Komplexe Analysis im Einheitskreis

SS 2012

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Harmonische Funktionen

1.0.1 Definition. Sei Ω eine offene Menge in der komplexen Zahlenebene. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *harmonisch* in Ω, falls $u(z)$ in Ω als Funktion der zwei reellen Variablen $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ zwei mal stetig differenzierbar ist und falls gilt

$$\Delta u = 0\,.$$

Dabei bezeichnet Δ den *Laplace Operator*

$$(\Delta u)(z) := u_{xx}(z) + u_{yy}(z)\,.$$

Da der Laplace Operator linear ist, bildet die Menge aller in Ω harmonischen Funktionen einen Vektorraum (über $\mathbb{C}$). Weiters ist mit einer Funktion u auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{u}$, die definiert ist als $\overline{u}(z) := \overline{u(z)}$, harmonisch. Beachte jedoch auch, daß das Produkt von harmonischen Funktionen nicht notwendig harmonisch ist.

Wir bemerken, daß harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist: Hat jeder Punkt z_0 von Ω eine Umgebung $U(z_0)$ sodaß $u|_{U(z_0)}$ harmonisch in $U(z_0)$ ist, so ist u harmonisch in Ω.

1.0.2 Beispiel. Sei f analytisch in in Ω, d.h. sei f an jeder Stelle z von Ω im komplexen Sinne differenzierbar. Dann gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*: Schreibt man $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$, und $z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$, so gilt

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x\,.$$

Da f beliebig oft (komplex) differenzierbar ist, und damit u und v beliebig oft nach x und y differenzierbar sind, folgt mit dem Satz von Schwartz über die gemischten partiellen Ableitungen das

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},\ v_{xx} = -u_{yx} = u_{xy} = v_{yy}\,.$$

Es sind also $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ und damit auch f, harmonisch in Ω.

Direkt aus der Definition einer harmonischen Funktion wollen wir das folgende Eindeutigkeitsprinzip herleiten:

1.0.3 Proposition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt. Weiters sei u eine auf $\overline{\Omega}$ stetige und in Ω harmonische Funktion. Bezeichne $\partial\Omega$ den Rand von Ω, sodaß also $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Dann gilt: Ist $u|_{\partial\Omega} = 0$, so folgt $u = 0$.*

Beweis. Da mit u auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$ stetig auf $\overline{\Omega}$ und harmonisch in Ω sind, genügt es den Fall das u reellwertig ist zu betrachten. Wir nehmen indirekt an es existierte $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > 0$ und führen diese Annahme auf einen Widerspruch.

Da Ω beschränkt ist, ist $\overline{\Omega}$ kompakt, und daher existiert eine Konstante $M > 0$ sodaß

$$|z - z_0|^2 < M,\ z \in \overline{\Omega}\,.$$

Wähle $\delta > 0$ sodaß $\delta M < u(z_0)$ und betrachte die Funktion

$$g(z) := u(z) + \delta(|z - z_0|^2 - M),\ z \in \overline{\Omega}\,.$$

Diese Funktion ist stetig auf $\overline{\Omega}$, nimmt also an einer Stelle $z_1 \in \overline{\Omega}$ ein Maximum an. Wegen $g(z) < 0$ auf $\partial\Omega$ und $g(z_0) > 0$, muß z_1 in Ω liegen. Daher folgt $(\Delta g)(z_1) = g_{xx}(z_1) + g_{yy}(z_1) \le 0$. Andererseits gilt nach der Definition von g

$$(\Delta g)(z) = (\Delta u)(z) + 4\delta = 4\delta > 0,\ z \in \Omega\,,$$

ein Widerspruch. Wir schliessen das $u \le 0$.

Wendet man das eben bewiesene auf die Funktion $-u$ an, so erhält man das auch $u \ge 0$.

❑

Man kann in dieser Aussage weder die Voraussetzung der Beschränktheit von Ω noch die der Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega}$ weglassen. Das zeigen die Beispiele

$$\Omega := \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},\ u(z) := \operatorname{Im} z\,,$$

$$\Omega := \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},\ u(z) := \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}\,.$$

1.1 Das Poisson Integral

1.1.1 Definition. Der *Poisson Kern* $P_r(t)$ ist definiert als

$$P_r(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int},\ 0 \le r < 1, t \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Reihe ist für jedes $r_0 \in [0,1)$ auf der Menge $[0, r_0] \times \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. Daher ist $P_r(t)$ wohldefiniert und eine stetige Funktion auf $[0,1) \times \mathbb{R}$.

Ist $0 \le r < 1$, $t, \theta \in \mathbb{R}$, und setzen wir $z = re^{i\theta}$, $\zeta = e^{it}$, so berechnet man

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{z}{\zeta}\big)^n =$$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{z}{\zeta}}{1 - \frac{z}{\zeta}} = 2 \operatorname{Re} \big(\frac{1}{2} + \frac{z}{\zeta - z}\big) = 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}z}{\zeta - z} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{(\zeta + z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{1 - \overline{\zeta} z - \zeta \overline{z} + |z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\,. \tag{1.1}$$

Insbesondere erhält man die Darstellung

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},\ 0 \le r < 1, t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

1.1.2 Lemma. *Der Poisson Kern hat die Eigenschaften*

(i) *Für* $0 \leq r < 1$ *und* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $P_r(t) > 0$.

(ii) *Für* $0 \leq r < 1$ *gilt* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1$.

(iii) *Für jedes offene Intervall* I *um* 0 *gilt*

$$\lim_{r\to 1} \sup_{t\in[-\pi,\pi]\setminus I} P_r(t) = 0\,.$$

Es gilt stets $P_r(t) = P_r(-t)$, $P_r(t+2\pi) = P_r(t)$, *sowie* $P_r(t) < P_r(t')$ *für* $0 < t' < t \leq \pi$, $0 < r < 1$.

Beweis. Die Eigenschaften (i) und (iii) sowie die letzten Beziehungen folgen unmittelbar aus (1.2). Die Eigenschaft (ii) folgt aus der Definition von $P_r(t)$, da für jedes $r < 1$ die Reihe gleichmäßig in t konvergiert und daher gliedweise integriert werden darf.

❑

1.1.3 Bemerkung. Eine Familie von Funktionen mit den Eigenschaften (i)-(iii) nennt man auch *approximative identity*, denn die Maße $\frac{1}{2\pi}P_r(t)\,dt$ approximieren die δ-Distribution bei 0. Genauer gesagt gilt $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}P_r(t)\,dt = \delta_0$ wobei δ_0 das Punktmaß bei 0 mit Masse 1 bezeichnet und der Grenzwert in der schwach-* Topologie des Dualraumes von $(C([-\pi,\pi]),\|.\|_\infty)$ zu verstehen ist.

Zur Wiederholung: Der *Darstellungssatz von Riesz* besagt das für einen kompakten Hausdorff-Raum X der Dualraum von $(C(X),\|.\|_\infty)$ isometrisch isomrph ist zum Raum der komplexen regulären Borelmaße μ auf X versehen mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$. Diese Isomorphie wird vermittelt durch die Beziehung

$$\mu \mapsto \phi_\mu(f) := \int_X f\,d\mu,\ f \in C(X)\,.$$

Dabei entsprechen die endlichen positiven Maße genau jenen Funktionalen welche allen nichtnegativen Funktionen nichtnegative Zahlen zuweisen. In den bei uns auftretenden Fällen, $X = \mathbb{T}$ oder ähnliches, ist die Voraussetzung der Regularität an ein Borelmaß automatisch erfüllt.

Um nun die anfangs gemachte Behauptung einzusehen sei $f \in C([-\pi,\pi])$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ sodaß $|f(t) - f(0)| < \epsilon$ für $|t| < \delta$. Wähle $0 \leq r_0 < 1$ sodaß

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} P_r(t) < \epsilon,\ r_0 \leq r < 1\,.$$

Dann gilt für solche r

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t)\,dt - f(0)\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(0))P_r(t)\,dt\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(0)|P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(t)-f(0)|}_{<\epsilon}P_r(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)}\underbrace{|f(t)-f(0)|}_{\leq 2\|f\|_\infty}\underbrace{P_r(t)}_{<\epsilon}\,dt \leq \epsilon\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}P_r(t)\,dt}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty\epsilon\,.$$

Es ist also $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t)\,dt = f(0) = \int_{[-\pi,\pi]} f\,d\delta_0$.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{T}$ die Einheitskreislinie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

1.1.4 Definition. Sei $P(z,\zeta)$ auf $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ definiert als

$$P(z,\zeta) := \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,.$$

Ist μ ein komplexes (insbesondere also endliches) Borel-Maß auf $\mathbb{T}$, so ist das *Poisson Integral* $\mathcal{P}[d\mu]$ von μ definiert als

$$\mathcal{P}[d\mu](z) := \int\limits_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta),\ \ z \in \mathbb{D}\,.$$

1.1.5 Bemerkung.

(*i*) Bezeichne hier und im folgenden immer λ das *normierte Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{T}$. Das ist das derart normierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}$ welches die Eigenschaft

$$\lambda(\{z \in \mathbb{T} :\ \alpha \le \arg z \le \beta\}) = \frac{1}{2\pi}(\beta - \alpha),\ \ 0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$$

hat. Begriffe wie $L^2(\mathbb{T})$ oder ähnliches beziehen sich, wenn nicht anders gesagt stets auf dieses Maß.

Ist $f \in L^1(\mathbb{T})$, so schreiben wir für $\mathcal{P}[f\, d\lambda]$ auch kürzer $\mathcal{P}[f]$.

(*ii*) Wie wir in der Rechnung (1.1) gesehen haben, gilt

$$P(z,\zeta) = P_{|z|}(\arg z - \arg \zeta),\ \ z \in \mathbb{D}, \zeta \in \mathbb{T}\,.$$

Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so gilt also

$$\mathcal{P}[f](re^{i\theta}) = \int\limits_{\mathbb{T}} P(re^{i\theta},\zeta) f(\zeta)\, d\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt,$$

d.h. das Poisson Integral von f ist die bekannte Faltung der Funktionen $f(e^{it})$ und $P_r(t)$. Man interpretiert auch im allgemeinen $\mathcal{P}[d\mu]$ als Faltung des Poisson Kerns mit dem Borel-Maß μ. Dieses Thema gehört in die sogenannte Harmonische Analysis und würde hier weit führen. führen.

(*iii*) Ist μ reell, so ist $\mathcal{P}[d\mu]$ der Realteil der in $\mathbb{D}$ analytischen Funktion

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu, z \in \mathbb{D}\,.$$

Insbesondere ist also $\mathcal{P}[d\mu]$ harmonisch in $\mathbb{D}$. Da sich jedes komplexe Maß in Real- und Imaginärteil zerlegen läßt, folgt das stets $\mathcal{P}[d\mu]$ harmonisch in $\mathbb{D}$ ist. Die Umkehrung gilt nicht; es läßt sich nicht jede in $\mathbb{D}$ harmonische Funktion als Poisson Integral darstellen.

(*iv*) Wie wir in der Rechnung (1.1) gesehen haben, gilt

$$P(z,\zeta) = 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)^n}\,.$$

Sei μ ein komplexes Borel-Maß sodaß also $u := \mathcal{P}[d\mu]$ eine in $\mathbb{D}$ harmonische Funktion ist. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$\mathcal{P}[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta)\; z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \zeta^{n}\, d\mu(\zeta)\; \overline{z}^n .$$

Wir bemerken das u genau dann sogar analytisch in $\mathbb{D}$ ist, wenn

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \zeta^n\, d\mu(\zeta) = 0,\ n = 1, 2, 3, \dots .$$

Die Zahlen

$$c_n := \int\limits_{\mathbb{T}} \zeta^n\, d\mu(\zeta),\ n \in \mathbb{Z},$$

heißen auch die *Momente* oder *Fourierkoeffizienten* des Maßes μ.

Die Frage nach der Darstellbarkeit einer in $\mathbb{D}$ harmonischen Funktion als Poisson Integral eines Maßes oder einer Funktion mit gewissen Eigenschaften spielt eine wesentliche Rolle in der Theorie der harmonischen Funktionen. Wir werden diese Frage später ausführlich behandeln, siehe Satz 1.4.1. Bevor wir ein erstes Ergebnis in dieser Richtung zeigen (Satz 1.1.9), wollen wir uns überlegen das, falls eine Funktion u eine Darstellung als Poisson Integral hat, das darstellende Maß jedenfalls eindeutig ist.

1.1.6 Satz (Stieltjessche Umkehrformel)**.** *Sei μ ein komplexes Borel-Maß und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Weiters seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b - a < 2\pi$, und $\gamma := \{\zeta \in \mathbb{T} : a < \arg \zeta < b\}$ der offene Bogen mit Endpunkten $\alpha := e^{ia}$ und $\beta := e^{ib}$. Dann gilt*

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_a^b u(re^{i\theta})\, d\theta = \mu(\gamma) + \frac{1}{2}\mu(\{\alpha\}) + \frac{1}{2}\mu(\{\beta\}) .$$

Zum Beweis benötigen wir

1.1.7 Lemma. *Betrachte für $0 < r < 1$ die Funktion*

$$J(r, t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t P_r(\theta)\, d\theta,\ t \in \mathbb{R} .$$

Für jedes r ist $J(r, t)$ eine stetige ungerade und monoton wachsende Funktion. Es gilt $J(r, 2\pi) = 1$ sowie $J(r, \pi) = \frac{1}{2}$. Insbesondere ist $J(r, t)$ für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ gleichmäßig bezüglich r beschränkt. Weiters gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} J(r, t) = \frac{1}{2},\ 0 < t < 2\pi .$$

Beweis. Da $P_r(\theta)$ stetig nichtnegativ und gerade ist, folgt die erste Behauptung. Die Behauptung $J(r, 2\pi) = 1$ folgt wegen Lemma 1.1.2, (ii), und der Tatsache das $P_r(\theta)$ 2π-periodisch ist. Nun ist, wieder mit Lemma 1.1.2, (ii),

$$J(r, \pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} .$$

Die Funktionen $J(r,t)$ und

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\big(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{t}{2}\big)$$

sind auf $(0,2\pi)$ stetig differenzierbar und haben die gleiche Ableitung. Weiters stimmen sie an der Stelle $t=\pi$ überein. Es folgt das

$$J(r,t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\big(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{t}{2}\big),\ t\in(0,2\pi)\,.$$

Wir erhalten nun unmittelbar $\lim_{r\nearrow 1} J(r,t)=\frac{1}{2}$, $t\in(0,2\pi)$.

❑

Beweis. (von Satz 1.1.6) Betrachte die Funktion $\chi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ die definiert ist als

$$\chi(\zeta):=\begin{cases}1 & ,\ \zeta\in\gamma\\ \frac{1}{2} & ,\ \zeta=\alpha,\beta\\ 0 & ,\ \text{sonst}\end{cases}$$

Nun gilt nach dem Satz von Fubini für jedes $r\in(0,1)$

$$\int\limits_{[a,b]} u(r\xi)\,d\lambda(\xi)-\mu(\gamma)-\frac{1}{2}\mu(\{\alpha\})-\frac{1}{2}\mu(\{\beta\})=$$

$$=\int\limits_{[a,b]}\int\limits_{\mathbb{T}} P(r\xi,\zeta)\,d\mu(\zeta)\,d\lambda(\xi)-\int\limits_{\mathbb{T}}\chi(\zeta)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{[a,b]} P(r\xi,\zeta)\,d\lambda(\xi)-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{a-\arg\zeta}^{b-\arg\zeta} P_r(\theta)\,d\theta-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(J(r,b-\arg\zeta)-J(r,a-\arg\zeta)-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)$$

Nach Lemma 1.1.7 ist der Integrand gleichmäßig bezüglich r beschränkt. Weiters strebt er punktweise gegen Null für $r\nearrow 1$: Denn ist $\zeta\in\gamma$, so ist $a-\arg\zeta<0$, $b-\arg\zeta>0$, also $J(r,a-\arg\zeta)\to-\frac{1}{2}$, $J(r,b-\arg\zeta)\to\frac{1}{2}$, $\chi(\zeta)=1$. Die restlichen Fälle behandelt man genauso. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt die Behauptung.

❑

1.1.8 Korollar. *Seien μ,ν zwei komplexe Borel-Maße und gelte $\mathcal{P}[d\mu]=\mathcal{P}[d\nu]$. Dann ist $\mu=\nu$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen dass $\mathcal{P}[d\mu]=0$ impliziert $\mu=0$. Sei γ ein beliebiger offener Bogen auf $\mathbb{T}$. Wähle Bögen γ_n mit $\gamma_1\subseteq\gamma_2\subseteq\dots$ und $\gamma=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma_n$, sodaß die für die Endpunkte $\alpha_n = e^{ia_n}$, $\beta_n = e^{ib_n}$ stets gilt $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\beta_n\}) = 0$. Dann gilt

$$\mu(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \mu\gamma_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} \mathcal{P}[d\mu](re^{i\theta})\, d\theta = 0\,.$$

Da die offenen Bögen die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{T}$ erzeugen, folgt $\mu = 0$.

❑

1.1.9 Satz (Poissonsche Integraldarstellung)**.** *Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so ist die Funktion*

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & ,\ |z| = 1 \\ \mathcal{P}[f](z) & ,\ |z| < 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$.

Umgekehrt, sei u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Dann ist u in $\mathbb{D}$ das Poisson Integral seiner Randwerte:

$$u(z) = \mathcal{P}[u(e^{it})](z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big) u(\zeta)\, d\lambda(\zeta),\ \ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Sei $f \in C(\mathbb{T})$, dann gilt

$$|\mathcal{P}[f](re^{it})| = \Big|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt\Big| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| P_r(\theta - t)\, dt \le$$

$$\le \|f\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, dt}_{=1} = \|f\|_\infty\,.$$

D.h. es gilt für $f \in C(\mathbb{T})$, wenn F wie in (1.3) definiert wird, stets

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |F(z)| = \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |f(\zeta)|\,. \tag{1.4}$$

Ist f ein trigonometrisches Polynom, $f(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, so ist wie eine Rechnung zeigt (Anmerkung: Faltung entspricht Multiplikation der Fourier-Koeffizienten und der Poisson Kern P_r ist gerade jene Funktion deren Fourier-Koeffizienten gleich $r^{|n|}$ sind)

$$\mathcal{P}[f](re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta}\,.$$

Offensichtlich ist in diesem Fall F stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$.

Sei nun $f \in C(\mathbb{T})$ beliebig. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es eine Folge trigonometrischer Polynome f_n mit $f_n \to f$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Es folgt mit (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |F_n(z) - F(z)| = 0\,,$$

also ist auch F stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Das F harmonisch in $\mathbb{D}$ ist haben wir schon in Bemerkung 1.1.5, (iii), gesehen.

Sei umgekehrt u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Nach dem bereits bewiesenen hat auch die Funktion $F(z)$ die durch (1.3) definiert ist ausgehend von der Funktion $f(e^{it}) := u(e^{it})$ diese Eigenschaften. Nach dem Eindeutigkeitsprinzip Proposition 1.0.3 folgt $u = F$.

❑

1.1.10 Korollar (Poisson-Jensen Formel)**.** *Ist u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und analytisch in $\mathbb{D}$, dann gibt es eine reelle Konstante c sodaß*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \operatorname{Re} u(e^{it})\, dt + ic,\ \ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} u(z)$ ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Also gilt $\operatorname{Re} u(z) = \mathcal{P}[\operatorname{Re} u(e^{it})](z)$, $z \in \mathbb{D}$. Nach Bemerkung 1.1.5, (iii), ist $\mathcal{P}[\operatorname{Re} u(e^{it})]$ der Realteil der in $\mathbb{D}$ analytischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \operatorname{Re} u(e^{it})\, dt\,.$$

Nun ist aber eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante eindeutig bestimmt.

❑

1.1.11 Korollar. *Sei u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Dann gilt*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\, dt\,.$$

Beweis. Es ist $u(z) = \mathcal{P}[u(e^{it})](z)$, $z \in \mathbb{D}$. Setze speziell $z = 0$.

❑

1.1.12 Bemerkung. Die Aussage von Satz 1.1.9 kann interpretiert werden als ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das sogenannte *Dirichletsche Randwertproblem* für den Einheitskreis. Dabei fragt man nach der Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung

$$(\Delta u)(z) = 0,\ \ z \in \mathbb{D}\,,$$

zu vorgegebenen Randwerten u_0:

$$u(e^{it}) = u_0(e^{it}),\ \ t \in [0, 2\pi)\,.$$

Satz 1.1.9 besagt nun: Zu jeder stetigen Randbedingung existiert genau eine in $\overline{\mathbb{D}}$ stetige Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Diese ist gegeben durch das Poisson Integral der Randbedingung.

1.1.13 Bemerkung. Bezeichne mit $D(a, R)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius R. Aus den obigen Resultaten erhält man mittels Variablentransformation entsprechende Resultate für Funktionen die harmonisch in einer Kreisscheibe $D(a, R)$ sind. Der Poisson Kern für $D(a, R)$ ist gegeben als

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}},\ \ 0 \le r < R, t, \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Ist also u stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$, so gilt

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} u(a+Re^{it})\,dt,\ 0\le r<R, \theta\in[0,2\pi)\,.$$

Man spricht von der *Poissonschen Integraldarstellung für* $D(a,R)$.

