei $f \in C^\infty(N, M)$, (P, φ) eine immersed Teilmannigfaltigkeit von M, und $f(N) \subseteq \varphi(P)$. Dann existiert genau eine Abbildung g mit*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & M \\ & P \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Es gilt

(*i*) *Ist g stetig, so ist $g \in C^\infty(N, P)$.*

(*ii*) *Ist φ eine Einbettung so ist $g \in C^\infty(N, P)$.*

Beweis. Wir zeigen (i), sei also g stetig. Es genügt zu jedem $x \in N$ eine offene Umgebung V von x und eine Karte (U, τ) von P zu finden sodaß $g(V) \subseteq U$ und $\tau \circ g \in C^\infty(V, \mathbb{R}^{\dim P})$ ist. Sei also $x \in N$, und sei (W, ψ) eine Karte von M um $f(x)$. Nach Korollar 1.4.4,(ii), gibt es eine offene Umgebung U, $\varphi(U) \subseteq W$, von $g(x)$ in P und eine geeignete Projektion $\pi : \mathbb{R}^{\dim M} \to \mathbb{R}^{\dim P}$ sodaß (U, τ) mit $\tau := \pi \circ \psi \circ \varphi$ eine Karte von P ist. Setze $V := g^{-1}(U)$, dann ist V offen und es gilt

$$\tau \circ g|_V = \pi \circ \psi \circ \varphi \circ g|_V = \pi \circ \psi \circ f|_V \in C^\infty(V, \mathbb{R}^{\dim P}).$$

Wir zeigen (ii). Es genügt nach (i) zu zeigen dass g stetig ist. Sei $O \subseteq P$ offen, dann ist $\varphi(O)$ offen in $\varphi(P)$. Sei $U \subseteq M$ offen mit $U \cap \varphi(P) = \varphi(O)$, dann ist $f^{-1}(U)$ offen in N. Es gilt, da φ injektiv ist,

$$n \in f^{-1}(U) \iff f(n) \in U \iff f(n) \in U \cap f(N) \iff$$

$$\iff f(n) \in U \cap \varphi(P) = \varphi(O) \iff g(n) \in O \iff n \in g^{-1}(O).$$

❑

1.5.9 Korollar. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, N eine Menge und $f : N \to M$ injektiv. Weiters seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf N und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ differenzierbare Strukturen auf $(N, \mathcal{T}_1)$ bzw. $(N, \mathcal{T}_2)$ sodaß $(N, \mathcal{T}_1, \mathcal{A}_1)$ und $(N, \mathcal{T}_2, \mathcal{A}_2)$ Mannigfaltigkeiten sind und so daß*

$$\big((N, \mathcal{T}_1, \mathcal{A}_1), f\big), \ \big((N, \mathcal{T}_2, \mathcal{A}_2), f\big)$$

immersed Teilmannigfaltigkeiten von M sind. Ist $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, so folgt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Beweis. Wir haben das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(N, \mathcal{T}_2, \mathcal{A}_2) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}"'] & M \\
& (N, \mathcal{T}_1, \mathcal{A}_1) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Wegen $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ist id stetig und nach Proposition 1.5.8 auch C^∞. Nun gilt für jedes $n \in N$, bezüglich der richtigen Mannigfaltigkeiten interpretiert,

$$df_n = df_n \circ d\,\mathrm{id}_n \ .$$

Da df_n in beiden Fällen injektiv ist, ist auch $d\,\mathrm{id}_n$ injektiv. Nach Proposition 1.5.6 ist id ein Diffeomorphismus.

❑

1.5.10 Bemerkung. Sei M eine Mannigfaltigkeit und N eine Teilmenge von M. Bezeichne $\mathcal{T}$ die Spurtopologie von M auf N. Sei angenommen es existiert eine differenzierbare Struktur $\mathcal{A}$ auf N sodaß $((N, \mathcal{T}, \mathcal{A}), \subseteq)$ eine immersed Teilmannigfaltigkeit von M ist. Ist $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{A}'$ eine Topologie bzw. eine differenzierbare Struktur auf N sodaß $((N, \mathcal{T}', \mathcal{A}'), \subseteq)$ eine immersed Teilmannigfaltigkeit von M ist, so folgt $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Dies folgt unmittelbar aus dem Korollar 1.5.9, denn jede Topologie auf N mit der $(N, \subseteq)$ eine immersed Teilmannigfaltigkeit sein kann, ist feiner als die Spurtopologie von M auf N.

Man beachte, dass die Voraussetzung in dieser Aussage äquivalent dazu ist, dass N zu einer eingebetteten Teilmannigfaltigkeit gemacht werden kann.

Anders formuliert: Ist M eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$. Im allgemeinen muss es keine Wahl einer Topologie und differenzierbaren Struktur auf N geben, so dass N mit diesen zur immersed Teilmannigfaltigkeit wird. Gibt es eine Wahl, so ist diese im allgemeinen nicht eindeutig. Existiert dagegen eine differenzierbare Struktur auf N, sodass N zur eingebetteten Teilmannigfaltigkeit wird, so existiert genau eine Wahl von Topologie und differenzierbarer Struktur sodass N immersed Teilmannigfaltigkeit ist (nämlich jene wo N sogar eingebettete Teilmannigfaltigkeit ist).

Wir definieren eine Relation $\succeq$ auf der Menge aller Teilmannigfaltigkeiten von M durch: Es gilt $(N, \iota_N) \succeq (N', \iota_{N'})$ wenn es ein $g \in C^\infty(N, N')$ gibt mit

$$\begin{tikzcd}
& M & \\
N \arrow[ur, "\iota_N"] \arrow[rr, "g"'] & & N' \arrow[ul, "\iota_{N'}"']
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Klarerweise ist diese Relation reflexiv und transitiv. Ist $(N, \iota_N) \succeq (N', \iota_{N'})$, so folgt $\iota_N(N) \subseteq \iota_{N'}(N')$. Es gilt $(N, \iota_N) \succeq (N', \iota_{N'})$ und $(N', \iota_{N'}) \succeq (N, \iota_N)$ genau dann, wenn es einen Diffeomorphismus g gibt mit (1.7). Wir erhalten nun

1.5.11 Korollar. *Sei $(N', \iota_{N'})$ eine eingebettete Teilmannigfaltigkeit. Dann gilt $(N, \iota_N) \succeq (N', \iota_{N'})$ genau dann, wenn $\iota_N(N) \subseteq \iota_{N'}(N')$.*

Beweis. Wende Proposition 1.5.8 an mit $f = \iota_N$

❑

Kapitel 2

Lie Algebren

2.1 Definition und Grundlagen

2.1.1 Definition. Sei K ein Körper. Eine K-Algebra $(A, [.,.])$ heißt *LieAlgebra*, wenn gilt

(L1) Für jedes $a \in A$ ist $[a, a] = 0$.

(L2) Es gilt die *Jacobi-Identität*

$$\big[[a, b], c\big] + \big[[b, c], a\big] + \big[[c, a], b\big] = 0,\ a, b, c \in A\,.$$

In diesem Fall bezeichnet man das Produkt $[.,.]$ der Algebra auch als *Lie-Klammer*.

2.1.2 Bemerkung. Das Axiom (L1) inmpliziert dass die Lie-Klammer antisymmetrisch ist, d.h. das stets $[b, a] = -[a, b]$ gilt. Denn sind $a, b \in A$, so gilt wegen (L1) und der Bilinearität von $[.,.]$

$$0 = [a + b, a + b] = [a, a] + [a, b] + [b, a] + [b, b] = [a, b] + [b, a]\,.$$

Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, so gilt auch die Umkehrung, denn $[a, a] = -[a, a]$, oder $2[a, a] = 0$, impliziert dann $[a, a] = 0$.

2.1.3 Definition. Seien $(A_1, [.,.]_1)$ und $(A_2, [.,.]_2)$ Lie-Algebren. Dann heißt f ein *Homomorphismus* von $(A_1, [.,.]_1)$ nach $(A_2, [.,.]_2)$, wenn $f : A_1 \to A_2$ eine lineare Abbildung ist, und stets $[f(a), f(b)] = f([a, b])$ gilt.

2.1.4 Bemerkung. Seien $(A_1[.,.]_1)$, $(A_2, [.,.]_2)$, $(A_3, [.,.]_3)$ Lie-Algebren und $f : A_1 \to A_2$, $g : A_2 \to A_3$, Homomorphismen. Dann ist auch $g \circ f : A_1 \to A_3$ ein Homomorphismus. Diese Verknüpfung von Homomorphismen ist assoziativ. Die identische Abbildung $\mathrm{id} : A \to A$ ist stets ein Homomorphismus. Ist $f : A_1 \to A_2$ ein Homomorphismus und ist die Abbildung f bijektiv, so ist auch $f^{-1} : A_2 \to A_1$ ein Homomorphismus.

Wir bezeichnen einen bijektiven Homomorphismus $f : A_1 \to A_2$ als Isomorphismus. Ist in diesem Fall $A_1 = A_2$, so sprechen wir auch von einem Automorphismus. Offenbar bildet die Menge aller Automorphismen einer Lie-Algebra mit der Verknüpfung als binäre Operation und der identischen Abbildung als Einselement eine Gruppe.

2.2 Beispiele von Lie Algebren

2.2.1 Beispiel. Sei $(A, \cdot)$ eine *assoziative K-Algebra*, d.h. es gelte stets $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Definiere für $a, b \in A$ den *Kommutator* $[a, b]$ als

$$[a, b] := ab - ba\,.$$

Dann ist $(A, [.,.])$ eine Lie-Algebra.

Die Gültigkeit von (L1) ist klar. Um (L2) einzusehen berechnen wir

$$\big[[a, b], c\big] = [a, b]c - c[a, b] = abc - bac - cab + cba\,,$$

$$\big[[b, c], a\big] = [b, c]a - a[b, c] = bca - cba - abc + acb\,,$$

$$\big[[c, a], b\big] = [c, a]b - b[c, a] = cab - acb - bca + bac\,.$$

Durch Aufsummieren dieser drei Ausdrücke folgt die Jacobische Identität.

2.2.2 Beispiel. Sei V ein Vektorraum über K. Dann ist $(\operatorname{End} V, \circ)$ eine assoziative Algebra wobei die linearen Operationen punktweise definiert sind und $\circ$ die Hintereinanderausführung von Endomorphismen von V bezeichnet. Also ist $(\operatorname{End} V, [.,.])$ wobei

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f,\ \ f, g \in \operatorname{End} V\,,$$

eine Lie-Algebra. Diese bezeichnet man mit $\mathfrak{gl}(V)$.

2.2.3 Beispiel. Sei $(A, \cdot)$ eine assoziative K-Algebra. Eine Abbildung $D : A \to A$ heißt eine *Derivation* von A, wenn gilt:

(i) D ist linear.

(ii) Für alle $a, b \in A$ ist $D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$.

Die Menge aller Derivationen einer K-Algebra $(A, \cdot)$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Der}(A)$.

Offenbar ist $\operatorname{Der}(A)$ ein linearer Teilraum von $\operatorname{End}(A)$. Tatsächlich gilt sogar: $\operatorname{Der}(A)$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(A)$. Um dies einzusehen seien $D, D' \in \operatorname{Der}(A)$. Wir berechnen für $a, b \in A$

$$[D, D'](a \cdot b) = (D \circ D')(a \cdot b) - (D' \circ D)(a \cdot b) =$$

$$= D(D'(a \cdot b)) - D'(D(a \cdot b)) = D(D'(a) \cdot b + a \cdot D'(b)) - D'(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) =$$

$$= D(D'(a)) \cdot b + D'(a) \cdot D(b) + D(a) \cdot D'(b) + a \cdot D(D'(b)) -$$

$$- D'(D(a)) \cdot b - D(a) \cdot D'(b) - D'(a) \cdot D(b) - a \cdot D'(D(b)) =$$

$$= (D \circ D')(a) \cdot b + a \cdot (D \circ D')(b) - (D' \circ D)(a) \cdot b - a \cdot (D' \circ D)(b) =$$

$$= [D, D'](a) \cdot b + a \cdot [D, D'](b)\,.$$

Man bemerke, dass $\operatorname{Der}(A)$ keine K-Unteralgebra von $(\operatorname{End}(V), \circ)$ zu sein braucht.

2.2.4 Beispiel. Sei A eine kommutative und assoziative K-Algebra. Dann ist $\mathrm{Der}(A)$ ein A-Modul und zwar mit der skalaren Multiplikation

$$(aD)(b) := a \cdot D(b),\ \ a, b \in A,\ \ D \in \mathrm{Der}(A)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass aD tatsächlich wieder in $\mathrm{Der}(A)$ liegt, die Rechengesetze sind dann klar. Dabei ist ebenfalls klar, dass $aD : A \to A$ linear ist. Seien $b, c \in A$, dann gilt

$$(aD)(bc) = a \cdot D(bc) = a \cdot (D(b)c + bD(c)) = a \cdot D(b) \cdot c + a \cdot b \cdot D(c) =$$

$$= (aD)(b)c + b(aD)(c)\,.$$

Die Lie-Algebra-Operation ist mit der A-Modul-Operation verbunden durch die Beziehung

$$[aD, bD'] = ab \cdot [D, D'] + a \cdot (Db) \cdot D' - b \cdot (D'a) \cdot D\,. \tag{2.1}$$

Um diese Beziehung einzusehen, sei $x \in A$ gegeben. Dann gilt

$$(aD)\big((bD')x\big) = (aD)(b \cdot D'x) = (aD)b \cdot D'x + b \cdot (aD)(D'x) =$$

$$= a \cdot Db \cdot D'x + b \cdot a \cdot D(D'x)\,,$$

und genauso

$$(bD')\big((aD)x\big) = b \cdot D'a \cdot Dx + a \cdot b \cdot D'(Dx)\,.$$

Insgesamt folgt (2.1).

Kapitel 3

Vektorfelder und Vektorbündel

3.1 Vektorfelder

3.1.1 Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen. Eine Abbildung $X \in C^\infty(U, T(M))$ heißt *Vektorfeld*, wenn $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$. Die Menge aller Vektorfelder auf U bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(U, M)$. Ist $U = M$, schreiben wir $\mathfrak{X}(M, M) =: \mathfrak{X}(M)$.

Die Menge $\mathfrak{X}(U, M)$ wird mit den Operationen die definiert sind durch

$$(X+Y)(m)([f]/_\sim) := X(m)([f]/_\sim) + Y(m)([f]/_\sim),\ m \in U, f \in \mathcal{P}_m\,,$$

$$(\lambda X)(m)([f]/_\sim) := \lambda \cdot X(m)([f]/_\sim),\ m \in U, \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{P}_m\,,$$

$$(gX)(m)([f]/_\sim) := g(m) \cdot X(m)([f]/_\sim),\ m \in U, g \in C^\infty(U, \mathbb{R}), f \in \mathcal{P}_m\,,$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein $C^\infty(U, \mathbb{R})$-Modul.

3.1.2 Satz. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $X \mapsto D_X$, wobei $X \in \mathfrak{X}(M)$, und wobei $D_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definiert ist durch*

$$(D_X f)(m) := X(m)([f]/_\sim),\ f \in C^\infty(M), m \in M, \tag{3.1}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum- und $C^\infty(M)$-Modul Isomorphismus von $\mathfrak{X}(M)$ auf $\mathrm{Der}\, C^\infty(M)$.

Beweis. Als erstes zeigen wir, dass die rechte Seite von (3.1) eine Derivation definiert. Sei $\alpha_f : T(M) \to \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.3.17. Dann gilt $D_X f = \alpha_f \circ X \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Klarerweise ist D_X linear. Seien $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann gilt

$$\begin{aligned} D_X(f \cdot g)(m) &= X(m)([f \cdot g]/_\sim) = X(m)([f]/_\sim \cdot [g]/_\sim) = \\ &= (D_X f)(m) \cdot g(m) + f(m)(D_X g)(m) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Also ist tatsächlich $D_X \in \mathrm{Der}\, C^\infty(M, \mathbb{R})$. Da sowohl in $\mathfrak{X}(M)$ als auch in $\mathrm{Der}\, C^\infty(M, \mathbb{R})$ die linearen Operationen sowie die $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Moduloperationen punkteweise definiert ist, vgl. Beispiel 2.2.4, ist $X \mapsto D_X$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum- und $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Modulhomomorphismus.

Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X \neq Y$, so wähle $m \in M$ mit $X(m) \neq Y(m)$ und wähle $f \in \mathcal{P}_m$ mit $X(m)([f]/_\sim) \neq Y(m)([f]/_\sim)$. Wegen Bemerkung 1.3.3 existiert $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $[g]/_\sim = [f]/_\sim \in \mathcal{P}_m/_\sim$. Es folgt $(D_X g)(m) \neq (D_Y g)(m)$, also $D_X \neq D_Y$. Die Abbildung $X \mapsto D_X$ ist also injektiv.

Sei $D \in \operatorname{Der} C^\infty(M, \mathbb{R})$. Um zu zeigen das D von der Gestalt D_X ist, zeigen wir als erstes dass $(Df)(m)$ nur von der Äquivalenzklasse $[f]/_\sim \in \mathcal{P}_m/_\sim$ abhängt. Dazu sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f \sim 0$ in $\mathcal{P}_m$ gegeben. Sei U eine offene Umgebung von m mit $f|_U = 0$. Nach Korollar 1.2.8 existiert $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\varphi(m) = 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$. Setze $\psi := 1 - \varphi$, dann gilt $\psi(m) = 0$ und $\psi(x) = 1$, $x \notin U$. Es folgt das $\psi \cdot f = f$, denn auf U ist f ohnehin gleich Null. Wir schließen dass

$$(Df)(m) = D(\psi \cdot f)(m) = (D\psi)(m) \cdot f(m) + \psi(m)(Df)(m) = 0 \,.$$

Also ist durch die Beziehung (3.1) eine Abbildung $X(m) : \mathcal{P}_m/_\sim \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Ließt man die Rechnung (3.2) umgekehrt, so sieht man dass $X(m) \in T_m(M)$. Also ist durch (3.1) eine Abbildung $X : M \to T(M)$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ definiert.

Es bleibt zu zeigen, dass $X \in C^\infty(M, T(M))$ ist. Sei (U, φ) eine Karte von M, dann ist $(T(U), \Phi^{-1} \circ d\varphi)$ eine Karte von $T(M)$. Weiters sei $m \in U$, bezeichne $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$, und sei D_i die zu φ_i duale Basis von $T_m(M)$, vgl. Korollar 1.3.11. Sei X_i die Abbildung $X_i : U \to T(U)$, die definiert ist als $X_i(m)([f]/_\sim) := (D_i f)(m)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt für $p \in \varphi(U)$

$$X_i(\varphi^{-1}(p)) : [f]/_\sim \mapsto (D_i f)(\varphi^{-1}(p)),\ f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \,,$$

$$d\varphi(X_i(\varphi^{-1}(p))) : [g]/_\sim \mapsto D_i(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)),\ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Wegen

$$D_i(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \frac{\partial((g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(\varphi^{-1}(p))) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \,,$$

folgt $(p = (p_1, \ldots, p_n))$

$$(\Phi^{-1} \circ d\varphi \circ X_i \circ \varphi^{-1})(p) = (p_1, \ldots, p_n, \delta_1, \ldots, \delta_n) \tag{3.3}$$

Da für jedes $m \in U$ die D_i eine Basis von $T_m(M)$ bilden, können wir schreiben

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(m) D_i,\ m \in U \,.$$

Dabei gilt $\lambda_i(m) = X(m)(\varphi_i) = (D\varphi_i)(m) \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Es folgt das

$$(\Phi^{-1} \circ d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(p) = (p_1, \ldots, p_n, \lambda_1(\varphi^{-1}(p)), \ldots, \lambda_n(\varphi^{-1}(p))) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2n}) \,.$$

Da (U, φ) eine beliebige Karte war, folgt $X \in C^\infty(M, T(M))$.

❑

3.1.3 Bemerkung. Aus dem letzten Beweisschritt sehen wir das äquivalent sind

(*i*) $X \in C^\infty(N, T(M))$.

(*ii*) Für jedes $n \in N$ existiert eine Karte (U, φ) von M um $\pi_M(X(n))$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in C^\infty((\pi_M \circ X)^{-1}(U, \mathbb{R})$ sodaß

$$X(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(p) X_i^\varphi(\pi_M(X(p))),\ p \in (\pi_M \circ X)^{-1}(U) \tag{3.4}$$

wobei $X_i^\varphi(q) \in T_q(M)$ definiert ist als

$$X_i^\varphi(q)(f) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(q))\,.$$

Beachte dass $X_i^\varphi \in C^\infty(U, T(M))$ wegen (3.3). Man sieht auch dass $X_i^\varphi = d\varphi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi$ wobei $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definiert ist als

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,.$$

(*iii*) Für jedes $n \in N$ und jede Karte (U, φ) gilt (3.4) mit gewissen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

Vermöge des Isomorphismus aus Satz 3.1.2 übertragen wir die Lie-Algebra Operation von $\operatorname{Der} C^\infty(M)$ auf $\mathfrak{X}(M)$. Damit wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einer Lie-Algebra. Explizit gilt

$$[X, Y](m)([f]/_\sim) = X(m)([Y(.)f]/_\sim) - Y(m)([X(.)f]/_\sim)\,,$$
$$m \in M,\ f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Beachte dass, nach Beispiel 1.3.17, $X(.)f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist. Lie-Algebra- und $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Moduloperation sind verbunden über die Rechenregel

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(.)g)Y - g(Y(.)f)X\,,$$
$$f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

3.1.4 Definition. Sei $f \in C^\infty(M, N)$ und seien $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dann heißen X und Y *f-assoziiert* wenn

$$df \circ X = Y \circ f\,.$$

In diesem Fall schreiben wir $X \sim_f Y$.

3.1.5 Proposition. *Sei $f \in C^\infty(M, N)$, und seien $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$. Gilt $X \sim_f Y$ und $X' \sim_f Y'$, so folgt $[X, X'] \sim_f [Y, Y']$.*

Beweis. Sei $m \in M, g \in \mathcal{P}_{f(m)}(N)$. Dann gilt

$$df([X, X'](m))([g]/_\sim) = [X, X'](m)([g \circ f]/_\sim) =$$
$$= X(m)\big([X'(.)(g \circ f)]/_\sim\big) - X'(m)\big([X(.)(g \circ f)]/_\sim\big) =$$
$$= X(m)\big([(df \circ X')(.)(g)]/_\sim\big) - X'(m)\big([(df \circ X)(.)(g)]/_\sim\big) =$$
$$= X(m)\big([(Y' \circ f)(.)(g)]/_\sim\big) - X'(m)\big([(Y \circ f)(.)(g)]/_\sim\big) =$$
$$= df(X(m))(Y'(.)(g)) - df(X'(m))(Y(.)(g)) =$$
$$= (Y \circ f)(m)(Y'(.)(g)) - (Y' \circ f)(m)(Y(.)(g) = [Y, Y'](f(m))([g]/_\sim)\,.$$

❑

3.1.6 Korollar. *Sei $f \in C^\infty(M,M)$. Dann ist die Menge*

$$\{X \in \mathfrak{X}(M) : X \sim_f X\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Die Tatsache dass diese Menge ein linearer Teilraum ist, ist klar. Das sie unter Bildung von Lie-Klammern abgeschlossen ist folgt aus der obigen Proposition.