1.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

1.2.1 Definition. Sei $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ eine offene Menge und $u:\Omega\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir sagen u hat die *Mittelwerteigenschaft*, wenn gilt: Für jede Kreisscheibe $D(a,R)$ mit $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,dt\,.$$

1.2.2 Satz (Maximumprinzip). *Sei u eine stetige und reellwertige Funktion auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ (d.h. auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$) und habe u die Mittelwerteigenschaft. Nimmt u in Ω ein Maximum an, dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $m:=\sup_{z\in\Omega}u(z)$ und sei $E:=\{z\in\Omega:\ u(z)=m\}$. Ist $E=\emptyset$, so nimmt u in Ω kein Maximum an. Sei also $E\neq\emptyset$. Wegen $E=u^{-1}([m,\infty))$, ist E abgeschlossen. Sei $a\in E$ und $R>0$ sodaß $D(a,R)\subseteq\Omega$. Angenommen $D(a,R)\cap E^c\neq\emptyset$. Dann gibt es eine ganze offene Kreisscheibe die in $D(a,R)\cap E^c$ enthalten ist. Insbesondere existiert eine Kreislinie $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|=r\}$ mit $0<r<R$ von der ein ganzer offener Bogen in E^c liegt. Nun ist wegen der Mittelwerteigenschaft insbesondere

$$m=u(a)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt\,.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(m-u(a+re^{it})\big)\,dt\le 0\,.$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, folgt das $u(a+re^{it})=m$ für fast alle $t\in(-\pi,\pi)$. Ein Widerspruch, denn es gilt ja auf einem offenen Bogen $u(a+re^{it})<m$. Wir schließen das $D(a,R)\subseteq E$. Daher ist E auch offen. Da Ω zusammenhängend ist folgt $E=\Omega$, d.h. $u(z)=m$, $z\in\Omega$.

❑

1.2.3 Bemerkung. Im Beweis des Maximumprinzips haben wir nur verwendet das stets $u^{-1}([m,\infty))$ abgeschlossen ist, das für alle hinreichend kleinen $r>0$ die Beziehung $u(a)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{it})\,dt$ gilt, sowie das u meßbar ist. Die letztere Eigenschaft folgt bereits aus der ersten, denn die Intervalle $[m,\infty)$ erzeugen die σ-Algebra der Borelmengen und diese enthält alle abgeschlossenen Mengen. Damit ist eine Funktion mit der Eigenschaft das für jedes $m\in\mathbb{R}$ die Menge $u^{-1}([m,\infty))$ abgeschlossen ist Borel-meßbar. Funktionen mit der genannten Eigenschaft nennt man *halbstetig von oben*, denn sie werden charakterisiert durch die Eigenschaft das für jedes x gilt $\limsup_{y\to x}u(y)\le u(x)$, vgl. Lemma 1.5.3.

Wir geben noch eine etwas andere Formulierung des Maximumprinzips.

1.2.4 Korollar. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\partial A \neq \emptyset$, $u : \overline{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und erfülle u die in Bemerkung 1.2.3 angegebenen Eigenschaften. Dann gilt: Ist $z_0 \in \overline{A}$ sodaß $u(z_0) = \sup_{z \in \overline{A}} u(z)$, dann existiert $z_1 \in \partial A$ mit $u(z_1) = \sup_{z \in \overline{A}} u(z)$.*

Beweis. Angenommen z_0 ist ein Punkt in A an dem u ein Maximum m annimmt. Sei A_0 jene Zusammenhangskomponente von A die z_0 enthält. Nach Satz 1.2.2 ist u auf A_0 konstant gleich m. Sei $z_1 \in \partial A_0$, dann gilt $m = \limsup_{z \to z_1} u(z) \leq u(z_1) \leq m$. Der Rand einer Menge ist leer genau dann wenn die Menge abgeschlossen ist und für jede offene Menge gilt $\partial A = \bigcup \partial A_i$ wenn A_i die Zusammenhangskomponenten von A bezeichnet. Es folgt das $\partial A_0 \neq \emptyset$ ist.

❑

1.2.5 Korollar. *Seien μ, ν reelle Borelmaße auf $\mathbb{T}$ sodaß $\mu - \nu$ ein positives Maß ist. Ist $\mu \neq \nu$, so folgt das für jedes $z \in \mathbb{D}$ gilt $\mathcal{P}[d\mu] > \mathcal{P}[d\nu]$.*

Beweis. Die Funktion $\mathcal{P}[d(\nu - \mu)]$ ist harmonisch und nichtpositiv. Wäre sie an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{D}$ gleich Null, so wäre sie nach dem Maximumprinzip identisch Null, und daher $\mu = \nu$.

❑

1.2.6 Satz. *Sei u eine stetige komplexwertige Funktion auf Ω. Dann ist u harmonisch in Ω genau dann wenn u die Mittelwerteigenschaft hat.*

Beweis. Sei u harmonisch in Ω und $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Dann ist $u|_{\overline{D(a,R)}}$ stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und harmonisch in $D(a,R)$. Setzt man $r = 0$ in Bemerkung 1.1.13, so folgt
$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,.$$
Also hat u die Mittelwerteigenschaft.

Habe umgekehrt u die Mittelwerteigenschaft. Da mit u auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$ die Mittelwerteigenschaft haben, können wir oBdA u als reellwertig voraussetzen.

Sei $a \in \Omega$. Wähle $R > 0$ sodaß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und sei $U(z)$ jene auf $\overline{D(a,R)}$ stetige und in $D(a,R)$ harmonische Funktion mit $U(a + Re^{it}) = u(a + re^{it})$, $t \in [0, 2\pi)$. Die Funktion $h(z) := U(z) - u(z)$ ist stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und nimmt daher ein Maximum m an. Wegen $h(z) = 0$ auf $\partial D(a,R)$ ist $m \geq 0$. Angenommen $m > 0$, dann nimmt also die Funktion $h|_{D(a,R)}$ ein Maximum in $D(a,R)$ an. Da, nach dem ersten Teil dieses Beweises h die Mittelwerteigenschaft in $D(a,R)$ hat, folgt aus dem Maximumprinzip, daß $h(z) = m$, $z \in D(a,R)$. Ein Widerspruch denn h ist stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und verschwindet am Rand. Also muß $m \leq 0$ sein. Führt man dieselbe Argumentation mit mit $-h$ anstelle von h durch, so folgt auch $m \geq 0$. Insgesamt ist also $u|_{\overline{D(a,R)}} = U$ und daher u harmonisch in $D(a,R)$. Da harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist und $a \in \Omega$ beliebig war, folgt das u in Ω harmonisch ist.

❑

1.2.7 Korollar. *Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet Ω und konvergiere $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann ist u harmonisch.*

Beweis. Die Mittelwerteigenschaft bleibt bei lokal gleichmäßigen Grenzübergängen erhalten.

❑

1.2.8 Bemerkung. Ist speziell f analytisch in Ω, so ist die Mittelwerteigenschaft ein Spezialfall der *Cauchysche Integralformel*, denn substituiert man in dieser $z = a + re^{it}$, so folgt $\frac{dz}{dt} = ire^{it}$ und damit

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\, dt\,.$$

1.2.9 Satz (Harnack). *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger harmonischer Funktionen in einem Gebiet Ω, und gelte $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$. Dann existiert der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} u_n =: u$$

lokal gleichmäßig in Ω und es ist entweder $u = \infty$ oder u eine harmonische reellwertige Funktion in Ω.

Beweis. Der Poisson Kern für eine Kreisscheibe $D(a, R)$ erfüllt die Abschätzung

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta - t + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}\,. \tag{1.5}$$

Ist also f eine auf $\overline{D(a,R)}$ stetige nichtnegative Funktion die in $D(a, R)$ harmonisch ist, so gilt wegen der Poissonschen Integraldarstellung und der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{R-r}{R+r} f(a) \leq f(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} f(a)\,. \tag{1.6}$$

Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Satz gegeben. OBdA sei $u_1 = 0$. Sei $u(z) := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$, $z \in \Omega$, und betrachte die Mengen

$$A := \{z \in \Omega : u(z) = \infty\},\ B := \{z \in \Omega : u(z) < \infty\}\,.$$

Wegen (1.6) sind beide Mengen offen. Da Ω zusammenhängend ist, folgt entweder $A = \emptyset, B = \Omega$ oder $A = \Omega, B = \emptyset$.

Im ersten Fall finden wir wieder wegen (1.6) zu jedem Punkt eine Umgebung auf der u_n gleichmäßig gegen ∞ strebt. Betrachte den zweiten Fall. Dann zeigt (1.6) angewandt auf die Differenzen $u_n - u_m$, $n \geq m$, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt auf der $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Da nach Definition $u_n \to u$ punktweise gilt, folgt das u sogar der lokal gleichmäßige Grenzwert der u_n ist. Nach Korollar 1.2.7 ist u harmonisch.

❑

Als nächstes wollen wir bemerken das, in der Situation einer Kreisscheibe $\Omega = D(a, R)$, durch Beispiel 1.0.2 bereits alle in Ω harmonischen Funktionen beschrieben werden.

1.2.10 Proposition. *Sei u harmonisch in der Kreisscheibe $\Omega = D(a, R)$. Dann existieren in Ω analytische Funktionen f, g sodaß*

$$u = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} g\,.$$

Beweis. Sei zunächst u reellwertig. Weiters sei $0 < R' < R$. Dann gilt, vgl. Bemerkung 1.1.5, (iii), sowie Bemerkung 1.1.13,

$$u(a + re^{it}) = \operatorname{Re} f_{R'}(a + re^{it}), 0 \le r < R', t \in [0, 2\pi)\,,$$

mit der in $D(a, R')$ analytischen Funktion

$$f_{R'}(a + re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi,\pi} \frac{R'e^{it} + re^{i\theta}}{R'e^{it} - re^{i\theta}} u(a + R'e^{it})\, dt\,.$$

Es gilt, da u die Mittelwerteigenschaft hat,

$$f_{R'}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R'e^{it})\, dt = u(a)\,.$$

Ist nun $0 < R' < R'' < R$, so sind $f_{R'}$ und $f_{R''}|_{D(a,R')}$ zwei analytische Funktionen auf $D(a, R')$ deren Realteile übereinstimmen und welche an der Stelle a den gleichen Wert annehmen. Daher gilt $f_{R''}|_{D(a,R')} = f_{R'}$. Also definiert die Familie $(f_{R'})_{0<R'<R}$ eine auf $D(a, R)$ analytische Funktion f. Für diese gilt nach Konstruktion $u = \operatorname{Re} f$.

Ist nun u nicht notwendigerweise reellwertig, so schreibe $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$. Nach dem bereits bewiesenen gibt es auf $D(a, R)$ analytische Funktionen f, h sodaß $\operatorname{Re} u = \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} u = \operatorname{Re} h$. Setzt man $g := ih$, so folgt die Behauptung.

❑

1.2.11 Korollar. *Sei u harmonisch in Ω. Dann ist $u(z)$ als Funktion der beiden reellen Veränderlichen $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Sei $a \in \Omega$. Wähle $R > 0$ so daß $D(a, R) \subseteq \Omega$, dann gibt es f, g analytisch in $D(a, R)$ mit $u|_{D(a,R)} = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} g$. Insbesondere ist u an der Stelle a beliebig oft differenzierbar.

❑

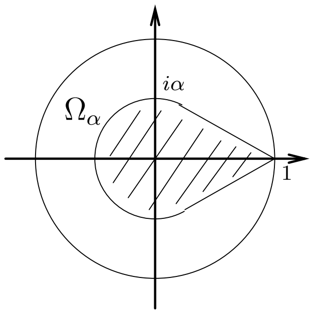
1.3 Randwerte von Poisson Integralen

Ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $F = \mathcal{P}[f]$ so haben wir in Bemerkung 1.1.3 gesehen, daß für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{r \to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\,.$$

Wir wollen nun die Frage nach Existenz und Wert solcher Limiten für allgemeine Poisson Integrale $\mathcal{P}[d\mu]$ untersuchen.

Wir betrachten nichttangentiale Grenzwerte an Randpunkten. Bezeichne für $0 < \alpha < 1$ mit Ω_α das Innere der konvexen Hülle von $D(0, \alpha)$ und 1:



Die geometrische Tatsache das der Rand des Gebietes Ω_α und die Einheitskreislinie einen echt positiven Winkel bilden drückt sich analytisch in folgendem Sachverhalt aus:

1.3.1 Lemma. *Sei $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma_\alpha > 0$ sodaß*

$$\frac{\big|z - |z|\big|}{1 - |z|} \le \gamma_\alpha,\ z \in \Omega_\alpha .$$

Beweis. Wähle $\epsilon > 0$ sodaß $D(0,\alpha) \cap D(1,\epsilon) = \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit von $\psi(z) := \frac{|z-|z||}{|1-|z||}$ in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, genügt es zu zeigen das ψ auf $D(1,\epsilon) \cap \Omega_\alpha$ beschränkt ist.

Sei $\phi_0 := \sup\{\arg z : z \in D(1,\epsilon) \cap \Omega_\alpha\}$, dann ist $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Da weiters ψ bezüglich der reellen Achse symmetrisch ist und auf dieser stets den Wert 1 annimmt, genügt es also das Supremum von ψ in dem Dreieck $W := \{z \in \Omega_\alpha : 0 < \arg z \le \phi_0\}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\sup_{z\in W} \psi(z) = \sup_{0<\phi\le\phi_0} \sup_{r\in[0,1), re^{i\phi}\in W} \psi(re^{i\phi}) .$$

Schreibt man für $z \in \mathbb{D}$

$$\psi(z) = \frac{\big|\frac{z}{|z|} - 1\big|}{\frac{1}{|z|} - 1} ,$$

so sieht man das $\psi(re^{i\phi})$ eine mit r wachsende Funktion ist. Das innere Supremum $\Psi(\phi) := \sup_{r\in[0,1), re^{i\phi}\in W} \psi(re^{i\phi})$ in obiger Formel ist also der Wert von ψ an jenem Punkt mit Argument ϕ welcher auf der rechten Seite des Dreiecks W liegt. Wir sehen das $\Psi(\phi)$ eine für $\phi \in (0, \phi_0]$ stetige Funktion ist. Um die Beschränktheit von ψ auf W zu erhalten, genügt es also zu zeigen dass $\lim_{\phi\to 0} \Psi(\phi)$ existiert.

Sei β der Winkel im Dreieck W am Eckpunkt 1. Dann ist $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sei nun z ein Punkt der rechten Seite des Dreiecks W und sei $\phi = \arg z$. Dann gilt

$$\operatorname{Im} z = |z| \sin\phi,\ \operatorname{Re} z = |z| \cos\phi,\ \frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z} = \tan\beta .$$

Aus diesen Relationen folgt

$$\frac{|z| \sin\phi}{1 - |z| \cos\phi} = \tan\beta$$

und, durch weitere Umformung,

$$\frac{1}{|z|} = \frac{\sin\phi}{\tan\beta} + \cos\phi .$$

Wegen $|e^{i\phi} - 1|^2 = 2(1 - \cos\phi)$ erhalten wir

$$\Psi(\phi) = \psi(z) = \frac{\sqrt{2(1-\cos\phi)}}{\frac{\sin\phi}{\tan\beta} + \cos\phi - 1}$$

und damit $\lim_{\phi\to 0} \Psi(\phi) = \tan\beta$.

❏

1.3.2 Definition. Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Wir sagen das der *nichttangentiale Grenzwert* von f bei e^{it} existiert, wenn der Limes

$$\lim_{z\to e^{it}, z\in e^{it}\Omega_\alpha} f(z) \tag{1.7}$$

für jedes $\alpha \in (0,1)$ existiert und nicht von α abhängt. Man schreibt in diesem Fall für den Wert des Limes (1.7) auch $\lim_{z \hat{\to} e^{it}} f(z)$.

Die Funktion

$$(N_\alpha f)(e^{it}) := \sup\left\{|f(z)| : z \in e^{it}\Omega_\alpha\right\}$$

heißt *nichttangentiale Maximalfunktion*, die Funktion

$$(M_{rad} f)(e^{it}) := \sup\left\{|f(re^{it})| : 0 \le r < 1\right\}$$

die *radiale Maximalfunktion*. Offensichtlich gilt

$$(M_{rad} f)(e^{it}) \le (N_\alpha f)(e^{it}) \le (N_{\alpha'} f)(e^{it}),\ 0 < \alpha \le \alpha' < 1\,.$$

Sei μ ein komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und bezeichne mit $|\mu|$ seine Totalvariation. Wir setzen

$$(M\mu)(e^{it}) := \sup_I \frac{|\mu|(I)}{\lambda(I)}\,,$$

wo das Supremum über alle offenen Bögen (inklusive $\mathbb{T}$) mit e^{it} als Mittelpunkt genommen wird. Weiters sei, soferne dieser Grenzwert existiert,

$$(D\mu)(e^{it}) := \lim_I \frac{\mu(I)}{\lambda(I)}\,,$$

wo der Limes über die gerichtete Menge obiger Bögen genommen wird.

Ist $f \in L^1(\lambda)$, so heißt e^{it} ein Lebesgue-Punkt von f falls

$$\lim_I \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f - f(e^{it})|\, d\lambda = 0$$

gilt, wobei der Limes gleich wie oben zu verstehen ist.

1.3.3 Bemerkung. Wir benützen die folgenden nichttrivialen(!) Aussagen:

(*i*) Ist $f \in L^1(\lambda)$, so sind λ-fast alle Punkte von $\mathbb{T}$ Lebesgue-Punkte von f. Siehe [**?**, Theorem 7.7].

(*ii*) Ist μ singulär zu λ, so ist für λ-fast alle Punkte $(D\mu)(e^{it}) = 0$. Siehe [**?**, Theorem 7.14].

1.3.4 Lemma. *Sei* $0 < \alpha < 1$ *gegeben. Dann gibt es eine Konstante* $c_\alpha > 0$*, so daß für jedes positive endliche Borel Maß und* $u = \mathcal{P}[d\mu]$ *die Beziehungen*

$$c_\alpha (N_\alpha u)(e^{it}) \leq (M_{rad} u)(e^{it}) \leq (M\mu)(e^{it}),\ e^{it} \in \mathbb{T}\,,$$

gelten.

Beweis. Wir betrachten oBdA den Randpunkt 1. Wegen

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it})\, d\mu(e^{it})$$

genügt es für die erste Ungleichung zu zeigen, daß es eine Konstante c_α gibt mit

$$c_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z|, e^{it}),\ z \in \Omega_\alpha, e^{it} \in \mathbb{T}\,.$$

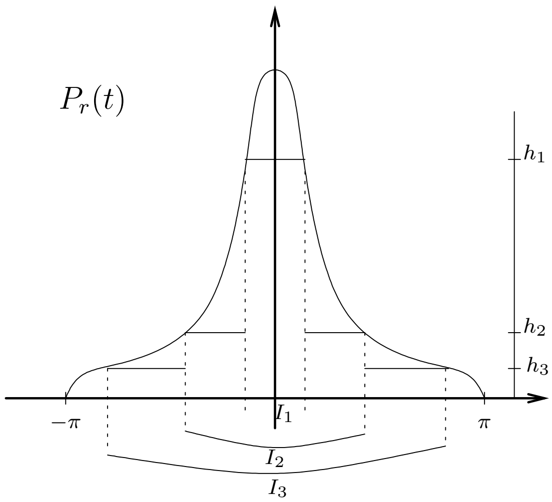
Nach Lemma 1.3.1 ist für $z \in \Omega_\alpha$

$$\big|e^{it} - |z|\big| \leq |e^{it} - z| + \big|z - |z|\big| \leq |e^{it} - z| +$$

$$+ \gamma_\alpha (1 - |z|) \leq (1 + \gamma_\alpha)|e^{it} - z|\,.$$

Für $c_\alpha = (1 + \gamma_\alpha)^{-2}$ gilt also $c_\alpha |e^{it} - |z||^2 \leq |e^{it} - z|^2$ und daher, vgl. (1.1), $c_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z|, e^{it})$.

Um die zweite Ungleichung zu zeigen approximieren wir $P_r(t)$ durch Treppenfunktionen:



Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots \subseteq I_{n-1}$, eine Folge von offenen Bögen mit Zentrum $1, I_n = \mathbb{T}$. Sei χ_j die Indikatorfunktion von I_j und h_j die größte Zahl so daß $h_j \chi_j(\zeta) \leq P(r, \zeta)$. Weiters setze $h_{n+1} = 0$. Wegen der Monotonie von P_r ist $h_j - h_{j+1} \geq 0$.

Setze $K := \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\chi_j$. Nach Definition von $M\mu$ gilt

$$\mu(I_j) \leq (M\mu)(1) \cdot \lambda(I_j)\,,$$

also folgt

$$\int_{\mathbb{T}} K\, d\mu = \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\mu(I_j) \leq (M\mu)(1) \cdot \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\lambda(I_j) =$$

$$= (M\mu)(1) \cdot \int_{\mathbb{T}} K \, d\lambda \leq (M\mu)(1) \cdot \int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\lambda = (M\mu)(1) \, .$$

Da die Bögen I_j beliebig fein gewählt werden können und $P(r,.)$ gleichmäßig stetig ist, folgt

$$\int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\mu(\zeta) \leq (M\mu)(1) \, ,$$

also auch

$$(M_{rad}u)(1) = \sup_{0\leq r<1} \Big| \int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\mu(\zeta) \Big| \leq (M\mu)(1) \, .$$

❑

1.3.5 Lemma. *Sei μ ein positives endliches Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und sei $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Dann hat $\mathcal{P}[d\mu]$ bei $e^{i\theta}$ den nichttangentialen Grenzwert* 0.