❑

3.1.7 Proposition. *Sei $f \in C^\infty(M,N)$ eine Immersion und sei $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dann existiert $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X \sim_f Y$ genau dann, wenn gilt*

$$Y(f(x)) \in df(T_x(M)),\ x \in M. \tag{3.5}$$

In diesem Fall ist X eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $m \in M$. Wähle eine Karte (V,ψ) von N um $f(m)$ und $U \subseteq M$ offen, $m \in U$, sodaß $f(U)$ die Scheibe von (V,ψ) ist wo die hinteren $d_N - d_M$ Koordinaten verschwinden, vgl. Proposition 1.5.5, wobei $d_N = \dim N$, $d_M = \dim M$. Sei $\pi_1 : \mathbb{R}^{d_N} \to \mathbb{R}^{d_M}$ die Projektion auf die ersten d_M Koordinaten. Nach Korollar 1.4.4,(ii), gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von m in M, sodaß $(U', \pi_1 \circ \psi \circ f)$ eine Karte von M ist. Wir haben also

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi:=\pi_1\circ\psi\circ f"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^{d_M} \supseteq \varphi(U') & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^{d_N} \arrow[l, "\pi_1"]
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\begin{tikzcd}
T(U') \arrow[r, "df"] \arrow[d, "d\varphi"'] & T(V) \arrow[d, "d\psi"] \\
T(\varphi(U')) & T(\psi(V)) \arrow[l, "d\pi_1"]
\end{tikzcd}$$

Sei $F : T(V) \to T(U')$ definiert als $F := (d\varphi)^{-1} \circ d\pi_1 \circ d\psi$, beachte hier dass φ und daher auch $d\varphi$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$df \circ F|_{df(T(U'))} = \mathrm{id}_{df(T(U'))},\ F \circ df = \mathrm{id}_{T(U')}$$

denn für $x \in df(T(U'))$, $x = df(y)$, gilt

$$(df \circ F)(x) = (df \circ (d\varphi)^{-1} \circ \underbrace{d\pi_1 \circ d\psi)(df(y))}_{=d\varphi(y)} = df(y) = x\,.$$

Die zweite Beziehung gilt, da $F \circ df = (d\varphi)^{-1} \circ d\pi_1 \circ d\varphi \circ df = (d\varphi)^{-1} \circ d\varphi = \mathrm{id}_{T(U)}$.

Sei nun $Y \in \mathfrak{X}(N)$ gegeben sodaß (3.5) gilt. Für $x \in M$ existiert dann ein eindeutiges Element $X(x) \in T_x(M)$ mit $(Y \circ f)(x) = df(X(x))$. Also ist durch diese Zuordnung eine Abbildung $X : M \to T(M)$ mit $\pi_M \circ X = \mathrm{id}_M$ definiert.

Sei nun $m \in M$, wähle U', V wie oben und sei F ebenfalls wie oben. Da, nach Definition, $df \circ X = Y \circ f$, folgt

$$X|_{U'} = (F \circ df) \circ X|_{U'} = F \circ Y \circ f|_{U'} \in C^\infty(U', T(U')) .$$

Da m beliebig war, folgt $X \in C^\infty(M, T(M))$, insgesamt also $X \in \mathcal{X}(M)$. Klarerweise ist $X \sim_f Y$.

Sei nun umgekehrt $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X \sim_f Y$ gegeben, dann folgt wegen $df \circ X = Y \circ f$ dass für jedes $x \in M$ gilt $(Y \circ f)(x) \in df(T_x(M))$. Da für jedes $x \in M$ die Abbildung $df|_{T_x(M)}$ injektiv ist, ist X durch die Forderung $df \circ X = Y \circ f$ eindeutig festgelegt.

❑

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $(a,b) \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $s \in C^\infty((a,b), M)$ heißt eine *Kurve* auf M. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne mit $D_x \in T_x(\mathbb{R})$ die Derivation $D_x([f]/\sim) := \frac{df}{dt}(x)$. Ist $s : (a,b) \to M$ eine Kurve und $x \in (a,b)$, so heißt $ds(D_x) \in T_{s(x)}(M)$ der *Tangentialvektor* von s bei x. Man schreibt auch $\dot{s}(x)$ für den Tangentialvektor.

3.1.8 Definition. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s : (a,b) \to M$ eine Kurve. Dann heißt s *Integralkurve von* X, wenn

$$\dot{s}(x) = X(s(x)),\ x \in (a,b) .$$

3.1.9 Bemerkung. Seien $s_1 : (\alpha_1, \beta_1) \to M, s_2 : (\alpha_2, \beta_2) \to M$ zwei Kurven und gelte für ein Intervall (α', β') dass $s_1|_{(\alpha',\beta')} = s_2|_{(\alpha',\beta')}$. Dann ist $\dot{s}_1(t) = \dot{s}_2(t)$ für jedes $t \in (\alpha', \beta')$. Denn die Inklusion $\iota : (\alpha', \beta') \to (\alpha_1, \beta_1)$ hat die Eigenschaft dass $d\iota$ das Element D_t aus $T_t((\alpha', \beta'))$ auf das gleiche Element $D_t \in T_t((\alpha_1, \beta_1))$ abbildet. Also folgt für $t \in (\alpha', \beta')$ das

$$d(s_1|_{(\alpha',\beta')})(D_t) = (ds_1 \circ d\iota)(D_t) = ds_1(D_t) .$$

Genauso für s_2.

3.1.10 Lemma. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$, (U, φ) eine Karte, und $s : (a,b) \to M$ eine Kurve mit $s((a,b)) \subseteq U$. Dann ist s eine Integralkurve von X genau dann, wenn die Funktion $G := \varphi \circ s : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems ($G_i := \pi_i \circ G$, $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$)*

$$\frac{dG_i}{dt}(u) = (X \circ \varphi^{-1})(G(u))(\varphi_i),\ i = 1, \dots, n, \tag{3.6}$$

ist.

Beweis. Die Elemente $\underline{(d\varphi_i)_m}$ sind eine Basis von $T_m(M)^*$. Also gilt $\dot{s}(x) = X(s(x))$ genau dann, wenn $\underline{(d\varphi_i)_m}(\dot{s}(x)) = \underline{(d\varphi_i)_m}(X(s(x)))$. Nun ist für $u \in (a,b)$

$$(X \circ \varphi^{-1})(G(u))(\varphi_i) = (X \circ s)(u)(\varphi_i) = X(s(u))(\varphi_i) = \underline{(d\varphi_i)_{s(u)}}(X(s(u))) ,$$

$$\frac{dG_i}{dt}(u) = D_u(G_i) = D_u(\varphi_i \circ s) = ds(D_u)(\varphi_i) = \underline{(d\varphi_i)_{s(u)}}(\dot{s}(u)) .$$

❑

Bemerke dass die Funktionen $y \mapsto (X \circ \varphi^{-1})(y)(\varphi_i)$, $y \in \varphi(U)$, auf der rechten Seite von (3.6) in $C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ sind. Wir benützen den folgenden Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen:

3.1.11 Satz. *Seien $V \subseteq \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $c > 0$. Seien*

$$f_i \in C^\infty\big((-c,c) \times V \times U, \mathbb{R}\big),\ i = 1, \dots, n\,,$$

und betrachte das System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Parametern $b = (b_1, \dots, b_r) \in V$ und Anfangswert $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$:

$$\begin{gathered} \frac{dX_i}{dt} = f_i\big(t, b, X_1(t,b,a), \dots, X_n(t,b,a)\big),\ i = 1, \dots, n, \\ X_i(0,b,a) = a_i,\ i = 1, \dots, n\,. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Dann existiert eine offene Umgebung W von a in U, eine offene Umgebung B von b in V und $\epsilon > 0$, sowie Funktionen $x_i(t,b,a)$, $i = 1, \dots, n$, in $C^\infty((-\epsilon,\epsilon) \times B \times W, \mathbb{R})$ die den Gleichungen (3.7) genügen.

Sind für ein a und ein b die Funktionen $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in (-\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon})$, Lösungen von (3.7), so gilt $\tilde{x}_i(t) = x_i(t,b,a)$, $t \in (-\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}) \cap (-\epsilon, \epsilon)$.

Ist ϵ, B, W so dass für jedes feste $b \in B$ und $a \in W$ Funktionen $x_i(t,b,a) \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon), \mathbb{R})$ existieren die (3.7) erfüllen, so gilt $x_i \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon) \times B \times W, \mathbb{R})$.

3.1.12 Korollar. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und seien $s : (a,b) \to M$, $s' : (a',b') \to M$ zwei Integralkurven von X. Existiert $t_0 \in (a,b) \cap (a',b')$ mit $s(t_0) = s'(t_0)$, so folgt $s(t) = s'(t)$, $t \in (a,b) \cap (a',b')$.*

Beweis. Sei $E := \{t \in (a,b) \cap (a',b') : s(t) = s'(t)\}$, dann ist E abgeschlossen und nicht leer. Sei $t_1 \in E$, und wähle eine Karte (U, φ) um $s(t_1)$. Wähle $\delta > 0$ sodaß $s(t), s'(t) \in U$ für $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$, und $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq (a,b) \cap (a',b')$. Dann sind nach Lemma 3.1.10 die Funktionen $G := \varphi \circ s|_{(t_1-\delta,t_1+\delta)}$ und $G' := \varphi \circ s'|_{(t_1-\delta,t_1+\delta)}$ beide Lösungen von (3.6). Weiters gilt $G(t_1) = \varphi(s(t_1)) = \varphi(s'(t_1)) = G'(t_1)$. Es folgt das $G(t) = G'(t)$, $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Also ist E auch offen und daher gleich $(a,b) \cap (a',b')$.

❑

3.2 Lokale Flüsse

3.2.1 Definition. Ein *lokaler Fluss* Φ auf M ist eine Familie

$$\Phi = \big\{\Phi^\alpha : (\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha) \times V_\alpha \to U_\alpha, \alpha \in A\big\}$$

mit den Eigenschaften

(*i*) $V_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq M$ sind offen, $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$, und $\epsilon_\alpha > 0$.

(*ii*) $\Phi^\alpha \in C^\infty((-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha) \times V_\alpha, U_\alpha)$.

(*iii*) $\Phi^\alpha(0,x) = x$, $x \in V_\alpha$. Es gilt

$$\Phi^\alpha(t_1 + t_2, x) = \Phi^\beta(t_1, \Phi^\alpha(t_2, x))$$

für alle t_1, t_2, x für die beide Seiten definiert sind.

3.2.2 Bemerkung. Die Bedingung (iii) ist äquivalent zu

(iii') $\Phi^\alpha(0,x) = x$, $x \in V_\alpha$. Es gilt

$$\Phi^\alpha(t_1+t_2, x) = \Phi^\alpha(t_1, \Phi^\alpha(t_2,x))$$

für alle $t_1, t_2, t_1+t_2 \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$, $x \in V_\alpha$, $\Phi^\alpha(t_2,x) \in V_\alpha$. Weiters gilt $\Phi^\alpha(t,x) = \Phi^\beta(t,x)$ für alle $t \in (-\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha) \cap (-\epsilon_\beta,\epsilon_\beta)$, $x \in V_\alpha \cap V_\beta$.

Man schreibt auch $\Phi^\alpha(t,x) =: \Phi^\alpha_t(x)$. Dann gilt also

$$\Phi^\alpha_{t_1+t_2} = \Phi^\beta_{t_1} \circ \Phi^\alpha_{t_2},\ \Phi^\alpha_0 = \mathrm{id}\ .$$

Insbesondere ist also für jedes x die Abbildung

$$s^\alpha_x : \begin{cases} (-\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha) & \to & M \\ t & \mapsto & \Phi^\alpha_t(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

in $C^\infty((-\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha), M)$ und $t \mapsto \Phi^\alpha_t(.)$ ist ein "lokaler C^∞-Gruppenhomomorphismus" von $(-\epsilon_\alpha,\epsilon_\alpha)$ in $C^\infty(M,M)$.

3.2.3 Definition. Sei Φ ein lokaler Fluss. Für $p \in M$ wähle $\alpha \in A$ sodaß $p \in V_\alpha$ und setze $X_\Phi(p) := \dot{s}^\alpha_p(0)$. Dann heißt X_Φ der *infinitesimale Erzeuger* von Φ.

Nach Bemerkung 3.2.2 und Bemerkung 3.1.9 ist $X_\Phi : M \to T(M)$ wohldefiniert. Klarerweise gilt $\pi \circ X_\Phi = \mathrm{id}$. Tatsächlich ist $X_\Phi \in \mathfrak{X}(M)$. Dieses werden wir aus dem folgenden Lemma erhalten.

3.2.4 Lemma. *Sei $f \in C^\infty(M \times N, P)$ und $D \in C^\infty(N, T(M))$. Setze $f_n(m) := f(m,n)$ sodaß $f_n \in C^\infty(M,P)$. Dann ist die Abbildung $F : n \mapsto d(f_n)(D(n))$ in $C^\infty(N, T(P))$.*

Beweis. Sei $n \in N$, $p := \pi_P(d(f_n)(D(n))$, $m := \pi_M(D(n))$, und wähle Karten λ, ψ, φ von N, M, P um n, m, p. Nach Bemerkung 3.1.3 genügt es die Behauptung zu zeigen für $D(n) = D_i : [h]/_\sim \mapsto \frac{\partial(h\circ\psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(m))$, $h \in \mathcal{P}_m(M)$, $i = 1, \ldots, \dim M$. Sei $g \in \mathcal{P}_{\varphi(f(m,n))}(\mathbb{R}^{\dim P})$, $x := \psi(m) \in \mathbb{R}^{\dim M}$, $q := \lambda(n) \in \mathbb{R}^{\dim N}$, und setze

$$H(t,u) := \varphi\big(f(\psi^{-1}(t), \lambda^{-1}(u))\big) \in C^\infty(\mathbb{R}^{\dim M} \times \mathbb{R}^{\dim N}, \mathbb{R}^{\dim P})\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (d\varphi \circ d(f_n))(D_i(n))(g) = D_i(n)(g \circ \varphi \circ f_n) = \\ = \frac{\partial(g\circ\varphi\circ f_n \circ \psi^{-1})}{\partial x_i}(\psi(m)) = \frac{\partial(g \circ H(.,q))}{\partial x_i}(\psi(m)) = \\ = \sum_{j=1}^{\dim P} \frac{\partial g}{\partial x_j}(H(\psi(m),q)) \cdot \frac{\partial H_j(.,q)}{\partial x_i}(\psi(m)) \end{aligned}$$

Es folgt das

$$(\tilde{\varphi} \circ F \circ \lambda^{-1})(q) = \Big(H(\psi(m),q); \frac{\partial H_1(.,q)}{\partial x_i}(\psi(m)), \ldots, \frac{\partial H_{\dim P}(.,q)}{\partial x_i}(\psi(m))\Big)$$

Diese Funktion ist in $C^\infty(\mathbb{R}^{\dim N}, \mathbb{R}^{2\dim P})$.

❑

Wendet man dieses Lemma an auf die Funktion $\Phi^\alpha \in C^\infty((-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha) \times V_\alpha, M)$ und $D = D_0$, so folgt das die Abbildung $p \mapsto ds_p^\alpha(D_0) = X_\Phi(p)$ in $C^\infty(V_\alpha, T(M))$ liegt. Da die V_α ganz M überdecken erhalten wir $X_\Phi \in C^\infty(M, T(M))$.

3.2.5 Lemma. *Sei $\Phi = \{\Phi^\alpha : (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha) \times V_\alpha \to U_\alpha, \alpha \in A\}$ ein lokaler Fluss und sei s_x^α die Kurve (3.8). Dann ist s_x^α eine Integralkurve von X_Φ.*

Beweis. Sei $u \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$ und wähle $\beta \in A$ mit $s_x^\alpha(u) \in V_\beta$. Wir berechnen

$$ds_x^\alpha(D_u)([f]/\sim) = D_u([f \circ s_x^\alpha]/\sim) = \frac{d(f \circ s_x^\alpha)}{dt}(u) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ s_x^\alpha)(u+h) - (f \circ s_x^\alpha)(u)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\Phi^\alpha(u+h, x)) - f(\Phi^\alpha(u,x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\Phi^\beta(h, \Phi^\alpha(u,x))) - f(\Phi^\beta(0, \Phi^\alpha(u,x)))}{h} =$$

$$= \frac{d(f \circ s^\beta_{\Phi^\alpha(u,x)})}{dt}(0) = ds^\beta_{s_x^\alpha(u)}(D_0)([f]/\sim) = X(s_x^\alpha(u))([f]/\sim)\,.$$

❑

Wir wollen bemerken dass der gleiche Beweis die folgende Aussage liefert:

3.2.6 Bemerkung. Sei $V \subseteq M$ offen, $\epsilon > 0$, und $\Phi \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times V, M)$ mit $\Phi(0, x) = x$, $x \in V$, und $\Phi(t+s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ wann immer beide Seiten definiert sind. Für $x \in V$ sei

$$s_x : \begin{cases} (-\epsilon, \epsilon) & \to & M \\ t & \mapsto & \Phi(t, x) \end{cases}$$

und

$$X : \begin{cases} V & \to & T(M) \\ x & \mapsto & ds_x(D_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

Dann gilt $ds_x(D_u) = X(s_x(u))$ für alle $u \in (-\epsilon, \epsilon)$ mit $s_x(u) \in V$.

3.2.7 Korollar. *Sind Φ_1, Φ_2 lokale Flüsse und gilt $X_{\Phi_1} = X_{\Phi_2}$, so ist auch $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ein lokaler Fluss.*

Beweis. Seien Φ_1, Φ_2 lokale Flüsse mit $X_{\Phi_1} = X_{\Phi_2} =: X$. Um zu zeigen dass $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ein lokaler Fluss ist, müssen wir nur zeigen dass je zwei $\Phi_1^\alpha, \Phi_2^\beta$ auf gemeinsamen Punkten ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Sei $x \in V_{1,\alpha} \cap V_{2,\beta}$, dann sind $s_{1,x}^\alpha(t) := \Phi_1^\alpha(t, x), t \in (-\epsilon_{1,\alpha}, \epsilon_{1,\alpha})$, $s_{2,x}^\beta(t) := \Phi_2^\beta(t, x), t \in (-\epsilon_{2,\beta}, \epsilon_{2,\beta})$, Integralkurven von X die an der Stelle $t = 0$ überein stimmen, und daher auf ganz $(-\epsilon_{1,\alpha}, \epsilon_{1,\alpha}) \cap (-\epsilon_{2,\beta}, \epsilon_{2,\beta})$ nach Korollar 3.1.12.

❑

Die Menge aller lokalen Flüsse auf M ist mit der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet. Ein lokaler Fluss heißt *maximal*, wenn er bezüglich der Inklusion maximal ist.

3.2.8 Bemerkung. Da offenbar die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von lokalen Flüssen wieder ein lokaler Fluss ist, ist jeder lokale Fluss in (mindestens) einem maximalen lokalen Fluss enthalten.

3.2.9 Bemerkung. Sind Φ_1, Φ_2 lokale Flüsse mit $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$, so folgt $X_{\Phi_1} = X_{\Phi_2}$. Dies ist klar nach der Definition und Wohldefiniertheit des infinitesimalen Erzeugers.

3.2.10 Korollar. *Jeder lokale Fluss ist in genau einem maximalen lokalen Fluss enthalten.*

Beweis. Sei Φ ein lokaler Fluss und Φ_1, Φ_2 maximale lokale Flüsse mit $\Phi \subseteq \Phi_1, \Phi_2$. Dann folgt nach Bemerkung 3.2.9 das $X_{\Phi_1} = X_{\Phi_2}$. Damit ist nach Korollar 3.2.7 auch $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ein lokaler Fluss. Wegen der Maximalität folgt $\Phi_1 = \Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi_2$.

❑

3.2.11 Satz. *Die Abbildung $\Phi \mapsto X_\Phi$ ist eine Bijektion von der Menge aller maximalen lokalen Flüsse auf $\mathfrak{X}(M)$.*

Beweis. Die betrachtete Abbildung ist injektiv, denn sind Φ_1, Φ_2 maximale lokale Flüsse mit $X_{\Phi_1} = X_{\Phi_2}$, so folgt wie in Korollar 3.2.10 das $\Phi_1 = \Phi_2$. Wir müssen also zeigen, dass sie surjektiv ist. Wegen Bemerkung 3.2.8 genügt es dazu zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ einen lokalen Fluss Φ mit $X_\Phi = X$ zu konstruieren.

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben. Sei $m \in M$ und wähle eine Karte (U, φ) von M um m. Setze $(\varphi_i := \pi_i \circ \varphi)$

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi(U) & \to & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (X \circ \varphi^{-1})(y)(\varphi_i) \end{array} \right.$$

Dann ist $f_i \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$. Nach Satz 3.1.11 existieren $\epsilon > 0$, eine offene Umgebung W von $\varphi(m)$, und Funktionen $H_i \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times W, \mathbb{R})$ mit $(H = (H_1, \dots, H_n))$

$$\begin{gathered} \frac{dH_i(\cdot, a)}{dt}(u) = f_i(H(u,a)),\ i = 1, \dots, n, u \in (-\epsilon, \epsilon), a \in W, \\ H(0, a) = a,\ a \in W\,. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Beachte dass, da die rechte Seite von (3.10) definiert sein muss, $H(u, a) \in \varphi(U)$ für alle $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, $a \in W$, gilt. Definiere $\Phi^m := \varphi^{-1} \circ H \circ (\mathrm{id} \times \varphi)$, dann ist $\Phi^m \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times \varphi^{-1}(W), M)$. Offenbar ist $\Phi^m(0, x) = x$, $x \in \varphi^{-1}(W)$.

Wir zeigen, dass für jedes $x \in \varphi^{-1}(W)$ die Kurve $s_x^m(t) := \Phi^m(t, x)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, eine Integralkurve von X ist: Dazu betrachten wir die Karte (U, φ), dann gilt $s_x^m((-\epsilon, \epsilon)) \subseteq U$, und es gilt

$$(\varphi \circ s_x^m)(t) = \varphi(\Phi^m(t, x)) = H(t, \varphi(x))\,.$$

Nach Definition von H ist das Differentialgleichungssystem (3.6) erfüllt, und nach Lemma 3.1.10 daher $s_x^m : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine Integralkurve von X.

Wir zeigen, dass für $t, s \in (-\epsilon, \epsilon), x \in \varphi^{-1}(W)$, mit $t+s \in (-\epsilon, \epsilon), \Phi^m(s, x) \in \varphi^{-1}(W)$, die Beziehung $\Phi^m(t + s, x) = \Phi^m(t, \Phi^m(s, x))$ gilt: Dazu betrachte die Kurven $s(u) := \Phi^m(u + s, x)$, $s'(u) := \Phi^m(u, \Phi^m(s, x))$, definiert auf $I :=$

$(-s-\epsilon, -s+\epsilon)\cap(-\epsilon,\epsilon)$. Beachte, dass I ein Intervall ist und das $0\in I$. Nach dem letzten Absatz ist s' eine Integralkurve von X. Nun gilt

$$(\varphi\circ s)(t) = \varphi(\Phi^m(t+s,x)) = H(t+s,\varphi(x))\,,$$

und damit

$$\frac{d(\varphi_i\circ s)}{dt}(u) = \frac{dH_i(t+s,\varphi(x))}{dt}(u) = \frac{dH_i(t,\varphi(x))}{dt}(u+s) =$$

$$= f_i(H(u+s,\varphi(x))) = f_i((\varphi\circ s)(u))\,.$$

Nach Lemma 3.1.10 ist s eine Integralkurve von X. Wegen

$$s(0) = \Phi^m(s,x) = \Phi^m(0,\Phi^m(s,x)) = s'(0)$$

folgt $s=s'$ auf I und daher auch $s(t)=s'(t)$ nach Korollar 3.1.12.

Für $m\in M$ sei ϵ_m das oben konstruierte $\epsilon>0$, $V_m := \varphi^{-1}(W), U_m := M$, und $\Phi^m \in C^\infty((-\epsilon_m,\epsilon_m)\times V_m, U_m)$ wie oben konstruiert. Wegen $m\in V_m$ gilt $\bigcup_{m\in M} V_m = M$. Um zu zeigen das $\Phi := \{\Phi^m : m\in M\}$ ein lokaler Fluss ist, müssen wir zeigen dass für $m,m'\in M$ die Abbildungen $\Phi^m,\Phi^{m'}$ auf gemeinsamen Punkten ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Für $x\in V_m\cap V_{m'}$ ist $s_x^m : (-\epsilon_m,\epsilon_m)\to M$ und auch $s_x^{m'} : (-\epsilon_{m'},\epsilon_{m'})\to M$ eine Integralkurve von X und es gilt $s_x^m(0) = m = s_x^{m'}(0)$. Nach Korollar 3.1.12 folgt $s_x^m(t) = s_x^{m'}(t)$, $t\in(-\epsilon_m,\epsilon_m)\cap(-\epsilon_{m'},\epsilon_{m'})$.