Beweis. Die Bedingung $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$ besagt

$$\lim_I \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} = 0 \, .$$

Es gibt also zu gegebenem $\epsilon > 0$ einen Bogen I_0, so daß für alle kleineren Bögen I gilt

$$\mu(I) \leq \epsilon\lambda(I) \, .$$

Sei μ_0 die Einschränkung von μ auf I_0, $\mu_1 := \mu - \mu_0$, und sei $u_0 = \mathcal{P}[d\mu_0]$, $u_1 = \mathcal{P}[d\mu_1]$. Sei z_j eine Folge in $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ die gegen $e^{i\theta}$ konvergiert, dann ist der Abstand von $\{z_j\}$ zu $\mathbb{T} \setminus I_0$ echt positiv. Die Integranden in

$$u_1(z_j) = \int_{\mathbb{T}\setminus I_0} P(z_j,\zeta) d\mu(\zeta)$$

konvergieren wegen Lemma 1.1.2, (*iii*), gleichmäßig gegen 0 und es folgt

$$\lim_{j\to\infty} u_1(z_j) = 0 \, .$$

Nach Lemma 1.3.4 und der Wahl von I_0 gilt

$$c_\alpha(N_\alpha u_0)(e^{i\theta}) \leq (M\mu_0)(e^{i\theta}) \leq \epsilon \, .$$

Für jedes $z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$ ist also $u_0(z) \leq \frac{\epsilon}{c_\alpha}$ und daher

$$\limsup_{j\to\infty} u_0(z_j) \leq \frac{\epsilon}{c_\alpha} \, .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\lim_{j\to\infty} u(z_j) = 0$

❑

1.3.6 Satz (Fatou)**.** *Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{T}$ und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Schreibe $d\mu = fd\lambda + d\mu_s$ wobei $f \in L^1(\lambda)$ und μ_s singulär bezüglich λ ist. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentialen Grenzwert $\lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z)$ und ist gleich $f(\zeta)$.*

Beweis. Wendet man Lemma 1.3.5 auf $d\mu_s$ an, d.h. auf die positive und negative Variation des Real- und Imaginärteiles von μ_s an, vgl. Bemerkung 1.3.3, (ii), so findet man $\mathcal{P}[d\mu_s] \hat{\to} 0$, λ-fast überall.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{P}[f d\lambda](\zeta) \hat{\to} f(\zeta)$, λ-fast überall. Nach Bemerkung 1.3.3, (i), genügt es dieses für die Lebesgue-Punkte von f zu zeigen. Sei also ζ ein Lebesgue-Punkt von f und sei oBdA angenommen das $f(\zeta) = 0$, ansonsten subtrahiere eine Konstante. Dann gilt also

$$\lim_I \frac{1}{\lambda(I)} \int\limits_I |f|\, d\lambda = 0\,.$$

Betrachte das Borel-Maß

$$\gamma(E) := \int_E |f|\, d\lambda\,.$$

Dann ist $(D\gamma)(\zeta) = 0$ und es folgt nach Lemma 1.3.5 $\mathcal{P}[d\gamma](z) \hat{\to} 0$. Nun ist

$$\big|\mathcal{P}[f]\big| \leq \mathcal{P}[|f|] = \mathcal{P}[d\gamma]\,,$$

also folgt das auch $\mathcal{P}[f] \hat{\to} 0$.

❑

1.4 Darstellbarkeit durch Poisson Integrale

Ist $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ meßbar, so definieren wir für $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p := \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p d\lambda(\zeta) \Big)^{\frac{1}{p}}\,,$$

sowie, für $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty := \operatorname{esssup}_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)|\,.$$

Weiters sei $L^p(\mathbb{T})$ die Menge (von Äquivalenzklassen λ-fast überall gleicher) meßbarer Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit $\|f\|_p < \infty$.

Für $p \in [1, \infty]$ ist $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$ ein Banachraum. Ist $p \in (0, 1)$, so ist $d_{L^p}(f, g) := \|f - g\|_p^p$ eine Metrik mit der $L^p(\mathbb{T})$ zu einem vollständigen topologischen Vektorraum wird der jedoch nicht lokalkonvex ist. Zur Wiederholung: Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T})^*$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mathbb{T})$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und dieser Isomorphismus wird vermittelt durch die Beziehung $(g \in L^q)$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f g\, d\lambda\,.$$

Weiters gilt $L^\infty(\mathbb{T})^* \supsetneq L^1(\mathbb{T})$.

Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und $r \in [0, 1)$, so definieren wir eine Funktion $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch

$$f_r(\zeta) := f(r\zeta),\ \zeta \in \mathbb{T}\,. \tag{1.8}$$

Eine wesentliche Rolle spielt das Verhalten der Funktionen f_r wenn r gegen 1 strebt. Obwohl wir die Funktion f_r nur als Funktion auf $\mathbb{T}$ auffassen, wäre durch $z \mapsto f(rz)$ eigentlich eine Funktion auf ganz $\frac{1}{r}\mathbb{D}$ definiert. Ist f harmonisch bzw. analytisch auf $\mathbb{D}$, so hat auch diese Funktion die entsprechende Eigenschaft auf $\frac{1}{r}\mathbb{D}$.

1.4.1 Satz. *Sei u eine harmonische Funktion in $\mathbb{D}$. Dann ist u das Poisson Integral*

(i) *eines komplexen Borel-Maßes genau dann, wenn $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$.*

(ii) *einer Funktion $f\in L^1(\mathbb{T})$ genau dann, wenn $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ in der Norm $\|.\|_1$.*

(iii) *einer Funktion $f\in L^p(\mathbb{T})$ wobei $p\in(1,\infty)$ genau dann, wenn $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_p<\infty$. In diesem Fall gilt $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ in der Norm $\|.\|_p$.*

(iv) *einer Funktion $f\in L^\infty(\mathbb{T})$ genau dann, wenn $\sup_{z\in\mathbb{D}}|u(z)|=\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_\infty<\infty$.*

(v) *einer stetigen Funktion f genau dann, wenn $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ in der Norm $\|.\|_\infty$.*

(vi) *eines endlichen positiven Borel-Maßes genau dann, wenn u nichtnegativ ist.*

Die darstellenden Maße bzw. Funktionen sind in jedem Fall eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in mehreren Schritten.
Beweis. (Satz 1.4.1, (i)) Sei zuerst angenommen das $u=\mathcal{P}[d\mu]$. Dann gilt, da der Poisson Kern stets nichtnegativ ist,

$$|u(z)|=\big|\mathcal{P}[d\mu](z)\big|=\Big|\int_{\mathbb{T}}P(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)\Big|\leq\mathcal{P}[d|\mu|](z),\ z\in\mathbb{D}\,.$$

Die Funktion $h:=\mathcal{P}[d|\mu|]$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$, also hat sie die Mittelwerteigenschaft und wir schliessen

$$\|u_r\|_1=\int_{\mathbb{T}}|u_r(\zeta)|\,d\lambda\leq\int_{\mathbb{T}}h(r\zeta)\,d\lambda=h(0),\ r\in[0,1)\,.$$

Also gilt $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$, tatsächlich sogar

$$\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1\leq h(0)=|\mu|(\mathbb{T})\,.$$

Sei nun $M:=\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$. Betrachte die Maße μ_r die definiert sind als $d\mu_r:=u_r\,d\lambda$ als Elemente von $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)^*$. Es gilt $\|\mu_r\|=\|u_r\|_1\leq M$, $r\in[0,1)$, also existiert nach dem Satz von Banach-Alaoglu ein Maß μ, $\|\mu\|\leq M$ und eine Folge $r_n\in[0,1)$, $r_n\to 1$, sodaß $\lim_{n\to\infty}\mu_r=\mu$ in der schwach-* Topologie von $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)^*$. Beachte hier das $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)$ separabel ist, nach dem Satz von Stone-Weierstraß liegen ja zum Beispiel die trigonometrischen Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht. Die Funktion u_r ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$, also ist

$$u(rz)=u_r(z)=\mathcal{P}[u_r](z),\ z\in\mathbb{D}\,.$$

Für jedes feste $z\in\mathbb{D}$ ist $P(z,\zeta)\in C(\mathbb{T})$, läßt man in der obigen Beziehung $r=r_n\to 1$ streben folgt also $u(z)=\mathcal{P}[d\mu](z)$, $z\in\mathbb{D}$.

❑

Die Vorgangsweise $u_r\,d\lambda$ als Funktionale aufzufassen leistet noch weiteres.
Beweis. (Satz 1.4.1, $(iii), (iv)$ '$\Leftarrow$') Wir sind in der Situation $1 < p \leq \infty$. Betrachte u_r als Elemente von $L^p(\mathbb{T}) = L^q(\mathbb{T})^*$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $\|u_r\|_{L^q(\mathbb{T})^*} = \|u_r\|_p$. Ist nun $\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_p < \infty$, so existiert $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $r_n \to 1$ sodaß $\lim_{n\to\infty} u_r = f$ im schwach-* Sinne von $L^q(\mathbb{T})^*$. Das gleiche Argument wie oben zeigt $u = \mathcal{P}[f]$.

❑

Beweis. (Satz 1.4.1, (vi)) Ist $u = \mathcal{P}[d\mu]$ mit einem positiven Maß so ist, da der Poisson-Kern stets nichtnegativ ist, auch u nichtnegativ. Ist umgekehrt $u \geq 0$ auf $\mathbb{D}$, so folgt mit der Mittelwerteigenschaft das

$$\|u_r\|_1 = \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta)\,d\zeta = u(0)\,.$$

Nach dem bereits bewiesenen Teil (i) des Satzes, folgt $u = \mathcal{P}[d\mu]$ für ein komplexes Borelmaß μ. Da $u \geq 0$ sind die Maße $u_r\,d\lambda$ alle positive Maße. Daher ist auch ihr schwach-* Grenzwert μ ein positives Maß, denn die Eigenschaft nichtnegativen Funktionen nichtnegative Werte zuzuweisen überträgt sich bei schwach-* Grenzübergängen.

❑

Die Implikation '$\Rightarrow$' in (iv) sowie in (v) ist einfach einzusehen.
Beweis. (Satz 1.4.1, $(iv), (v)$ '$\Rightarrow$') Sei zunächst $u = \mathcal{P}[f]$ mit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Es gilt, da $P(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)$ stets ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist,

$$|u(z)| = \Big|\int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta) f(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\Big| \leq \|f\|_\infty\,.$$

Sei $u = \mathcal{P}[f]$ mit einer stetigen Funktion f. Nach Satz 1.1.9 ist u sogar stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Daher ist u auch gleichmäßig stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, d.h. ist $\epsilon > 0$ gegeben, so gibt es $\delta > 0$ mit $|u(z) - u(w)| < \epsilon$ falls $|z - w| < \delta$. Insbesondere gilt für $r > 1 - \delta$ stets $|u_r(\zeta) - u(\zeta)| < \epsilon$.

❑

Etwas komplizierter sind jene Implikationen wo wir zusätzlich noch Konvergenz zu zeigen haben. Wir benützen die *Jensensche Ungleichung*. Zur Wiederholung: Sei Ω eine Menge, μ ein positives Maß auf Ω mit $\mu(\Omega) = 1$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mu)$ mit $a < f(t) < b$, $t \in \Omega$, und sei $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$\varphi\Big(\int_\Omega f\,d\mu\Big) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu\,.$$

Beweis. (Satz 1.4.1, $(ii), (iii)$ '$\Rightarrow$') Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $u = \mathcal{P}[f]$ mit einem $f \in L^p(\mathbb{T})$. Die Jensensche Ungleichung angewandt mit der konvexen Funktion $|.|^p$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P(z,\zeta)\,d\lambda$ zeigt

$$|u_r(\zeta)|^p = \big|\mathcal{P}[f](r\zeta)\big|^p \leq \mathcal{P}[|f|^p](r\zeta)\,.$$

Nach der Mittelwerteigenschaft folgt

$$\|u_r\|_p^p \leq \mathcal{P}[|f|^p](0) = \|f\|_p^p\,,$$

und wir sehen $\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_p \leq \|f\|_p$.

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, wähle $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_p < \epsilon$, und setze $v := \mathcal{P}[g]$. Dann gilt, nach dem bereits bewiesenen Teil (v) '$\Rightarrow$',

$$\limsup_{r\to 1} \|g - v_r\|_p \le \lim_{r\to 1} \|g - v_r\|_\infty = 0 .$$

Also ist sicher $\|g - v_r\|_p < \epsilon$ für $r > r_0$, r_0 hinreichend nahe bei 1. Weiters ist nach dem oben gezeigten

$$\|u_r - v_r\|_p = \|(f-g)_r\|_p \le \|f - g\|_p < \epsilon .$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|u_r - f\|_p \le \|u_r - v_r\| + \|v_r - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\epsilon,\ r > r_0 .$$

❑

Beweis. (Satz 1.4.1, (v) '$\Leftarrow$') Sei angenommen $\lim_{r\to 1} u_r = f$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Dann ist zum Beispiel für $p = 2$ sicher $\sup_{0\le r<1} \|u_r\|_2 < \infty$, also existiert nach (iii), eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{T})$ mit $u = \mathcal{P}[g]$ und dabei ist $\lim_{r\to 1} u_r = g$ bezüglich $\|.\|_2$. Nun ist Konvergenz in $\|.\|_\infty$ stärker als in $\|.\|_2$ und daher folgt nach unserer Voraussetzung das auch $\lim_{r\to 1} u_r = f$. Also ist $f = g$.

❑

Es bleibt die Implikation (ii) '$\Leftarrow$' zu zeigen. Dazu verwenden wir den Begriff der *Fourierreihe*. Zur Wiederholung, siehe [**?**, Theorem 5.15]: Betrachte die Abbildung

$$\Phi : f \mapsto \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt \Big)_{n\in\mathbb{Z}} .$$

Dann ist Φ eine beschränkte und injektive lineare Abbildung von $(L^1(\mathbb{T}), \|.\|_1)$ auf einen (echten) Teilraum von $(c_0(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty)$. Dabei ist $c_0(\mathbb{Z})$ der Banachraum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0$ versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Betrachtet man Φ nur am $L^2(\mathbb{T})$, so gilt das Φ eine Isometrie von $(L^2(\mathbb{T}), (.,.)_2)$ auf den $(\ell^2(\mathbb{Z}), (.,.)_2)$ ist. Dabei ist $\ell^2(\mathbb{Z})$ der Hilbertraum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, versehen mit dem inneren Produkt $((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}})_2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$.

Beweis. (Satz 1.4.1, (ii) '$\Leftarrow$') Sei vorausgesetzt das $\lim_{r\to 1} u_r = f$ bezüglich $\|.\|_1$. Sei $r_0 < r < 1$ und $\zeta = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, dann gilt

$$u_{r_0}(\zeta) = u(r_0\zeta) = u_r(\frac{r_0}{r}\zeta) = \mathcal{P}[u_r](\frac{r_0}{r}\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r_0}{r}}(\theta - t) u_r(t)\, dt .$$

Wir gehen zu den Fourierkoeffizienten über und erhalten, da Faltung von Funktionen der Multiplikation ihrer Fourierkoeffizienten entspricht,

$$(\Phi u_{r_0})(n) = \big(\frac{r_0}{r}\big)^{|n|} (\Phi u_r)(n) .$$

Lässt man in dieser Beziehung $r \to 1$ streben, so folgt

$$(\Phi u_{r_0})(n) = r_0^{|n|} (\Phi f)(n) = (\Phi \mathcal{P}[f]_{r_0})(n),\ n \in \mathbb{Z} .$$

Also ist $u_{r_0} = \mathcal{P}[f]_{r_0}$ und daher, da r_0 beliebig war, $u = \mathcal{P}[f]$.

❑

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes ist eine Folgerung aus der Stieltjesschen Umkehrformel und wurde schon in Korollar 1.1.8 bemerkt. Damit sind alle Aussagen von Satz 1.4.1 bewiesen.

Wir erhalten nun eine allgemeinere Version der Poisson-Jensen Formel, sowie eine Integraldarstellung für in $\mathbb{D}$ analytische Funktionen mit nichtnegativem Realteil.

1.4.2 Korollar (Poisson-Jensen Formel)**.** *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und gelte $\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}}|\operatorname{Re} f_r|\,d\lambda < \infty$. Dann existiert in eindeutiger Weise ein reelles Borel-Maß μ und eine reelle Konstante c, sodaß*

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)+ic,\ \ z\in\mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} f$ ist harmonisch und erfüllt die Voraussetzung von Satz 1.4.1, (i). Also existiert ein komplexes Borel-Maß μ mit

$$\operatorname{Re} f=\mathcal{P}[d\mu]=\operatorname{Re}\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\,.$$

Da $\operatorname{Re} f$ reellwertig ist, ist μ ein reelles Maß. Nun ist eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt.

❑

1.4.3 Korollar (Riesz-Herglotz)**.** *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und erfülle* $\operatorname{Re} f\geq 0$. *Dann existiert in eindeutiger Weise ein endliches positives Borel-Maß μ und eine reelle Konstante c, sodaß*

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)+ic,\ \ z\in\mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} f$ ist harmonisch und nichtnegativ, also existiert ein endliches positives Borel-Maß μ mit

$$\operatorname{Re} f=\mathcal{P}[d\mu]=\operatorname{Re}\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\,.$$

Nun ist eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt.

❑

Kombiniert man Satz 1.4.1, (vi) und (i), so sieht man das folgende

1.4.4 Korollar. *Sei u eine in $\mathbb{D}$ harmonische und nichtnegative Funktion. Dann gilt*

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}}|u_r|\,d\lambda<\infty\,.$$

Wir wollen die folgende Aussage explizit festhalten und diskutieren.

1.4.5 Korollar. *Sei u harmonisch in $\mathbb{D}$, u_r für $0 \leq r < 1$ definiert wie in (1.8), und sei $\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z) =: u^*(\zeta)$. Ist sogar $(u_r(\zeta))_{0\leq r<1}$ konvergent in der Norm $\|.\|_1$, so ist u das Poisson Integral seiner Randwerte: $u(z) = \mathcal{P}[u^*](z)$, $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis. Sei u harmonisch in $\mathbb{T}$ und $\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Dann gibt es nach Satz 1.4.1, (i), ein komplexes Borel-Maß μ sodaß $u = \mathcal{P}[d\mu]$. Nach dem Satz von Fatou existiert daher für λ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z)$.

Sind die $u_r(\zeta)$ konvergent in $\|.\|_1$, so ist nach Satz 1.4.1, (ii), $u = \mathcal{P}[f\, d\lambda]$ mit einem gewissen $f \in L^1(d\lambda)$. Nach dem Satz von Fatou gilt $u^*(\zeta) = \lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z) = f(\zeta)$, λ-fast überall.

❑

1.4.6 Beispiel. Sei μ ein von Null verschiedenes komplexes Borel-Maß welches singulär bezüglich λ ist und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Dann ist nach Satz 1.4.1, (i), $\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Nach dem Satz von Fatou gilt $u(\zeta) = \lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z) = 0$ für λ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}$. Also ist $\mathcal{P}[u(\zeta)] = 0$ und daher u nicht das Poisson Integral seiner Randwerte.

Wählt man in diesem Beispiel speziell $\mu = \delta_0$ das Punktmaß bei 1 mit Masse 1, so erhält man die Funktion

$$u(z) = P(z, 1) = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\,,$$

vgl. die Bemerkung nach Proposition 1.0.3.

1.4.7 Beispiel. Man kann die Voraussetzung von Korollar 1.4.5 nicht abschwächen zu

$$\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_p < \infty \text{ für alle } 0 < p < 1\,. \tag{1.9}$$

Denn man kann z.B. zeigen, vgl. [**?**, §4.6], dass es eine Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vorzeichen $\epsilon_n \in \{+1, -1\}$ gibt sodaß die Funktion

$$u(z) := \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

die Eigenschaft (1.9) hat, die Menge aller $\zeta \in \mathbb{T}$ für die $\lim_{z \xrightarrow{\angle} \zeta} u(z)$ existiert jedoch Lebesgue-Maß Null hat.

1.4.8 Bemerkung. Wir wollen die obigen Aussagen nochmal von einer etwas anderen Perspektive interpretieren. Bezeichne

$$h^p := \left\{ u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : u \text{ harmonisch}\,, \sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_p < \infty \right\}.$$

Weiters definiere $\|u\|_{h^p} := \sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_p$ für $u \in h^p$. Diese Definition ist für jedes $p \in (0, \infty]$ sinnvoll. Für $0 < p \leq p' \leq \infty$ gilt $h^p \supseteq h^{p'}$ und $\|u\|_{h^p} \leq \|u\|_{h^{p'}}$, $u \in h^{p'}$. Weiters ist, da $\|.\|_p$ eine Norm ist $(1 \leq p \leq \infty)$ bzw. $\|f - g\|_p^p$ eine Metrik $(0 < p < 1)$, h^p für jedes $p \in (0, \infty]$ ein linearer Raum. Im Fall $p = \infty$ ist $\|u\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$, also ist h^∞ gerade die Menge aller in $\mathbb{D}$ harmonischen und beschränkten Funktionen.

Ist $u \in h^p$ mit $p \in [1,\infty]$, so existiert der nichtangentiale Grenzwert

$$u^*(\zeta) := \lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z), \text{ f.ü.},$$

und gehört zu $L^p(\mathbb{T})$. Ist sogar $p \in (1,\infty]$, dann ist die Abbildung $u \mapsto u^*$ eine Isometrie von $(h^p, \|.\|_{h^p})$ auf $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$. Ihre Inverse ist gegeben als

$$f \mapsto \mathcal{P}[f], \ f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Im Fall $p = \infty$ bemerke das die Ungleichung $\|u\|_\infty \geq \|u^*\|_\infty$ trivial ist, und das umgekehrt aus $u = \mathcal{P}[u^*]$ folgt $\|u\|_\infty \leq \|u^*\|_\infty$.

1.5 Subharmonische Funktionen

Zur Wiederholung (vgl. Bemerkung 1.2.3): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt *halbstetig von oben*, falls für jedes $m \in \mathbb{R}$ die Menge $u^{-1}([m,\infty))$ in Ω abgeschlossen ist.

1.5.1 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$. Dann heißt u *subharmonisch* in Ω, falls gilt

(i) u ist halbstetig von oben

(ii) Sei $A \subseteq \Omega$ offen sodaß $\overline{A} \subseteq \Omega$ und kompakt ist, und sei h reellwertig und stetig auf $\overline{A}$ sowie harmonisch in A. Gilt $u(z) \leq h(z)$ für alle $z \in \partial A$, so folgt $u(z) \leq h(z)$ für alle $z \in A$.

1.5.2 Bemerkung. Wegen dem Maximumprinzip ist jede reellwertige harmonische Funktion auch subharmonisch. Man beachte, daß subharmonische Funktionen wesentlich weniger glatt zu sein brauchen als harmonische. Auch dürfen sie den Wert $-\infty$ tatsächlich annehmen, z.B. ist die Funktion $u \equiv -\infty$ subharmonisch.

Bevor wir subharmonische Funktionen untersuchen können benötigen wir noch einige Aussagen über halbstetige Funktionen.