Sei $m\in M$, dann gilt, da s_m^m eine Integralkurve von X ist, $\dot s_m^m(t) = X(s_m^m(t))$, $t\in(-\epsilon_m,\epsilon_m)$. Speziell für $t=0$ folgt

$$X_\Phi(m) = \dot s_m^m(0) = X(s_m^m(0)) = X(m)\,.$$

❑

Seien $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ und bezeichne mit Φ einen lokalen Fluss mit $X=X_\Phi$. Existiert an einer Stelle $m\in M$ der Grenzwert (α sodaß $m\in V_\alpha$, $\Phi_t^\alpha := \Phi^\alpha(t,.)$)

$$\mathcal{L}_X(Y)(m) := \lim_{t\to 0}\frac{d\Phi^\alpha_{-t}(Y(\Phi^\alpha(t,m))) - Y(m)}{t} \in T_m(M)\,,$$

so heißt er die *Lie-Ableitung* von Y nach X. Der obige Limes versteht sich bezüglich irgendeiner Norm auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $T_m(M)$. Beachte dass Konvergenz in $T_m(M)$ gleich schwacher Konvergenz ist, d.h. dass für $Z_n\in T_m(M), n\in\mathbb{N}$, gilt $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} Z_n(f) = Z(f)$ für alle $f\in\mathcal{P}_m$.

3.2.12 Satz. *Die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X(Y)$ existiert für jedes $m\in M$ und es gilt $\mathcal{L}_X(Y)(m) = [X,Y](m)$.*

Zum Beweis verwenden wir das folgende Lemma:

3.2.13 Lemma. *Sei $m\in M$ und $f\in\mathcal{P}_m$. Sei Φ ein lokaler Fluss und sei α so dass $m\in V_\alpha$. Dann existiert $\epsilon>0$, $W\subseteq M$ offen mit $m\in W$, und $g\in C^\infty((-\epsilon,\epsilon)\times W,\mathbb{R})$ sodaß* (*i*) $f(\Phi^\alpha(-t,x)) = f(x) - tg(t,x)$, $t \in (-\epsilon,\epsilon), x \in W$,

(*ii*) $X_\Phi(x)(f) = g(0,x)$, $x \in W$.

Beweis. Betrachte die Funktion $h(t,x) := f(\Phi^\alpha(-t,x)) - f(x)$, $t \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$, $x \in V_\alpha \cap \operatorname{dom} f$. Dann ist $h \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon) \times W)$ wo $\epsilon := \epsilon_\alpha$, $W := V_\alpha \cap \operatorname{dom} f$ und erfüllt $h(0,x) = 0$. Definiere $g \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon)\times W)$ als

$$g(s,x) := -\int_0^1 \frac{\partial h(t,x)}{\partial t}(su)\, du,\ \ s \in (-\epsilon,\epsilon), x \in W\,.$$

Dann gilt

$$-sg(s,x) = \int_0^1 \frac{\partial h(t,x)}{\partial t}(su)s\, du = \int_0^s \frac{\partial h(t,x)}{\partial t}(v)\, dv =$$

$$= h(s,x) - h(0,x) = h(s,x) = f(\Phi^\alpha(-s,x)) - f(x)\,.$$

Weiters ist damit auch

$$g(0,x) = \lim_{s\to 0} \frac{f(\Phi^\alpha(-s,x)) - f(x)}{-s} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\Phi^\alpha(t,x)) - f(\Phi^\alpha(0,x))}{t} = \frac{d(f \circ s_x^\alpha)}{dt}(0) = X_\Phi(x)(f)\,.$$

❑

Beweis (von Satz 3.2.12). Sei $m \in M, f \in \mathcal{P}_m$, und wähle g wie in Lemma 3.2.13. Sei Φ ein lokaler Fluss mit $X = X_\Phi$. Nach Lemma 3.2.4 und Beispiel 1.3.17 ist die Abbildung ($g_t(x) := g(t,x)$)

$$t \mapsto dg_t(Y(\Phi^\alpha(t,x)))(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = Y(\Phi^\alpha(t,x))(g_t)$$

in $C^\infty((-\epsilon,\epsilon),\mathbb{R})$. Also gilt ($D_X(f)(x) = X(x)(f)$, vgl. Satz 3.1.2)

$$\lim_{t\to 0} Y(\Phi^\alpha(t,x))(g_t) = Y(x)(D_X(f)) = D_Y(D_X(f))(x)$$

Weiters gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{D_Y(f)(\Phi^\alpha(t,x)) - D_Y(f)(x)}{t} = \frac{d(D_Y(f)\circ s_x^\alpha)}{dt}(0) =$$

$$= X(x)(D_Y(f)) = D_X(D_Y(f))(x)\,.$$

Gemeinsam folgt

$$[X,Y](x)(f) = D_X(D_Y(f))(x) - D_Y(D_X f)(x) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{D_Y(f)(\Phi^\alpha(t,x)) - D_Y(f)(x)}{t} - \lim_{t\to 0} Y(\Phi^\alpha(t,x))(g_t) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{Y(\Phi^\alpha(t,x))(f - tg_t) - Y(x)(f)}{t}$$

Nun ist $f - tg_t = f \circ \Phi^\alpha_{-t}$, und daher

$$Y(\Phi^\alpha(t,x))(f - tg_t) = d\Phi^\alpha_{-t}(Y(\Phi^\alpha(t,x)))(f)\,,$$

also

$$\frac{Y(\Phi^\alpha(t,x))(f - tg_t) - Y(x)(f)}{t} = \frac{d\Phi^\alpha_{-t}(Y(\Phi^\alpha(t,x))) - Y(x)}{t}(f)\,.$$

❑

3.3 Globale und vertauschbare Flüsse

3.3.1 Definition. Ein *globaler Fluss* ist eine Abbildung $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ sodaß ($\Phi_t(x) := \Phi(t,x)$)

(*i*) $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$.

(*ii*) $\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *vollständig*, wenn der maximale lokale Fluss der X als infinitesimalen Erzeuger hat einen globalen Fluss enthält.

3.3.2 Bemerkung. Ist $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ ein globaler Fluss, so ist $\{\Phi\}$ ein lokaler Fluss. Der maximale lokale Fluss der $\{\Phi\}$ enthält ist

$$\big\{\Phi|_{(-\epsilon,\epsilon)\times V} : \epsilon > 0, V \subseteq M \text{ offen}\big\}\,.$$

Den infinitesimalen Erzeuger des lokalen Flusses $\{\Phi\}$ bezeichnet man auch als den infinitesimalen Erzeuger des globalen Flusses Φ.

3.3.3 Proposition. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Enthält der maximale lokale Fluss von X ein Element der Gestalt*

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M\,,$$

dann ist X vollständig.

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$, dann wähle $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ sodaß $t = r + k\frac{\epsilon}{2}$. Definiere

$$\tilde{\Phi}_t(x) := \begin{cases} \underbrace{\Phi_{\frac{\epsilon}{2}} \circ \ldots \circ \Phi_{\frac{\epsilon}{2}}}_{k\text{-mal}} \circ \Phi_r(x) & , \ k > 0 \\ \underbrace{\Phi_{-\frac{\epsilon}{2}} \circ \ldots \circ \Phi_{-\frac{\epsilon}{2}}}_{|k|\text{-mal}} \circ \Phi_r(x) & , \ k < 0 \\ \Phi_r(x) & , \ k = 0 \end{cases}$$

Wir müssen zeigen dass $\tilde{\Phi}_t$ wohldefiniert ist. Dazu sei $t \in \mathbb{R}$ gegeben und sei $t = r + k\frac{\epsilon}{2} = s + q\frac{\epsilon}{2}$ mit $k, q \in \mathbb{Z}$ und $r, s \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$. Betrachte den Fall $t > 0$, dann sind $k, q \geq 0$ und wir haben also zu zeigen dass $(\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^k \circ \Phi_r(x) = (\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^q \circ \Phi_s(x)$. Wegen $(k - q)\frac{\epsilon}{2} = s - r \in (-\epsilon, \epsilon)$ folgt $k - q \in \{-1, 0, 1\}$. Ist $k = q$, so folgt

$r = s$ und damit die Behauptung. Sei $k - q = 1$, dann ist $s - r = \frac{\epsilon}{2}$ und wir haben

$$(\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^q \circ \Phi_s(x) = (\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^q \circ \Phi_{r+\frac{\epsilon}{2}}(x) = (\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^q \circ \Phi_{\frac{\epsilon}{2}} \circ \Phi_r(x) = (\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^k \circ \Phi_r(x).$$

Im Fall $k - q = -1$ geht man genauso vor.

Im Fall $t = 0$ folgt aus $t = k\frac{\epsilon}{2} + r$ das auch $k = 0$ ist, und daher ist nichts zu zeigen. Der Fall $t < 0$ wird genauso behandelt wie der Fall $t > 0$.

Definiere nun $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times M \to M$ durch $\tilde{\Phi}(t, x) := \tilde{\Phi}_t(x)$. Um zu zeigen dass $\tilde{\Phi} \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ ist, sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ gegeben. Wähle k, r sodaß $t_0 = k\frac{\epsilon}{2} + r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$. Dann ist für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, δ hinreichend klein, sicher $t - t_0 + r \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ und daher $t = k\frac{\epsilon}{2} + (t - t_0 + r)$ eine für die Definition von $\tilde{\Phi}_t$ zulässige Zerlegung. Also ist

$$\tilde{\Phi}(t, x) = (\Phi_{\frac{\epsilon}{2}})^k \big(\Phi(t - t_0 + r, x)\big), \; x \in M, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

und, da $\Phi_{\frac{\epsilon}{2}} \in C^\infty(M, M)$, also in $C^\infty((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times M, M)$. Da t_0 beliebig war folgt $\tilde{\Phi} \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$. Klarerweise ist $\tilde{\Phi}$ ein globaler Fluss.

Es gilt für alle $t \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ das $\tilde{\Phi}(t, x) = \Phi(t, x)$, $x \in M$. Also ist für solche t auch $s_x^\Phi(t) = s_x^{\tilde{\Phi}}(t)$ und daher $\dot{s}_x^\Phi(0) = \dot{s}_x^{\tilde{\Phi}}(0)$. Wir sehen dass der infinitesimale Erzeuger von $\tilde{\Phi}$ gleich X ist.

❑

3.3.4 Korollar. *Hat das Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ kompakten Träger, so ist X vollständig.*

Beweis. Sei $\Phi = \{\Phi^\alpha : (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha) \times V_\alpha \to U_\alpha : \alpha \in A\}$ ein lokaler Fluss mit $X_\Phi = X$. Sei $x \in M \setminus \operatorname{supp} X$, dann ist die Kurve $s(t) := x$, $t \in \mathbb{R}$, eine Integralkurve von X. Denn es gilt

$$\dot{s}(t)(f) = ds(D_t)(f) = \frac{d(f \circ s)}{dt}(t) = 0 = X(x) = X(s(t)).$$

Da nach Lemma 3.2.5 für $\alpha \in A$ mit $x \in V_\alpha$ auch die Kurve $s_x^\alpha(t) := \Phi^\alpha(t)$, $t \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$, eine Integralkurve von X ist, und $s_x^\alpha(0) = x = s(0)$, folgt nach Korollar 3.1.12 das $\Phi^\alpha(t, x) = s(t) = x$, $t \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$.

Wähle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ sodaß $V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n} \supseteq \operatorname{supp} X$. Setze $\Phi^0 \in C^\infty(\mathbb{R} \times (\operatorname{supp} X)^c, M)$, $\Phi^0(t, x) := x$, und definiere $\delta := \min\{\epsilon_{\alpha_1}, \ldots, \epsilon_{\alpha_n}\}$,

$$\tilde{\Phi} : \begin{cases} (-\delta, \delta) \times M & \to & M \\ (t, x) & \mapsto & \Phi^i(t, x) \end{cases}$$

wobei $i = \alpha_j$ falls $x \in V_{\alpha_j}$ bzw. $i = 0$ falls $x \in (\operatorname{supp} X)^c$. Da die Φ^α auf gemeinsamen Punkten ihres Definitionsbereiches übereinstimmen und ausserhalb von $\operatorname{supp} X$ mit Φ^0 übereinstimmen, ist $\tilde{\Phi}$ wohldefiniert und in $C^\infty((-\delta, \delta) \times M, M)$. Weiters ist $\{\tilde{\Phi}\}$ ein lokaler Fluss und hat den gleichen infinitesimalen Erzeuger wie Φ, d.h. $X_{\{\tilde{\Phi}\}} = X$. Nach Proposition 3.3.3 ist X vollständig.

❑

3.3.5 Bemerkung. Der gleiche Beweis zeigt die folgende Aussage: Enthält der lokale Fluss von X Elemente Φ^α, $\alpha \in A' \subseteq A$, mit $\bigcup_{\alpha \in A'} V_\alpha = M$ und $\inf\{\epsilon_\alpha : \alpha \in A'\} > 0$, dann ist X vollständig.

3.3.6 Lemma. *Sei $\gamma > 0$, $W \subseteq M$ offen, $\Phi : (-\gamma, \gamma) \times W \to M$, $\Phi(0, x) = x$, und sei für jedes feste $x \in W$ die Kurve $s_x(t) := \Phi(t, x)$, $t \in (-\gamma, \gamma)$, eine Integralkurve von X. Dann ist $\Phi \in C^\infty((-\gamma, \gamma) \times W)$.*

Beweis. Sei $x_0 \in W$, $t_0 \in (-\gamma, \gamma)$, oBdA $t_0 > 0$, gegeben. Sei $\{\Phi^\alpha : \alpha \in A\}$ ein lokaler Fluss von X. Die Vereinigung aller Komponenten aller Mengen $\{t \in (-\gamma, \gamma) : s_{x_0}(t) \in V_\alpha\}$ ist gleich $(-\gamma, \gamma)$ und daher eine Überdeckung von $[0, t_0]$. Es gibt also endlich viele solche Komponenten V_{α_i, j_i}, $i = 1, \dots, n$, die $[0, t_0]$ überdecken. Diese seien so angeordnet dass es Punkte $t_2 < t_3 < \dots < t_n$ gibt sodaß

$$0 = t_1 \in V_{\alpha_1, j_1}, \ t_l \in V_{\alpha_{l-1} j_{l-1}}, \ l = 2, \dots, n,$$
$$t_{n+1} := t_0 \in V_{\alpha_n, j_n}.$$

Durch weiteres zerteilen der Intervalle $[t_l, t_{l+1}]$ und entsprechender Einfügung von Wiederholungen von V_{α_l, j_l}, können wir erreichen dass stets $t_{l+1} - t_l < \min\{\gamma, \epsilon_{\alpha_1}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\} =: \delta$.

Mittels Induktion sieht man dass die Abbildung $\Phi^{\alpha_n}_{t_0 - t_n} \circ \Phi^{\alpha_{n-1}}_{t_n - t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{\alpha_1}_{t_1}$ auf einer (möglicherweise leeren) offenen Menge definiert ist. Ebenfalls sieht man induktiv dass jeder Punkt dieses Definitionsbereiches eine offene Umgebung W' besitzt sodaß

$$\Phi^{\alpha_1}_t(x) \in V_{\alpha_1}, t \in [0, t_1], \ \Phi^{\alpha_2}_t \circ \Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x) \in V_{\alpha_2}, t \in [0, t_2 - t_1], \dots$$
$$\dots, \Phi^{\alpha_n}_t \circ \Phi^{\alpha_{n-1}}_{t_n - t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x) \in V_{\alpha_n}, \ t \in [0, t_{0-t_n}], \ x \in W'.$$

Nach unserer Wahl von t_l und α_l ist x_0 im Definitionsbereich dieser Abbildung. Sei x in der entsprechenden Umgebung W'. Betrachte die Kurve $t \mapsto \Phi^{\alpha_1}_t(x)$. Das ist eine Integralkurve von X durch x, also ist $s_x(t) = \Phi^{\alpha_1}_t(x)$, $t \in (-\epsilon_{\alpha_1}, \epsilon_{\alpha_1}) \cap (-\gamma, \gamma)$. Insbesondere ist $s_x(t_1) = \Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x)$. Die Kurve $t \mapsto \Phi^{\alpha_2}_{t-t_1}(\Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x))$, $t - t_1 \in (-\epsilon_{\alpha_2}, \epsilon_{\alpha_2})$ ist eine Integralkurve von X durch $\Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x)$, also ist $s_x(t) = \Phi^{\alpha_2}_{t-t_1}(\Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x))$, $t - t_1 \in (-\epsilon_{\alpha_2}, \epsilon_{\alpha_2}) \cap (-\gamma, \gamma)$. Verfährt man induktiv weiter, so erhält man schliesslich

$$s_x(t) = \Phi^{\alpha_n}_{t-t_n}\Big(\Phi^{\alpha_{n-1}}_{t_n - t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{\alpha_1}_{t_1}(x)\Big), \ t - t_n \in (-\epsilon_{\alpha_n}, \epsilon_{\alpha_n}) \cap (-\gamma, \gamma).$$

Wir haben also insbesondere

$$\Phi(t, x) = \Big(\Phi^{\alpha_n}_{t-t_n} \circ \Phi^{\alpha_{n-1}}_{t_n - t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{\alpha_1}_{t_1}\Big), \ x \in W', |t - t_n| < \delta,$$

und $|t_0 - t_n| < \delta$, also ist $\Phi(t, x)$ lokal bei (t_0, x_0) eine C^∞-Abbildung.

❑

3.3.7 Korollar. *Es existiere $\epsilon > 0$ sodaß gilt: für jedes $x \in M$ existiert eine Kurve $s_x : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $s_x(0) = x$, die eine Integralkurve von X ist. Dann ist X vollständig.*

Beweis. Setze $\Phi(t, x) := s_x(t)$, dann ist $\Phi \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times M)$. Da für ein $x \in M$ und $u \in (-\epsilon, \epsilon)$ sowohl $s_x(t + u)$ als auch $s_{s_x(u)}(t)$ Integralkurven von X sind die an der Stelle $t = 0$ übereinstimmen sind sie auf ihrem gesamten Definitionsbereich gleich. D.h. es gilt $\Phi(t + u, x) = \Phi(t, \Phi(u, x))$, also ist $\{\Phi\}$ ein lokaler Fluss.

❑

3.3.8 Definition. Seien Φ, Ψ zwei lokale Flüsse. Dann heißen Φ und Ψ *vertauschbar*, wenn (α, β sodaß $x \in V_\alpha \cap V_\beta$)

$$\Phi_t^\alpha(\Psi_s^\beta(x)) = \Psi_s^\beta(\Phi_t^\alpha(x))$$

gilt, für alle t, s hinreichend klein.

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann heißen x und Y *vertauschbar*, wenn $[X, Y] = 0$ ist.

3.3.9 Proposition. *Seien Φ und Ψ zwei lokale Flüsse. Dann sind Φ und Ψ vertauschbar genau dann, wenn X_Φ und X_Ψ vertauschbar sind.*

Beweis. Seien Φ und Ψ vertauschbar. Für $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ und t, u hinreichend klein gilt

$$\Phi^\alpha(t, \Psi^\beta(u, x)) = \Psi^\beta(u, \Phi^\alpha(t, x)),$$

d.h. $(\Phi_t^\alpha \circ s_x^\Psi)(u) = s^\Psi_{\Phi_\alpha(t,x)}(u)$ und daher

$$d\Phi_t^\alpha(X_\Psi(x)) = d\Phi_t^\alpha \circ ds_x^\Psi(D_0) = d(\Phi_t^\alpha \circ s_x^\Psi)(D_0) =$$

$$= ds^\Psi_{\Phi^\alpha(t,x)}(D_0) = X_\Psi(\Phi^\alpha(t, x)).$$

Also erhalten wir

$$d\Phi_{-t}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(t, x))) = X_\Psi(x)$$

für alle hinreichend kleinen t, und daher $[X_\Phi, X_\Psi] = \mathcal{L}_{X_\Phi}(X_\Psi) = 0$.

Umgekehrt sei angenommen dass $[X_\Phi, X_\Psi] = 0$. Sei $x \in M$ und α, β so dass $x \in V_\alpha \cap V_\beta$. Sei $\epsilon > 0$ so dass

$$\Psi^\beta(s, x) \in V_\alpha,\ \Phi^\alpha(t, x) \in V_\beta,\ \Phi^\alpha(t, \Psi^\beta(s, x)) \in V_\alpha, t, s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Für $|s| < \epsilon$ fest setze $y := \Psi^\beta(s, x)$ und betrachte die Abbildung $g : (-\epsilon, \epsilon) \to T_y(M)$ die definiert ist als

$$g(t) := d\Phi_{-t}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(t, y))).$$

Wir berechnen (für h hinreichend klein sodaß $\Phi^\alpha(t-h, y) \in V_\alpha, t+h \in (-\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha)$)

$$g(t + h) - g(t) = d\Phi_{-t-h}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(t + h, y)))-$$

$$-d\Phi_{-t}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(t, y)))$$

Wähle eine Umgebung $W \subseteq V_\alpha$ von $\Phi^\alpha(t, y)$ und $h_0 > 0$ sodaß für $|h| < h_0, z \in W$, stets $\Phi^\alpha(-h, z) \in V_\alpha$. Das geht denn $\Phi^\alpha(0, \Phi^\alpha(t, y)) = \Phi^\alpha(t, y) \in V_\alpha$. Weiters sei h_0 so klein dass für $|h| < h_0$ stets $\Phi^\alpha(t + h, y) \in W$. Dann gilt für $z \in W$

$$(\Phi_{-t}^\alpha \circ \Phi_{-h}^\alpha)(z) = \Phi^\alpha(-t, \Phi^\alpha(-h, z)) = \Phi^\alpha(-t - h, z) = \Phi_{-t-h}^\alpha(z).$$

und es folgt

$$d\Phi_{-t-h}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(t + h, y))) = d\Phi_{-t}^\alpha \circ d\Phi_{-h}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(h, \Phi^\alpha(t, y)))).$$

Also ist

$$g(t + h) - g(t) = d\Phi_{-t}^\alpha\Big[d\Phi_{-h}^\alpha(X_\Psi(\Phi^\alpha(h, \Phi^\alpha(t, y)))) - X_\Psi(\Phi^\alpha(t, y))\Big]$$

Da $(z := \Phi^\alpha(t,y))$

$$\lim_{n\to 0} \frac{1}{h}\Big[d\Phi^\alpha_{-h}(X_\Psi(\Phi^\alpha(h,z))) - X_\Psi(z)\Big] = \mathcal{L}_{X_\Phi}(X_\Psi)(z) = 0$$

und $d\Phi^\alpha_{-t} : T_z(M) \to T_y(M)$ als lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen stetig ist, folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = 0\,.$$

Es folgt dass $g(t)$ konstant ist, also

$$g(t) = g(0) = X_\Psi(y),\ \ t \in (-\epsilon,\epsilon)\,,$$

d.h. es gilt

$$d\Phi^\alpha_t(X_\Psi(\Psi^\beta(s,x))) = X_\Psi(\Phi^\alpha(t,\Psi^\beta(s,x))),\ \ t,s \in (-\epsilon,\epsilon)\,.$$

Nun ist

$$d\Phi^\alpha_t(X_\Psi(\Psi^\beta(s,x))) = d\Phi^\alpha_t(ds^\Psi_x(D_s)) = d(\Phi^\alpha_t \circ s^\Psi_x)(D_s)\,,$$

also ist $\Phi^\alpha_t \circ s^\Psi_x|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ eine Integralkurve von X_Ψ. Sie erfüllt $\Phi^\alpha_t \circ s^\Psi_x(0) = \Phi^\alpha(t,x)$. Die Kurve $s^\Psi_{\Phi^\alpha(t,x)}|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ hat die gleichen Eigenschaften, also ist für $s,t \in (-\epsilon,\epsilon)$

$$\Psi^\beta(s,\Phi^\alpha(t,x)) = s^\Psi_{\Phi^\alpha(t,x)}(s) = (\Phi^\alpha_t \circ S^\Psi_x)(s) = \Phi^\alpha(t,\Psi^\beta(s,x))\,.$$

❑

3.3.10 Bemerkung. Wie man aus dem zweiten Teil des Beweises von Proposition 3.3.9 sieht, gilt die folgende Aussage: Seien X, Y zwei vollständige Vektorfelder, Φ^X, Φ^Y ihre globalen Flüsse. Dann sind X und Y vertauschbar genau dann, wenn

$$\Phi^X_t \circ \Phi^Y_s = \Phi^Y_s \circ \Phi^X_t\,,\ \ s,t \in \mathbb{R}\,.$$

3.3.11 Beispiel. Sei (U,φ) eine Karte und bezeichne mit $X_i^\varphi \in \mathfrak{X}(U)$ die Vektorfelder

$$X_i^\varphi(p)(f) := \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = d\varphi^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}\Big)$$

vgl. Bemerkung 3.1.3. Dann ist also $X_i^\varphi \sim_\varphi \frac{\partial}{\partial x_i}$ und daher auch $[X_i^\varphi, X^{\varphi_j}] \sim_\varphi [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]$. Nach dem Satz von Schwarz gilt stets $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, und da φ ein Diffeomorphismus ist, sind auch die X_i^φ vertauschbare Vektorfelder.