1.5.3 Lemma.

(i) *Die Funktion u ist genau dann halbstetig von oben wenn für jedes $x \in \Omega$ gilt*

$$\limsup_{y \to x} u(y) \leq u(x).$$

(ii) *Sind $u_1, \ldots, u_n$ halbstetig von oben und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, dann ist auch $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ halbstetig von oben.*

(iii) *Ist $(u_i)_{i \in I}$ eine Familie von nach oben halbstetigen Funktionen, so ist auch $\inf_{i \in I} u_i$ halbstetig von oben. Ist I endlich, so ist auch $\max_{i \in I} u_i$ halbstetig von oben.*

(iv) *Sei u halbstetig von oben und sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist $u|_K$ nach oben beschränkt und nimmt ein Maximum an.*

Beweis.

`ad`(i): Sei u halbstetig von oben und sei $x \in \Omega$. Angenommen es existierte eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $y_n \to x$ und $\lim_{n\to\infty} u(y_n) > u(x)$. Wäehle $m \in (u(x), \lim_{n\to\infty} u(y_n))$. Dann liegt für hinreichend grosses n stets $y_n \in u^{-1}([m,\infty))$. Da diese Menge abgeschlossen ist, enthält sie auch x, ein Widerspruch.

Erfülle umgekehrt u die angegebene Eigenschaft und sei $m \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $y_n \in u^{-1}([m,\infty))$ und $y_n \to x$, so folgt also

$$u(x) \geq \limsup_{y\to x} u(y) \geq m\,,$$

d.h. $x \in u^{-1}([m,\infty))$.

`ad`(ii): Es gilt

$$\limsup_{y\to x} \big(\lambda_1 u_1(y) + \ldots + \lambda_n u_n(y)\big) \leq \lambda_1 \limsup_{y\to x} u_1(y) + \ldots + \lambda_n \limsup_{y\to x} u_n(y) \leq$$

$$\leq \lambda_1 u_1(x) + \ldots + \lambda_n u_n(x)\,.$$

`ad`(iii): Setze $u := \inf_{i\in I} u_i$. Dann ist $u^{-1}([m,\infty)) = \bigcap_{i\in I} u_i^{-1}([m,\infty))$. Ist $I = \{1,\ldots,n\}$, so haben wir für $v := \max_{i=1,\ldots,n} u_i$ die Beziehung $v^{-1}([m,\infty)) = \bigcup_{i=1}^n u_i^{-1}([m,\infty))$.

`ad`(iv): Die Mengen $u^{-1}([-\infty,T))$ sind eine offene Überdeckung von Ω und daher auch von K. Es genügen also schon endlich viele um K zu überdecken, also ist u auf K beschränkt. Setze $M := \sup_{z\in K} u(z)$. Würde für jedes $a \in K$ gelten $u(a) < M$, so wäere $\bigcup_{m<M} u^{-1}([-\infty,m))$ eine offene Überdeckung von K. Daher existierte $m_0 < M$ mit $K \subseteq u^{-1}([-\infty,m_0))$, ein Widerspruch zur Definition von M. Also nimmt $u|_K$ ein Maximum an.

❏

1.5.4 Lemma. *Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ halbstetig von oben, und sei $K \subseteq \Omega$ sodaß u auf K beschränkt ist, $M := \sup_{z\in K} u(z) < \infty$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf Ω definierten, reellwertigen und stetigen Funktionen, sodaß $M \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ auf Ω, $f_n(z) \geq u(z)$ für alle $z \in K$, und $\lim_{n\to\infty} f_n = u$ punktweise auf K.*

Beweis. Ist $u \equiv -\infty$ auf K, so ist die Behauptung trivial. Sei also $u \not\equiv -\infty$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen

$$f_n(x) := \sup_{y\in K} \big(u(y) - n|x-y|\big),\ x \in \Omega\,.$$

Zunächst ist dieses Supremum nicht $-\infty$, da es ein $y \in K$ mit $u(y) \neq -\infty$ gibt. Weiters ist klarerweise $M \geq f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ auf Ω sowie $f_n \geq u$ auf K.

Sind nun $x_1, x_2 \in \Omega$ und $y \in K$, so gilt

$$u(y) - n|x_1 - y| \geq u(y) - n|x_2 - y| - n|x_1 - x_2|\,,$$

also folgt $f_n(x_2) - f_n(x_1) \leq n|x_1 - x_2|$. Vertauscht man x_1 und x_2, so erhält man $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leq n|x_1 - x_2|$, also ist f_n stetig.

Wegen der Monotonie existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Angenommen es wäere $a \in K$ und $f(a) > u(a)$. Wähle $m \in (u(a), f(a))$, dann gibt es nach der Definition von f_n einen Punkt $y_n \in K$ mit $u(y_n) - n|a - y_n| \geq m$, d.h. mit

$$m + n|a - y_n| \leq u(y_n) \leq M\,.$$

Insbesondere folgt das $n|y_n - a|$ beschränkt ist, und daher $y_n \to a$. Weiters folgt $m \leq u(y_n)$ für jedes n und daher wegen der Halbstetigkeit von u

$$m \leq \limsup_{n\to\infty} u(y_n) \leq u(a)\,,$$

ein Widerspruch.

❑

1.5.5 Korollar. *Sei u halbstetig von oben auf der Kreislinie $\Omega := \partial D(a,R)$. Dann existiert eine Folge von Polynomen p_n, sodaß*

$$\operatorname{Re} p_1(z) \geq \operatorname{Re} p_2(z) \geq \operatorname{Re} p_3(z) \geq \ldots \to u(z),\ \ z \in \partial D(a,R)\,.$$

Beweis. Sei oBdA $a = 0$ und $R = 1$. Da $\mathbb{T}$ kompakt ist, ist u beschränkt. Nach Lemma 1.5.4 gibt es $f_n \in C(\mathbb{T})$ mit $f_n \geq f_{n+1}$ und $f_n \to u$ punktweise. Mit f_n hat auch die Folge $\hat{f}_n := f_n + \frac{1}{n}$ diese Eigenschaften. Zusätzlich gilt noch $\hat{f}_n - \hat{f}_{n+1} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es trigonometrische Polynome $g_n := a_0 + \sum_{k=1}^{N(n)} (a_{n,k} \cos kt + b_{n,k} \sin kt)$ sodaß

$$\|\hat{f}_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\,.$$

Es folgt das $g_n \geq g_{n+1}$ und $g_n \to u$ punktweise. Die Behauptung des Korollars folgt nun wenn man bemerkt dass jedes trigonometrische Polynom in der Form $\operatorname{Re} p$ mit einem Polynom p geschrieben werden kann.

❑

1.5.6 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ halbstetig von oben. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *u ist subharmonisch.*

(*ii*) *Für jedes $a \in \Omega$, alle hinreichend kleinen $R > 0$, und jedes Polynom p gilt: Ist $u(z) \leq \operatorname{Re} p(z)$, $z \in \partial D(a,R)$, so folgt $u(z) \leq \operatorname{Re} p(z)$, $z \in D(a,R)$.*

(*iii*) *Für jedes $a \in \Omega$ und alle hinreichend kleinen $R > 0$ gilt*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,. \tag{1.10}$$

In diesem Fall gelten die Eigenschaften (ii) bzw. (iii) sogar für alle $R > 0$ mit $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$.

Beweis. Als erstes bemerken wir das, da u halbstetig von oben ist, u auch Borelmeßbar ist und auf jeder kompakten Menge nach oben beschränkt ist. Daher existiert das Integral in (*iii*) entweder in $\mathbb{R}$ oder als $-\infty$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ so daß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Da $\operatorname{Re} p(z)$ harmonisch ist folgt die gewünschte Eigenschaft aus der Definition von subharmonisch.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sei $a \in \Omega$, $R > 0$, so daß die Eigenschaft (iii) gilt. Nach Korollar 1.5.5 existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen sodaß $\operatorname{Re} p_1 \geq \operatorname{Re} p_2 \geq \dots$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} p_n = u$ punktweise auf $\partial D(a,R)$. Es folgt wegen (ii)

$$u(a) \leq \operatorname{Re} p_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a + Re^{it})\, dt\,.$$

Da p_1 auf $\partial D(a,R)$ stetig und daher insbesondere L^1 ist, folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a + Re^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $A \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{A} \subseteq \Omega$ kompakt und sei h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch in A mit $u(z) \leq h(z)$, $z \in \partial A$. Dann ist $u - h$ halbstetig von oben und erfüllt, da h die Mittelwerteigenschaft, ebenfalls (1.10). Weiters ist $(u-h)(z) \leq 0$, $z \in \partial A$. Nach Bemerkung 1.2.3 gilt für $u-h$ das Maximumprinzip Korollar 1.2.4, und es folgt $(u-h)(z) \leq 0$, $z \in A$.

❑

1.5.7 Korollar.

(i) *Sei u subharmonisch in Ω, dann gilt für u das Maximumprinzip.*

(ii) *Die Eigenschaft subharmonisch zu sein ist eine lokale Eigenschaft: hat jeder Punkt von Ω eine Umgebung sodaß u auf dieser subharmonisch ist, dann ist u in Ω subharmonisch.*

(iii) *Sind $u_1, \dots, u_n$ subharmonisch in Ω und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, dann ist auch $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ subharmonisch in Ω.*

(iv) *Sind $u_1, \dots, u_n$ subharmonisch in Ω, so auch* $\max\{u_1, \dots, u_n\}$.

(v) *Ist h harmonisch in Ω, so ist $|h|$ subharmonisch in Ω.*

(vi) *Sei h eine reellwertige und stetige Funktion auf Ω. Dann ist h harmonisch genau dann wenn h und $-h$ subharmonisch sind.*

Beweis.
`ad`(i): Nach Bemerkung 1.2.3, denn u ist halbstetig von oben und erfüllt (1.10).

`ad`(ii): Die Eigenschaft (iii) aus Satz 1.5.6 ist eine lokale Eigenschaft.

`ad`(iii): Die Beziehung (1.10) bleibt bestehen.

`ad`(iv): Es gilt

$$\max_{i=1,\dots,n} u_i(a) \leq \max_{i=1,\dots,n} u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_i(a + Re^{it})\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max_{i=1,\dots,n} u_i(a + Re^{it})\, dt\,.$$

`ad`(v): Es gilt

$$|h(a)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(a+Re^{it})\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(a+Re^{it})|\,dt\,.$$

`ad`(vi): Ist sowohl h als auch $-h$ subharmonisch, so ist h stetig und hat die Mittelwerteigenschaft.

❑

1.5.8 Bemerkung. Man kann zeigen: Ist $u:\Omega\to\mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar (als Funktion der beiden reellen Veränderlichen $x=\operatorname{Re}z, y=\operatorname{Im}z$), dann ist u subharmonisch genau dann wenn $\Delta u\ge 0$ ist.

1.5.9 Beispiel. Sei f analytisch im Gebiet Ω. Dann sind die Funktionen

$$|f(z)|,\ \log|f(z)|,\ \log^+|f(z)|$$

subharmonisch in Ω. Dabei bezeichnet $\log^+$ die Funktion $\log^+ x := \max\{\log x, 0\}$.

Zunächst ist eine analytische Funktion f auch harmonisch und daher ist nach Korollar 1.5.7, (v), die Funktion $|f|$ subharmonisch. Um zu zeigen das $\log|f|$ subharmonisch ist, sei $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ und p ein Polynom sodaß $\log|f(z)|\le \operatorname{Re}p(z),\ z\in\partial D(a,R)$. Dann gilt also

$$\left|e^{-p(z)}f(z)\right|\le 1,\ z\in\partial D(a,R)\,,$$

und, da $e^{-p(z)}f(z)$ analytisch ist, daher auch $|e^{-p(z)}f(z)|\le 1,\ z\in D(a,R)$. D.h. es ist $\log|f(z)|\le\operatorname{Re}p(z),\ z\in D(a,R)$. Nach Satz 1.5.6 ist $\log|f|$ subharmonisch. Korollar 1.5.7, (iv), zeigt nun das auch $\log^+|f|=\max\{\log|f|,0\}$ subharmonisch ist.

1.5.10 Bemerkung. Die Tatsache das $\log|f|$ für analytische Funktionen f subharmonisch ist, erhielte man auch auf mehr funktionentheoretischen Wege, nämlich mit Hilfe der *Jensenschen Formel*. Diese besagt: Sei f analytisch in $\underline{D(0,R)}$, $f(0)\ne 0$, sei $0<r<R$ und seien $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ die Nullstellen von f in $\overline{D(0,r)}$ gezählt gemäß ihrer Vielfachheit. Dann gilt

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{it})|\,dt}\,.$$

Sei nun f analytisch in Ω. Dann ist $|f|$ stetig und nichtnegativ und daher $\log|f|$ halbstetig von oben. Ist $a\in\Omega$, $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ und $f(a)\ne 0$, so gilt für alle $0<r<R$ nach der Jensenschen Formel

$$\log|f(a)| + \sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n-a|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(a+re^{it})|\,dt\,, \qquad (1.11)$$

wobei α_n die Nullstellen von f in $\overline{D(a,r)}$ sind. Nun ist $\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n-a|}\ge 0$. Da die Beziehung (1.10) für $f(a)=0$, d.h. $\log|f(a)|=-\infty$, ohnehin trivial ist folgt das $\log|f|$ die Eigenschaft (iii) von Satz 1.5.6 hat.

Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, daß (1.11) auch zeigt das die Integrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(a+re^{it})|\,dt$ als Funktion von r monoton wachsend sind. Wir werden sehen das diese Aussage für beliebige subharmonische Funktionen richtig ist, vgl. Satz 1.6.4.

1.6 Eigenschaften subharmonischer Funktionen

Eine subharmonische Funktion darf den Wert $-\infty$ annehmen, jedoch nicht zu oft:

1.6.1 Proposition. *Sei Ω ein Gebiet und sei u subharmonisch in Ω, $u \not\equiv -\infty$. Dann gilt für jede Kreisscheibe mit $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$*

$$\iint\limits_{D(a,R)} \big|u(x+iy)\big|\, dxdy < \infty\,. \tag{1.12}$$

Die Menge $\{z \in \Omega:\ u(z) = -\infty\}$ hat (zweidimensionales) Lebesgue-Maß Null.

Beweis. Schreibe $u = u_+ - u_-$ mit $u_+ := \max\{u, 0\}, u_- := -\min\{u, 0\}$. Dann ist also $|u| = u_+ + u_-$. Nach Lemma 1.5.3, (iv), ist u_+ auf jeder kompakten Teilmenge von Ω beschränkt. Insbesondere gilt

$$\iint\limits_{D(a,R)} u_+(x+iy)\, dxdx < \infty\,.$$

Also sind die folgenden Beziehungen äquivalent:

$$\iint\limits_{D(a,R)} u(x+iy)\, dxdx > -\infty,\ \iint\limits_{D(a,R)} u_-(x+iy)\, dxdx < \infty,\ \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdx < \infty\,.$$

Wir betrachten die Menge

$$A := \Big\{a \in \Omega:\ \exists\, R > 0 : \overline{D(a,R)} \subseteq \Omega,\ \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdz = \infty\Big\}\,.$$

Als erstes zeigen wir das $A \subseteq \{a \in \Omega:\ u(a) = -\infty\}$.

Sei $a \in \Omega$ sodaß $u(a) \neq -\infty$ und sei $R > 0$ so daß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Dann gilt wegen (1.10)

$$u(a) \cdot \frac{R^2}{2} = \int_0^R u(a)\, rdr \leq \int_0^R \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\, dt \cdot rdr\,.$$

Substituiert man $x = \operatorname{Re} a + r\cos t, y = \operatorname{Im} a + r \sin t$, so ist $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = r$ und es folgt

$$-\infty < u(a) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{D(a,R)} u(x+iy)\, dxdx\,.$$

Wir zeigen das A offen ist: Sei $a \in A$ und wähle $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ mit $\iint_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy = \infty$. Wähle $\epsilon > 0$ sodaß $\overline{D(a, R+\epsilon)} \subseteq \Omega$. Ist $|z-a| < \frac{\epsilon}{2}$, so gilt

$$D(a,R) \subseteq \overline{D(z, R+\frac{\epsilon}{2})} \subseteq \overline{D(a, R+\epsilon)} \subseteq \Omega\,,$$

sowie

$$\iint\limits_{D(z,R+\frac{\epsilon}{2})} |u(x+iy)|\, dxdy \geq \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy = \infty\,.$$

Es folgt das $z \in A$.

Wir zeigen das A abgeschlossen ist: Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ sodaß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und $D(a,R) \cap A \neq \emptyset$. Dann existiert eine Kreisscheibe $D(z,r) \subseteq D(a,R) \cap A$. Nun ist wie wir oben festgestellt haben $u|_A = -\infty$, also folgt

$$\infty = \iint\limits_{D(z,r)} |u(x+iy)|\, dxdy \leq \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy\,,$$

also gilt $a \in A$.

Da Ω zusammenhängend ist und $u \not\equiv -\infty$, ist $A^c \neq \emptyset$ und daher $A = \emptyset$. Es gilt also (1.12) für jede Kreisscheibe $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und damit ist $\{a \in \Omega : u(a) = -\infty\} \cap D(a,R)$ eine Menge vom zweidimensionalen Lebesgue-Maß Null. Da Ω eine im $\mathbb{R}^2$ offene Menge ist, und daher durch abzählbar viele solche Kreisscheiben ausgeschöpft werden kann, folgt das auch $\{a \in \Omega : u(a) = -\infty\}$ eine Nullmenge ist.

❑

Die folgende Aussage, mit deren Hilfe man aus bekannten subharmonischen Funktionen neue erzeugen kann, folgt aus der Jensenschen Ungleichung.

1.6.2 Proposition. *Sei u eine subharmonische Funktion in Ω und sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex. Setze $\varphi(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Dann ist $\varphi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und subharmonisch in Ω.*

Beweis. Zunächst bemerke, daß eine monoton wachsende und konvexe Funktion stets stetig ist. Es folgt daß $\varphi \circ u$ halbstetig von oben ist. Sei eine Kreisscheibe $D(a,R)$ mit $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ gegeben. Approximiere u auf $\partial D(a,R)$ mit Polynomen sodass $\operatorname{Re} p_1(z) \geq \operatorname{Re} p_2(z) \geq \ldots \to u(z)$, $z \in \partial D(a,R)$. Dann gilt, da u subharmonisch ist, $u(a) \leq \operatorname{Re} p_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt wegen der Monotonie von φ, da $\operatorname{Re} p_n$ harmonisch ist, und wegen der Jensenschen Ungleichung:

$$\varphi(u(a)) \leq \varphi(\operatorname{Re} p_n(a)) = \varphi\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a+Re^{i\theta})\, d\theta\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi \circ \operatorname{Re} p_n)(a+Re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Da φ stetig und monoton ist, gilt $\varphi \circ \operatorname{Re} p_n \to \varphi \circ u$ punktweise und monoton fallend auf $\partial D(a,R)$. Da $\operatorname{Re} p_1$ stetig und daher beschränkt ist, ist auch $\varphi \circ \operatorname{Re} p_n$ beschränkt, und es folgt mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz dass

$$\varphi(u(a)) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi \circ u)(a+Re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Nach Satz 1.5.6 ist $\varphi \circ u$ subharmonisch.

❑

1.6.3 Korollar.

(*i*) *Sei u harmonisch in Ω und sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist $|u|^p$ subharmonisch.*

(*ii*) *Sei f analytisch im Gebiet Ω und sei $p \in (0,\infty)$. Dann ist die Funktion $|f|^p$ subharmonisch in Ω.*

Beweis. Für die erste Behauptung wende Proposition 1.6.2 an auf $|u|$ und $\varphi(x) = |x|^p$. Für die zweite auf $u = \log|f|$ und $\varphi(x) = e^{px}$.

❑

Wir betrachten nun Funktionen u die subharmonisch in $\mathbb{D}$ oder in einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ sind. In dieser Situation können wir die folgenden Integralmittel definieren:

$$m(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})\,dt,\ 0 \le r < 1 \text{ bzw. } R_1 < r < R_2\,.$$

1.6.4 Satz.

(*i*) *Sei u subharmonisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $m(r)$ für $r \in [0,1)$ monoton wachsend.*

(*ii*) *Sei u subharmonisch in $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$. Dann ist $m(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$, d.h. ist $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, $\alpha \in (0,1)$, und $\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, so gilt*

$$m(r) \le \alpha m(r_1) + (1-\alpha) m(r_2)\,.$$

Beweis.
`ad`(*i*)**:** Sei $0 \le r_1 \le r_2 < 1$ gegeben und sei h eine auf $\overline{D(0,r_2)}$ stetige und in $D(0,r_2)$ harmonische Funktion mit $u(z) \le h(z)$, $|z| = r_2$. Dann gilt $u(z) \le h(z)$ in ganz $D(0,r_2)$, und daher

$$m(r_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_1e^{it})\,dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_1e^{it})\,dt = h(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_2e^{it})\,dt\,.$$

Approximiert man $u(z)$ auf $\partial D(0,r_2)$ gemäß Lemma 1.5.4 mit stetigen Funktionen $f_n(z)$ und setzt $h_n(z) := \mathcal{P}[f_n]$, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$m(r_1) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_n(r_2e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_2e^{it})\,dt = m(r_2)\,.$$

`ad`(*ii*)**:** Seien $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ gegeben. Nach Korollar 1.5.5 existieren Polynome $p_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}, j = 1,2$ sodaß

$$\operatorname{Re} p_{1,j}(r_je^{it}) \ge \operatorname{Re} p_{2,j}(r_je^{it}) \ge \ldots \to u(r_je^{it}),\ t \in [0,2\pi), j = 1,2\,.$$

Schreibt man

$$\operatorname{Re} p_{n,j} = \alpha_0(n,j) + \sum_{k=1}^{N(n)} \big(\alpha_k(n,j)\cos kt + \beta_k(n,j)\sin kt\big),\ n \in \mathbb{N}, j = 1,2\,,$$

so sieht man das es Zahlen $a_k(n), b_k(n), c_n, d_n$ gibt sodaß für die Funktion

$$h_n(re^{it}) := c_n \log r + d_n + \sum_{\substack{k=-N(n)\\ k\neq 0}}^{N(n)} \big(a_k(n)\cos kt + b_k(n)\sin kt\big)$$

gilt

$$h_n(r_j e^{it}) = \operatorname{Re} p_{n,j}(r_j e^{it}),\ \ t\in[0,2\pi), j=1,2\,.$$

Nun ist

$$m_n(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_n(re^{it})\,dt = c_n \log r + d_n\,,$$

eine lineare Funktion von $\log r$. Da u subharmonisch ist, und $h_n(r_j e^{it}) \geq u(r_j e^{it})$, $t\in[0,2\pi), j=1,2$, folgt $h_n(z)\geq u(z)$, $r_1\leq |z|\leq r_2$. Also ist stets $m(r)\leq m_n(r)$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man für r_1 und r_2 sogar $\lim_{n\to\infty} m_n(r_j) = m(r_j)$, $j=1,2$.

Sei nun $\alpha\in(0,1)$ und $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$. Dann gilt

$$m(r)\leq m_n(r) = \alpha m_n(r_1) + (1-\alpha)m_n(r_2)\,,$$

und damit auch $m(r)\leq \alpha m(r_1) + (1-\alpha)m(r_2)$.

❑

1.6.5 Korollar. *Sei u subharmonisch in $\mathbb{D}$. Bezeichne $u_r:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ die Funktion $u_r(\zeta) := u(r\zeta)$, vgl. (1.8). Dann gilt für jedes $r\in(0,1)$ das $u_r\in L^1(\mathbb{T})$. Insbesondere ist $m(r) > -\infty$, $r\in(0,1)$. Es gilt*

$$\lim_{r\searrow 0} m(r) = u(0)\,.$$

Beweis. Da u auf jeder Kreislinie nach oben beschränkt ist, genügt es für die erste Behauptung zu zeigen daß $m(r)>-\infty$ gilt. Wäre $m(r)=-\infty$, so wäre wegen der Monotonie auch $m(r')=-\infty$ für alle $r'\in[0,r)$. Ein Widerspruch zu Proposition 1.6.1, denn

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D(0,r)} u(x+iy)\,dxdy = \int_0^r rm(r)\,dr\,.$$

Wieder wegen der Monotonie existiert der Limes $\lim_{r\searrow 0} m(r)$. Angenommen es wäre dieser Grenzwert echt grösser als $u(0)$. Dann wähle $m\in(u(0), \lim_{r\searrow 0} m(r))$. Da $u^{-1}([-\infty,m))$ offen ist, existiert ein $R>0$ sodaß $D(0,R)\subseteq u^{-1}([-\infty,m))$. Es folgt $m(r)\leq m$ für alle $r\leq R$, ein Widerspruch. ❑

1.6.6 Korollar. *Sei $p\in[1,\infty]$ und sei $u\in h^p$. Dann gilt*

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1}\|u_r\|_p = \lim_{r\nearrow 1}\|u_r\|_p\,.$$

Beweis. Im Fall $p\in[1,\infty)$ benütze Korollar 1.6.3 und Satz 1.6.4. Für $p=\infty$ ist $\|u_r\|_\infty$ wegen dem Maximumprinzip monoton wachsend.

❑

1.6.7 Korollar (Hardy). *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $0 < p < \infty$. Dann ist die Funktion $\|f_r\|_p$ in r monoton wachsend und die Funktion $\log\|f_r\|_p$ in $\log r$ konvex.*

Beweis. Die Funktion $|f|^p$ ist subharmonisch und daher ist nach Satz 1.6.4 die Funktion $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{it})|^p\,dt = \|f_r\|_p^p$ monoton wachsend.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion $|z|^\lambda|f(z)|^p$. Sie ist auf $0 < |z| < 1$ definiert und dort subharmonisch, denn sie ist $|.|^p$ von der lokal analytischen Funktion $z^{\frac{\lambda}{p}}f(z)$. Nach Satz 1.6.4 ist daher $r^\lambda\|f_r\|_p^p$ eine konvexe Funktion von $\log r$.

Sei nun $0 < r_1 < r_2 < 1$ und $\alpha \in (0,1)$ gegeben. Wähle $\lambda \leq 0$ sodaß $r_1^\lambda\|f_{r_1}\|_p^p = r_2^\lambda\|f_{r_2}\|_p^p$ und bezeichne diesen Wert mit K. Eine solche Wahl von λ ist möglich da $r_1 < r_2$ und $\|f_{r_1}\|_p \leq \|f_{r_2}\|_p$. Sei $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, dann gilt also

$$r^\lambda\|f_r\|_p^p \leq \alpha r_1^\lambda\|f_{r_1}\|_p^p + (1-\alpha)r_2^\lambda\|f_{r_2}\|_p^p = K = K^\alpha K^{1-\alpha} =$$

$$= \left(r_1^\lambda\|f_{r_1}\|_p^p\right)^\alpha\left(r_2^\lambda\|f_{r_2}\|_p^p\right)^{1-\alpha} = r^\lambda\left(\|f_{r_1}\|_p^p\right)^\alpha\left(\|f_{r_2}\|_p^p\right)^{1-\alpha}.$$

Durch logarithmieren erhält man die gewünschte Beziehung.

❑

1.6.8 Bemerkung. Die Aussage von Korollar 1.6.7 ist auch für den Fall $p = \infty$ richtig. Die Tatsache das $\|f_r\|_\infty$ monoton wächst ist gerade das Maximumprinzip. Das $\log\|f_r\|_\infty$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, ist die Aussage des *Hadamard'schen Dreikreisesatzes*, eine Folgerung aus dem Maximumprinzips.

1.6.9 Bemerkung. Mittels Variablensubstitution erhält man die Satz 1.6.4 und seinen Folgerungen entsprechenden Ergebnisse für beliebige Kreisscheiben $D(a,R)$ bzw. Kreisringe $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$.

Kapitel 2

Die Räume H^p, N, N^+

2.1 Funktionen von beschränktem Typ

Ist $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ meßbar, so bezeichnen wir

$$\|g\|_0 := \int_{\mathbb{T}} \log^+ |g(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) \, .$$

2.1.1 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$, und sei wieder $f_r(\zeta) := f(r\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, vgl. (1.8). Wir schreiben $f \in N$, falls

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_0 < \infty \, .$$

N heißt die Menge der *analytischen Funktionen von beschränktem Typ*. Wir definieren weiters

$$\|f\|_0 := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_0, \;\; f \in N \, .$$

Bemerke das, da für in $\mathbb{D}$ analytische Funktionen $\log^+ |f|$ subharmonisch ist, $\|f_r\|_0$ stets monoton wachsend mit $r \in (0,1)$ ist. Es folgt

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_0 = \lim_{r \nearrow 1} \|f_r\|_0 \, .$$

Grundlegend für das Folgende ist

2.1.2 Satz (R.Nevanlinna)**.** *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $f \in N$ genau dann wenn sich f darstellen läßt als $f(t) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ mit in $\mathbb{D}$ analytischen und beschränkten Funktionen φ, ψ. In diesem Fall können φ und ψ so gewählt werden, daß ψ in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen hat und $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$ gilt.*

Beweis. Ist g analytisch in $\mathbb{D}$, $\|g\|_\infty \leq 1$, so ist stets $\log |g(z)| \leq 0$. Weiters ist $\log |g|$ subharmonisch. Es folgt das $\int_{\mathbb{T}} \log |g_r(\zeta)| \, d\lambda(\zeta)$ monoton wachsend ist und nach oben beschränkt durch 0. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \to 1} \int_{\mathbb{T}} \big| \log |g_r(\zeta)| \big| \, d\lambda(\zeta) = - \lim_{r \to 1} \int_{\mathbb{T}} \log |g_r(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) \in [0, \infty) \, .$$

Sei nun $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit in $\mathbb{D}$ analytischen und beschränkten Funktionen. OBdA sei $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$, andernfalls erweitere den Bruch mit $(\max\{\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\})^{-1}$. Es folgt

$$\|f_r\|_0 = \int\limits_{\mathbb{T}} \log^+ \Big|\frac{\varphi_r(\zeta)}{\psi_r(\zeta)}\Big|\, d\lambda(\zeta) \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \Big|\log\Big|\frac{\varphi_r(\zeta)}{\psi_r(\zeta)}\Big|\Big|\, d\lambda(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log|\varphi_r(\zeta)| - \log|\psi_r(\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log|\varphi_r(\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) + \int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log|\psi_r(\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta)\,.$$

Da die rechte Seite für $r \to 1$ einen endlichen Grenzwert hat, ist $\|f_r\|_0$ für $r \in [0,1)$ beschränkt, d.h. $f \in N$.

Sei nun umgekehrt $f \in N$, $M := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_0 < \infty$. Betrachte die Maße $\log^+|f_r|\, d\lambda$ als Elemente des Dualraumes von $C(\mathbb{T})$. Wegen

$$\|\log^+|f_r|\, d\lambda\| = |\log^+|f_r|\, d\lambda|(\mathbb{T}) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log^+|f_r|\, d\lambda = \|f_r\|_0$$

sind alle diese in der Kugel mit Radius M enthalten. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu existiert ein komplexes Borel-Maß μ und eine Folge $r_n \to 1$, sodaß im schwach-* Sinne $\lim_{n\to\infty} \log^+|f_{r_n}|\, d\lambda = \mu$ gilt. Es ist $\|\mu\| \leq M$ und da alle $\log^+|f_r|\, d\lambda$ positive Maße sind, hat auch μ diese Eigenschaft. Definiere

$$\psi(z) := e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta - z}{\zeta + z}\, d\mu(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Dann ist ψ eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion, hat keine Nullstellen und ist beschränkt durch 1:

$$\log|\psi(z)| = -\mathcal{P}[d\mu](z) \leq 0\,.$$

Sei $r \in (0,1)$ und betrachte die subharmonische Funktion $u(z) := \log|f(rz)|$, $z \in \frac{1}{r}\mathbb{D}$. Längs $\mathbb{T}$ gilt $u(\zeta) \leq \log^+|f_r(\zeta)|$, also folgt

$$\log|f(rz)| = u(z) \leq \mathcal{P}[\log^+|f_r|],\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Sei nun $z \in \mathbb{D}$ festgehalten. Die linke Seite der obigen Beziehung strebt für $r = r_n$ und $n \to \infty$ gegen $\log|f(z)|$, die rechte Seite gegen $\mathcal{P}[d\mu](z) = -\log|\psi(z)|$. Es folgt das

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\psi(z)|},\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Setzen wir $\varphi := f\psi$, so erhalten wir eine Darstellung von f in der gewünschten Form.

❑

Wie wir im ersten Teil des Beweises von Satz 2.1.2 gesehen haben gilt:

2.1.3 Korollar. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und gelte*

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{it})|\, dt < \infty\,.$$

Dann folgt das

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \big|\log|f(re^{it})|\big|\, dt < \infty\,.$$

2.1.4 Korollar.

(*i*) *Sind $f, g \in N$, so ist auch $f+g$ sowie $f \cdot g$ in N. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist die konstante Funktion α in N. Insbesondere ist N ein linearer Raum. Ist $\frac{f}{g}$ analytisch in $\mathbb{D}$, so ist auch $\frac{f}{g} \in N$.*

(*ii*) *Sei $f \in N$. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \dashrightarrow \zeta} f(z) =: f^*(\zeta)$. Ist $f \neq 0$, so ist $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Es gilt $\|f^*\|_0 \leq \|f\|_0$.*

(*iii*) *Sind $f, g \in N$ und gilt $f^*(\zeta) = g^*(\zeta)$ für alle ζ aus einer Menge mit positivem Maß, so folgt $f = g$.*

Beweis. Die Aussage (*i*) folgt unmittelbar aus Satz 2.1.2. Um (*ii*) zu zeigen sei zunächst g analytisch in $\mathbb{D}$, $g \neq 0$, mit $\|g\|_\infty \leq 1$ gegeben. Dann hat g nach Korollar 1.4.5 λ-fast überall einen nichttangentiale Grenzwert $f^*(\zeta)$. Wir wenden das *Lemma von Fatou* an. Zur Wiederholung: Ist μ ein positives Maß und sind $f_n \geq 0$ und meßbar, so gilt $\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir

$$\int_{\mathbb{T}} \big|\log|g^*(\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \lim_{r \nearrow 1} \big|\log|g(r\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) \leq \liminf_{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \big|\log|g(r\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta)\,.$$

Die rechte Seite ist nach Korollar 2.1.3 endlich. Also ist $\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$, insbesondere ist g^* λ-fast überall verschieden von Null.

Sei nun $f \in N$ und schreibe $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$. Nach dem gerade Bemerkten existiert λ-fast überall

$$f^*(\zeta) := \lim_{z \dashrightarrow \zeta} f(z) = \frac{\lim_{z\dashrightarrow\zeta} \varphi(z)}{\lim_{z\dashrightarrow\zeta} \psi(z)}$$

und es ist $\log|f^*| = \log|\varphi^*| - \log|\psi^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ebenfalls wegen dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\|f^*\|_0 = \int_{\mathbb{T}} \lim_{r\nearrow 1} \log^+|f_r(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) \leq \liminf_{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log^+|f_r(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) = \|f\|_0\,.$$

Die Behauptung (*iii*) folgt aus den bereits bewiesenen, denn sind $f, g \in N$ so ist auch $f - g \in N$ und, falls $f - g \neq 0$, so ist $f^* - g^* = (f-g)^* \in L^1(\mathbb{T})$.

❑

Wir gehen nun daran die multiplikative Struktur von N näher zu untersuchen. Zuerst wollen wir etwaige Nullstellen abspalten. Dies geschieht mit Hilfe sogenannter *Blaschke Produkte*:

2.1.5 Lemma. *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $\alpha_n \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ und sei $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Es gelte die* Blaschke Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty\,, \tag{2.1}$$

oder äquivalent $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| > 0$. *Dann ist das Produkt*

$$B(z) := z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, z \in \mathbb{D},$$

lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus \overline{\{(\overline{\alpha_n})^{-1} : n \in \mathbb{N}\}}$ *und stellt daher eine in dieser Menge analytische Funktion dar. Diese nennt man das Blaschke Produkt zu der Folge* α_n *und* k. *Die Funktion* B *hat genau (inklusive Vielfachheit) die Nullstellen* α_n *und* 0 *als Nullstelle der Ordnung* k. *Es gilt die Symmetrieeigenschaft* $B((\overline{z})^{-1}) = (\overline{B(z)})^{-1}$.

Beweis. Sei K eine kompakte Menge mit $K \cap \overline{\{(\overline{\alpha_n})^{-1} : n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$. Dann existiert $\delta_1 > 0$ sodaß $|1 - \overline{\alpha_n} z| = |\alpha_n|\, |z - (\overline{\alpha_n})^{-1}| \geq \delta$. Weiters gilt auf Grund der Blaschke Bedingung $|\alpha_n| \to 1$, also ist auch $|\alpha_n| \geq \delta_2 > 0$. Ausserdem ist $|z| \leq \delta_3$, $z \in K$. Nun ist

$$\Big|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\Big| = \Big|\frac{\alpha_n - |\alpha_n|^2 z - |\alpha_n|\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1-\overline{\alpha_n} z)\alpha_n}\Big| =$$

$$= \Big|\frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1-\overline{\alpha_n} z)\alpha_n}\Big|(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+\delta_3}{\delta_1 \delta_2}(1-|\alpha_n|),$$

und schliessen aufgrund der Blaschke Bedingung das die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\Big|$$

auf K gleichmäßig konvergiert. Damit ist auch das Produkt $B(z)$ gleichmäßig konvergent auf K.

❑

Bemerke das, falls die Blaschke Bedingung nicht erfüllt ist, das obige Produkt in $\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert und außerhalb gegen ∞.

2.1.6 Lemma. *Die Folge* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *erfülle die Blaschke Bedingung* (2.1). *Sei* B *das Blaschke Produkt zu den* α_n *und einem* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dann gilt* $\|B\|_\infty = 1$ *und* $|B^*(\zeta)|_\infty = 1$, λ*-fast überall. Weiters ist*

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log \big|B_r(\zeta)\big|\, d\lambda(\zeta) = 0\,. \tag{2.2}$$

Beweis. Da stets $\|\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha} z}\|_\infty = 1$ ist, ist sicher $\|B\|_\infty \leq 1$. Also existiert fast überall der Grenzwert $\lim_{z \to\!\!\!\!\to \zeta} B(z) =: B^*(\zeta)$ und $\|B^*\|_\infty \leq 1$. Da $\log|B|$ subharmonisch ist, existiert der obige Grenzwert. Klarerweise ist er nichtpositiv. Sei für $N \in \mathbb{N}$

$$B_N(z) := \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n},$$

dann hat die rationale Funktion $\frac{B}{B_N}$ in einer offenen Umgebung von $\mathbb{T}$ keine Null- oder Polstellen, und $|\frac{B}{B_N}| = 1$ längs $\mathbb{T}$. Es folgt

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log \Big|\frac{B}{B_N}(r\zeta)\Big|\, d\lambda(\zeta) = 0\,,$$

und daher

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\left|B(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta) = \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\left|B_N(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta)\,.$$

Wir erhalten, da $\log|B_N|$ subharmonisch ist und mit Hilfe des Lemmas von Fatou

$$\log|B_N(0)| = \lim_{r\searrow 0}\int_{\mathbb{T}} \log\left|B_N(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta) \le \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\left|B_N(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta) =$$

$$= \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\left|B(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta) \le \int_{\mathbb{T}} \lim_{r\nearrow 1} \log\left|B(r\zeta)\right| d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \log\left|B^*(\zeta)\right| d\lambda(\zeta) \le 0\,.$$

Für $N \to \infty$ strebt $\log|B_N(0)|$ gegen 0. Es folgt das die Beziehung (2.2) gilt und das fast überall $\log|B^*(\zeta)| = 0$ gilt. Daraus wiederum folgt das auch $\|B\|_\infty = 1$ ist.

❑

2.1.7 Bemerkung. Ist eine endliche Anzahl von Nullstellen $\alpha_n \in \mathbb{D}$ vorgegeben, und ist $B(z)$ das entsprechend gebildete Produkt, so ist B eine rationale Funktion und die Eigenschaften von Lemma 2.1.6 sind trivialerweise erfüllt.

2.1.8 Proposition. *Ist $f \in N$, $f \neq 0$, dann erfüllen die Nullstellen von f die Blaschke Bedingung. Sei B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und setze $g := B^{-1}f$. Dann ist $g \in N$ und $\|g\|_0 = \|f\|_0$.*

Beweis. Da $f \in N$ gerade bedeutet das f geschrieben werden kann als $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \le 1$ und ψ nullstellenfrei, genügt es für die ersten beiden Behauptungen den Fall $\|f\|_\infty \le 1$ zu betrachten.

Sei also f analytisch in $\mathbb{D}$ und $\|f\|_\infty \le 1$. Habe f an der Stelle 0 eine Nullstelle der Ordnung k und seien α_n die von Null verschiedenen Nullstellen von f (aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit). Setze für $N \in \mathbb{N}$

$$B^N(z) := z^k \prod_{j=1}^{N} b_{\alpha_j}(z)\,, \tag{2.3}$$

wobei

$$b_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\frac{|\alpha|}{\alpha}\,.$$

Wir zeigen das gilt

$$\|(B^N)^{-1}f\|_\infty \le 1\,, \tag{2.4}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann existiert $R \in (0,1)$ sodaß

$$\left|B^N(z)\right| \ge 1-\epsilon,\ |z| \in [R,1)\,.$$

Es folgt $|(B^N)^{-1}f(z)| \le (1-\epsilon)^{-1}$, $|z| \in [R,1)$. Nach dem Maximumprinzip folgt $\|(B^N)^{-1}f(z)\|_\infty \le (1-\epsilon)^{-1}$. Da ϵ beliebig war, folgt $\|(B^N)^{-1}f(z)\|_\infty \le 1$, d.h. es ist

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \le \left|\prod_{j=1}^{N} b_{\alpha_j}(z)\right|,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Setzt man in dieser Beziehung $z = 0$ ein, so folgt

$$0 < \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq \prod_{j=1}^{N} |\alpha_j| \,.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist die Blaschke Bedingung erfüllt. Weiters schliessen wir wegen (2.4) das $\|B^{-1}f\|_\infty \leq 1$ ist.

Wir müssen noch zeigen das, in der Situation des Satzes, $\|B^{-1}f\|_0 = \|f\|_0$ ist. Es gilt

$$\log^+\left|\frac{f}{B}\right| \leq \log^+|f| + \log^+\left|\frac{1}{B}\right| = \log^+|f| - \log|B| \,.$$

Wegen Lemma 2.1.6 folgt $\|B^{-1}f\|_0 \leq \|f\|_0$. Die umgekehrte Ungleichung ist klar, da stets $|f| \leq |B^{-1}f|$.

❑

2.1.9 Bemerkung. Wir wollen die folgende Tatsache die im Beweis von Proposition 2.1.8 aufgetreten ist explizit festhalten: Ist f analytisch in $\mathbb{D}$ und gilt $\|f\|_\infty \leq 1$, so konvergiert das Blaschke Produkt B zu den Nullstellen von f und es ist $\|B^{-1}f\|_\infty \leq 1$.

2.1.10 Satz. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist f genau dann von beschränktem Typ, wenn sich f schreiben läßt als*

$$f = B\frac{S_1}{S_2}F \tag{2.5}$$

wobei B ein Blaschke Produkt ist, S_1 und S_2 nullstellenfreie analytische Funktionen mit

$$\|S_j\|_\infty = 1,\ |S_j^*(\zeta)| = 1 \text{ f.ü.},\ j = 1, 2\,,$$

und wobei F von der Gestalt

$$F(z) = e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}$$

mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ ist. Tatsächlich gilt in diesem Fall $\phi = \log|f^*|$.