3.3.12 Proposition. *Sei $x \in M$, $U \subseteq M$ offen mit $x \in U$, und seien $X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}(U)$ sodaß $\{X_1(x),\dots,X_k(x)\} \subseteq T_x(M)$ linear unabhängig ist. Sind die X_i paarweise vertauschbar, so existiert eine Karte (W,φ) um $f\,x$ sodaß*

$$X_i|_W = X_i^\varphi,\ \ i = 1,\dots,k\,.$$

Beweis. Sei (V,ψ) eine Karte von M um x. Dann ist $\{X_i^\psi(y) : i = 1,\dots,n\}$ sodaß

$$\{X_1(x),\dots,X_k(x)\} \cup \{X^\psi_{i_{k+1}}(x),\dots,X^\psi_{i_n}(x)\}$$

eine Basis von $T_x(M)$ ist. ObdA sei $i_l = l$, $l = k+1,\dots,n$.

Seien $\Phi^1,\dots,\Phi^k$ Elemente der lokalen Flüsse von $X_1,\dots,X_k$ die bei x definiert sind. Diese sind vertauschbar, also existiert $\epsilon > 0$ und $V' \subseteq V$ offen, $x \in V'$, sodaß die Ausdrücke

$$\Phi^{\sigma(1)}_{t_{\sigma(1)}} \circ \dots \circ \Phi^{\sigma(k)}_{t_{\sigma(k)}}(y)$$

für alle $|t_i| < \epsilon$, $y \in V'$, σ Permutation von $\{1,\dots,k\}$, definiert und gleich sind. Wähle $\epsilon' > 0$ sodaß $\epsilon' \leq \epsilon$ und dass der Würfel $\psi(x) + (-\epsilon',\epsilon')^n$ ganz in $\psi(V')$ liegt. Definiere $\theta : \psi(x) + (-\epsilon',\epsilon')^n \to M$ als $(p = (p_1,\dots,p_n))$

$$\theta(p) := \Phi^1_{p_1-\psi_1(x)} \circ \dots \circ \Phi^k_{p_k-\psi_k(x)} \circ \psi^{-1}(\psi_1(x),\dots,\psi_k(x),p_{k+1},\dots,p_n)$$

Dann ist θ eine C^∞-Abbildung. Es gilt $\theta(\psi(x)) = x$. Sei $i \in \{k+1,\dots,n\}$, dann gilt $\theta(\psi(x)+h\vec{e}_i) = \psi^{-1}(\psi(x)+h\vec{e}_i)$ wobei $\vec{e}_i$ der i-te kanonische Einheitsvektor ist. Also folgt

$$d\theta\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\psi(x)}\Big)(f) = \frac{\partial(f\circ\theta)}{\partial t_i}(\psi(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\theta)(\psi(x)+h\vec{e}_i) - (f\circ\theta)(\psi(x))}{h} =$$

$$= \lim_{n\to 0}\frac{(f\circ\psi^{-1})(\psi(x)+h\vec{e}_i) - (f\circ\psi^{-1})(\psi(x))}{h} = d\psi^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\psi(x)}\Big)(f)\,,$$

d.h. $d\theta\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\psi(x)}\Big) = X_i^\psi(\psi(x))$, $i = k+1,\dots,n$.

Sei $i \in \{1,\dots,k\}$ und $p \in \psi(x)+(-\epsilon',\epsilon')^n$. Dann gilt für h hinreichend klein

$$\theta(p+h\vec{e}_i) = \Phi^i_{p_i+h-\psi_i(x)} \circ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \Phi^j_{p_j-\psi_j(x)} \circ \psi^{-1}(\psi_1(x),\dots,\psi_k(x),p_{k+1},\dots,p_n) =$$

$$= \Phi^i_h \circ \Phi^i_{p_i-\psi_i(x)} \circ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \Phi^j_{p_j-\psi_j(x)} \circ \psi^{-1}(\psi_1(x),\dots,\psi_k(x),p_{k+1},\dots,p_n) =$$

$$= \Phi^i_h(\theta(p))\,.$$

Also folgt $(s^i_{\theta(p)}(u) := \Phi^i(u,\theta(p)))$

$$d\theta\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_p\Big)(f) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\theta)(p+h\vec{e}_i) - (f\circ\theta)(p)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\Phi^i_h)(\theta(p)) - f(\theta(p))}{h} = ds^i_{\theta(p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0\Big)(f) = X_i(\theta(p))(f)\,,$$

d.h. $d\theta(\frac{\partial}{\partial t_i}|_p) = X_i(\theta(p))$, $p \in \psi(x) + (-\epsilon,\epsilon)^n$.

Insbesondere ist $d\theta_{\psi(x)}$ eine Bijektion und daher existiert nach Satz 1.4.1 eine Umgebung $\tilde{W}$von $\psi(x)$ sodaß $W := \theta(\tilde{W})$ offen ist und $\theta|_{\tilde{W}} : \tilde{W} \to W$ ein Diffeomorphismus. Setze $\varphi := \theta|_{\tilde{W}}^{-1}$, dann ist (W,φ) eine Karte um x und erfüllt.

$$X_i^\varphi(y) = d\varphi^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\varphi(y)}\Big) = X_i(y),\ \ y \in W\,.$$

❑

3.4 Vektorbündel

3.4.1 Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m, E eine der Dimension $m+n$, und $\pi \in C^\infty(E,M)$. Dann heißt $E \xrightarrow{\pi} M$ ein *Vektorbündel über M mit Faserdimension n* (oder kurz ein *n-Bündel*), wenn gilt:

(*i*) Für jedes $x \in M$ hat die *Faser* $E_x := \pi^{-1}(x)$ die Struktur eines n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes.

(*ii*) Es gibt eine offene Überdeckung $\{W_j\}_{j\in J}$ von M und Diffeomorphismen $\psi_j : \pi^{-1}(W_j) \to W_j \times \mathbb{R}^n$ sodaß

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(W_j) \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[d, "\pi"'] & W_j \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ W_j \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & W_j \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

wobei $\pi_1 : W_j \times \mathbb{R}^n \to W_j$ die Projektion auf die erste Komponente ist.

(*iii*) Für jedes $j \in J$ und $x \in W_j$ ist $\psi_j|_{E_x}$ ein Isomorphismus der $\mathbb{R}$-Vektorräume E_x und $\{x\} \times \mathbb{R}^n$.

3.4.2 Beispiel. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $n \in \mathbb{N}$, und bezeichne $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} M$ in offensichtlicher Weise ein n-Bündel.

3.4.3 Beispiel. Sei $\dim M =: d$. Dann ist $T(M) \xrightarrow{\pi} M$ ein d-Bündel. Denn: Die Abbildung π ist in $C^\infty(T(M),M)$ nach Proposition 1.3.16. Für $x \in M$ ist $\pi^{-1}(x) = T_x(M)$ ein d-dimensionaler Vektorraum. Sei $\{(W_j,\varphi_j) : j \in J\}$ ein Atlas von M. Dann definiere ψ_j als

$$\psi_j : \pi^{-1}(W_j) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \varphi(W_j) \times \mathbb{R}^d \overset{\varphi^{-1}\times\mathrm{id}}{\longrightarrow} W_j \times \mathbb{R}^d\,.$$

Aus der Definition $\tilde{\varphi}$ sieht man $\pi_1 \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, also gilt das Diagramm (3.11). Weiters ist, für festgehaltenes $x \in W_j$ die Abbildung $d\varphi_x : \pi^{-1}(x) \to T_{\varphi(x)}(\mathbb{R}^d)$ linear, und für festgehaltene erste Komponenten $m_1,\dots,m_d$ ist die Abbildung Φ aus Beispiel 1.3.12 in $(m_{d+1},\dots,m_{2d})$ linear. Beide sind Isomorphismen.

3.4.4 Definition. Seien $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ und $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ Bündel. Eine Abbildung $\phi \in C^\infty(E_1,E_2)$ heißt ein *Bündelhomomorphismus*, wenn

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & M \end{tikzcd}$$

und wenn $\phi|_{\pi_1^{-1}(\{x\})} : \pi_1^{-1}(\{x\}) \to \pi_2^{-1}(\{x\})$ linear ist.

Ein Bündelhomomorphismus ϕ von $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ nach $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ heißt ein *Bündelisomorphismus*, wenn es einen Bündelhomomorphismus ψ von $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ nach $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ gibt mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{E_2}$, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{E_1}$.

3.4.5 Lemma. *Sei ϕ ein Bündelhomomorphismus von $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ nach $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$. Dann ist ϕ ein Bündelisomorphismus, genau dann wenn ϕ bijektiv ist.*

Beweis. Ist ϕ ein Bündelisomorphismus, so ist klarerweise ϕ bijektiv. Sei also umgekehrt ϕ bijektiv. Offenbar gilt $\pi_1 \circ \phi^{-1} = \pi_2$. Weiters ist $\phi|_{\pi_1^{-1}(\{x\})}$ eine Bijektion von $\pi_1^{-1}(\{x\})$ auf $\pi_2^{-1}(\{x\})$, und daher auch $\phi^{-1}|_{\pi_2^{-1}(\{x\})}$ linear. Es bleibt zu zeigen, dass $\phi^{-1} \in C^\infty(E_2, E_1)$.

Sei $x_0 \in E_2$ gegeben, und wähle $W \subseteq M$ offen, $x_0 \in W$, sodass es Abbildungen $\psi_1 : \pi_1^{-1}(W) \to W \times \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 : \pi_2^{-1}(W) \to W \times \mathbb{R}^n$ wie in (3.11) gibt. Betrachte die Abbildung $\hat\phi := \psi_2 \circ \phi \circ \psi_1^{-1} : W \times \mathbb{R} \to W \times \mathbb{R}$. Dann ist $\hat\phi$ bijektiv, in $C^\infty(W \times \mathbb{R}, W \times \mathbb{R})$, und erfüllt $\pi \circ \hat\phi = \pi$ wobei $\pi : W \times \mathbb{R} \to W$ die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet. Also lässt sich $\hat\phi$ darstellen als

$$\hat\phi(x, v) = (x, \gamma(x) \cdot v),\ x \in W, v \in \mathbb{R}^n\,,$$

wobei $\gamma(x)$ eine $n \times n$-Matrix ist. Ist e_i der i-te Einheitsvektor, so ist $x \mapsto \hat\phi(x, e_i) = (x, \gamma(x)e_i)$ in $C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$. Also sind die Einträge von $\gamma(x)$ in $C^\infty(W, \mathbb{R})$. Nach der Cramerschen Regel, hat die Matrix $\gamma(x)^{-1}$ ebenfalls C^∞-Einträge. Definiert man $\hat\psi(x, u) := (x, \gamma(x)^{-1}u)$, so ist also $\hat\psi \in C^\infty(W \times \mathbb{R}^n, W \times \mathbb{R}^n)$. Offenbar gilt $\hat\psi \circ \hat\phi = \hat\phi \circ \hat\psi = \mathrm{id}_{W \times \mathbb{R}^n}$. Wir sehen, dass $\hat\phi^{-1} \in C^\infty(W \times \mathbb{R}^n, W \times \mathbb{R}^n)$, und, da x_0 beliebig war, dass $\phi \in C^\infty(E_2, E_1)$. ❑

3.4.6 Bemerkung. Ein n-Bündel $E \xrightarrow{\pi_E} M$ heißt *trivialisierbar*, wenn es einen Bündelisomorphismus zwischen $E \xrightarrow{\pi_E} M$ und $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} M$ gibt. Speziell heisst eine Mannigfaltigkeit *parallelisierbar*, wenn das Tangentialbündel trivialisierbar ist.

Ist $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Bündel, so bezeichnet man die Menge aller Abbildungen $X \in C^\infty(M, E)$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ mit $\Gamma(E)$ und spricht von *C^∞-Schnitten*. Ist $X \in \Gamma(E)$ und $m \in M$, so ist $X(m) \in \pi_E^{-1}(m)$. Also können wir punktweise lineare Operationen und eine $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Moduloperation definieren:

$$(X + Y)(m) := X(m) + Y(m),\ (\lambda X)(m) := \lambda X(m), \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

$$(fX)(m) := f(m) \cdot X(m),\ f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\,.$$

3.4.7 Lemma. *Mit diesen Operationen wird $\Gamma(E)$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum und $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Modul.*

Beweis. Wir müssen zeigen dass $X + Y, \lambda X, fX \in C^\infty(M, E)$. Hat man das, so ist alles andere klar. Dazu bemerke dass die Abbildungen

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \right. \quad \cdot_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ (a, \lambda) & \mapsto & \lambda a \end{array} \right.$$

C^∞-Abbildungen sind. Ist $m \in M$ gegeben, so wähle (W, ψ) aus (3.11) mit $m \in W$ und betrachte die Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "X \times Y"] \arrow[d, "X+Y"'] & \pi^{-1}(W) \times \pi^{-1}(W) \arrow[r, "\psi \times \psi"] & (W \times \mathbb{R}^n) \times (W \times \mathbb{R}^n) \arrow[d] \\
\pi^{-1}(W) & W \times \mathbb{R}^n \arrow[l, "\psi^{-1}"] & W \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[l, "\mathrm{id} \times (+)"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "X \times f"] \arrow[d, "fX"'] & \pi^{-1}(W) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi \times \mathrm{id}"] & (W \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id} \times (\cdot_2)"] \\
\pi^{-1}(W) & & W \times \mathbb{R}^n \arrow[ll, "\psi^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

❑

3.4.8 Lemma. *Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein n-Bündel und sei $m \in M$. Dann esistiert eine offene Umgebung W von m in M und $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\pi} W)$ sodaß*

(*i*) *$\Gamma(\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\pi} W)$ wird als $C^\infty(W)$-Modul von $X_1, \dots, X_n$ erzeugt.*

(*ii*) *Für jedes $x \in W$ sind $X_1(x), \dots, X_n(x) \in \pi^{-1}(W)$ linear unabhängig.*

Insbesondere ist dann die Darstellung $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ eines Elementes $X \in \Gamma(\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\pi} W)$ mit $\lambda_i \in C^\infty(W)$ eindeutig.

Beweis. Wähle W offen, $m \in W$, und ψ wie in (3.11). Dann ist also

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(W) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & W \times \mathbb{R}^n \arrow[d] \\
W \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & W
\end{tikzcd}
$$

Sei e_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ und definiere $X_i : W \to \pi^{-1}(W)$ durch

$$X_i(x) := \psi^{-1}((x, e_i)) = \psi^{-1} \circ (\mathrm{id} \times e_i)(x)$$

Dann ist $X_i \in \Gamma(\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\pi} W)$ und es gilt (*ii*). Ist $X \in \Gamma(\pi^{-1}(W) \xrightarrow{\pi} W)$, so existieren Funktionen $\lambda_i : W \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi \circ X = \mathrm{id} \times (\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)\,.$$

Es folgt $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$. Die Abbildung $\pi_2 \circ \psi \circ X$ wobei $\pi_2 : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die zweite Komponente, ist in $C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$. Die Lösungen λ_i des linearen Gleichungssystems $(\pi_2 \circ \psi \circ X)(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e_i$ hängen also auch C^∞ von x ab.

❑

3.4.9 Bemerkung. Das letzte Argument des obigen Beweises, dass die Lösungen eines linearen Systems C^∞ von den Daten abhängen, zeigt auch die folgende Aussage: Seien $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(E)$, sodaß $X_1(m), \ldots, X_k(m)$ stets linear unanhängig sind, und sei $X \in \Gamma(E)$ sodaß $X(m) \in \operatorname{span}\{X_1(m), \ldots, X_k(m)\}$, $m \in M$. Dann ist $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i$ mit $\lambda_i \in C^\infty(M)$.

3.4.10 Bemerkung. Wir sehen, dass ein Bündel $E \xrightarrow{\pi_E} M$ trivialisierbar ist genau dann, wenn es Elemente $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(E)$ gibt, sodass $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ für jedes $x \in M$ linear unabhängig ist. Insbesondere hat dann $\Gamma(E)$ als $C^\infty(M)$-Modul eine Basis. Diese Tatsache erklärt auch die Bezeichnung „M parallelisierbar, wenn das Tangentialbündel trivialisierbar ist“, vgl. Bemerkung 3.4.6.

3.4.11 Definition. Sei $E \xrightarrow{\pi_E} M$ ein n-Bündel und sei $F \xrightarrow{\pi_F} M$ ein k-Bündel. Dann heißt $F \xrightarrow{\pi_F} M$ gemeinsam mit einer Abbildung $\iota \in C^\infty(F, E)$ ein k-*Unterbündel* von $E \xrightarrow{\pi_E} M$, wenn

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_F"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & M \end{tikzcd}$$

und wenn $\iota|_{\pi_F^{-1}(x)} : \pi_F^{-1}(x) \to \pi_E^{-1}(x)$ linear und injektiv ist.

Ist speziell $F \xrightarrow{\pi_F} M$ mit der Abbildung ι ein k-Unterbündel von $T(M) \xrightarrow{\pi} M$, so bezeichnet man $F \xrightarrow{\pi_F} M$ auch als *k-Distribution auf M*

Beachte dass die Abbildung ι eines Unterbündels stets injektiv ist.

Ist (F, ι) ein Unterbündel von E, so ist die Abbildung $X \mapsto \iota \circ X$ ein injektiver $\mathbb{R}$-Vektorraum- und $C^\infty(M)$-Modulhomomorphismus von $\Gamma(F)$ in $\Gamma(E)$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, bend left, "\pi_F"] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, bend left, "X"] & M \end{tikzcd}$$

Beachte hier dass $\iota|_{\pi^{-1}(x)}$ linear ist.

3.4.12 Lemma. *Es gilt*

$$\{\iota \circ X : X \in \Gamma(F)\} = \{Y \in \Gamma(E) : Y(m) \in \iota\pi_F^{-1}(m)\}\,.$$

Beweis. Die Inklusion “$\subseteq$“ ist trivial. Sei umgekehrt $Y \in \Gamma(E)$ mit $Y(m) \in \iota\pi_F^{-1}(m), m \in M$, gegeben. Da ι injektiv ist, existiert eine eindeutige Abbildung $X : M \to F$ mit $\iota \circ X = Y$. Klarerweise gilt $\pi_F \circ X = \mathrm{id}_M$.

Sei $m \in M$ und wähle $W, X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(\pi_F^{-1}(W) \xrightarrow{\pi_F} W)$ wie in Lemma 3.4.8. Setze $Y_i := \iota \circ X_i$, dann gilt also

$$\operatorname{span}\{Y_1(x), \ldots, Y_k(x)\} = \iota\pi_F^{-1}(x),\ x \in W\,.$$

Daher ist $Y|_W = \sum_{i=1}^k \lambda_i Y_i$ mit $\lambda_i \in C^\infty(W)$, vgl. Bemerkung 3.4.9. Es gilt

$$\iota \circ \Big(\sum_{i=1}^k \lambda_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Y_i = Y|_W\,,$$

also folgt $X|_W = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i \in C^\infty(W, \pi_F^{-1}(W))$. Da $m \in M$ beliebig war, folgt $X \in \Gamma(F)$.

$\square$

3.4.13 Bemerkung. Betrachtet man speziell das Tangentialbündel $T(M) \xrightarrow{\pi} M$, so ist $\Gamma(T(M)) = \mathfrak{X}(M)$. Hat man eine Distribution F auf M, so kann man also $\Gamma(F)$ auffassen als linearen Teilraum und $C^\infty(M)$-Untermodul von $\mathfrak{X}(M)$. Dabei gilt $\iota(\Gamma(F)) = \{Y \in \mathfrak{X}(M) : Y(m) \in \iota(\pi_F^{-1}(m))\}$ wegen Lemma 3.4.12.

3.4.14 Definition. Eine Distribution F auf M heißt *involutorisch*, wenn $\iota(\Gamma(F))$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$ ist.

3.4.15 Definition. Sei $(F \xrightarrow{\pi_F} M, \iota_F)$ eine k-Distribution auf M, sei (N, ι_N) eine immersed Teilmannigfaltigkeit von M, und sei $q \in M$. Dann heißt N eine *Integralmannigfaltigkeit* von F durch q, wenn $q \in \iota_N(N)$ und wenn für jedes $x \in N$ gilt, dass $d\iota_N(T_x(N)) = \iota_F(\pi_F^{-1}(\iota_N x))$.

Zur Veranschaulichung bemerke dass, wenn ι_N und ι_F Inklusionen sind die Beziehung $d\iota_N(T_x(N)) = \iota_F(\pi_F^{-1}(\iota_N x))$ nichts anderes besagt als $T_x(N) = \pi_F^{-1}(x)$. Im allgemeinen hat man die folgenden Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\iota_F"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi_F"'] & \\
T(M) \arrow[d, "\pi"'] & T(N) \arrow[l, "d\iota_N"'] \arrow[d, "\pi_N"] \\
M & N \arrow[l, "\iota_N"]
\end{tikzcd}$$

3.4.16 Definition. Die k-Distribution F heißt *integrierbar* wenn es zu jedem $q \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit von F durch q gibt.

Wir werden die folgende Bezeichnungsweise festhalten. Sei (W, φ) eine Karte von M. Dann sei X_i^φ wie in Bemerkung 3.1.3. Dann ist $X_i^\varphi \in \mathfrak{X}(U)$ und eine Basis des C^∞-Moduls $\mathfrak{X}(U)$.

3.4.17 Satz (*Frobenius*). *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $(F \xrightarrow{\pi_F} M, \iota)$ eine k-Distribution auf M. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *F ist integrierbar.*

(*ii*) *F ist involutorisch.*

(*iii*) *Für jedes $m \in M$ existiert eine Karte (U, φ) von M um m sodaß*

$$X_i^\varphi \in \iota\big(\Gamma(\pi_F^{-1}(U) \xrightarrow{\pi_F} U)\big), \; i = 1, \dots, k\,.$$

Beweis. Wir zeigen $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei also F eine integrierbare Distribution auf M, wir müssen zeigen dass $\{\iota \circ X : X \in \Gamma(F)\}$ bezüglich Lie-Klammern abgeschlossen ist. Dazu seien $X, Y \in \Gamma(F)$ gegeben. Sei $m \in M$. Wähle eine Integralmannigfaltigkeit (N, α) von F durch m. Nun gilt, vgl. Lemma 3.4.12,

$$(\iota \circ X)(\alpha(n)) \in \iota\pi_F^{-1}(\alpha(n)) = d\alpha(T_n(N)), \; n \in N\,,$$

also existiert nach Proposition 3.1.7 ein $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ mit $\tilde{X} \sim_\alpha \iota \circ X$. Genauso existiert $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ mit $\tilde{Y} \sim_\alpha \iota \circ Y$. Es folgt das auch

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] \sim_\alpha [\iota \circ X, \iota \circ Y]\,,$$

und daher das

$$[\iota \circ X, \iota \circ Y](\alpha(n)) \in d\alpha(T_n(N)) = \iota\pi_F^{-1}(\alpha(n))\,.$$

Nun existiert $n \in N$ mit $\alpha(n) = m$, also haben wir

$$[\iota \circ X, \iota \circ Y](m) \in \iota\pi_F^{-1}(m)\,.$$

Da $m \in M$ beliebig war, folgt mit Lemma 3.4.12 dass für ein gewisses $Z \in \Gamma(F)$ gilt $[\iota \circ X, \iota \circ Y] = \iota \circ Z$.