Ist $f \in N$, so sind in (2.5) die Faktoren B und F (bis auf eine multiplikative Konstante vom Betrag eins) eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $f \in N$ gegeben und bezeichne mit f^* die Randfunktion von f. Wegen Proposition 2.1.8 können wir oBdA annehmen das f keine Nullstellen hat. Dann ist also $\log f$ eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion. Weiters gilt wegen Korollar 2.1.3 das $\operatorname{Re}\log f = \log|f| \in h^1$. Nach der Poisson-Jensen Formel Korollar 1.4.2 existiert ein reelles Borel-Maß μ und eine reelle Konstante C mit

$$\log f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta) + iC,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Schreibe $d\mu = \phi d\lambda + \mu_s$ mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und μ_s singulär bezüglich λ. Weiter schreibe $\mu_s = \mu_2 - \mu_1$ mit positiven zu λ singulären Maßen μ_j. Setze

$$S_j(z) := e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu_j(\zeta)}\,,$$

$$F(z) = e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)} .$$

Dann gilt $f = \frac{e^{iC} S_1}{S_2} F$. Die Funktion F hat nach Definition die verlangte Gestalt. Da die μ_j positiv sind, ist $\|S_j\|_\infty \le 1$. Nach dem Satz von Fatou ist $|S_j^*(\zeta)| = 1$ fast überall.

Wir zeigen umgekehrt, daß jedes Produkt der Gestalt (2.5) von beschränktem Typ ist. Da B, S_1, S_2 beschränkt sind, ist nur mehr zu zeigen das $F \in N$. Dazu schreibe $F = \frac{F_1}{F_2}$ mit

$$F_1(z) = e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi^-(\zeta)\, d\lambda(\zeta)}, \; F_2(z) = e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi^+(\zeta)\, d\lambda(\zeta)},$$

wobei $\phi^+ := \max\{\phi, 0\}$ und $\phi^- := -\min\{\phi, 0\}$.

Um die Eindeutigkeitsaussage einzusehen, bemerke zunächst das das Blaschke Produkt eindeutig durch die Nullstellen von f gegeben ist. Weiters gilt $|f^*| = |F^*|$ fast überall, und wir erhalten wegen dem Satz von Fatou

$$\phi(\zeta) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} \mathcal{P}[\phi d\lambda](z) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} \operatorname{Re} \log F(z) =$$

$$= \lim_{z \hat{\to} \zeta} \log |F(z)| = \log |F^*(\zeta)| = \log |f^*(\zeta)|, \quad \text{f.ü.}.$$

Also ist auch ϕ und damit F bis auf die multiplikative Konstante, durch f bestimmt.

❑

Der obige Satz motiviert die folgende Definition:

2.1.11 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann heißt die Funktion f *inner*, falls $\|f\|_\infty = 1$ und $|f^*(\zeta)| = 1$, λ-fast überall. Sie heißt *singular inner*, wenn sie zusätzlich nullstellenfrei ist. Schließlich heißt f *outer für* N, wenn

$$f(z) = \alpha \cdot e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)}$$

mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, hat.

Wir werden später sehen, daß outer functions durch gewissen Extremaleigenschaften charakterisiert werden, vgl. Proposition 2.1.18. Angesichts dieser Namensgebung spricht man von der Faktorisierung (2.5) auch als *inner-outer Faktorisierung*.

Aus der in Satz 2.1.10 durchgeführten Konstruktion erhalten wir:

2.1.12 Korollar. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist f genau dann singular inner, wenn es ein bezüglich λ singuläres reelles Borel-Maß und eine Konstante α vom Betrag* 1 *gibt sodaß*

$$f(z) = \alpha\, e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)}, \; z \in \mathbb{D}.$$

2.1.13 Beispiel. Wie wir in Korollar 2.1.4, (*ii*), gesehen haben gilt für $f \in N$ stets $\|f^*\|_0 \le \|f\|_0$. Betrachte die Funktion

$$S(z) := e^{-\frac{1+z}{1-z}}, \; z \in \mathbb{D},$$

vgl. Beispiel 1.4.6. Sie ist beschränkt und gehört daher zu N. Es ist $f := S^{-1} \in N$ und

$$\|f^*\|_0 = 0 < 1 = \log|f(0)| \leq \|f\|_0 \,.$$

Dieses Beispiel ist eigentlich von allgemeiner Natur: Ist S singular inner und nicht konstant, so ist $f := S^{-1} \in N$ und es gilt $\|f^*\|_0 < \|f\|_0$.

2.1.14 Definition. Bezeichne mit N^+ jene (echte) Teilmenge von N die aus allen Funktionen $f \in N$ mit $\|f^*\|_0 = \|f\|_0$ besteht. Die Menge N^+ heißt manchmal auch *Smirnov Klasse*.

2.1.15 Proposition. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) $f \in N^+$.

(*ii*) $f \in N$ *und* $\lim_{r\nearrow 1} \log^+|f_r| = \log^+|f^*|$ *im Sinne des* $L^1(\mathbb{T})$.

(*iii*) *Die Funktion f lässt sich faktorisieren als $f = BSF$ wobei B ein Blaschke Produkt, S singulär inner und F outer für N ist.*

Zum Beweis benötigen wir die folgenden maßtheoretischen Aussagen. Zuerst eine allgemeinere Variante des Satzes von der beschränkten Konvergenz wobei wir uns aus pragmatischen Gründen auf den Fall reellwertiger Funktionen beschränken.

2.1.16 Lemma. *Sei μ ein Maß auf der Menge X und seien u_n, v_n, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige meßbare Funktionen mit*

$$|u_n| \leq v_n,\ v_n \in L^1(\mu),\ \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Gilt $u_n \to u$ und $v_n \to v$ punktweise fast überall, und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X v_n \, d\mu = \int_X v \, d\mu < \infty\,,$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu = \int_X u \, d\mu\,.$$

Beweis. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_X v\,d\mu + \int_X u\,d\mu = \int_X (v+u)\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty}(v_n+u_n) \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (v_n+u_n) = \int_X v\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n\,d\mu\,,$$

sowie

$$\int_X v\,d\mu - \int_X u\,d\mu = \int_X (v-u)\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty}(v_n-u_n) \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (v_n-u_n) = \int_X v\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X u_n\,d\mu\,.$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X u_n\,d\mu \leq \int_X u\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n\,d\mu\,.$$

❑

2.1.17 Korollar. *Sei μ ein Maß auf der Menge X, sei $p \in (0,\infty)$, und sei $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in X\ \mu\text{-f.ü., und } \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu\,,$$

dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p\, d\mu = 0\,.$$

Beweis. Setze $u_n := |f_n - f|^p$, $u = 0$, und $v_n := 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$, $v = 2^{p+1}|f|^p$. Dann gilt

$$|u_n|^{\frac{1}{p}} = |f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2\max\{|f_n|, |f|\} =$$
$$= 2\max\{|f_n|^p, |f|^p\}^{\frac{1}{p}} \le 2(|f_n|^p, |f|^p)^{\frac{1}{p}} = v_n^{\frac{1}{p}}\,.$$

Lemma 2.1.16 liefert das gewünschte Resultat.

❑

Beweis. (von Proposition 2.1.15)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Wende Korollar 2.1.17 an mit $p = 1$ und den Funktionen $\log^+|f_r|$ und $\log^+|f^*|$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Schreibe $f = B \cdot S_2^{-1} S_1 \cdot F$ wie in (2.5). Sei $r \in (0,1)$ sodaß f längs $r\mathbb{T}$ keine Nullstellen hat. Die Funktion $\log|f(rz)|$ ist subharmonisch auf $\frac{1}{r}\mathbb{D}$, und hat längs $\mathbb{T}$ die Werte $\log|f_r|$. Also folgt das

$$\log|f(rz)| \le \mathcal{P}[\log|f_r|](z) = \mathcal{P}[\log^+|f_r|](z) - \mathcal{P}[\log^-|f_r|](z),\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$-\liminf_{r\nearrow 1} \mathcal{P}[\log^-|f_r|](z) \le -\mathcal{P}[\log^-|f^*|](z),\ z \in \mathbb{D}\,,$$

und nach unserer Voraussetzung

$$\lim_{r\nearrow 1} \mathcal{P}[\log^+|f_r|](z) = \mathcal{P}[\log^+|f^*|](z),\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Wir erhalten also für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$\log|f(z)| = \lim_{r\nearrow 1} \log|f(rz)| \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|](z) - \mathcal{P}[\log^-|f^*|](z) =$$
$$= \mathcal{P}[\log|f^*|](z) = \log|F(z)|\,.$$

Die Funktion $F^{-1}f$ ist also beschränkt durch 1. Nach Bemerkung 2.1.9 ist auch $B^{-1}F^{-1}f = S_2^{-1}S_1$ beschränkt durch 1, d.h. singular inner.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $f = BSF$ in der angegebenen Weise. Dann ist $f \in N$ und es gilt $|f| \le |F|$. Wegen $\log|F| = \mathcal{P}[\log|f^*|] \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|]$ erhalten wir das auch $\log^+|f| \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|]$, und es folgt

$$\|f_r\|_0 = \|\log^+|f_r|\|_1 \le \|\mathcal{P}[\log^+|f^*|]_r\|_1\,.$$

Die rechte Seite strebt nach Satz 1.4.1, (ii), gegen $\|\log^+|f^*|\|_1 = \|f^*\|_0$, die linke gegen $\|f\|_0$. Also haben wir auch $\|f\|_0 \le \|f^*\|_0$. Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen Korollar 2.1.4, (ii), sowieso.

❑

Wir können nun die Eigenschaft einer Funktion outer zu sein, durch eine Extremaleigenschaft charakterisieren.

2.1.18 Proposition. *Sei $f \in N^+$. Dann sind äquivalent*

(*i*) *f ist outer.*

(*ii*) *Sei $g \in N^+$ und sei $g \neq \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$. Ist $|g^*(\zeta)| = |f^*(\zeta)|$ fast überall, dann folgt*
$$|g(z)| \leq |f(z)| \text{ für ein } z \in \mathbb{D}\,.$$

(*iii*) *Sei $g \in N^+$ und sei $g \neq \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$. Ist $|g^*(\zeta)| \leq |f^*(\zeta)|$ fast überall, dann folgt*
$$|g(z)| < |f(z)|,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

(*iv*) *Es gilt*
$$\log|f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f^*(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)\,.$$

Beweis. Die Implikation (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) ist trivial. Ebenso (*i*) $\Rightarrow$ (*iv*), denn ist f outer so gilt die gewünschte Beziehung nach Definition.

Sei nun angenommen das (*i*) falsch ist, d.h. $f = BSF$ mit BS nicht konstant. Dann gilt wegen dem Maximumprinzip $|(BS)(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Wir sehen das F eine Funktion ist mit $|F^*| = |f^*|$ f.ü. aber $|F(z)| > |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Insbesondere folgt nach Definition der outer function F
$$\log|f(0)| < \log|F(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f^*(\zeta)|\,d\lambda(\zeta)\,.$$
Wir haben gezeigt das (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) und (*iv*) $\Rightarrow$ (*i*).

Wir zeigen (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*): Sei f outer, und sei $g \in N^+$ mit $|g^*| \leq |f^*|$ gegeben. Schreibe $g = BSG$. Es gilt nach unserer Vorausssetzung $|G(z)| \leq |f(z)|$. Ist BS nicht konstant, so folgt bereits $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Ist nicht $\log|g^*| = \log|f^*|$ f.ü., so ist nach Korollar 1.2.5 $|G(z)| < |f(z)|$ für jedes $z \in \mathbb{D}$. Es folgt das $g = \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$.

❑

Da die Funktion 1 outer ist, erhalten wir insbesondere

2.1.19 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Dann ist f inner genau dann, wenn $|f^*(\zeta)| = 1$ f.ü.*

2.2 Hardy Räume

2.2.1 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$, $p \in (0, \infty]$ und setze wieder $f_r(\zeta) := f(r\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Wir schreiben $f \in H^p$, falls
$$\sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty\,.$$

H^p heißt *Hardy Raum*. Wir definieren weiters

$$\|f\|_p := \sup_{0\le r<1} \|f_r\|_p,\ f \in H^p \,.$$

Es besteht also H^p aus jenen Funktionen in h^p die sogar analytisch sind. Nach Korollar 1.6.7 bzw. Bemerkung 1.6.8 ist $\|f_r\|_p$ stets monoton wachsend mit $r \in (0,1)$ und wir erhalten wieder

$$\sup_{0\le r<1} \|f_r\|_p = \lim_{r\nearrow 1} \|f_r\|_p \,.$$

Nach der Jensenschen Ungleichung gilt $\|.\|_p \le \|.\|_{p'}$ für $0 < p \le p' \le \infty$, und daher auch $H^p \supseteq H^{p'}$.

Wir benötigen die folgende elementare Ungleichung.

2.2.2 Lemma. *Es gilt für* $0 < p \le 1$ *und* $x, y \ge 0$ *stets*

$$\big|\log^+ x - \log^+ y\big| \le \frac{1}{p}\big|x-y\big|^p \,.$$

Beweis. Betrachte $f(t) := t^p - 1, g(t) := (t-1)^p$, auf $[1,\infty)$. Dann gilt $f(1) = g(1) = 0$ und da $p - 1 \le 0$

$$f'(t) = pt^{p-1} \le p(t-1)^{p-1} = g'(t),\ t \ge 1 \,.$$

Es folgt $f(t) \le g(t), t \in [1,\infty)$. Wir erhalten wegen $1+x \le e^x$ das $\log(t^p) \le f(t)$, und damit

$$\log t \le \frac{1}{p}(t-1)^p,\ t \ge 1 \,.$$

Daraus erhalten wir mittels Fallunterscheidung die gewünschte Ungleichung. Sei zunächst $x \ge y \ge 1$, dann gilt

$$\log\frac{x}{y} \le \frac{1}{p}(\frac{x}{y}-1)^p \le \frac{1}{p}(\frac{x}{y}-1)^p y^p = \frac{1}{p}(x-y)^p \,.$$

Ist $x \ge 1 \ge y$, so gilt

$$\log x \le \frac{1}{p}(x-1)^p \le \frac{1}{p}(x-y)^p \,.$$

Ist $1 \ge x \ge y$, so ist die gewünschte Ungleichung trivial.

❑

Setzt man in dieser Ungleichung speziell $y = 0$, so folgt das $\log^+ x \le \frac{1}{p}|x|^p$. Da der Raum H^p mit wachsendem p kleiner wird, folgt

2.2.3 Korollar. *Sei* $p \in (0,\infty]$, *dann gilt* $H^p \subseteq N$. *Insbesondere besitzt jede Funktion* $f \in H^p$ *für* λ*-fast alle Punkte* $\zeta \in \mathbb{T}$ *einen nichttangentialen Grenzwert* $f^*(\zeta) := \lim_{z \dashrightarrow \zeta} f(z)$, *und die Nullstellen von* f *genügen der Blaschke Bedingung.*

Das Abspalten der Nullstellen führt uns nicht aus H^p hinaus:

2.2.4 Lemma. *Sei* $p \in (0,\infty]$, $f \in H^p$ *und bezeichne mit* B *das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von* f. *Dann ist* $B^{-1}f \in H^p$ *und* $\|B^{-1}f\|_p = \|f\|_p$.

Beweis. Der Fall $p = \infty$ ist gerade Bemerkung 2.1.9. Sei also $p \in (0, \infty)$. Bezeichne wie in (2.3) wieder mit B^N das Produkt der ersten N elementaren Blaschke Faktoren zu den Nullstellen von f. Da $\lim_{r\to 1} B^N(r\zeta) = B^N(\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta \in \mathbb{T}$ gilt, erhalten wir

$$\left\|\left(\frac{f}{B^N}\right)_r\right\|_p \leq \lim_{r\nearrow 1}\left\|\left(\frac{f}{B^N}\right)_r\right\|_p = \lim_{r\nearrow 1}\|f_r\|_p = \|f\|_p\,.$$

Da $(B^N)^{-1}f$ für $N \to \infty$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $B^{-1}f$ konvergiert, strebt die linke Seite in dieser Ungleichung gegen $\|(B^{-1}f)_r\|_p$. Wir schliessen das $B^{-1}f \in H^p$ und $\|B^{-1}f\|_p \leq \|f\|_p$. Wegen $|B| \leq 1$ ist die umgekehrte Ungleichung trivial.

❑

2.2.5 Satz. *Sei $p \in (0, \infty)$ und $f \in H^p$. Dann gilt $\lim_{r\nearrow 1} f_r = f^*$ im Sinne des $L^p(\mathbb{T})$.*

Beweis. Für $p > 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1.4.1, (iii). Sei nun $p \in (0, \infty)$ beliebig und $f \in H^p$. Sei B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und setze $g := B^{-1}f$. Dann ist $g \in H^p$ und $\|g\|_p = \|f\|_p$. Da g in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen hat gibt es eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion h mit $h^{\frac{2}{p}} = g$. Nun gilt $\|h_r\|_2 = \|g_r\|_p$ und daher $h \in H^2$. Wir haben auch $(h^*)^{\frac{2}{p}} = g^*$. Da stets $|f(z)| \leq |g(z)|$ ist, und $|f^*| = |g^*|$, erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{T}} |f_r|^p\,d\lambda \leq \int_{\mathbb{T}} |g_r|^p\,d\lambda = \int_{\mathbb{T}} |h_r|^2\,d\lambda \xrightarrow{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} |h^*|^2\,d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |g^*|^p\,d\lambda = \int_{\mathbb{T}} |f^*|^p\,d\lambda \leq \liminf_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} |f_r|^p\,d\lambda = \|f\|_p\,.$$

Lässt man in dieser Beziehung r gegen 1 streben, so folgt $\|f^*\|_p = \|f\|_p$. Wendet man Korollar 2.1.17 an mit f_r und f^*, so folgt

$$\lim_{r\nearrow 1}\|f_r - f^*\|_p = 0\,.$$

❑

2.2.6 Bemerkung. Die Aussage dieses Satzes ist für $p = \infty$ nicht richtig, denn sonst müßte jede Funktion aus H^∞ eine stetige Randfunktion haben. Betrachte aber die Funktion S aus Beispiel 2.1.13. Beachte das trotzdem $\lim_{r\nearrow 1}\|f_r\|_\infty = \|f^*\|_\infty$.

2.2.7 Korollar. *Betrachte die Abbildung $f \mapsto f^*$. Ist $p \in [1, \infty]$, so ist diese eine Isometrie von $(H^p, \|.\|_p)$ in $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$. Ist $p \in (0, 1)$, so ist sie isometrisch bezüglich der Metriken $d_{H^p}(f, g) := \|f - g\|_p^p$ auf H^p sowie $d_{L^p}(f, g) := \|f - g\|_p^p$ auf $L^p(\mathbb{T})$. Ist $f \in H^1$, so kann f aus seinen Randwerten f^* rekonstruiert werden als Poisson Integral*

$$f(z) = \mathcal{P}[f^*](z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, \zeta) f^*(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\,,$$

sowie auch als Cauchy Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} \, d\lambda(\zeta) \, .$$

Beweis. Die Aussagen folgen sämtliche der Konvergenz $\|f_r - f^*\|_p \to 0$. Für die Cauchysche Integraldarstellung bemerke das für jedes $r \in (0,1)$ wegen der Analytizität von f gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta - z} \, d\lambda(\zeta), \ |z| < r \, .$$

❑

2.2.8 Bemerkung. In den vorangegangenen Sätzen manifestiert sich ein wesentlicher Unterschied zwischen allgemeinen harmonischen Funktionen und analytischen Funktionen. Denn für jedes $p \in (0,\infty]$ hat jedes $f \in H^p$ Randwerte und, falls $p \neq \infty$, gilt $f_r \to f^*$ im $L^p(\mathbb{T})$. Dagegen muß $u \in h^p$ für $p < 1$ keine Randwerte haben, vgl. Beispiel 1.4.7, und im Fall $p = 1$, wo zwar Randwerte existieren, muß nicht $\|f_r - f^*\|_1 \to 0$ gelten, vgl. Beispiel 1.4.6.

2.2.9 Bemerkung. Wir wollen diesen Unterschied im Fall $p = 1$ noch einmal etwas anders interpretieren: Sei μ ein komplexes Borel-Maß, sodaß also $u = \mathcal{P}[d\mu]$ eine harmonische Funktion ist und zu h^1 gehört. Ist die Funktion u sogar analytisch, d.h. gehört sie zu H^1, so gilt $u_r \to u^*$ bezüglich $\|.\|_1$ und daher ist nach Satz 1.4.1, (ii), $u = \mathcal{P}[u^*]$. wegen der Eindeutigkeit des Maßes in der Poissonschen Integraldarstellung folgt $d\mu = u^* \, d\lambda$. Also ist μ absolut stetig. Nach Bemerkung 1.1.5, (iv), bedeutet die Forderung der Analytizität von u nichts anderes als $\int_{\mathbb{T}} \zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir haben eben die Aussage eines *Satzes von F. und M.Riesz* hergeleitet: Ist μ eine komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und verschwinden die Momente $\int_{\mathbb{T}} \zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, so ist μ absolut stetig.

Mit Hilfe der Ungleichung Lemma 2.2.2 erhalten wir als weitere Folgerung Satz 2.2.5

2.2.10 Korollar. *Für jedes $p \in (0,\infty]$ gilt $H^p \subseteq N^+$.*

Wir wollen noch die inner-outer Faktorisierung von H^p Funktionen bestimmen. Dazu definieren wir:

2.2.11 Definition. Eine Funktion f heißt *outer für H^p*, wenn sie die Gestalt

$$f(z) = \alpha \cdot e^{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \phi(\zeta) \, d\lambda(\zeta)}$$

hat, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, und einer Funktion ϕ die $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und $e^\phi \in L^p(\mathbb{T})$ erfüllt.