Als nächstes zeigen wir $(iii) \Rightarrow (i)$. Sei $m \in M$ gegeben. Wähle eine Karte (U, φ) um m mit $X_i^\varphi \in \iota \circ \Gamma(\pi_F^{-1}(U) \xrightarrow{\pi_F} U), i = 1, \dots, k$. Betrachte die Scheibe (vgl. Beispiel 1.5.4)

$$S := \big\{ x \in U : (\pi_j \circ \varphi)(x) = (\pi_j \circ \varphi)(m),\ j = k+1, \dots, \dim M \big\}\,.$$

Dann ist $m \in S$ und S ist mit der Inklusionsabbildung eine sogar eingebettete Teilmannigfaltigkeit von M der Dimension k. Der Tangentialraum $(d \subseteq)T_x(S)$ wird aufgespannt von $\{X_i^\varphi(x) : i = 1, \dots, k\}$ denn $(S, (\pi_1 \circ \varphi, \dots, \pi_k \circ \varphi))$ ist ein Atlas von S. Es folgt wegen $X_i^\varphi \in \iota \circ \Gamma(\pi_F^{-1}(U) \xrightarrow{\pi_F} U)$ dass $X_i^\varphi(x) \in \iota\pi_F^{-1}(x)$, also auch $(d \subseteq)T_x(S) \subseteq \iota\pi_F^{-1}(x)$. Da beide k-dimensional sind folgt $(d \subseteq)T_x(S) = \iota\pi_F^{-1}(x)$, d.h. $(S, \subseteq)$ ist eine Integralmannigfaltigkeit zu F und $m \in S$.

Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sei F involutorisch und sei $m \in M$. Wähle nach Lemma 3.4.8 eine Umgebung W von m und $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(\pi_F^{-1}(W) \xrightarrow{\pi_F} W)$ sodaß also für jedes $x \in W$ die Elemente $X_1(x), \dots, X_k(x)$ eine Basis von $\pi_F^{-1}(x)$ bilden. Es gilt $\iota \circ X_i(m) \in T_m(W)$ und diese sind linear unabhängig. Wegen

$$T_m(W) \cong \Big(\ker e_m /_{(\ker e_m)^2}\Big)^*$$

vermöge des Isomorphismus $D \mapsto ([f]/_\sim \mapsto Df)$, existieren $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{P}_m$ sodaß

$$[\iota \circ X_i(m)](\xi_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, k\,.$$

Sei $W' \subseteq W$ offen sodaß jedes ξ_i auf W' definiert ist. Wegen Beispiel 1.3.17 ist die Abbildung $x \mapsto [\iota \circ X_i(x)](\xi_j)$ in $C^\infty(W', \mathbb{R})$. Daher existiert eine offene Umgebung $W'' \subseteq W'$ von m sodaß

$$\det \Big([\iota \circ X_i(x)](\xi_j) \Big)_{i,j=1}^k \neq 0,\ x \in W''. \tag{3.12}$$

Betrachte die Abbildung

$$\xi : \left\{ \begin{array}{ccc} W'' & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \end{array} \right.$$

Wir zeigen, dass für jedes $x \in W''$ die Abbildung $d\xi|_{\iota\pi_F^{-1}(x)} \to T_x(\mathbb{R}^k)$ ein Isomorphismus ist. Sei $X \in \iota\pi_F^{-1}(x)$ und sei angenommen das $d\xi(X) = 0$.

Schreibe $X = \sum_i \lambda_i(\iota \circ X_i(x))$, dann ist also insbesondere für jede Projektion $\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$0 = d\xi(X)(\pi_j) = X(\pi_j \circ \xi) = X(\xi_j) = \sum_i \lambda_i(\iota \circ X_i(x))(\xi_j),\ j = 1, \ldots, k\,.$$

Wegen (3.12) folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Also ist $d\xi|_{\iota\pi_F^{-1}(x)}$ injektiv und, da $\dim \iota\pi_F^{-1}(x) = \dim T_x(\mathbb{R}^k)$, auch ein Isomorphismus.

Seien $X_j^{\mathrm{id}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k)$ jene Vektorfelder die wie vor dem Satz angeführt aus der Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$ konstruiert sind. Explizit gilt also

$$X_j^{\mathrm{id}}(p)([f]/\sim) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),\ p \in \mathbb{R}^k, f \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^k)\,.$$

Da für jedes $x \in W''$ die Menge $\{d\xi(\iota \circ X_i(x)) : i = 1, \ldots, k\}$ eine Basis von $T_x(\mathbb{R}^k)$ bildet, existieren $\lambda_{ij} : W'' \to \mathbb{R}$ mit

$$(X_j^{\mathrm{id}} \circ \xi)(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{ij}(x) d\xi(\iota \circ X_i(x)),\ x \in W''\,.$$

Nach Bemerkung 3.4.9 folgt dass $\lambda_{ij} \in C^\infty(W'', \mathbb{R})$. Daher ist

$$Z_j := \sum_{i=1}^k \lambda_{ij} X_i \in \Gamma(\pi_F^{-1}(W'') \xrightarrow{\pi_F} W'')\,,$$

und es gilt

$$\Big[d\xi \circ (\iota \circ Z_j)\Big](x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{ij}(x) d\xi(\iota \circ X_i(x)) = (X_j^{\mathrm{id}} \circ \xi)(x)\,,$$

d.h. $\iota \circ Z_j \sim_\xi X_j^{\mathrm{id}}$, $j = 1, \ldots, k$. Es folgt nach Proposition 3.1.5 dass

$$[\iota \circ Z_j, \iota \circ Z_l] \sim_\xi [X_j^{\mathrm{id}}, X_l^{\mathrm{id}}]\,.$$

Nach dem Satz von Schwarz über die gemischten partiellen Ableitungen ist stets $[X_j^{\mathrm{id}}, X_l^{\mathrm{id}}] = 0$, also folgt $d\xi([\iota \circ Z_j, \iota \circ Z_l]) = 0$. Da $d\xi$ in jeder Faser injektiv ist, folgt $[\iota \circ Z_j, \iota \circ Z_l](x) = 0$, $x \in W''$. Da für jedes $p \in \mathbb{R}^k$ die Menge $\{X_j^{\mathrm{id}}(p) : j = 1, \ldots, k\}$ linear unabhängig ist, muß wegen $d\xi((\iota \circ Z_j)(x)) = X_j^{\mathrm{id}}(\xi(x))$ die Menge $\{(\iota \circ Z_j)(x) : j = 1, \ldots, k\}$ für jedes $x \in W''$ linear unabhängig sein.

Nach Proposition 3.3.12 existiert eine Karte (U, φ) von M um m sodaß $\iota \circ Z_j = X_j^\varphi$. Also ist $X_j^\varphi \in \iota \circ \Gamma(\pi_p^{-1}(U) \xrightarrow{\pi_F} U)$.

❑

3.4.18 Bemerkung. Wir haben im Beweis des Satzes zu einer involutorischen k-Distribution und $m \in M$ sogar eine Integralmannigfaltigkeit (N, ι_N) konstruiert die eingebettet ist und eine Scheibe, d.h. (N, ι_N) ist für eine gewisse Karte (U, φ) um m gegeben als

$$N = \big\{x \in U : \varphi_{k+1}(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0\big\},\ \iota_N = \subseteq, \tag{3.13}$$

und N trägt die Spurtopologie von M.

3.4.19 Proposition. *Sei F eine involutorische k-Distribution auf M. Dann gilt:*

(*i*) *Sind (N,ι_N) und (N',ι'_N) Integralmannigfaltigkeiten von F, $D := \iota_N(N)\cap \iota_{N'}(N')$, dann sind $\iota_N^{-1}(D)$ und $\iota_{N'}^{-1}(D)$ offen in N bzw. N' und $\iota_{N'}^{-1}\circ \iota_N|_{\iota_N^{-1}(D)}$ ein Diffeomorphismus.*

(*ii*) *Sei (N,ι_N) eine Integralmannigfaltigkeit von F und $f\in C^\infty(P,M)$ mit $f(P)\subseteq \iota_N(N)$. Dann existiert $g\in C^\infty(P,N)$ mit*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & M \\ & N \arrow[u, "\iota_N"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei (N,ι_N) eine Integralmannigfaltigkeit von F, $n\in N, m := \iota_N(n)$. Wähle eine Integralmannigfaltigkeit (S,ι_S) die eine Scheibe ist bzgl. einer Karte (U,φ), d.h. wie in Bemerkung 3.4.18. Die Karte (U,φ) erfüllt dann $X_i^\varphi \in \iota_F\circ \Gamma(\pi_F^{-1}(U)\xrightarrow{\pi_F} U)$, $i=1,\dots,k$. Dann ist also für jedes $x\in M$

$$\iota_F(\pi_F^{-1}(x)) = \mathrm{span}\{X_1^\varphi(x),\dots,X_k^\varphi(x)\}\,.$$

Es folgt das für $j=k+1,\dots,n$ gilt $(Y\in T_y(N))$

$$d(\varphi_j\circ\iota_N)(Y) = d\varphi_j\circ \underbrace{d\iota_N(YY)}_{\in d\iota_N(T_y(N))=\mathrm{span}\{X_1^\varphi(\iota_N(y)),\dots,X_k^\varphi(\iota_N(y))\}} = 0$$

Allgemein folgt aus $df=0$ dass f lokal konstant ist, wie man durch Wahl von Koordinaten sieht. Also ist die Funktion

$$\beta : \left\{ \begin{array}{rcl} \iota_N^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ x & \mapsto & (\varphi_{k+1}(\iota_N x),\dots,\varphi_n(\iota_N x)) \end{array}\right.$$

lokal konstant ist. Nun erfüllt N das 2-te Abzählbarkeitsaxiom, also hat $\iota_N^{-1}(U)$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Also besteht $\beta(\iota_N^{-1}(U))$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten des $\mathbb{R}^{n-k}$.

Sei nun P eine Mannigfaltigkeit, $f\in C^\infty(P,M)$, $f(P)\subseteq\iota_N(N)$, und $p\in\mathcal{P}$ mit $f(p)=m$. Sei V die Komponente von $f^{-1}(U)$ die p enthält, dann ist $f(V)$ und daher auch $A := \{(\varphi_{k+1}(x),\dots,\varphi_n(x))\in\mathbb{R}^{n-k} : x\in f(V)\}$ zusammenhängend. Nun gilt $A\subseteq\beta(\iota_N^{-1}(U))$, denn $f(V)\subseteq U$ und $f(V)\subseteq\iota_N(N)$. Es folgt dass A nur aus einem Punkt bestehen kann. Wegen $f(p)\in\iota_S(S)$ folgt dass $f(V)\subseteq\iota_S(S)$.

Wendet man die Tatsache an auf $f=\iota_N$, so erhält man eine offene Umgebung von V von n in N mit $\iota_N(V)\subseteq\iota_S(S)$. Da ι_S eine Einbettung ist, folgt mit Proposition 1.5.8 dass $\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_V\in C^\infty(V,S)$. Wegen

$$d\iota_S\circ d(\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_V) = d\iota_N|_{\pi_N^{-1}(V)}$$

ist $d(\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_V)_n$ injektiv. Da $\dim S=\dim N=k$, daher auch surjektiv und nach dem Inverse Function Theorem erhält man offene Umgebungen U von $\iota_S^{-1}(m)$ in S und W von n in N sodaß $\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_W$ ein Diffeomorphismus ist.

Wir kommen zum Beweis von (i). Sei $(N', \iota_{N'})$ eine weitere Integralmannigfaltigkeit von F und sei $n' \in N'$ mit $\iota_{N'}(n') = m$. Das obige Argument liefert Umgebungen U' von $\iota_S^{-1}(m)$ in S und W' von n' in N' sodaß $\iota_S^{-1} \circ \iota_{N'}|_{W'}$ ein Diffeomorphismus ist. Wir haben dann also

$$\begin{tikzcd} & M & \\ W' \arrow[ur, "\iota_{N'}|_{W'}"] \arrow[r, "\iota_S^{-1}\circ\iota_{N'}|_{W'}"'] & U' \subseteq S \supseteq U \arrow[u, "\iota_S"'] & W \arrow[ul, "\iota_N|_W"'] \arrow[l, "\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_W"] \end{tikzcd}$$

Schränkt man die untere Zeile weiter ein auf $(\iota_S^{-1} \circ \iota_{N'}|_{W'})^{-1}(U \cap U')$ bzw. $(\iota_S^{-1} \circ \iota_N|_W)^{-1}(U \cap U')$, so erhält man einen Diffeomorphismus zwischen diesen Umgebungen von n' und n. Die Aussage (i) folgt.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Sei $p \in P$, $f(p) = m$, dann erhalten wir wieder eine offene Umgebung V von p mit $f(V) \subseteq \iota_S(S)$. Wir haben also

$$\begin{tikzcd} & M & \\ P \supseteq V \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "\iota_S^{-1}\circ f|_V"'] & S \supseteq \tilde{U} \arrow[u, "\iota_S"'] & \tilde{V} \subseteq N \arrow[ul, "\iota_N"'] \arrow[l, "\iota_S^{-1}\circ\iota_N|_{\tilde{V}}"] \end{tikzcd}$$

Da ι_S eine Einbettung ist, ist $\iota_S^{-1} \circ f|_V \in C^\infty(V, S)$. Sind $\tilde{U}, \tilde{V}$ so gewählt dass $\iota_S^{-1} \circ \iota|_{\tilde{V}}$ ein Diffeomorphismus ist, und schränkt man sich weiter ein auf $V \cap (\iota_S^{-1} \circ f|_V)^{-1}(\tilde{U}) =$, so folgt (ii).

❑

3.4.20 Korollar. *Sei $\preceq$ die Relation* (1.7) *auf der Menge aller Teilmannigfaltigkeiten. Ist $(N', \iota_{N'})$ eine Integralmannigfaltigkeit einer involutorischen Distribution, so gilt $(N, \iota_N) \preceq (N', \iota_{N'})$ genau dann, wenn $\iota_N(N) \subseteq \iota_{N'}(N')$.*

Beweis. Wende Proposition 3.4.19 an mit $f = \iota_N$ und N, N' vertauscht.

❑

3.4.21 Korollar. *Seien (N, ι_N) und $(N', \iota_{N'})$ Integralmannigfaltigkeiten einer involutorischen Distribution. Dann existiert eine Integralmannigfaltigkeit (P, ι_P) mit $\iota_P(P) = \iota_N(N) \cap \iota_{N'}(N')$.*

Beweis. Setze $D = \iota_N(N) \cap \iota_{N'}(N')$, dann ist $\iota_N^{-1}(D)$ offen in N und $P := \iota_N^{-1}(D)$, $\iota_P := \iota_N|_P$, hat die gewünschte Eigenschaft.

❑

Wir betrachten nun die Menge aller zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten und fragen uns nach (bezüglich $\preceq$) maximalen. Eine wichtige Rolle spielt die folgende Relation.

3.4.22 Definition. Sei F eine involutorische Distribution auf M. Wir definieren eine Relation $\sim_F$ auf M wir folgt: Es gilt $x \sim_F y$ wenn es zusammenhängende Integralmannigfaltigkeiten $(N_1, \iota_1), \ldots, (N_l, \iota_l)$ von F gibt mit

$$x \in \iota_1(N_1), y \in \iota_l(N_l), \;\; \iota_i(N_i) \cap \iota_{i+1}(N_{i+1}) \neq \emptyset, i = 1, \ldots, l-1. \tag{3.14}$$

Offenbar ist $\sim_F$ eine Äquivalenzrelation. Die Zerlegung von M in Äquivalenzklassen um $\sim_F$ heißt *Blätterung* von M zu F.

3.4.23 Satz. *Sei F eine involutorische Distribution auf M. Ist $\Lambda \subseteq M$ ein Element der Blätterung von M zu F, so existiert eine, bis auf Isomorphie eindeutige, zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit (L, ι_L) mit $\iota_L(L) = \Lambda$. Diese ist maximal in der Menge aller zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten bzgl. $\preceq$ modulo Isomorphismen. Ist (N, ι_N) eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, so existiert genau ein Λ mit $(N, \iota_N) \preceq (L, \iota_L)$.*

Beweis. Angenommen wir haben schon gezeigt, dass es zu jedem Element Λ der Blätterung eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit (L, ι_L) mit $\iota_L(L) = \Lambda$ gibt. Dann können wir die restlichen Aussagen leicht folgern. Als erstes bemerken wir dass, wenn (N, ι_N) eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit ist und $\iota_N(N) \cap \Lambda \neq \emptyset$, dann nach der Definition von $\sim_F$ schon $\iota_N(N) \subseteq \Lambda$ folgt, und damit $(N, \iota_N) \preceq (L, \iota_L)$ nach Korollar 3.4.20.

Ist $(N, \iota_N) \succeq (L, \iota_L)$, so folgt $\iota_N(N) \supseteq \Lambda$ und damit speziell $\iota_N(N) \cap \Lambda \neq \emptyset$, also auch $(N, \iota_N) \preceq (L, \iota_L)$. Wir sehen dass (L, ι_L) maximal (modulo Isomorphismen) ist und das jedes (N, ι_N) in einem (L, ι_L) liegt. Ist auch $(N, \iota_N) \preceq (L', \iota_{L'})$, so folgt $\emptyset \neq \iota_N(N) \subseteq \Lambda \cap \Lambda'$ und damit $\Lambda = \Lambda'$. Daher $(L', \iota_{L'}) \preceq (L, \iota_L)$ und genauso $(L, \iota_L) \preceq (L', \iota_{L'})$.

Sei uns jetzt ein Element Λ der Blätterung gegeben, und wir müssen (L, ι_L) konstruieren. Setze $L := \Lambda$ und $\iota_L :=\subseteq$. Sei $\mathcal{T}_L$ die Topologie auf L die von dem Mengensystem

$$\mathcal{B} := \{\iota_N(N) : (N, \iota_N) \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{P}(L)$$

erzeugt wird, wobei $\mathcal{N}$ die Menge aller zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten (N, ι_N) von F bezeichnet die $\iota_N(N) \subseteq \Lambda$ erfüllen. Wegen Korollar 3.4.21 ist $\mathcal{B}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen, also sogar eine Basis von $\mathcal{T}_L$.

Die Abbildung $\iota_N : N \to (L, \mathcal{T}_L)$ ist für jedes $(N, \iota_N) \in \mathcal{N}$ stetig und offen: Sei $O \subseteq N$ offen und zusammenhängend, dann ist $(O, \iota_N|_O) \in \mathcal{N}$ und daher $\iota_N|_O(O) = \iota_N(O)$ offen in $(L, \mathcal{T}_L)$. Da N lokal euklidisch ist, folgt das ι_N offen ist. Sei nun $(N', \iota_{N'}) \in \mathcal{N}$, dann ist nach Proposition 3.4.19, (i),

$$\iota_N^{-1}(\iota_{N'}(N')) = \iota_N^{-1}(\iota_N(N) \cap \iota_{N'}(N'))$$

offen in N. Da $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}_L$ ist, folgt dass ι_N stetig ist. Insbesondere ist $\iota_N : N \to \iota_N(N) \subseteq (L, \mathcal{T}_L)$ ein Homöomorphismus.

Wir zeigen dass $(L, \mathcal{T}_L)$ zusammenhängend ist. Seien dazu $x, y \in L$. Nach Definition von $\sim_F$ existieren $(N_1, \iota_1), \dots, (N_l, \iota_l) \in \mathcal{N}$ mit (3.14). Da $\iota_i(N_i)$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend ist, ist auch $\bigcup_{i=1}^l \iota_i(N_i)$ zusammenhängend, und $x, y \in \bigcup_{i=1}^l \iota_i(N_i)$.

Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{T}_L$ das 2-te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $m \in M$, dann existiert eine Karte (U_m, φ_m) von M um m mit $X_i^{\varphi_m} \in \iota_F \circ \Gamma(\pi_F^{-1}(U_m) \xrightarrow{\pi_F} U_m)$, $i = 1, \dots, k$. O.b.d.A. sei U_m so gewählt dass $\varphi_m(U_m)$ eine Kugel ist. Dann ist $\{U_m : m \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Da M das 2-te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist M Lindelöf, also existiert eine (höchstens) abzählbare Teilüberdeckung $\{U_{M_j} : j \in J\}$. Jede Scheibe $S_{j,a} = \{x \in U_{m_j} : (\varphi_{m_j,k+1}(x), \dots, \varphi_{m_j,n}(x)) = a\}$ ist eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit von F.

Wir zeigen dass die Menge $I := \{(j,a) : S_{j,a} \neq \emptyset, S_{j,a} \subseteq \Lambda\}$ höchstens abzählbar ist. Da eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit auch bogenweise zusammenhängt, denn wegen lokal euklidisch sind die Bogenkomponenten offen, folgt aus der Definition von $\sim_F$ dass Λ in der Topologie von M bogenweise zusammenhängt. Sei nun $(j_0, a_0) \in I$ festgehalten und sei $(j,a) \in I$. Wähle $x \in S_{j_0,a_0}$, $y \in S_{j,a}$ und eine stetige Kurve $s : [0,1] \to \Lambda$ mit $s(0) = x, s(1) = y$.

Da $\{U_{m_j} : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von M ist, ist $\{s^{-1}(U_{m_j}) : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung durch Komponenten der Mengen $s^{-1}(U_{m_j})$. Man hat also $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und $j_1, \ldots, j_n \in J$ sodaß

$$s([t_{l-1}, t_l]) \subseteq U_{m_{j_l}}, \ l = 1, \ldots, n\,.$$

Die Kurve s liegt nach Konstruktion in einer Vereinigung von Integralmannigfaltigkeiten, also ist $(\varphi_{m_j,k+1}(x), \ldots, \varphi_{m_j,n}(x))$ längs $s|_{[t_{l-1},t_l]}$ lokal konstant, also gibt es $a_1, \ldots, a_n$ sodaß $s([t_{l-1}, t_l]) \subseteq S_{j_l,a_l}$. Wir haben also eine endliche Kette von Scheiben gefunden, mit

$$S_{j_{l-1},a_{l-1}} \cap S_{j_l,a_l} \neq \emptyset, l = 1, \ldots, n, \ S_{j_l,a_l} \cap S_{j,a} \neq \emptyset\,.$$

Wie wir im ersten Teil des Beweises von Proposition 3.4.19 gesehen haben schneidet eine Integralmannigfaltigkeit eine Kartenumgebung U_{m_j} in höchstens abzählbar vielen Scheiben. Weiters ist J abzählbar. Also gibt es nur abzählbare viele Möglichkeiten für (j_1, a_1). Verfährt man induktiv weiter, so sieht man dass es für jedes $r \in \mathbb{N}$ nur abzählbar viele Ketten von Scheiben $S_{j,a}$ gibt, also gibt es auch nur abzählbar viele mit endlicher Länge. Wie wir oben gezeigt haben kann man jede Scheibe $S_{j,a}$ mit einer endlichen Kette erreichen, also gibt es höchstens abzählbar viele.