2.2.12 Proposition. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $p \in (0,\infty]$. Dann gehört f zu H^p genau dann, wenn sich f faktorisieren lässt als $f = BSF$ mit einem Blaschke Produkt B, einer singular inner function S und einer Funktion F outer für H^p.*

Beweis. Sei $p \in (0,\infty)$ und F outer für H^p. Dann gilt

$$\log |F(z)| = \mathcal{P}[\phi](z) = \int_{\mathbb{T}} \phi(\zeta) \big(P(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta)\big)$$

Wir erhalten mit der Jensenschen Ungleichung angewandt auf die konvexe Funktion e^{px}

$$|F(z)|^p = e^{p \log |F(z)|} \leq \int_{\mathbb{T}} e^{p\phi(\zeta)} \big(P(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta)\big) = \mathcal{P}[(e^{\phi})^p](z)\,. \tag{2.6}$$

Da $(e^{\phi})^p \in L^1(\mathbb{T})$ ist, folgt $\mathcal{P}[(e^{\phi})^p] \in h^1$. Insbesondere ist $\sup_{0\leq r<1} \|F(z)\|_p < \infty$, d.h. $F \in H^p$.

Sei F outer für H^∞, dann ist $e^\phi \in L^\infty$ und daher $\phi \leq M$ für ein gewisses $M < \infty$. Es folgt

$$\log |F(z)| = \mathcal{P}[\phi](z) \leq M,\ z \in \mathbb{D}\,,$$

also $F \in H^\infty$.

Da eine beschränkte Funktion zu jedem Raum H^p, $p \in (0,\infty]$, gehört, haben wir gezeigt das eine Funktion der Gestalt BSF wobei B ein Blaschke Produkt, S singular inner und F outer für H^p ist, zu H^p gehört.

Umgekehrt sei $f \in H^p$. Dann ist $f \in N^+$ und lässt sich daher faktorisieren als $f = BSF$. Dabei ist F die von $\phi = \log |f^*|$ erzeugte outer (für N) Funktion. Also gilt $e^\phi = |f^*| \in L^p(\mathbb{T})$ und wir sehen das F sogar outer für H^p ist.

❑

Kombiniert man Proposition 2.1.15 und Proposition 2.2.12, so erhält man die folgende Aussage:

2.2.13 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Dann ist $f \in H^p$ genau dann, wenn $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.*

Wie uns Beispiel 2.1.13 zeigt ist die Voraussetzung $f \in N^+$ in diesem Korollar wesentlich.

2.3 H^p als linearer Raum

2.3.1 Satz. *Sei $p \in (0,\infty]$. Dann ist H^p mit der Norm $\|.\|_p$, bzw. der Metrik d_{H^p} im Fall $p < 1$, vollständig. Es gilt*

$$\overline{\mathbb{C}[z]}^{\|.\|_p} = H^p,\ p \in (0,\infty)\,, \quad \overline{\mathbb{C}[z]}^{\|.\|_\infty} = A \subsetneq H^\infty\,,$$

wobei A die Menge aller auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetigen und in $\mathbb{D}$ analytischen Funktionen bezeichnet.

Beweis. Im ersten Schritt bemerken wir das für eine Folge $f_n \in H^p$, $n \in \mathbb{N}$, Konvergenz in der Norm $\|.\|_p$ lokal gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{D}$ impliziert. Für $p = \infty$ ist dies trivial. Für $p \in (0,\infty)$ ist dies eine Folgerung aus der Ungleichung

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{1}{p}}}, f \in H^p, z \in \mathbb{D}\,,$$

welche wir nun beweisen: Für $f \in H^p$ betrachte die inner-outer Faktorisierung $f = BSF$. Nun gilt, da F outer für H^p ist, die Beziehung (2.6), und wir erhalten mit der Abschätzung (1.5) des Poissonkernes

$$|f(z)|^p \le |F(z)|^p \le \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)|f^*|^p \, d\lambda(\zeta) \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \int_{\mathbb{T}} |f^*|^p \, d\lambda \le$$

$$\le \frac{2}{1-|z|} \|f^*\|_p, \; z \in \mathbb{D}\,.$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in H^p$, eine Cauchy-Folge. Dann ist nach der obigen Ungleichung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine lokal gleichmäßige Cauchy-Folge. Also existiert eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion f sodaß $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ lokal gleichmäßig. Wähle, zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\|f_n - f_m\|_p \le \epsilon$, $n, m \ge N$. Dann gilt für jedes $m \ge N$ und $r \in [0,1)$

$$\|f_r - f_{m,r}\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_{n,r} - f_{m,r}\|_p \le \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{r\in[0,1)} \|(f_n - f_m)_r\|_p}_{=\|f_n - f_m\|_p} \le \epsilon\,.$$

Also haben wir $\|f_r\|_p \le \|f_{N,r}\|_p + \|f_r - f_{N,r}\|_p$, bzw. noch mit einem Exponenten p falls $p < 1$, und schließen das $f \in H^p$. Bildet man in der letzten Ungleichung das Supremum über $r \in [0,1)$, so folgt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich $\|.\|_p$. Wir sehen das H^p vollständig ist.

Wir kommen zum Beweis des zweiten Teils des Satzes. Bemerke zuerst das $\mathbb{C}[z] \subseteq A \subseteq H^p$. Die singular inner Funktion S aus Beispiel 2.1.13 gehört zu H^∞ aber nicht zu A, also ist $A \subsetneq H^\infty$.

Sei nun entweder $f \in H^p$ mit $p \in (0,\infty)$ oder $f \in A$. Dann gilt $\lim_{r\nearrow 1} \|f_r - f^*\|_p = 0$. Im Fall $p \in (0,\infty)$ wegen Satz 2.2.5, für $p = \infty$ wegen Korollar 2.2.7 gemeinsam mit Satz 1.4.1, (v).

Betrachte die Taylorreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ von f um 0. Dann ist diese (mindestens) in ganz $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig konvergent, und zwar gegen f. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann können wir $r \in [0,1)$ so wählen daß $\|f_r - f^*\|_p \le \epsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\|(\sum_{n=0}^N a_n z^n)_r - f_r\|_p \le \epsilon$. Setze $q(z) := \sum_{n=0}^N (a_n r^n) z^n$, dann ist q als Polynom auch in H^p und es gilt

$$\|q - f\|_p = \|q^* - f^*\|_p = \Big\|\Big(\sum_{n=0}^N a_n z^n\Big)_r - f^*\Big\|_p \le 2\epsilon\,,$$

bzw. $\le 2^{\frac{1}{p}}\epsilon$ falls $p < 1$. Wir haben also in den behaupteten Gleichheiten auch die Inklusion '$\supseteq$' gezeigt.

❑

Wie wir in Korollar 2.2.7 gesehen haben, ist die Abbildung $f \mapsto f^*$ eine Isometrie von H^p auf einen Teilraum von L^p. In diesem Sinne können wir für jedes $p \in (0,\infty]$ also H^p auffassen als Teilraum von L^p. Wegen der obigen Aussage ist H^p sogar ein abgeschlossener Teilraum von L^p.

2.3.2 Bemerkung. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Setzt man formal $z = e^{it}$, so erhält man '$f(e^{it}) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{int}$', die Fourierreihe von $f(e^{it})$. Diese heuristische Vorgangsweise legt es also nahe, daß die Potenzreihenkoeffizienten gerade die Fourierkoeffizienten der Randfunktion sind. Wir wollen im folgenden diesen Themenkreis etwas näher studieren.

2.3.3 Proposition. *Sei $p \in [1,\infty]$. Dann gilt*

$$H^p = \big\{ f \in L^p : (\Phi f)_n = 0 \text{ für alle } n < 0 \big\}\,,$$

wobei wir in dieser Beziehung wieder H^p vermöge $f \mapsto f^*$ als Teilraum von L^p auffassen. Ist $f \in H^p$, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi f^*)_n z^n,\ \ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Sei $f \in H^1$ und schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Weiters sei $r \in (0,1)$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\, dt = \begin{cases} a_n & ,\ n \geq 0 \\ 0 & ,\ n < 0 \end{cases}\,.$$

Für $n \geq 0$ erhalten wir $|r^n a_n - \Phi(f^*)_n| \leq \|f_r - f^*\|_1$. Läßt man r gegen 1 streben, so folgt $a_n = \Phi(f^*)$. Genauso erhält man $\Phi(f^*)_n = 0$ für $n < 0$.

Sei nun $g \in L^p(\mathbb{T})$ gegeben sodaß $\Phi(g)_n = 0$, $n < 0$, und setze $f := \mathcal{P}[g]$. Nach Satz 1.4.1 ist $f \in h^p$, nach Bemerkung 1.1.5, (iv), ist f analytisch in $\mathbb{D}$. Also ist $f \in H^p$. Nach dem Satz von Fatou gilt $f^* = g$.

❑

2.3.4 Bemerkung. Wir wollen zwei Folgerungen explizit erwähnen.

(i) Es gilt $H^2 \cong \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ wobei die Isomorphie vermittelt wird durch die Beziehung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$. Anders ausgedrückt: Der Raum H^2 besteht aus genau jenen analytischen Funktionen deren Potenzreihenkoeffizienten quadratisch summierbar sind. Beachte hier das jede Potenzreihe mit quadratisch summierbaren Koeffizienten Konvergenzradius mindestens 1 hat. Weiters gilt in diesem Fall

$$\sup_{r \in [0,1)} \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \Big\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,.$$

(ii) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens 1 und gilt $\sup_{r \in [0,1)} \|f_r\|_1 < \infty$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tatsächlich erfüllen die Potenzreihenkoeffizienten einer H^1-Funktion eine viel stärkere asymptotische Eigenschaft:

2.3.5 Proposition (Hardy)**.** *Sei $f \in H^1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \pi \|f\|_1\,.$$

Beweis. Sei zunächst $a_n \geq 0$. Dann gilt für $r \in (0,1)$

$$\operatorname{Im} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta$$

Es ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{n}\,,$$

also folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\,\mathrm{Im}\, f(re^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \le \pi||f||_1\,.$$

Für $r \to 1$ folgt die Behauptung.

Sei nun $f \in H^1$ beliebig, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Bezeichne mit B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und zerlege f als $g \cdot h$ mit

$$g := B\Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}},\ h := \Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Schreibt man

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,,$$

so haben wir also $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$. Definiere Funktionen G und H durch

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| z^n,\ H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n\,,$$

dann gilt $F(z) := G(z)H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n z^n$ wobei $\tilde{a}_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|\,|c_{n-k}| \ge |a_n|$.

Nun ist $f \in H^1$, also sind g und $h \in H^2$. Das bedeutet gerade das $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2, \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$. Damit gehören auch G und H zu H^2, und daher F zu H^1. Nun folgern wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{a_n} \le \pi\|F\|_1 \le \pi\|G\|_2\|H\|_2 = \pi\|g\|_2\|h\|_2 = \pi\|f\|_1\,.$$

Dabei gilt die zweite Ungleichung wegen dem ersten Teil des Beweises angewandt auf F, die dritte Ungleichung wegen der Schwarzschen Ungleichung im L^2, das erste Gleichheitszeichen aufgrund der Isometrie von H^2 mit $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$, und schliesslich das zweite Gleichheitszeichen da $|B^*| = 1$.

❑

2.4 Der Multiplikationsoperator im H^2

2.4.1 Bemerkung. Sei $p \in (0,\infty]$ und sei φ inner. Dann ist die Abbildung $S_\varphi : f(z) \mapsto \varphi(z)f(z)$ eine Isometrie von H^p auf einen Teilraum von H^p. Man bezeichnet diese Isometrie auch als *Multiplikationsoperator* mit φ. Bemerke das stets $S_\varphi \circ S_\psi = S_\psi \circ S_\varphi$.

Wir wollen uns mit dem folgenden speziellen Multiplikationsoperator beschäftigen: Der *Multiplikationsoperator mit* z am H^2 ist gegeben als

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} H^2 & \to & H^2 \\ f(z) & \mapsto & zf(z) \end{array} \right.$$

Nun ist H^2 isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$ via der Abbildung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} .$$

Bei diesem Isomorphismus geht der Multiplikationsoperator mit z über in den *Shift-Operator* am $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$. Dieser ist definiert als

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots) ,$$

und ist eine Isometrie von $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$ in sich. Um den Shift-Operator zu studieren kann man also auch äquivalent den Multiplikationsoperator mit z am H^2 untersuchen.

Ein Teilraum Y von H^2 heißt *invarianter Teilraum* von S, wenn er abgeschlossen ist und wenn $S(Y)\subseteq Y$.

2.4.2 Satz (Beurling)**.** *Sei S der Multiplikationsoperator mit z am H^2. Ein Teilraum Y ist ein invarianter Teilraum von S genau dann wenn er von der Gestalt $Y=\varphi H^2$ ist, wobei φ einen inner Funktion ist.*

Es ist $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$ genau dann, wenn sich φ_1 und φ_2 nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden.

Beweis. Sei φ inner und betrachte $Y := \varphi H^2$. Da S_φ eine Isometrie ist, ist $\varphi H^2 = \operatorname{ran} S_\varphi$ abgeschlossen. Weiters gilt

$$S(Y) = (S\circ S_\varphi)(H^2) = (S_\varphi \circ S)(H^2) \subseteq S_\varphi(H^2) = Y .$$

Ist φ inner und $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $|\alpha|=1$, dann gilt klarerweise $\varphi H^2 = (\alpha\varphi)H^2$. Seien umgekehrt φ_1,φ_2 inner und gelte $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$. Dann existiert $f\in H^2$ mit $\varphi_1 = \varphi_1\cdot 1 = \varphi_2\cdot f$, d.h. $(\varphi_2)^{-1}\varphi_1 = f \in H^2 \subseteq N^+$. Wegen $|((\varphi_2)^{-1}\varphi_1)^*| = 1$ f.ü. folgt mit Korollar 2.1.19 das $(\varphi_2)^{-1}\varphi_1$ inner ist. Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von φ_1 und φ_2, so folgt das auch $(\varphi_1)^{-1}\varphi_2$ inner ist und daher das sich φ_1 und φ_2 nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden können.

Sei $Y\neq 0$ ein invarianter Teilraum. Bezeichne k die kleinste Zahl, so daß Y ein Element f der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$$

enthält. Dann ist $f\notin zY$, d.h. zY ist ein echter abgeschlossener Teilraum von Y. Daher gibt es ein Element $\varphi\in Y$, $\|\varphi\|_2 = 1$, sodaß $\varphi\perp zY$. Speziell gilt $\varphi \perp z^n\varphi$, $n=1,2,\dots$, d.h.

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})\cdot e^{-int}\overline{\varphi(e^{it})}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{it})|^2 e^{-int}\,dt,\ n=1,2,\dots .$$

Durch konjugieren sieht man, daß diese Beziehung auch für $n=-1,-2,\dots$ gilt. Nun ist $|\varphi(e^{it})|^2\in L^1$ und nach dem eben gezeigten gilt $(\Phi\varphi)_n = 0$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Wegen der Injektivität von Φ folgt daraus das $|\varphi(e^{it})|^2 = 1$ f.ü. Wegen $\varphi\in H^2\subseteq N^+$ erhalten wir aus Korollar 2.1.19 das φ inner ist.

Der Teilraum Y ist invariant unter S und abgeschlossen. Weiters enthält er φ. Da die Polynome dicht in H^2 sind, erhalten wir $\varphi H^2\subseteq Y$.

Angenommen $h \in Y$ und $h \perp \varphi H^2$, dann ist auch $h \perp z^n\varphi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) \cdot e^{-int}\overline{\varphi(e^{it})}\, dt = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Es ist $z^n h \in zY$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nach der Wahl von φ gilt also $z^n h \perp \varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} h(e^{it}) \cdot \overline{\varphi(e^{it})}\, dt = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots .$$

Die Funktion $h\overline{\varphi}$ gehört zu $L^1(\mathbb{T})$ und wie wir gerade gesehen haben ist $\Phi(h\overline{\varphi}) = 0$. Also folgt $h\overline{\varphi} = 0$. Da φ inner ist erhalten wir $h = 0$.

❑

2.4.3 Korollar. *Sei $f \in H^2$ und $f = BSF$ die inner-outer Faktorisierung. Dann gilt*

$$\operatorname{cls}\big\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\big\} = (BS)H^2 .$$

Beweis. Der Raum $Y := \operatorname{cls}\big\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\big\}$ ist ein invarianter Teilraum. Also gilt $Y = \varphi H^2$ mit einer gewissen inner Funktion φ. Wegen $f \in Y$ existiert eine Funktion $h \in H^2$ mit $f = \varphi h$. Sei $h = B_1 S_1 H$ die inner-outer Faktorisierung von h. Da φ inner ist, ist $|h^*| = |f^*|$ und daher $H = \alpha F$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Nun folgt aus $BSF = f = \varphi h = \varphi B_1 S_1 H$ das $BS = \varphi \cdot \alpha B_1 S_1 \in \varphi H^2$, und damit $(BS)H^2 \subseteq \varphi H^2 = Y$. Wegen $f = BSF \in (BS)H^2$ folgt auch die umgekehrte Inklusion.

❑

Bemerke das der Raum $\operatorname{cls}\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ der kleinste invariante Teilraum ist der f enthält.

2.4.4 Bemerkung. Wir betrachten auf der Menge aller inner Funktionen die *Teilbarkeitsrelation*

$$\varphi|\psi \;:\Leftrightarrow\; \varphi^{-1}\psi \text{ inner} .$$

Es gilt genau dann sowohl $\varphi|\psi$ als auch $\psi|\varphi$, wenn sich φ und ψ nur einen konstanten Faktor unterscheiden. Weiters gilt, wie wir im ersten Teil des Beweises von Satz 2.4.2 gesehen haben,

$$\varphi|\psi \;\Leftrightarrow\; \psi H^2 \subseteq \varphi H^2 .$$

Identifiziert man inner Funktionen die sich nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden, so erhält man also eine ordnungsumkehrende Bijektion von der Menge aller (Äquivalenzklassen) von inner Funktionen und der Menge aller invarianten Teilräume des Multiplikationsoperators. Insbesondere schließen wir: Die Menge der inner Funktionen bildet mit der Teilbarkeitsrelation einen vollständigen Verband. Dieser besitzt ein kleinstes Element, nämlich die Funktion konstant 1.

Kapitel 3

H^p als Banachraum

3.1 Die Hilberttransformation

Ist u eine reelle harmonische Funktion, so gibt es eine harmonische Funktion v sodass $u + iv$ analytisch ist. Die Funktion v heißt die zu u konjugierte harmonische Funktion; sie ist bis auf eine additive reelle Konstante eindeutig bestimmt. Verlangt man das $v(0) = 0$ ist, und wir werden dies stets tun, so ist v also eindeutig. Es entsteht die Frage: *Folgt aus* $\sup \|u_r\|_p < \infty$ *dass auch* $\sup \|v_r\|_p < \infty$ *?* Äquivalent ausgedrückt: Gilt für eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion, dass aus $\operatorname{Re} f \in h^p$ bereits $f \in H^p$ folgt ?

3.1.1 Satz. *Es gibt Konstanten $A_p, B_p, \gamma > 0$, sodass die folgenden Aussagen (i)–(iii) gelten. Dabei sei u eine reelle harmonische Funktion und $f = u + iv$ ihre analytische Vervollständigung (mit $v(0) = 0$).*

(i) *(M.Riesz) Sei $1 < p < \infty$, dann ist*

$$\|f_r\|_p \leq A_p \|u_r\|_p, \quad 0 \leq r < 1\,.$$

(ii) *(Kolmogorov) Sei $0 < p < 1$, dann ist*

$$\|f_r\|_p \leq B_p \|u_r\|_1, \quad 0 \leq r < 1\,.$$

(iii) *(Zygmund) Es ist*

$$\|f_r\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_r(e^{it})| \log^+ |u_r(e^{it})|\, dt + \gamma, \quad 0 \leq r < 1\,.$$

Ist $f \in H^1$ und gilt $\inf_{z \in \mathbb{D}} \operatorname{Re} f(z) > -\infty$, so ist

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |u_r(e^{it})| \log^+ |u_r(e^{it})|\, dt < \infty\,.$$

Beweis. Der Satz ist eigentlich eine Aussage über die in $\overline{\mathbb{D}}$ stetigen Funktionen f_r und u_r. Sei also im folgenden (mit Ausnahme des letzten Beweisschrittes) f stetig in $\overline{\mathbb{D}}$, analytisch in $\mathbb{D}$, und $u = \operatorname{Re} f$.

Fall $1 < p \leq 2$: Zuerst eine elementare Abschätzung. Setze

$$\delta = \frac{\pi}{1+p}, \quad \alpha = \frac{1}{\cos\delta}, \quad \beta = \alpha^p(1+\alpha).$$

Dann gilt, für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$,

$$1 \leq \beta(\cos\varphi)^p - \alpha\cos p\varphi.$$

Denn: Für $\delta \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\beta(\cos\varphi)^p - \alpha\cos p\varphi \geq -\alpha\cos p\varphi \geq -\alpha\cos p\delta = \alpha\cos\delta = 1,$$

und für $|\varphi| \leq \delta$ gilt

$$\beta(\cos\varphi)^p - \alpha\cos p\varphi \geq \beta(\cos\delta)^p - \alpha = 1.$$

Betrachte nun den Fall, dass $u(z) \geq 0$, $z \in \mathbb{D}$. Ist $u(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, so muss $u = 0$ sein, und die gewünschte Beziehung ist daher trivialerweise erfüllt. Sei also $u(z) > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Schreibe f in Polarkoordinaten, $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi(z)}$ mit $|\varphi(z)| < \frac{\pi}{2}$. Dann ist $u(z) = |f(z)|\cos\varphi(z)$, und daher

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p = &\int_{\mathbb{T}} |f(e^{it})|^p \, d\lambda \leq \beta \int_{\mathbb{T}} u(e^{it})^p d\lambda - \alpha \int_{\mathbb{T}} \underbrace{|f(e^{it})|^p \cos(p\varphi(e^{it}))}_{=\operatorname{Re} f^p(e^{it})} \, dt = \\ =&\beta\|u\|_p^p - \alpha \underbrace{\operatorname{Re}(f(0)^p)}_{=u(0)^p>0} \leq \beta\|u\|_p^p.\end{aligned}$$

Sei schliesslich u beliebig. Es gilt $u(z) = \mathcal{P}[u(e^{i\theta})](z)$, also kann man u zerlegen als $u = u_+ - u_-$ mit

$$u_+(z) = \mathcal{P}[\max\{u(e^{i\theta}), 0\}](z), \quad u_-(z) = \mathcal{P}[\max\{-u(e^{i\theta}), 0\}](z).$$

Es ist $|u(e^{i\theta})| = u_+(e^{i\theta}) + u_(e^{i\theta})$ und daher

$$\|f\|_p \leq \|f_+\|_p + \|f_-\|_p \leq \beta^{\frac{1}{p}}\Big(\|u_+\|_p + \|u_-\|_p\Big) \leq 2\beta^{\frac{1}{p}}\|u\|_p,$$

d.h. die Behauptung gilt mit der Konstanten $A_p := 2\beta^{\frac{1}{p}}$.