Für jedes $(j,a) \in I$ wähle eine abzählbare Basis von $S_{j,a}$ aus zusammenhängenden Mengen, das geht wegen 2-ten Abzählbarkeitsaxiom und lokal euklidisch denn dann sind Komponenten offener Mengen offen. Schreibe diese als $S^i_{j,a}$. Dann ist $\{(S^i_{j,a}, \subseteq) \in \mathcal{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{N}$.

Sei nun $(N, \iota_N) \in \mathcal{N}, m \in \iota_N(N)$. Wähle $S_{j,a}$ mit $m \in S_{j,a}$ dann ist wegen Proposition 3.4.19, (i), $S_{j,a} \cap \iota_N(N)$ offen in $S_{j,a}$. Also existiert eine Menge $S^i_{j,a}$ der Basis mit $m \in S^i_{j,a} \subseteq \iota_N(N)$. Also ist $\{(S^i_{j,a}, \subseteq)\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_L$.

Wir definieren einen Atlas auf L. Sei $(N, \iota_N) \in \mathcal{N}$ und sei (U, φ) eine Karte von N. Betrachte $(\iota_U(U), \varphi \circ \iota_U^{-1})$, dann ist $\iota_U(U)$ offen in $(L, \mathcal{T}_L)$ und $\varphi \circ \iota_U^{-1}$ ein Homöomorphismus auf $\varphi(U)$, also auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$. Klarerweise ist jeder Punkt von L in einer geeignet gewählten Menge $\iota_U(U)$ dieses Typs enthalten. Sei $\iota_{U'}(U')$ eine weitere solche Menge. Wegen Proposition 3.4.19, (i), ist dann $(\varphi \circ \iota_U^{-1}) \circ (\iota_{U'} \circ \varphi'^{-1})$ eine C^∞-Abbildung. Also ist die Gesamtheit aller $(\iota_U(U), \varphi \circ \iota_U^{-1})$ ein Atlas auf $(L, \mathcal{T}_L)$.

Wegen der Definition des Atlas auf L ist ι_N für $(N, \iota_N) \in \mathcal{N}$ ein Diffeomorphismus von N auf $\iota_N(N) \subseteq L$. Weiters ist $\iota_L|_{\iota_N(N)} = \iota_N \circ \iota_N^{-1}|_{\iota_N(N)} \in C^\infty(L, M)$, also auch $(d\iota_L)_y(T_y(L)) = (d\iota_N)_{\iota_N^{-1}(y)}(T_{\iota_N^{-1}(y)}N)$. Da (N, ι_N) eine Integralmannigfaltigkeit von F ist, ist also auch (L, ι_L) eine.

❑

3.4.24 Bemerkung. Die maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten heißen auch *Blätter* der Blätterung von M zu F. Wie wir gesehen haben ist jede zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit eingebettete Teilmannigfaltigkeit eines Blattes.

Kapitel 4

Lie Gruppen

4.1 Die Lie Algebra einer Lie Gruppe

4.1.1 Definition. Sei G eine Gruppe und eine Mannigfaltigkeit. Dann heißt G eine *Lie-Gruppe*, wenn die Gruppenoperationen C^∞ -Abbildungen sind, d.h. $\cdot \in C^\infty(G \times G, G)$ und $.^{-1} \in C^\infty(G, G)$.

Sind G_1 und G_2 Lie-Gruppen und $f : G_1 \to G_2$, dann heißt f ein *Lie-Gruppen-Homomorphismus*, wenn $f \in C^\infty(G_1, G_2)$ und wenn f ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei G eine Lie-Gruppe und $a \in G$. Die Abbildung

$$L_a : \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & a \cdot x \end{cases}$$

heißt *links-Translation mit* a. Es gilt stets $L_a \in C^\infty(G, G)$, und $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$, $L_{ab} = L_a \circ L_b$.

4.1.2 Definition. Sei G eine Lie-Gruppe. Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ heißt *links-invariant*, wenn für alle $a \in G$ gilt $X \sim_{L_a} X$. Die Menge aller links-invarianter Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathbb{L}(G)$ und sprechen von der Lie-Algebra von G.

Wegen Korollar 3.1.6 ist tatsächlich $\mathbb{L}(G)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(G)$, denn es gilt

$$\mathbb{L}(G) = \bigcap_{a \in G} \{X \in \mathcal{X}(G) : X \sim_{L_a} X\}\,.$$

4.1.3 Satz. *Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne e das Einselement von G. Die Abbildung*

$$\chi : \begin{cases} \mathbb{L}(G) & \longrightarrow & T_e(G) \\ X & \longmapsto & X(e) \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus der Vektorräume $\mathbb{L}(G)$ und $T_e(G)$.

Beweis. Klarerweise ist χ linear. Für $X \in \mathbb{L}(G)$ und $a \in G$ gilt

$$X(a) = X(L_a(e)) = dL_a(X(e))\,,$$

also ist χ injektiv.

Um zu zeigen dass χ surjektiv ist, sei $y \in T_e(G)$ gegeben. Definiere $X : G \to T(G)$ als

$$X(a) := dL_a(y)\,.$$

Lemma 3.2.4 angewandt mit $M = N = P = G$, $f(x,a) := a \cdot x$, $D(x) = y$, zeigt dass $X \in C^\infty(G, T(G))$. Klarerweise gilt $\pi_G \circ X = \mathrm{id}_G$, also ist $X \in \mathcal{X}(G)$. Weiters ist $L_e = \mathrm{id}_G$, also folgt $X(e) = y$. Wir zeigen dass X links-invariant ist: Seien $a, b \in G$, dann ist also zu zeigen dass $dL_a(X(b)) = X(L_a(b))$. Nun gilt

$$dL_a(X(b)) = dL_a \circ dL_b(y) = d(L_a \circ L_b)(y) = dL_{ab}(y) = X(ab) =$$
$$= X(L_a(b))\,.$$

❑

4.1.4 Bemerkung. Wir erhalten ein erstes (triviales) Beispiel einer Lie-Korrespondenz, d.h. eines Entsprechens von Eigenschaften von G und $\mathbb{L}(G)$. Denn: Es gilt stets $\dim \mathbb{L}(G) = \dim G$.

4.1.5 Korollar. *Betrachte $\mathbb{L}(G)$ als Mannigfaltigkeit als endlichdimensionaler Vektorraum. Dann ist $G \times \mathbb{L}(G) \xrightarrow{\pi_1} G$, wo π_1 die Projektion auf die erste Komponente ist, ein n-Bündel. Die Abbildung*

$$\varphi : \begin{cases} G \times \mathbb{L}(G) & \longrightarrow & T(G) \\ (g, X) & \longmapsto & X(g) \end{cases}$$

ist ein Bündel-Isomorphismus zwischen $G \times \mathbb{L}(G) \xrightarrow{\pi_1} G$ und $T(G) \xrightarrow{\pi_G} G$.

Beweis. Klarerweise gilt $\pi_G \circ \varphi = \pi_1$. Betrachte die lineare Abbildung $\varphi|_{\{a\}\times\mathbb{L}(G)} : \{a\} \times \mathbb{L}(G) \to T_a(G)$. It $y \in T_a(G)$, so wähle $X \in \mathbb{L}(G)$ mit $X(e) = dL_a^{-1}(y)$. Dann gilt

$$X(a) = dL_a(X(e)) = dL_a \circ dL_a^{-1}(y) = y\,,$$

also ist $\varphi|_{\{a\}\times\mathbb{L}(G)}$ surjektiv. Da $\dim \mathbb{L}(G) = \dim T_a(G)$ daher bijektiv. Wegen Lemma 3.4.5 genügt es zu zeigen dass $\varphi \in C^\infty(G \times \mathbb{L}(G), T(G))$ ist. Wähle eine Basis $\{X_1, \ldots, X_n\}$ von $\mathbb{L}(G)$, dann ist die Abbildung

$$\psi : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

ein Bündel-Isomorphismus zwischen $G \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_1} G$ und $G \times \mathbb{L}(G) \xrightarrow{\pi_1} G$. Für $X \in \mathbb{L}(G)$ schreibe $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) X_i$, dann ist $\lambda_i(X) = (\pi_i \circ \psi^{-1})(X)$, also $\lambda_i \in C^\infty(\mathbb{L}(G), \mathbb{R})$. Nun ist für jedes X_i sicher $a \mapsto X_i(a)$ in $C^\infty(G, T(G))$ und daher ist $\varphi \in C^\infty(G \times \mathbb{L}(G), T(G))$.

❑

4.1.6 Definition. Seien G und H Lie-Gruppen und sei $f : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann setze

$$\mathbb{L}f := \chi_H^{-1} \circ df \circ \chi_G\,.$$

4.1.7 Proposition. *Ist $X \in \mathbb{L}(G)$, so existiert genau ein Vektorfeld $Y \in \mathbb{L}(H)$ mit $X \sim_f Y$, nämlich $\mathbb{L}f(X)$.*

Beweis. Ist $X \sim_f Y$, so folgt $Y(e) = Y(f(e)) = df(X(e))$. Also gibt es höchstens ein $Y \in \mathbb{L}(H)$ mit $X \sim_f Y$. Weiters gilt für jedes $a \in G$, da f ein Homomorphismus der Gruppen ist,

$$L^H_{f(a)} \circ f = f \circ L^G_a .$$

Es folgt

$$(\mathbb{L}f(X) \circ f)(a) = (\chi_H^{-1} \circ df \circ \chi_G)(X)(f(a)) = (\chi_H^{-1} \circ df)(X(e))(f(a)) =$$

$$= \chi_H^{-1}(df(X(e)))(f(a)) = dL^H_{f(a)}(df(X(e))) = d(L^H_{f(a)} \circ f)(X(e)) =$$

$$= d(f \circ L^G_a)(X(e)) = df(dL^G_a(X(e))) = (df \circ X)(a) .$$

❑

4.1.8 Korollar. *Es ist $\mathbb{L}f$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus von $\mathbb{L}(G)$ in $\mathbb{L}(H)$.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathbb{L}(G)$. Dann ist $X \sim_f \mathbb{L}f(X)$ und $Y \sim_f \mathbb{L}(Y)$. Nach Proposition 3.1.5 folgt $[X,Y] \sim_f [\mathbb{L}f(X), \mathbb{L}f(Y)]$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage von Proposition 4.1.7 folgt

$$[\mathbb{L}f(X), \mathbb{L}f(Y)] = \mathbb{L}f([X,Y]) .$$

Die Tatsache dass $\mathbb{L}f$ linear ist, ist klar nach Definition.

❑

Wir wollen bemerken, dass offenbar stets $\mathbb{L}(f \circ g) = \mathbb{L}f \circ \mathbb{L}g$ sowie $\mathbb{L}\,\mathrm{id}_G = \mathrm{id}_G$ gilt.

4.1.9 Satz. *Sei G eine Lie-Gruppe und $X \in \mathbb{L}(G)$. Dann ist X vollständig. Der globale Fluss Φ^X von X erfüllt*

$$L_a \circ \Phi^X_t = \Phi^X_t \circ L_a, a \in G, t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Beweis. Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Sei Φ ein Element des lokalen Flusses von X, $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to G$. Sind $b, y \in G$ mit $y, b^{-1}y \in U$, so folgt

$$b\Phi(t, b^{-1}y) = \Phi(t,y),\ t \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{4.2}$$

Um dies zu sehen setze $s(t) := b\Phi(t, b^{-1}y)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann ist $s(t) = L_b(s^\Phi_{b^{-1}y}(t))$, also folgt

$$\dot{s}(t)(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(s(t+h)) - f(s(t))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ L_b)(s^\Phi_{b^{-1}y}(t+h)) - (f \circ L_b)(s^\phi_{b^{-1}y}(t))}{h} =$$

$$= \dot{s}^{\Phi}_{b^{-1}y}(t)(f \circ L_b) = dL_b(X(s^{\Phi}_{b^{-1}y}(t)))(f) = (dL_b \circ X \circ L_{b^{-1}})(s(t))(f) =$$
$$= X(s(t))(f)\,,$$

d.h. $s(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ist eine Integralkurve von X. Wegen $s(0) = y$ folgt $s(t) = s^{\Phi}_y(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, und das ist die behauptete Beziehung (4.2).

Sei $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to G$ ein Element des lokalen Flusses von X mit $e \in U$. Für $a \in G$ definiere

$$\Phi^a : \begin{cases} (-\epsilon, \epsilon) \times L_a(U) & \to \quad G \\ \quad (t, x) & \mapsto \quad (L_a \circ \Phi_t \circ L_{a^{-1}})(x) \end{cases}$$

Dann ist $\Phi^a \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times L_a(U), G)$ und es gilt

$$\Phi^a(0, x) = (L_a \circ \Phi_0 \circ L_{a^{-1}})(x) = (L_a \circ L_{a^{-1}})(x) = x,\ \ x \in L_a(U)\,.$$

Sei weiters $s, t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $x \in L_a(U)$ sodass sowohl $\Phi^a(t + s, x)$ als auch $\Phi^a(t, \Phi^a(s, x))$ definiert sind. Dann gilt

$$\Phi^a(s, x) = a\Phi(s, a^{-1}x)\,,$$

also $\Phi(s, a^{-1}x) \in U$ da $\Phi^a(s, x) \in L_a(U)$. Also ist $\Phi(t, \Phi(s, a^{-1}x))$ definiert und gleich $\Phi(t + s, a^{-1}x)$. Es folgt

$$\Phi^a(t + s, x) = a\Phi(t + s, a^{-1}x) = a\Phi(t, \Phi(s, a^{-1}x)) =$$
$$= a\Phi(t, a^{-1}a\Phi(s, a^{-1}x)) = \Phi^a(t, \Phi^a(s, x))\,.$$

Betrachte für $x \in L_a(U)$ die Kurve $s^a_x(t) := \Phi^a(t, x)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wegen $f(\Phi^a(t, x)) = f(a\Phi(t, a^{-1}x)) = (f \circ L_a)(\Phi(t, a^{-1}x)) = (f \circ L_a)(s^{\Phi}_{a^{-1}x}(t))$, folgt

$$ds^a_x\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = \frac{\partial(f \circ s^a_x)}{\partial t}(0) = \frac{\partial((f \circ L_a) \circ s^{\Phi}_{a^{-1}x})}{\partial t}(0) =$$
$$= ds^{\Phi}_{a^{-1}x}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f \circ L_a) = dL_a \circ ds^{\Phi}_{a^{-1}x}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) =$$
$$= dL_a(X(a^{-1}x))(f)\,.$$

Also gilt

$$ds^a_x\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = (dL_a \circ X \circ L_{a^{-1}})(x) = X(x),\ \ x \in L_a(U). \tag{4.3}$$

Wähle nun $\delta > 0$ und $W \subseteq G$ offen mit $e \in W$ sodaß $\Phi(t, x) \in U$ für $|t| < \delta, x \in W$. Dann folgt für $a \in G$ dass auch $\Phi^a(t, y) \in L_a(U)$ für $|t| < \delta, y \in L_a(W)$. Ist nun $x \in L_a(W)$ und $|u| < \delta$, so folgt mit Bemerkung 3.2.6 dass

$$ds^a_x\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_u\Big) = X(s^a_x(u))\,.$$

Also ist $s^a_x|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ eine Integralkurve von X.

Sei nun $x \in L_a(W) \cap L_b(W)$, dann sind die Kurven $s^a_x|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ und $s^b_x|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ beide Integralkurven von X und $s^a_x(0) = s^b_x(0)$. Also sind sie überall gleich nach Korollar 3.1.12, d.h. es gilt

$$\Phi^a(u, x) = \Phi^b(u, x),\ \ |u| < \delta\,.$$

Eine Abbildung $\Psi : (-\delta,\delta)\times G \to G$ ist also wohldefiniert durch die Vorschrift $\Psi(u,x) := \Phi^a(u,x)$ für ein $a\in G$ mit $x \in L_a(W)$. Offenbar ist $\Psi \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon)\times G, G)$, und $\Psi(0,x)=x$ für alle $x\in G$. Seien $t,s\in(-\delta,\delta), x\in G$, mit $t+s\in(-\delta,\delta)$. Wähle $a\in G$ sodaß $x\in L_a(W)$ und $b\in G$ sodaß $\Psi(s,x)\in L_b(W)$. Dann folgt $\Phi(s,a^{-1}x)\in U$ und daher

$$\Psi(t+s,x)=\Phi^a(t+s,x)=a\Phi(t+s,a^{-1}x)=$$
$$=a\Phi(t,\Phi(s,a^{-1}x))$$

Nun ist $b^{-1}a\Phi(s,a^{-1}x)=b^{-1}\Phi^a(s,x)=b^{-1}\Psi(s,x)\in b^{-1}L_b(W)=W$, also gilt nach (4.2)

$$a\Phi(t,\Phi(s,a^{-1}x))=aa^{-1}b\Phi(t,b^{-1}a\Phi(s,a^{-1}x))=$$
$$=\Phi^b(t,\Phi^a(s,x))=\Psi(t,\Psi(s,x))\,.$$

Wir sehen dass $\{\Psi\}$ ein lokaler Fluss ist. Wegen (4.3) ist sein infinitesimaler Erzeuger gleich X. Nach Proposition 3.3.3 ist X vollständig. Ist Φ^X der globale Fluss von X, so erhalten wir wegen (4.2) dass stets $L_b(\Phi^X(t,x))=\Phi^X(t,L_bx)$.

❑

4.1.10 Bemerkung. Sei Φ ein globaler Fluss und gelte (4.1). Dann ist der infimitesimale Erzeuger von Φ links-invariant. Um dies einzusehen berechne

$$(dL_a\circ X)(x)(f)=dL_a(X(x))(f)=X(x)(f\circ L_a)=ds_x^X\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f\circ L_a)=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(f\circ L_a)(\Phi(h,x))-(f\circ L_a)(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\Phi(h,ax))-f(ax)}{h}=$$
$$=ds_{ax}^x\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f)=X(ax)(f)=(X\circ L_a)(x)(f)\,.$$

4.2 Die Exponentialabbildung

4.2.1 Definition. Ein Homomorphismus der Lie-Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die Lie-Gruppe G heißt eine *1-Parameter-Untergruppe* von G.

4.2.2 Proposition. *Die Beziehung $X\mapsto s_X$ die definiert ist durch*

$$s_X:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&G\\ t&\mapsto&\Phi^X(t,e)\end{array}\right.$$

ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{L}(G)$ und der Menge aller 1-Parameter-Untergruppen von G.

Beweis. Sei $X\in\mathbb{L}(G)$. Dann gilt $s_X\in C^\infty(\mathbb{R},G)$, $s_X(0)=e$ und

$$s_X(t+s)=\Phi^X(t+s,e)=\Phi_s^X(\Phi_t^X(e))=\Phi_s^X(s_X(t))=$$
$$=s_X(t)\cdot\Phi_s^X(e)=s_X(t)\cdot s_X(s)\,.$$

Sei $s:\mathbb{R}\to G$ eine 1-Parameter-Untergruppe und sei $X:=\chi_G^{-1}(\dot s(0))$. Wir zeigen $s=s_X$. Sei $u\in\mathbb{R}$, dann ist

$$s(u+h)=s(u)s(h)=L_{s(u)}(s(h))\,,$$

und damit folgt

$$ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_u\Big) = dL_{s(u)} \circ ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = dL_{s(u)}(X(e)) = X(s(u))\,.$$

Weiters ist $s(0) = e$, also folgt $s(t) = \Phi^X(t,e) = s_X(t)$.

Ist $X \in \mathbb{L}(G)$, so ist $\dot{s}_X(0) = X(e)$. Ist $Y \in \mathbb{L}(G)$ mit $s_X = s_Y$, so folgt $X(e) = Y(e)$ und daher $X = Y$.

❏

4.2.3 Definition. Sei G eine Lie-Gruppe. Die Abbildung

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{L}(G) & \to & G \\ X & \mapsto & s_X(1) \end{cases}$$

heißt die *Exponentialabbildung* von G.

4.2.4 Lemma. *Sei $X \in \mathbb{L}(G)$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $s_X(t) = \exp(tX)$.*

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$s : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & G \\ u & \mapsto & s_X(tu) \end{cases}$$

Dann ist $s \in C^\infty(\mathbb{R}, G)$ und $s(0) = e, s(u+v) = s_X(t(u+v)) = s_X(tu)s_X(tv) = s(u)s(v)$, also ist s eine 1-Parameter-Untergruppe von G. Daher gilt $s = s_Y$ für ein $Y \in \mathbb{L}(G)$, und zwar jenes Y mit $Y(e) = \dot{s}(0)$. Es gilt

$$\dot{s}(0)(f) = ds\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_0\Big)(f) = \lim_{h\to 0} \frac{f(s(h)) - f(e)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(s_X(th)) - f(e)}{h} = t \cdot \frac{\partial (f \circ s_X)}{\partial x}(0) = t \cdot ds\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_0\Big)(f) =$$

$$= tX(e)(f)\,,$$

also ist $\dot{s}(0) = (tX)(e)$. Damit folgt $s = s_{tX}$.

Insbesondere für $u = 1$ erhält man $s_X(t) = s(1) = \exp(tX)$.

❏

4.2.5 Bemerkung. Sei $X \in \mathbb{L}(G)$, Φ^X der globale Fluss von X. Dann gilt

$$\Phi^X(t,a) = a\exp(tX), t \in \mathbb{R}, a \in G\,.$$

Denn wir haben

$$\Phi^X(t,a) = a \cdot \Phi^X(t,e) = a \cdot s_X(t) = a\exp(tX)\,.$$

Wir wollen die beiden folgenden Eigenschaften der Exponentialabbildung explizit festhalten:

(*i*) Ist $X \in \mathbb{L}(G)$, so ist $s : t \mapsto \exp(tX)$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G. Umgekehrt lässt sich jede 1-Parameter-Untergruppe s in dieser Weise darstellen, und zwar mit X sodass $X(e) = \dot{s}(0)$.

(*ii*) Für $X \in \mathbb{L}(G)$ und $a \in G$ ist die Integralkurve von X durch a gegeben als $t \mapsto a\exp(tX)$.

4.2.6 Proposition. *Seien G, H Lie-Gruppen, $\varphi : H \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann ist*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}(H) \arrow[r, "\mathbb{L}\varphi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{L}(G) \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $X \in \mathbb{L}(H)$. Betrachte die Abbildung

$$s : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & G \\ t & \mapsto & \varphi(\exp(tX)) \end{cases}$$

Dann gilt $s(0) = e$, und

$$ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = d\varphi\Big(d\exp(tX)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)\Big) = d\varphi(X(e))\,.$$

Weiters ist s eine 1-Parameter-Untergruppe von G, denn φ ist ein Homomorphismus. Also ist

$$s(t) = \exp(tY)$$

für ein $Y \in \mathbb{L}(G)$, und zwar für jenes mit $Y(e) = d\varphi(X(e))$. Das ist, wegen Proposition 4.1.7, aber gerade $\mathbb{L}\varphi(X)$.

❑

4.2.7 Satz. *Sei G eine Lie-Gruppe und betrachte $\mathbb{L}(G)$ als Mannigfaltigkeit (als endlichdimensionaler Vektorraum). Dann ist $\exp \in C^\infty(\mathbb{L}(G), G)$ und es existieren offene Umgebungen U, V von 0 in $\mathbb{L}(G)$ bzw. von e in G sodaß $\exp|_U$ ein Diffeomorphismus von U auf V ist.*

Beweis. Betrachte die Mannigfaltigkeit $G \times \mathbb{L}(G)$, π_1, π_2 seien die Projektionen $\pi_1 : G \times \mathbb{L}(G) \to G$, $\pi_2 : G \times \mathbb{L}(G) \to \mathbb{L}(G)$. Definiere ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(G \times \mathbb{L}(G))$ durch

$$Y(g, X) := (d\pi_1 \times d\pi_2)^{-1}(X(g), 0),\ (g, X) \in G \times \mathbb{L}(G)\,.$$

Beachte hier, dass $d\pi_1 \times d\pi_2$ ein Diffeomorphismus von $T(G \times \mathbb{L}(G))$ auf $TG \times T\mathbb{L}(G)$ ist.

Für $g \in G$ und $X \in \mathbb{L}(G)$ betrachte die Kurve

$$s(t) := (g \cdot \exp(tx), X),\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Wir zeigen, dass s eine Integralkurve von Y ist: Sei $u \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$d\pi_1 \circ ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = d(g\exp(tX))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_u\Big) = X(g\exp(ux)) = d\pi_1 \circ Y(s(u))$$

$$d\pi_2 \circ ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_u\Big) = d(X)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_u\Big) = 0 = d\pi_2 \circ Y(s(u))\,.$$

Weiters gilt $s(0) = (g, X)$.

Nach Korollar 3.3.7 ist Y vollständig. Sei Φ der globale Fluss von Y. Dann ist $t \mapsto \Phi(t, (g, X))$, $t \in \mathbb{R}$, eine Integralkurve von Y und $\Phi(0, (g, X)) = (g, X)$. Also folgt

$$(g \cdot \exp(tX), X) = \Phi(t, (g, X)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times G \times \mathbb{L}(G), G \times \mathbb{L}(G)) .$$

Setzt man hier speziell $g = e, t = 1$, und wendet π_1 an, so folgt dass $\exp(X) \in C^\infty(\mathbb{L}(G), G)$.

Wir betrachten nun $d\exp$ auf $T_0(\mathbb{L}(G))$. Wähle eine Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $\mathbb{L}(G)$ und sei ψ^{-1} die Karte

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{L}(G) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \end{cases}$$

Sei $y \in T_0(\mathbb{L}(G))$ gegeben. Da ψ eine Karte ist, ist $d\psi_0$ ein Isomorphismus zwischen $T_0(\mathbb{R}^n)$ und $T_0(\mathbb{L}(G))$, also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sodaß

$$y = d\psi\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0 \Big) .$$

Betrachte die Kurve $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $s_1(t) = (\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t)$. Dann gilt

$$ds_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = \frac{\partial f(\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t)}{\partial t}\Big|_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_0 = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0 \Big)(f) .$$

Setze $s := \psi \circ s_1$, dann folgt $ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = y$. Wir erhalten ($X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$)

$$s(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i t X_i = t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = tX ,$$

$$\begin{aligned} d\exp(y) = d\exp \circ ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) &= d(\exp \circ s)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = \\ &= d(\exp(tX))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = X(e). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ist $d\exp(y) = 0$, so folgt also $X(e) = 0$ und daher $X = 0$, und daher $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, und daher $y = 0$. D.h. $d\exp : T_0(\mathbb{L}(G)) \to T_e(G)$ ist injektiv. Da beide die gleiche Dimension haben ist $d\exp$ also ein Isomorphismus. Nach dem Inverse Function Theorem folgt die Behauptung.

❑

Mit Hilfe von Satz 4.2.7 erhalten wir zwei weitere Lie-Korrespondenz. Davor ein Lemma das öfters nützlich ist.

4.2.8 Lemma. *Sei G eine topologische Gruppe, und sei $U \subseteq G$ offen, $e \in U$. Dann gilt:*

(i) Es existiert $V \subseteq G$ offen mit $e \in V \subseteq U$ sodaß $V = V^{-1}$.

(ii) Ist $Z \subseteq G$ offen, $W \subseteq G$, so ist auch ZW und WZ offen.

(iii) Sei zusätzlich G zusammenhängend. Dann erzeugt U die Gruppe G.

Beweis. Da $x \mapsto x^{-1}$ ein Homöomorphismus ist, ist mit U auch U^{-1} offen. Setze $V := U \cap U^{-1}$. Um (ii) zu sehen, beachte dass

$$ZW = \bigcup_{w \in W} Zw, \; WZ = \bigcup_{w \in W} wZ\,.$$

Da links- und rechts-Translationen Homomorphismen sind, ist Zw und wZ offen. Für (iii) sei oBdA angenommen das $U = U^{-1}$. Dann ist

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$$

offen und eine Untergruppe von G. Da das Komplement von H als Vereinigung von Nebenklassen auch offen ist, folgt das $H = G$.

❑

4.2.9 Korollar. *Sei G eine Lie-Gruppe. Ist G kommutativ, so ist auch $\mathbb{L}(G)$ kommutativ. Ist G zusammenhängend, so gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathbb{L}(G)$ mit entsprechenden globalen Flüssen Φ^X und Φ^Y. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi^X_t \circ \Phi^Y_s(n) = \Phi^X(t(s,a)) = \Phi^Y(s,a)\Phi^X(t,e) = \\ = a\exp(sY)\exp(tX)\,,\end{aligned}$$

und genauso $\Phi^Y_s \circ \Phi^X_t(a) = a\exp(tX)\exp(sY)$. Ist G kommutativ, so sind also Φ^X und Φ^Y vertauschbar und daher $[X, Y] = 0$.

Umgekehrt sei G zusammenhängend und $\mathbb{L}(G)$ kommutativ. Sind $a, b \in \exp(\mathbb{L}(G))$, $a = \exp(X), b = \exp(Y)$, so zeigt die obige Rechnung das $a \cdot b = b \cdot a$. Nach Satz 4.2.7 enthält $\exp(\mathbb{L}(G))$ eine Umgebung von e, und erzeugt daher G. Also ist G kommutativ.

❑

4.2.10 Korollar. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, H eine Lie-Gruppe, und seien $f, g : G \to H$ Lie-Gruppen-Homomorphismen. Gilt $\mathbb{L}f = \mathbb{L}g$, so folgt $f = g$.*

Beweis. Seien U, V offene Umgebungen von 0 in $\mathbb{L}(G)$ bzw. von e in G wie in Satz 4.2.7. Dann gilt nach Proposition 4.2.6

$$f|_V = \exp \circ \mathbb{L}f \circ (\exp|_U)^{-1}, \; g|_V = \exp \circ \mathbb{L}g \circ (\exp|_U)^{-1}\,.$$

Ist $\mathbb{L}f = \mathbb{L}g$, so folgt also $f|_V = g|_V$. Da, nach Lemma 4.2.8, (iii), V die Gruppe G erzeugt, und f, g Gruppenhomomorphismen sind, folgt $f = g$.

❑

4.2.11 Korollar. *Seien G, H Lie-Gruppen und $f : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homorphismus. Dann gilt:*

(*i*) *Ist f injektiv, so ist f eine Immersion.*

(*ii*) *Ist f bijektiv, so ist f ein Lie-Gruppen-Isomorphismus.*

Beweis. Seien wieder U, V wie in Satz 4.2.7. Ist f injektiv, so folgt dass $\mathbb{L}f|_U$ injektiv ist. Da $\mathbb{L}f$ linear ist und U eine Umgebung der 0, folgt das $\mathbb{L}f$ injektiv ist. Nun ist $df_e = \chi_H \circ \mathbb{L}f \circ \chi_G^{-1}$ mit den Isomorphismen χ_N, χ_G, also ist df_e injektiv.

Da f ein Homomorphismus ist, gilt für jedes $a \in G$ dass $f \circ L_a = L_{f(a)} \circ f$. Also ist auch

$$df_a = dL_{f(a)} \circ df_e \circ dL_a^{-1} \,,$$

und daher df_a injektiv.

Die zweite Aussage folgt nun mit Proposition 1.5.6.

❑

4.2.12 Proposition. *Seien G, H Lie-Gruppen und sei $f : H \to G$ ein (algebraischer) Gruppenhomomorphismus. Ist f stetig, so ist $f \in C^\infty(H, G)$.*

Beweis. Wegen $f \circ L_a = L_{f(a)} \circ f$ genügt es zu zeigen, dass f auf einer Umgebung von e eine C^∞-Abbildung ist.

Betrachte zunächst den Spezialfall das $H = \mathbb{R}$. Seien U, V offene Umgebungen von 0 in $\mathbb{L}(G)$ bzw. e in G, sodaß $\exp|_U$ ein Diffeomorphismus auf V ist. ObdA sei U eine Kugel. Setze $W := \frac{1}{2}U$ und wähle $t_0 > 0$ so daß $f(t) \in \exp(W)$, $|t| \leq t_0$. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann existieren eindeutige Elemente $X, Y \in W$ mit $\exp(X) = f(\frac{t_0}{n})$, $\exp(Y) = f(t_0)$. Wir zeigen dass $nX = Y$. Da

$$\exp(nX) = \exp(X)^n = f(\frac{t_0}{n})^n = f(t_0) = \exp(Y) \,,$$

und da $\exp|_W$ injektiv ist, genügt es dazu zu zeigen, daß $nX \in W$. Wir zeigen mittels Induktion dass $kX \in W$, $k = 1, \dots, n$. Für $k = 1$ ist dies klar. Sei $k < n$ und $kX \in W$, dann ist $(k+1)X \in U$ und

$$\exp((k+1)X) = f((k+1)\frac{t_0}{n}) \in \exp(W) \,.$$

Da $\exp|_U$ injektiv ist, folgt $(k+1)X \in W$.

Wir haben also $f(\frac{t_0}{n}) = \exp(\frac{1}{n}Y)$. Sei $1 \leq m \leq n$, dann gilt

$$f(\frac{m}{n}t_0) = f\big(\frac{1}{n}\big)^m = \exp\big(\frac{1}{n}Y\big)^m = \exp(\frac{m}{n}Y) \,.$$

Sei $-n \leq m \leq -1$, dann gilt

$$f\big(\frac{m}{n}t_0\big) = f\big(\frac{-m}{n}t_0)^{-1}\big) \exp\big(\frac{-m}{n}Y\big)^{-1} = \exp\big(\frac{m}{n}Y\big) \,.$$

Wir haben also $f(qt_0) = \exp(qY)$ für alle $q \in \mathcal{Q} \cap [-1, 1]$. Da beide Seiten stetig in q sind, folgt dass $f(qt_0) = \exp(qY)$, $q \in [-1, 1]$. D.h.

$$f(t) = \exp\big(t\frac{Y}{t_0}\big), \ |t| \leq t_0 \,,$$

und daher ist $f \in C^\infty((-t_0, t_0), G)$ und daher in $C^\infty(\mathbb{R}, G)$.

Sei nun H beliebig, und wähle eine Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von $\mathbb{L}(H)$. Betrachte die Abbildung $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, G)$ die definiert ist als

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & H \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n) \end{cases}$$

Dann gilt

$$d\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t_j}\Big|_0\Big)(g) = \frac{\partial (g \circ \alpha)}{\partial t_j}(0) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(\exp(hX_j)) - g(e)}{h} = d(\exp(tX_j))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(g) = X_j(e)(g)\,.$$

Da $\{\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}\Big|_0\}$ eine Basis von $T_0(\mathbb{R}^n)$ ist und $\{X_1(e), \dots, X_n(e)\}$ eine Basis von $T_e(H)$ ist, ist $d\alpha$ ein Isomorphismus. Also gibt es offene Umgebungen U, V von 0 in $\mathbb{R}^n$ bzw. von e in H sodaß $\alpha|_U$ ein Diffeomorphismus von U auf V ist. Nun ist f ein stetiger Gruppenhomomorphismus von H nach G, also ist auch

$$t \mapsto f(\exp(tX_j)) : \mathbb{R} \to G$$

ein stetiger Gruppenhomomorphismus und daher in $C^\infty(\mathbb{R}, G)$. Es folgt das $f \circ \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, G)$. Nun ist $(\alpha|_U)^{-1} \in C^\infty(V, \mathbb{R}^n)$ und wir erhalten

$$f|_V = (f \circ \alpha) \circ (\alpha|_U)^{-1} \in C^\infty(V, G)\,.$$

❑

4.2.13 Korollar. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann existiert höchstens eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf G die G zu einer Lie-Gruppe macht.*

Beweis. Die identische Abbildung ist stetig und daher C^∞.

❑

4.2.14 Proposition. *Sei G eine Lie-Gruppe und $X, Y \in \mathbb{L}(G)$. Dann gilt*

(*i*) *Es gibt $\epsilon > 0$ sodaß*

$$\exp(tY) \cdot \exp(tX) = \exp\big(t(Y + X) + t^2 R(t)\big),\ |t| < \epsilon\,,$$

wobei $R \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon), \mathbb{L}(G))$.

(*ii*) *Ist $[X, Y] = 0$, so gilt*

$$\exp(tY) \cdot \exp(tX) = \exp\big(t(Y + X)\big),\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Seien U, V offen in $\mathbb{L}(G)$ bzw. G mit $0 \in U$ bzw. $e \in V$ sodaß $\exp|_U$ ein Diffeomorphismus von U auf V ist. Wähle $\epsilon > 0$ so dass $\exp(tY) \cdot \exp(tX) \in V$, $|t| < \epsilon$, und setze

$$Z(t) := (\exp|_U)^{-1}(\exp(tY) \cdot \exp(tX)),\ |t| < \epsilon\,.$$

Dann ist $Z \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon),\mathbb{L}(G))$. Wähle eine Basis $\{X_1,\ldots,X_n\}$ von $\mathbb{L}(G)$ und bezeichne mit φ die entsprechende Karte:

$$\varphi^{-1}:\begin{cases}\mathbb{R}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{L}(G)\\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) & \mapsto \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\end{cases}$$

Seien $\varphi_j = \pi_j \circ \varphi$ die Komponenten von φ. Dann ist $\varphi_j \circ Z \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon),\mathbb{R})$ und ihre Taylorentwicklung hat die Gestalt

$$(\varphi_j \circ Z)(t) = (\varphi_j \circ Z)'(0)\cdot t + R_j(t)\cdot t^2$$

wobei $R_j(t) \in C^\infty((-\epsilon,\epsilon),\mathbb{R})$.

Schreibe $d\exp \circ dZ\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(e)$ mit gewissen $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann ist nach (4.4)

$$dZ\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = d\varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0\Big),$$

und wir erhalten

$$(\varphi_j \circ Z)'(0) = dZ\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(\varphi_j) = d\varphi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_0\Big)(\pi_j\circ\varphi) = \lambda_j\,.$$

Es folgt

$$Z(t) = \Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\Big)\cdot t + \Big(\sum_{j=1}^n R_j(t) X_j\Big)\cdot t^2\,.$$

Um $d\exp \circ dZ\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)$ zu berechnen seien Φ^X, Φ^Y die globalen Flüsse von X bzw. Y und betrachte die Abbildung

$$\gamma:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad G\\ (t,s) & \longmapsto \quad \Phi^X(t,\Phi^Y(s,e))\end{cases}$$

Es gilt $\gamma(t,s) = \exp(sY)\exp(tX)$, also $\gamma(t,t) = \exp \circ Z(t)$, und

$$d\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{(0,0)}\Big)(f) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\Phi^X(h,e)) - f(e)}{h} = ds_e^X\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = $$
$$= X(e)(f)\,.$$
$$d\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{(0,0)}\Big)(f) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\Phi^Y(h,e)) - f(e)}{h} = ds_e^Y\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = $$
$$= Y(e)(f)$$

Ist $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \delta(t) = (t,t)$, so folgt also wegen $d\delta\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = \frac{\partial}{\partial X_1}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial}{\partial X_2}\Big|_{(0,0)}$, dass

$$d(\gamma\circ\delta)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big) = X(e) + Y(e). \tag{4.5}$$

Die Behauptung (i) ist damit bewiesen.

Um (ii) zu zeigen genügt es den Fall $t = 1$ zu betrachten, denn $[tX,tY] = t^2[X,Y]$. Sei $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}\times G, G)$ definiert als $\Phi(t,x) := \Phi^X(t,\Phi^Y(t,x))$,d.h. $\Phi_t = \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y$. Wegen $[X,Y] = 0$ gilt stets $\Phi_t^X \circ \Phi_s^Y = \Phi_s^Y \circ \Phi_t^X$.Also ist Φ ein globaler Fluss. Sei Z der infinitesimale Erzeuger von Φ. Da $X, Y \in \mathbb{L}(G)$ gilt $\Phi_t^X \circ L_a = L_a \circ \Phi_t^X$ und $\Phi_s^Y \circ L_a = L_a \circ \Phi_s^Y$, also folgt das auch $\Phi_t \circ L_a = L_a \circ \Phi_t$. Wegen Bemerkung 4.1.10 erhalten wir $Z \in \mathbb{L}(G)$. Die Gleichung (4.5) besagt jetzt $Z(e) = X(e) + Y(e)$. Daher folgt $Z = X + Y$. Wir erhalten mit (4.1)

$$\exp(X+Y) = \Phi(1,e) = \Phi^Y(1, \Phi^X(1,e)) = \Phi^X(1,e) \cdot \Phi^Y(1,e) =$$
$$= \exp(X) \cdot \exp(Y)\,.$$

❑

4.3 Untergruppen

4.3.1 Definition. Sei G eine Lie-Gruppe. Ein Paar (H, ι) heißt *Lie-Untergruppe*, wenn

(i) H ist eine Lie-Gruppe.

(ii) (H, ι) ist eine immersed Teilmannigfaltigkeit von G.

(iii) $\iota : H \to G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Wir sagen (H, ι) sei eine *abgeschlossene Untergruppe*, wenn zusätzlich $\iota(H)$ in G abgeschlossen ist.

Sind (H_1, ι_1) und (H_2, ι_2) Lie-Untergruppen von G, so sagen wir sie sind *äquivalent*, wenn es einen Lie-Gruppen-Isomorphismus $\varphi : H_1 \to H_2$ gibt sodaß

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & H_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Ist (H, ι) eine Lie-Untergruppe von G, so ist $\mathbb{L}\iota : \mathbb{L}(H) \to \mathbb{L}(G)$ injektiv. Also können wir mit (H, ι) die Lie-Unteralgebra $\mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H))$ von $\mathbb{L}(G)$ assoziieren. Sind (H_1, ι_1) und (H_2, ι_2) äquivalent, so gilt

$$\mathbb{L}\iota_1(\mathbb{L}(H_1)) = \mathbb{L}\iota_2 \circ \mathbb{L}\varphi(\mathbb{L}(H_1)) = \mathbb{L}\iota_2(\mathbb{L}(H_2))\,,$$

d.h. die Beziehung $(H, \iota) \mapsto \mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H))$ ordnet Äquivalenzklassen von Lie-Untergruppen von G Lie-Unteralgebren von $\mathbb{L}(G)$ zu. Nun eine wesentliche weitere Lie-Korrespondenz:

4.3.2 Satz. *Die Beziehung $(H, \iota) \mapsto \mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H))$ gibt eine Bijektion der Menge von Äquivalenzklassen von zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G auf die Menge aller Lie-Unteralgebren von $\mathbb{L}(G)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathbb{L}(G)$, $d := \dim \mathfrak{h}$. Dann ist $(G \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi_1} G, \mathrm{id} \times \subseteq)$ ein d-Unterbündel von $G \times \mathbb{L}(G) \xrightarrow{\pi_1} G$. Mit Hilfe des Bündelisomorphismus $\varphi : G \times \mathbb{L}(G) \to T(G)$, vgl. Korollar 4.1.5, erhalten wir eine d-Distribution $(G \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi_1} G, \varphi \circ (\mathrm{id} \times \subseteq))$ auf G.

Sei $X \in \mathbb{L}(G)$, dann ist die Abbildung

$$\beta_X : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \times \mathbb{L}(G) \\ g & \longmapsto & (g, X) \end{array} \right.$$

in $\Gamma(G \times \mathbb{L}(G))$. Es gilt

$$\varphi(\beta_X(g)) = \varphi(g, X) = X(g), \ g \in G \,,$$

d.h. $\varphi \circ \beta_X = X$. Es folgt, dass für $X, Y \in \mathbb{L}(G)$

$$[\varphi \circ \beta_X, \varphi \circ \beta_Y] = [X, Y] = \varphi \circ \beta_{[X,Y]} \,.$$

Sei nun $\{X_1, \ldots, X_d\}$ eine Basis von $\mathfrak{h}$ und sei $X \in \Gamma(G \times \mathfrak{h})$. Die Elemente $\beta_{X_1}, \ldots, \beta_{X_d} \in \Gamma(G \times \mathfrak{h})$ haben die Eigenschaft dass für jedes $g \in G$ die Menge $\{\beta_{X_1}(g), \ldots, \beta_{X_d}(g)\}$ eine Basis von $\pi_1^{-1}(g)$ ist. Also gilt nach Bemerkung 3.4.9

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_{X_i}$$

mit gewissen Funktionen $\lambda_i \in C^\infty(G, \mathbb{R})$. Es ist weiter

$$(\varphi \circ X)(g) = \pi_2(X(g))(g) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(g) X_i(g) = \Big(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i \Big)(g)$$

und daher $\left(Y \in \Gamma(G \times \mathfrak{h}), Y = \sum_{d}^{i=1} \mu_j \beta_{X_j}\right)$

$$[\varphi \circ X, \varphi \circ Y] = \Big[\sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^{d} \mu_j X_j \Big] = \sum_{i,j=1}^{d} \big[\lambda_i X_i, \mu_j X_j \big] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} \Big(\lambda_i \mu_j [X_i, X_j] + \lambda_i (X_i(\cdot)\mu_j) X_j + \mu_j (X_j(\cdot)\lambda_i) X_i \Big) \,.$$

Man sieht das

$$[\varphi \circ X, \varphi \circ Y] = \varphi \circ Z$$

wobei $Z \in \Gamma(G \times \mathfrak{h})$ gegeben ist durch

$$Z := \sum_{i,j=1}^{d} \Big(\lambda_i \mu_j \cdot \beta_{[X_i, X_j]} + \lambda_i (X_i(\cdot)\mu_j) \cdot \beta_{X_j} + \mu_j (X_j(\cdot)\lambda_i) \cdot \beta_{X_i} \Big) \,.$$

Also ist $\Gamma(G \times \mathfrak{h})$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(G)$, d.h. $G \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi_1} G$ eine involutorische d-Distribution.

Sei (H, ι) das Blatt der Blättung um G zu $G \times \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi_1} G$ mit $e \in \iota(H)$. Sei $a \in G$, wir zeigen dass $(H, L_a \circ \iota)$ das Blatt mit $a \in (L_a \circ \iota)(H)$ ist. Zunächst ist $(H, L_a \circ \iota)$ eine Integralmannigfaltigkeit, denn

$$d(L_a \circ \iota)(T_x(H)) = dL_a \circ d\iota(T_x(H)) = dL_a(\iota_F(\pi_F^{-1}(\iota(x))) =$$

$$= dL_a(\{\varphi(\iota(x), X) : X \in \mathfrak{h}\}) = \{dL_a(X(\iota(x))) : X \in \mathfrak{h}\} =$$

$$= \{X(L_a \circ \iota(x)) : X \in \mathfrak{h}\} = \iota_F(\pi_F^{-1}(L_a \circ \iota(x)))\,.$$

Klarerweise ist sie zusammenhängend. Sei nun (N, ι_N) irgendeine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit mit $a \in \iota_N(N)$. Dann ist, wegen der gleichen Rechnung wie oben, $(N, L_{a^{-1}} \circ \iota_N)$ eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit mit $e \in (L_{a^{-1}} \circ \iota_N)(N)$. Also existiert α mit

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "L_{a^{-1}}\circ\iota_N"'] & & H \arrow[dl, "\iota"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Es folgt dass auch

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\iota_N"'] & & H \arrow[dl, "L_a\circ\iota"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

also $(N, \iota_N) \preceq (H, L_a \circ \iota)$. Die Blätterung von M zu F ist also gegeben als $\{a \cdot \iota(H) : a \in G\}$.

Wir erhalten dass $\iota(H)$ eine Untergruppe von G ist: Sei $a \in \iota(H)$, dann ist $a^{-1}\iota(H) \cap \iota(H) \neq \emptyset$ denn der Durchschnitt enthält e. Daher folgt $a^{-1}\iota(H) = \iota(H)$, und damit $a^{-1} \in \iota(H)$. Genauso ist $a \cdot \iota(H) \cap \iota(H) \neq \emptyset$ denn er erhält a. Also $a \cdot \iota(H) = \iota(H)$, d.h. $a \cdot b \in \iota(H), b \in \iota(H)$.