Fall $2 < p < \infty$: Wir fassen L^p als $(L^q)*$ auf mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist $1 < q \leq 2$. Sei $g \in L^q$, $\|g\|_q \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{T}} f_r(e^{i\theta})g(e^{i\theta})\,d\theta\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{T}}\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{-it}-re^{i\theta}}u(e^{it})\,d\lambda(t)\Big)g(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta)\Big| = \\ &= \Big|\int_{\mathbb{T}}\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{-i\theta}+re^{-it}}{e^{-i\theta}-re^{-it}}g(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta)\Big)\cdot u(e^{it})\,d\lambda(t)\Big| \leq \\ &\leq \Big\|\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{-i\theta}+re^{-it}}{e^{-i\theta}-re^{-it}}g(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta)\Big\|_q \|u\|_p \leq A_q\|g\|_q\|u\|_p = A_q\|u\|_p.\end{aligned}$$

Fall $2 < p < \infty$*:* Wir betrachten wieder zuerst Funktionen u mit $u(z) > 0$ in $\mathbb{D}$, und schreiben $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi(z)})$, $u(z) = |f(z)\cos\varphi(z)$ mit $\varphi \le |\frac{\pi}{2}|$. Dann gilt, wegen $0 < \cos\frac{p\pi}{2} \le \cos(p\varphi(z))$,

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\lambda \le \frac{1}{\cos\frac{p\pi}{2}} \int_{\mathbb{T}} \underbrace{|f|^p \cos(p\varphi)}_{=\mathrm{Re}(f^p)} \, d\lambda = \frac{1}{\cos\frac{p\pi}{2}} \underbrace{\mathrm{Re}[f(0)^p]}_{=u(0)^p} = \frac{1}{\cos\frac{p\pi}{2}} \Big(\int_{\mathbb{T}} u \, d\lambda \Big)^p ,$$

d.h.

$$\|f\|_p \le \frac{1}{\cos p\frac{\pi}{2}} \|u\|_1 .$$

Ist u beliebig, zerlege wieder $u = u_+ - u_-$.

Fall $p = 1$*:* Wir betrachten zuerst Funktionen u mit $u(z) \ge e$, $z \in \mathbb{D}$. Man berechnet

$$\Delta|f| = \frac{|f'|^2}{|f|}, \quad \Delta(u \log u) = \frac{|f'|^2}{u} ,$$

und es folgt dass $\Delta|f| \le \Delta(u\log u)$. Die zweite Green'sche Identität angewendet mit einer Funktion φ und einer konstanten Funktion gibt

$$\iint_{|z|\le r} \Delta\varphi \, dxdy = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \, d\theta .$$

Mit obiger Ungleichung folgt daher

$$\frac{d}{dr} \int^{2\pi} 0|f(re^{i\theta})| \, d\theta \le \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \log u(re^{i\theta}) \, d\theta ,$$

und Integration nach r liefert

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \, d\theta - 2\pi|f(0)| \le \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \log u(e^{i\theta}) \, d\theta - 2\pi u(0) \log u(0) .$$

Nun ist $f(0) = u(0)$ und $\log u(0) \ge 1$. Also folgt

$$\|f\|_1 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})| \log^+ |u(e^{i\theta})| \, d\theta .$$

Sei nun u beliebig. Wir zerlegen $\mathbb{T}$ als disjunkte Vereinigung $\mathbb{T} := E_+ \cup E_- \cup E_0$ mit

$$E_+ := \big\{z \in \mathbb{T} : \, u(z) \ge e\big\}, \quad E_- := \big\{z \in \mathbb{T} : \, u(z) \le -e\big\} ,$$

$$E_0 := \big\{z \in \mathbb{T} : \, -e < u(z) < e\big\} .$$

Entsprechend zerlegt sich u als $u = u_+ - u_- + u_0$ mit

$$u_+(z) = \mathcal{P}[u \cdot \mathbb{1}_{E_+}](z), \; u_-(z) = \mathcal{P}[-u \cdot \mathbb{1}_{E_-}](z), \; u_0(z) = \mathcal{P}[u \cdot \mathbb{1}_{E_0}](z) ,$$

sowie auch f als $f = f_+ - f_- + f_0$. Nach dem bereits bewiesenen gilt

$$\|f_+\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u_+(e^{i\theta})| \log^+ |u_+(e^{i\theta})|\, d\theta\,,$$

$$\|f_-\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u_-(e^{i\theta})| \log^+ |u_-(e^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

Weiters ist, nachdem bereits bewiesenen Fall '$p = 2$',

$$\|f_0\|_1 \leq \|f_0\|_2 \leq A_2\|u_0\|_2 \leq A_2 \cdot e\,.$$

Nun ist $\operatorname{supp} u_\pm(e^{i\theta}) = E_\pm$, und $u_\pm(z) = \pm u(z)$, $z \in \operatorname{supp} u_\pm$. Also folgt

$$|u_+(e^{i\theta})| \log^+ |u_+(e^{i\theta})| + |u_-(e^{i\theta})| \log^+ |u_-(e^{i\theta})| = |u(e^{i\theta})| \log^+ |u(e^{i\theta})| \big(\mathbb{1}_{E_+} + \mathbb{1}_{E_-}\big)$$

Wir erhalten

$$\|f\|_1 \leq \|f_+\|_1 + \|f_-\|_1 + \|f_0\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u_+(e^{i\theta})| \log^+ |u_+(e^{i\theta})|\, d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u_-(e^{i\theta})| \log^+ |u_-(e^{i\theta})|\, d\theta + A_2 \cdot e \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})| \log^+ |u(e^{i\theta})|\, d\theta + A_2 \cdot e\,.$$

Fall $p = 1$; Zusatz: Sei eine beliebige Funktion $f \in H^1$ gegeben (nicht mehr notwendig stetig am Rand). Betrachte zuerst den Fall, dass $u(z) \geq 1$, $z \in \mathbb{D}$. Schreibe wieder $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi(z)}$, mit $|\varphi(z)| \leq \frac{\pi}{2}$. Für jedes $r \in (0, 1)$ gilt

$$2\pi f(0) \log f(0) = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f_r \log f_r)\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \Big(|f_r| \cos\varphi_r \cdot \log|f_r|\, d\theta - |f_r| \sin\varphi_r \cdot \varphi_r\Big)\, d\theta$$

Es folgt

$$\int\limits_0^{2\pi} u_r \log u_r\, d\theta \leq \int\limits_0^{2\pi} |f| \cos\varphi_r \cdot \log|f_r|\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \varphi_r |f_r| \sin\varphi_r\, d\theta + 2\pi f(0) \log f(0) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2\pi} |f_r|\, d\theta + 2\pi f(0) \log f(0) \leq \|f\|_1 + 2\pi f(0) \log f(0)\,.$$

Sei nun nur vorausgesetzt dass $C := \inf_{z\in\mathbb{D}} u(z) > -\infty$. Zerlege $\mathbb{T}$ als disjunkte Vereinigung $\mathbb{T} = E'_+ \cup E'_0$ mit

$$E'_+ := \big\{z \in \mathbb{T} :\ u(z) \geq 1\big\}, \quad E'_0 := \big\{z \in \mathbb{T} :\ u(z) < 1\big\}\,.$$

Dann gilt

$$\int\limits_0^{2\pi} |u| \log^+ |u|\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} |u \cdot \mathbb{1}_{E'_+}| \log^+ |u \cdot \mathbb{1}_{E'_+}|\, d\theta + \int\limits_0^{2\pi} |u \cdot \mathbb{1}_{E'_0}| \log^+ |u \cdot \mathbb{1}_{E'_0}|\, d\theta\,.$$

Nun ist (mit $C' := \max\{|C|, 1\}$)

$$\Big|\int_0^{2\pi} |u \cdot \mathbb{1}_{E_0'}| \log^+ |u \cdot \mathbb{1}_{E_0'}| \, d\theta\Big| \leq C' \log^+ C' \,,$$

und, nachdem bereits gezeigten,

$$\Big|\int_0^{2\pi} |u \cdot \mathbb{1}_{E_+'}| \log^+ |u \cdot \mathbb{1}_{E_+'}| \, d\theta\Big| \leq \|\mathcal{P}[u \cdot \mathbb{1}_{E_+'}]\|_1 + 2\pi f(0) \log f(0) \leq$$

$$\leq \|f\|_1 + \underbrace{\|\mathcal{P}[u \cdot \mathbb{1}_{E_0'}]\|_1}_{\leq C'} + 2\pi f(0) \log f(0)\,.$$

❑

3.1.2 Bemerkung. Eine entsprechende Aussage für $p = \infty$ wäre falsch. Betrachte zum Beispiel eine analytische Abbildung des Einheitskreises auf einen vertikalen Streifen.

Betrachte die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} L^1 & \to & \mathbb{H}(\mathbb{D}) \\ u & \mapsto & \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} u(e^{it}) \, dt \end{cases}$$

Dann könnte Satz 3.1.1 auch wie folgt formuliert werden:

(i) Für jedes $p \in (1, \infty)$ induziert Ψ einen beschränkten linearen Operator von L^p nach H^p.

(ii) Für jedes $p \in (0, 1)$ induziert Ψ einen beschränkten linearen Operator von L^1 nach H^p.

(iii) Es gilt

$$\Big\{u \in L^1 : \int_0^{2\pi} |u| \log^+ |u| \, d\theta < \infty\Big\} \subseteq \Psi^-(H^1)\,,$$

$$\Big\{u \in L^1 : \inf_{z \in \mathbb{T}} u(z) > -\infty\Big\} \cap \Psi^-(H^1) \subseteq \Big\{u \in L^1 : \int_0^{2\pi} |u| \log^+ |u| \, d\theta < \infty\Big\}\,.$$

Insbesondere sehen wir, dass für jedes $u \in h^1$ die konjugierte Funktion v fast überall nichttangentiale Randwerte besitzt, und dass dabei $v^* \in L^p$, $p \in (0, 1)$, gilt.

3.1.3 Definition. Die Abbildung

$$H : \begin{cases} L^1 & \to & \bigcap_{p \in (0,1)} L^p \\ u^* & \mapsto & v^* \end{cases}$$

heißt die Hilbert-Transformation.

Eine weitere Folgerung:

3.1.4 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$L^p = \{f \in L^p : (\Phi f)(n) = 0, n < 0\} \dot{+} \{f \in L^p : (\Phi f)(n) = 0, n \geq 0\} = \\ = H^p \dot{+} \{f \in L^p : (\Phi f)(n) = 0, n \geq 0\}\,.$$

Insbesondere hat H^p in L^p ein abgeschlossenes Komplement.

Beweis. Es gilt

$$\frac{e^{it}}{e^{it} - z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\,,$$

also induziert die Abbildung

$$\Theta : \begin{cases} L^1 & \to & \mathbb{H}(\mathbb{D}) \\ u & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z} u(e^{it})\,dt \end{cases}$$

einen stetigen linearen Operator von L^p in H^p. Nun ist Θ gerade falten mit dem Cauchy-Kern:

$$(\Theta u)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{e^{i(t-\theta)}}{e^{i(t-\theta)} - r}}_{=C_r(t-\theta)} u(e^{it})\,dt\,.$$

Dieser hat die Fourierkoeffizienten

$$(\Phi C_r)(n) = \begin{cases} r^n\,, & n \geq 0 \\ 0\;\;, & n < 0 \end{cases}$$

also ist

$$(\Phi\Theta f)(n) = \begin{cases} (\Phi f)(n)\,, & n \geq 0 \\ 0 \quad\quad\;\;, & n < 0 \end{cases}$$

Ist $f \in L^p$ gegeben, so zerlegt sich f als

$$f = \Theta f + (f - \Theta f) \in \{f \in L^p : (\Phi f)(n) = 0, n < 0\} + \{f \in L^p : (\Phi f)(n) = 0, n \geq 0\}\,.$$

Da die Fouriertransformation $L^p \to C_0(\mathbb{Z})$ stetig und injektiv ist, sind die beiden Räume auf der rechten Seite abgeschlossen und haben nur trivialen Schnitt.

❑

3.2 H^p als Dualraum

3.2.1 Satz. *Sei $p \in [1, \infty]$, und q der zu p konjugierte Index ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

(i) Für $1 \leq p < \infty$ ist $(H^p)' \cong L^q / H^q$.

(ii) Sei $1 < p < \infty$. Für jedes Funktional $\phi \in (H^p)'$ existiert eine eindeutige Funktion $g \in H^q$, sodass

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cdot \overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta, \quad f \in H^p\,.$$

(*iii*) *Für* $1 < p \leq \infty$ *ist* $H^p \cong (L^q/H^q)'$.

(*iv*) *Bezeichne mit* A_0 *die Algebra* $A_0 := \mathrm{cls}_{C(\mathbb{T})}\{p \in \mathbb{C}[z] : p(0) = 0\} \subseteq C(\mathbb{T})$. *Dann ist* $H^1 \cong (C(\overline{\mathbb{T}})/A_0)'$.

Beweis. Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist $(L^p)' \cong L^q$ und es gilt $(H^p)' \cong L^q/(H^p)^\perp$. Um $(H^p)^\perp$ zu bestimmen, bemerke einerseits dass

$$zH^q = \mathrm{cls}_{L^q}\{z^n : n > 0\} \subseteq (H^p)^\perp .$$

Andererseits, gilt für jedes $g \in L^q$ mit $g \perp H^p$ insbesondere $\int_{\mathbb{T}} g(\zeta)\zeta^n \, d\zeta = 0$, $n \geq 0$, und daher $g \in H^q$ mit $g(0) = 0$. Daraus folgt aber $g \in zH^q$, und wir sehen, dass

$$(H^p)^\perp = zH^q .$$

Da multiplizieren mit z ein Isomorphismus am L^q ist, ist $L^q/(H^p)^\perp \cong L^q/H^q$.

Sei nun $1 < p < \infty$. Ist $\phi \in (H^p)'$ gegeben, wähle $g_0 \in L^q$ mit $\phi f = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)g_0(\zeta)\, d\zeta$. Wegen

$$L^q = zH^q \dot{+} \{g \in L^q : (\Phi g)(n) = 0, n > 0\}$$

gibt es eine Funktion g_1 mit $(\Phi g_1)(n) = 0$, $n > 0$, und $\phi f = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)g_1(\zeta)\, d\zeta$. Schliesslich bemerke dass $g := \overline{g_1} \in H^q$. Für die Eindeutigkeit, beachte dass

$$(\Phi z^k)(n) = \delta_{nk} .$$

Daher sind die Fourierkoeffizienten $(\Phi g)(n)$, $n \geq 0$, als $\phi(z^n)$ festgelegt.

Mit der gleichen überlegung wie oben erhält man auch

$$\big(L^q/H^q)' \cong (H^q)^\perp \cong H^p .$$

Wir kommen zum Fall '$p = 1$'. Wieder ist $(C(\mathbb{T})/A_0)' \cong A_0^\perp$, und wir müssen diesen Annihilator bestimmen. Klarerweise gehört jedes Mass $f\, d\lambda$ mit $f \in H^1$ zu $A_0^\perp$. Ist umgekehrt $\int_{\mathbb{T}} p(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ für alle $p \in A_0$, so folgt mit dem Satz von Riesz dass μ absolut stetig ist und $\frac{d\mu}{d\lambda} \in H^1$. Wir sehen, dass $A_0^\perp \cong H^1$ wobei der Isomorphismus '$f \mapsto f d\lambda$' ist.

❑

Bemerke, dass in (*ii*) die Normen $\|\phi\|$ und $\|g\|$ nicht notwendig übereinstimmen müssen.

Wir wissen nun, dass H^p für jedes $p \in [1, \infty)$ der Dualraum eines Banachraumes ist. Denkt man an den Satz von Krein-Milman ist es interessant die Extremalpunkte der Einheitskugel des H^p zu bestimmen.

3.2.2 Satz. *Sei* $f \in H^p$. *Dann ist* f *ein Extremalpunkt der Einheitskugel, genau dann*

(*i*) *(Fall* $1 < p < \infty$*) wenn* $\|f\| = 1$.

(*ii*) *(Fall* $p = \infty$*) wenn* $|f(z)| \leq 1$ *und*

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - |f(e^{it})|)dt = -\infty .$$

(iii) (Fall $p = 1$, Rudin-de Leeuw) wenn $\|f\| = 1$ und f ist outer function.

Beweis. Sei $p \in (1, \infty)$. Dann ist jede Funktion $f \in L^p$ mit $\|f\| = 1$ ein Extremalpunkt der Einheitskugel im L^p. Insbesondere ist daher jedes $f \in H^p$ mit $\|f\| = 1$ Extremalpunkt der Einheitskugel im H^p.

Betrachte nun den Fall '$p = \infty$'. Sei f mit $\|f\|_\infty = 1$ gegeben. Ist $\log(1 - |f(e^{i\theta})|) \in L^1$, setze

$$g(z) := \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log(1 - |f(e^{it})|)\, dt\Big) .$$

Dann gilt $|g(z)| \leq 1$ für alle z, und

$$|g(e^{i\theta})| = 1 - |f(e^{i\theta})| \quad \text{f.ü.}\,.$$

Also ist $\|f+g\|_\infty, \|f-g\|_\infty \leq 1$, und f ist kein Extremalpunkt.

Umgekehrt, sei $\log(1 - |f(e^{i\theta})|) \not\in L^1$, und sei angenommen dass f kein Extremalpunkt ist. Dann existiert $g \in H^\infty$ mit $\|f+g\|_\infty, \|f-g\|_\infty \leq 1$. Es folgt

$$2 \geq |f(z)+g(z)|^2 + |f(z)-g(z)|^2 = 2(|f(z)|^2 + |g(z)|^2) ,$$

also $|g(z)|^2 \leq 1 - |f(z)|^2 \leq 2(1 - |f(z)|)$. Diese Beziehung gilt insbesondere für $z = e^{i\theta}$, also folgt

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(e^{it})|\, dt \leq 2\pi \log 2 + \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - |f(e^{it})|)\, dt = -\infty ,$$

und es muss $g = 0$ sein.

Schliesslich kommen wir zum Fall '$p = 1$'. Sei f ist outer und $\|f\|_1 = 1$. Angenommen für eine Funktion $g \in H^1$ sodass $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = 1$. Der Quotient $h = \frac{g}{f}$ existiert f.ü., denn die Nullstellen von $f(e^{i\theta})$ sind eine Nullmenge. Es gilt

$$0 = \|f+g\|_1 + \|f-g\|_1 - 2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(|1+h(e^{i\theta})| + |1-h(e^{i\theta})| - 2\Big)|f(e^{i\theta})\, d\theta .$$

Nach der Dreiecksungleichung ist der Integrand nicht negativ, und es folgt

$$|1+h(e^{i\theta})| + |1-h(e^{i\theta})| = 2 .$$

In der gerade verwendeten Dreiecksungleichung gilt also Gleichheit, und damit müssen die beiden Zahlen $1+h(e^{i\theta})$ und $1-h(e^{i\theta})$ das gleiche Argument haben. Dies ist nur möglich, wenn $-1 \leq h(e^{i\theta}) \leq 1$ ist. Es gilt also $|g(e^{i\theta})| \leq |f(e^{i\theta})|$, $\theta \in [0, 2\pi)$, und da f outer ist damit auch $|g(z)| \leq |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Wir sehen, dass $h \in H^\infty$. Da $h(e^{i\theta})$ reell ist, folgt aus der Poissonschen Integraldarstellung dass h überall reell ist. Damit muss h konstant sein. Es folgt

$$|1+h| = \frac{1}{\|f\|_1}\|f+g\|_1 = 1 = \frac{1}{\|f\|_1}\|f-g\|_1 = |1-h| ,$$

also ist $h = 0$, und damit auch $g = 0$. Wir schliessen dass f ein Extremalpunkt ist.

Betrachte umgekehrt eine Funktion $f \in H^1$, $\|f\|_1 = 1$, der Gestalt $f = IF$ mit I inner, $I \neq 1$, und F outer. Setze $J(z) = e^{i\alpha} I(z)$ und betrachte

$$g(z) = f(z)\frac{1}{2}\Big(J(z) + \frac{1}{J(z)}\Big) = \frac{1}{2}e^{i\alpha}I^2(z)F(z) + \frac{1}{2}e^{-i\alpha}F(z) \in H^1 \,.$$

Da die Joukowski Abbildung den Einheitskreis auf das Interval $[-1,1]$ abbildet, ist

$$-1 \leq \frac{g(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})} \leq 1 \,.$$

Das Integral

$$\Lambda(\alpha) := \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} I(e^{it})\right) \cdot |f(e^{it})| \, dt$$

ist eine stetige reelle Funktion von α und ist entweder identisch gleich 0 oder wechselt das Vorzeichen in $\alpha \in [0, 2\pi]$. Denn ist $\Lambda(\alpha) > 0$, so folgt $\Lambda(\alpha + \pi) < 0$. In jedem Fall existiert $\alpha \in [0, 2\pi]$ sodass $\Lambda(\alpha) = 0$. Da $|I(e^{it})| = 1$, ist $\mathrm{Re}(e^{i\alpha} I(e^{it})) = \frac{1}{2}(J(e^{it} + \frac{1}{J(e^{it})})$, und wir haben

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})} \cdot |f(e^{i\theta})| \, d\theta = 0 \,.$$

Es folgt

$$\|f + g\|_1 = \|f - g\|_1 = \|f\| = 1 \,,$$

und daher ist f kein Extrempunkt.

❑