Wir können auf H also eine Gruppenstruktur definieren indem wir verlangen dass ι ein Isomorphismus auf $\iota(H)$ sein soll. Wendet man Proposition 3.4.19, (ii), an auf

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\iota\times\iota"] \arrow[drr, dashed] & G \times G \arrow[r, "\cdot"] & G \\ & & H \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, dashed] & G \arrow[r, ".^{-1}"] & G \\ & & H \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

so erhält man dass H eine Lie-Gruppe ist. Weiters gilt

$$d\iota(T_e(H)) = \iota_F(\pi_F^{-1}(e)) = \{X(e) : X \in \mathfrak{h}\}\,,$$

und daher $\mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H)) = \mathfrak{h}$.

Sei nun (H', ι') eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von G mit $\mathbb{L}\iota'(\mathbb{L}(H')) = \mathfrak{h}$. Dann folgt wegen $\mathbb{L}\iota' = \chi_G^{-1} \circ d\iota' \circ \chi_{H'}$ dass

$$d\iota'(T_e(H')) = \{X(e) : X \in \mathfrak{h}\} = \iota_F \pi_F^{-1}(e)\,.$$

Für $a \in H'$ folgt nun

$$\iota_F \pi_F^{-1}(\iota'(a)) = \{X(\iota'(a)) : X \in \mathfrak{h}\} = dL^G_{\iota'(a)}\{X(e) : X \in \mathfrak{h}\} =$$

$$= dL^G_{\iota(a)} \circ d\iota'(T_e(H')) = d(\iota' \circ L^{H'}_a)(T_e(H')) = d\iota'(T_a(H'))\,.$$

Also ist (H', ι') eine Integralmannigfaltigkeit von F. Wegen $e \in \iota'(H')$ muss also $\iota'(H') \subseteq \iota(H)$. Da $\iota^{-1}(\iota'(H'))$ eine offene Umgebung von e in H ist, erzeugt sie die ganze Gruppe. Nun ist $\iota^{-1}(\iota'(H'))$ selbst eine Gruppe, also gleich H. Wir erhalten $\iota'(H') = \iota(H)$ und damit sind H und H' äquivalent.

❑

4.3.3 Korollar. *Sei G eine Lie-Gruppe und (H,ι) eine Lie-Untergruppe von G. Dann ist (H,ι) eine Integralmannigfaltigkeit der involutorischen Distribution $(G\times\mathbb{L}(H) \xrightarrow{\pi_1} G, \varphi\circ(\mathrm{id}\times\subseteq))$. Sei H_0 die Komponente von H die e enthält, dann ist $(H_0,\subseteq)$ eine echt eingebettete Lie-Untergruppe von H und damit auch eine Lie-Untergruppe von G, nämlich $(H_0,\iota|_{H_0})$. Es gilt $\mathbb{L}(\iota|_{H_0})(\mathbb{L}(H_0)) = \mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H))$ und $(H_0,\iota|_{H_0})$ ist das Blatt welches e enthält. Die Blätterung ist gleich der Linksnebenklassenzerlegung von G nach H_0.*

Beweis. H_0 ist Untergruppe, denn $H_0^{-1}\cap H_0 \neq \emptyset$ und $H_0\cdot H_0\cap H_0\neq\emptyset$. Weiters ist jede Komponente offen und daher auch abgeschlossen. Alle weiteren Aussagen folgenden unmittelbar aus dem Beweis von Satz 4.3.2. Beachte dabei nur das $\mathbb{L}(\iota|_{H_0})) = \mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H))$ wegen $T_e(H_0) = T_e(H)$.

❑

4.3.4 Korollar. *Seien $(H,\iota),(H',\iota')$ Lie-Untergruppen von G mit $\iota'(H')\subseteq\iota(H)$. Dann ist $(H',\iota_0^{-1}\iota')$ eine Lie-Untergruppe von H.*

Beweis. (H,ι) ist Integralmannigfaltigkeit einer involutorischen Distribution. Daher kann man Proposition 3.4.19, (ii), anwenden und erhält dass $\iota^{-1}\circ\iota'$ eine C^∞-Abbildung ist.

❑

4.3.5 Bemerkung. Insbesondere sind zwei Lie-Untergruppen (H,ι) und (H',ι') mit $\iota(H)=\iota'(H')$ äquivalent. Hat man also eine (algebraische) Untergruppe H von G, so gibt es höchstens eine Möglichkeit diese zu einer Lie-Untergruppe zu machen.

4.3.6 Bemerkung. Man kann zeigen dass gilt: Sei G eine Lie-Gruppe und sei H eine (algebraische) Untergruppe. Ist auf H eine Mannigfaltigkeitsstruktur (Topologie+Atlas) gegeben, sodaß $(H,\subseteq)$ eine immersed Teilmannigfaltigkeit ist, so ist H eine Lie-Gruppe.

In Verbindung mit dem oben gesagten, erhalten wir dass eine (algebraische) Untergruppe einer Lie-Gruppe auf höchstens eine Weise zu einer immersed Teilmannigfaltigkeit gemacht werden kann.

Von besonderem Interesse sind die eingebetteten bzw. echt eingebetteten Lie-Untergruppen einer Lie-Gruppe G. Klarerweise gilt für jede echt eingebettete Lie-Untergruppe (H,ι) von G dass $\iota(H)$ in G abgeschlossen ist.

4.3.7 Satz (*Closed subgroup theorem*)**.** *Sei G eine Lie-Gruppe und sei H eine (algebraische) Untergruppe von G die in G abgeschlossen ist. Dann existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur (Topologie+Atlas) auf H sodaß $(H,\subseteq)$ zu einer echt eingebetteten Lie-Untergruppe von G wird.*

Vor dem Beweis noch ein Zusammenhang zwischen "eingebettet" und "echt eingebettet".

4.3.8 Proposition. *Sei G eine Lie-Gruppe und (H,ι) eine eingebettete Lie-Untergruppe. Dann ist $\iota(H)$ abgeschlossen in G, d.h. (H,ι) echt eingebettet.*

Beweis. Betrachte die involutorische Distribution $G\times\mathbb{L}(H)$. Wähle eine zusammenhängende Scheibe (S,ι_S) integral zu $G\times\mathbb{L}(\mathcal{H})$ mit $e\in\iota_S(S)$. Dann ist

$\iota^{-1}\iota_S(S)$ offen in H. Da $\iota(H)$ Vereinigung von Blättern ist, ist $\iota_S(S) \subseteq \iota(H)$, also $\iota(\iota^{-1}(\iota_S(S))) = \iota_S(S)$. Da ι eine Einbettung ist, ist $\iota_S(S)$ offen in der Spurtopologie von G auf $\iota(H)$. Sei U offen in G mit $U \cap \iota(H) = \iota_S(S)$. Sei oBdA U so gewählt dass die S definierende Karte auf U definiert ist, dann ist $\iota_S(S)$ abgeschlossen in U. Wähle V, W offene Umgebungen von e in G sodaß $V^{-1}V \subseteq \overline{W} \subseteq U$.

Sei nun $x_n \in \iota(H), x_n \to x$ in G. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodaß $x^{-1}x_n \in V$, $n \geq N$. Dann folgt

$$x_N^{-1}x_n \in V^{-1}V \subseteq \overline{W} \subseteq U,\ n \geq N\,,$$

und damit $x_N^{-1}x \in \overline{V^{-1}V} \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Nun gilt $x_N^{-1}x_n \in \iota(H)$, also $x_N^{-1}x_n \in \iota_S(S)$. Damit ist auch $x_N^{-1}x \in \iota_S(S)$ und daher in $\iota(H)$. Es folgt dass auch $x \in \iota(H)$.

❑

4.3.9 Bemerkung. Um den folgenden Beweis zu motivieren wollen wir das folgende bemerken: Sei G eine Lie-Gruppe und (H, ι) eine Lie-Untergruppe. Dann gilt

$$\mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H)) \subseteq \{X \in \mathbb{L}(G) : \exp(tX) \in \iota(H), t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ist ι eine Einbettung, so gilt sogar Gleichheit. Um dies einzusehen, betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}(H) \arrow[r, "\mathbb{L}\iota"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{L}(G) \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, "\iota"'] & G \end{tikzcd}$$

Ist $X \in \mathbb{L}(H)$, so auch tX für $t \in \mathbb{R}$, also folgt das

$$\exp(t\mathbb{L}\iota(X)) = \exp(\mathbb{L}\iota(tX)) = \iota(\exp(tX)) \in \iota(H)\,.$$

Sei nun ι eine Einbettung. Wähle U offene Umgebung von e in H sodaß $\exp : \exp^{-1}(U) \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $\iota(U)$ offen in $\iota(H)$ in der Spurtopologie von G. Sei $X \in \mathbb{L}(G)$ sodaß stets $\exp(tX) \in \iota(H)$. Es gilt $\lim_{t\to 0} \exp(tX) = e$, also existiert $t_0 > 0$ sodaß für $|t| < t_0$ stets $\exp(tX) \in \iota(U)$. Wähle eine offene Umgebung U' in G sodaß $\exp : \exp^{-1}(U') \to U'$ ein Diffeomorphismus ist, und $t_1 > 0$ sodaß $\exp(tX) \in U'$, $|t| < t_1$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodaß $\frac{1}{n} < \min\{t_0, t_1\}$ und setze

$$Y := \exp^{-1}(\iota^{-1}(\exp(\frac{1}{n}X))) \in \mathbb{L}(H)\,.$$

Dann gilt $\mathbb{L}\iota(Y) = \frac{1}{n}X$ und damit $\mathbb{L}\iota(nY) = X$.

Beweis (von Satz 4.3.7). Setze

$$\mathcal{H} := \{X \in \mathbb{L}(G) : \exp(tX) \in H, t \in \mathbb{R}\}\,,$$

und sei V der von $\mathcal{H}$ in $\mathbb{L}(G)$ aufgespannte Vektorraum.

Wir zeigen, dass V eine Lie-Unteralgebra von $\mathbb{L}(G)$ ist. Da $[.,.]$ bilinear ist, genügt es dazu zu zeigen, daß für $X, Y \in \mathcal{H}$ stets auch $[X, Y] \in V$. Seien also $X, Y \in \mathcal{H}$. Sei für ein $a \in G$ die Abbildung R_a die Rechtsmultiplikation mit a, d.h. $R_a(x) = xa$. Das ist ein Diffeomorphismus von G auf sich. Weiters gilt stets $R_a \circ L_b = L_b \circ R_a$. Es folgt

$$dL_a \circ dR_{\exp(-tX)} \circ Y \circ R_{\exp(tx)} = dR_{\exp(-tx)} \circ Y \circ dR_{\exp(tx)} \circ L_a$$

also ist $dR_{\exp(-tx)} \circ Y \circ R_{\exp(tx)} \in \mathbb{L}(G)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Bezeichne Φ^Y den globalen Fluss von Y und sei $a \in G$ fest. Dann ist $s(t) := a \exp(tY)a^{-1}$ eine 1-Parameter-Untergruppe und daher von der Gestalt $s(t) = \exp(tY')$ mit einem $Y' \in \mathbb{L}(G)$. Um Y' zu berechnen müssen wir $\dot{s}(0)$ berechnen:

$$ds\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a\exp(hY)a^{-1}) - f(e)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ R_{a^{-1}}(\Phi^Y(h,a)) - (f \circ R_{a^{-1}})(\Phi^Y(0,a))}{h} =$$

$$= d\Phi^Y(t,a)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f \circ R_{a^{-1}}) =$$

$$= dR_{a^{-1}} \circ d\Phi^Y(t,a)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\Big)(f) = dR_{a^{-1}} \circ Y(a)(f) =$$

$$= (dR_{a^{-1}} \circ Y \circ R_a)(e)(f)\,.$$

Also gilt

$$s(t) = \exp(t(dR_{a^{-1}} \circ Y \circ R_a))\,.$$

Speziell für $a = \exp(tx)$, t fest, folgt

$$\exp\big(u(dR_{\exp(-tx)} \circ Y \circ R_{\exp(tx)})\big) = \exp(tx) \cdot \exp(uY) \cdot \exp(-tx) \in H$$

da $X, Y \in \mathcal{H}$. D.h. wir haben $dR_{\exp(-tx)} \circ Y \circ R_{\exp(tx)} \in \mathcal{H}$.

Wir bemerken dass für jedes t

$$\Phi_t^X(y) = \Phi^X(t,y) = y \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(y)\,.$$

Es folgt

$$[X,Y](y) = \mathcal{L}_X(Y)(y) = \lim_{h\to 0} \frac{d\Phi_{-h}^X(Y(\Phi^X(h,y))) - Y(y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(dR_{\exp(-hX)} \circ Y \circ R_{\exp(hX)})(y) - Y(y)}{h}$$

d.h. in $\mathbb{L}(G)$ ist

$$[X,Y] = \lim_{h\to 0} \Big[\frac{1}{h} dR_{\exp(-hX)} \circ Y \circ R_{\exp(hX)} - \frac{1}{h} Y\Big]\,.$$

Wegen $dR_{\exp(-tX)} \circ Y \circ R_{\exp(tX)} \in V$ und $Y \in V$ folgt dass auch $[X,Y] \in V$.

Sei (H_0, ι) die zusammenhängende Lie-Untergruppe von G mit $\mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H_0)) = V$. Sei $\{X_1, \dots, X_q\} \subseteq \mathcal{H}$ eine Basis von V, $Y_i = (\mathbb{L}\iota)^{-1}(X_i)$. Betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{L}(H_0) \to H_0$ die definiert ist als

$$\varphi(\sum_{i=1}^q t_i Y_i) := \exp(t_1 Y_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_q Y_q)\,.$$

Dann ist, vgl. den Beweis von Proposition 4.2.12, $d\varphi_0$ ein Isomorphismus. Also ist φ ein Diffeomorphismus von einer Umgebung der 0 in $\mathbb{L}(H_0)$ auf eine Umgebung U von e in H_0. Wegen $\mathbb{L}\iota(Y_i) \in \mathcal{H}$ folgt das $\operatorname{ran} \iota \circ \varphi \subseteq H$. Da H_0 von U erzeugt wird, folgt das $\iota(H_0) \subseteq H$. Es folgt auch dass $\mathcal{H} = V$ ist, denn nach Bemerkung 4.3.9 gilt

$$V = \mathbb{L}\iota(\mathbb{L}(H_0)) \subseteq \{X \in \mathbb{L}(G) : \exp(tX) \in \iota(H_0), t \in \mathbb{R}\} \subseteq$$

$$\subseteq \{X \in \mathbb{L}(G) : \exp(tX) \in H, t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{H}\,.$$

Als nächstes zeigen wir, dass jede hinreichend kleine Umgebung von e in H_0 durch ι auf eine Umgebung von e in H mit der Spurtopologie von G abgebildet wird. Dazu schreibe $\mathbb{L}(G) = \mathcal{H} \oplus W$ und betrachte die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{H} \oplus W & \longrightarrow \quad G \\ (v, w) & \mapsto \quad \exp(v) \cdot \exp(w) \end{cases}$$

Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Proposition 4.2.14, wähle dazu Basen $X_1, \ldots, X_k$ von $\mathcal{H}$ und $Y_1, \ldots, Y_{m-k}$ von W und betrachte

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j Y_j) = \exp(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i) \exp(\sum_{j=1}^{k} \mu_j Y_j)\,,$$

zeigt das $d\varphi_0$ ein Isomorphismus ist. Daher existiert eine offene Umgebung N von 0 in $\mathbb{L}(G)$ sodaß $\varphi|_N$ ein Diffeomorphismus von N auf die in G offene Menge $\varphi(N)$ ist. Weiters wähle eine offene Umgebung N' von e in H_0 sodaß $\exp : \exp^{-1}(N') \to N'$ ein Diffeomorphismus ist. Sei nun U eine Umgebung von e in H_0 sodaß $U \subseteq N'$ und $\mathbb{L}\iota(\exp^{-1}(U)) \times \{0\} \subseteq N$.

Angenommen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $H \setminus \iota(U)$ mit $x_k \to e$ in der Topologie von G. Dann ist, für hinreichend große Indizes k, stets $x_k \in \varphi|_{\mathbb{L}\iota(\exp^{-1}(U))\times W)}$ und wir können schreiben

$$x_k = \exp(v_k) \cdot \exp(w_k)$$

mit gewissen $v_k \in \mathbb{L}\iota(\exp^{-1}(U))$, $w_k \in W$. Da $x_k \notin \iota(U)$ gilt stets $w_k \neq 0$. Sei W_0 die Einheitskugel in W, und wähle $n_k \in \mathbb{N}$ sodaß $n_k w_k \in W_0$ aber $(n_k + 1)w_k \notin W_0$. Dies ist, für hinreichend große Werte von k sicher möglich, denn $w_k = \pi_2 \circ \varphi^{-1}(x_k) \to 0$ und $w_k \neq 0$. Da $\overline{W_0}$ kompakt ist existiert eine Teilfolge von $n_k w_k$ die einen Grenzwert w in W hat, wir bezeichnen diese wieder mit $n_k w_k$. Da $w_k \to 0$ folgt $w = \lim_{k\to\infty} n_k w_k = \lim_{k\to\infty}(n_k + 1)w_k$, und daher $w \notin W_0$. Also ist sicher $w \neq 0$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$ und schreibe $tn_k = s_k + t_k$ mit $s_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq t_k < 1$. Dann gilt $t_k w_k \to 0$ und daher

$$\exp(tw) = \lim_{k\to\infty} \exp(tn_k w_k) = \lim_{k\to\infty} \exp((s_k + t_k)w_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big(\exp(s_k w_k) \cdot \exp(t_k w_k)\Big) = \lim_{k\to\infty} \exp(s_k w_k) = \lim_{k\to\infty} \exp(w_k)^{s_k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\exp(-v_k) x_k)^{s_k}$$

Da $v_k \in \mathcal{H}$ ist folgt $\exp(-v_k) \in H$. Da auch $x_k \in H$ und H eine Untergruppe von G ist folgt $(\exp(-v_k)x_k)^{s_k} \in H$. Da H abgeschlossen in G ist, folgt $\exp(tw) \in$

H. Nun war $t \in \mathbb{R}$ beliebig, wir haben also gezeigt dass $w \in \mathcal{H}$, und daher $w \in W \cap \mathcal{H}$. Da $w \neq 0$ ist, ist das ein Widerspruch.

Also kann es keine Folge $x_k \to e$ in G geben mit $x_k \in H \setminus \iota(U)$. Da G das 1-te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, folgt dass $\iota(U)$ eine Umgebung von e in H in der Spurtopologie von G ist.

Es folgt dass $\iota : H_0 \to H$ in H_0 offene Mengen auf in H mit der Spurtopologie offene Mengen abbildet, also ist $\iota : H_0 \to H$ ein Homöommorphismus und $\iota(H_0)$ offen in der Spurtopologie. Es folgt dass $\iota : H_0 \to \iota(H_0)$ ein Homöomorphismus von H_0 auf $\iota(H_0)$ mit der Spurtopologie von G ist, d.h. (H_0, ι) ist eine eingebettete Lie-Untergruppe von G. Nach Proposition 4.3.8 ist $\iota(H_0)$ abgeschlossen in G also auch in H. Also ist $\iota(H_0)$ eine zusammenhängende offen-abgeschlossene Teilmenge von H die e enthält, und daher ist $\iota(H_0)$ die Komponente von H die e enthält. Die Menge aller Komponenten von H ist gegeben als $\{L_a(\iota(H_0)) : a \in H\}$.

Wir definieren nun auf H eine Mannigfaltigkeitsstruktur. Als Topologie wählen wir die Spurtopologie von G. Betrachte eine Komponente $L_a(\iota(H_0))$ von H, und sei $b \in L_a(\iota(H_0))$. Für eine Karte (U, φ) von H_0 um $\iota^{-1}(a^{-1}b)$ setze $U' := L_a(\iota(U))$ und $\varphi' = \varphi \circ L_a^{-1} \circ \iota^{-1}$. Dann ist U' offen in H und φ' ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$. Sind (U', φ') und (U'', φ'') zwei auf diese Art entstehende Karten von H, so ist $\varphi'' \circ \varphi'^{-1}$ auf Punkten gemeinsamen Definitionsbereiches C^∞, denn $U' \cap U'' \neq \emptyset$ kann überhaupt nur auftreten, wenn U' und U'' in der selben Komponente von H liegen.

Da $\iota : H_0 \to G$ eine Einbettung ist und L_a Diffeomorphismen, folgt das die Inklusion $\subseteq : H \to G$ eine Einbettung ist. Wegen Proposition 1.5.8 folgt das H eine Lie-Gruppe ist. Also ist $(H, \subseteq)$ eine echt eingebettete Lie-Untergruppe von G.

❑

4.3.10 Korollar. *Sei G eine Lie-Gruppe und (H, ι) eine Lie-Untergruppe sodaß $\iota(H)$ abgeschlossen in G ist. Dann ist ι eine echte Einbettung.*

Beweis. Nach Satz 4.3.7 existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $\iota(H)$ die $\iota(H)$ zu einer echt eingebetteten Lie-Untergruppe von G macht. Nach Bemerkung 4.3.5 ist diese äquivalent zu der ursprünglich gegebenen, also ist ι eine Einbettung.

❑

Literaturverzeichnis

[C] L. Conlon: *Differentiable Manifolds,* 2.Auflage, Birkhäuser Verlag 2001.

[W] F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer Verlag 1983.

[K] H. Klein: *Lie Gruppen,* .

[M] P. Michor: *Topics in Differential Geometry,* .

Index

Der(A), 30
$\Gamma(E)$, 51
$\dot{s}(x)$, 37
$\mathfrak{X}(M, M)$, 33
$\mathfrak{X}(U, M)$, 33
$\mathbb{L}(G)$, 63

Ableitung, 9
Algebra
    $K-$, 9
    assoziativ, 30
    Lie-, 29
Atlas, 1

Bündel
    k-Unter-, 53
    $n-$, 50
    trivialisierbares, 51
Bündelhomomorphismus, 50
Bündelisomorphismus, 51
Bündelprojektion, 11
Blätterung, 59
Blatt, 60

Derivation, 30
Diffeomorphismus, 3
Differential, 11
differenzierbare Abbildung, 3
differenzierbare Mannigfaltigkeit, 1
differenzierbare Struktur, 1
Distribution
    $k-$, 53
    integrierbare k-, 54
    involutorische, 54

Einbettung, 20
    echte, 20
Exponentialbildung, 68

f-assoziiert, 35
Faser, 50
Fluss
    globaler, 44
    lokaler, 38
    maximaler lokaler, 40
    vertauschbare, 47
Funktionskeim, 10

Homomorphismus
    von Lie-Algebra, 29

Immersion, 20
infinitesimaler Erzeuger, 39
Integralmannigfaltigkeit, 54

Jacobi-Identität, 29

Karte, 1
Kommutator, 30
Kurve, 37
    Integral-, 37

Lie-Ableitung, 42
Lie-Gruppe, 63
    Homomorphismus, 63
Lie-Klammer, 29
links-Translation, 63
lokal endlich, 4
lokalkompakt, 1

Mannigfaltigkeit
    Produkt-, 3

offene Überdeckung, 4

parallelisierbar, 51

Satz
    Closed subgroup theorem, 78
    Inverse Function Theorem, 17
    von Frobenius, 54
Scheibe, 21
Schnitt
    C^∞, 51

Tagentialbündel
    Mannigfaltigkeitsstruktur des, 16
Tangentialbündel, 11
Tangentialraum, 11
Tangentialvektor, 11, 37
Teilmannigfaltigkeit
    eingebettete, 20
    immersed, 20
    echt eingebettete, 20

Untergruppe
    äquivalente, 75
    1-Parameter-, 67
    abgeschlossen, 75
    Lie-, 75
Urysohn Lemma, 8

Vektorbündel, 50
Vektorfeld
    auf U, 33
    vertauschbare, 47
    links-invariantes, 63
    vollständiges, 44
Verfeinerung, 4
vollständig regulär, 1

Zerlegung der Eins, 4
    mit gleichen Indizes untergeordnet, 4
    untergeordnet, 4