Komplexe Analysis im Einheitskreis

WS 2004/05

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Harmonische Funktionen

1.0.1 Definition. Sei Ω eine offene Menge in der komplexen Zahlenebene. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *harmonisch* in Ω, falls $u(z)$ in Ω als Funktion der zwei reellen Variablen $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ zwei mal stetig differenzierbar ist und falls gilt

$$\Delta u = 0 .$$

Dabei bezeichnet Δ den *Laplace Operator*

$$(\Delta u)(z) := u_{xx}(z) + u_{yy}(z) .$$

Da der Laplace Operator linear ist, bildet die Menge aller in Ω harmonischen Funktionen einen Vektorraum (über $\mathbb{C}$). Weiters ist mit einer Funktion u auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{u}$, die definiert ist als $\overline{u}(z) := \overline{u(z)}$, harmonisch. Beachte jedoch auch, daß das Produkt von harmonischen Funktionen nicht notwendig harmonisch ist.

Wir bemerken, daß harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist: Hat jeder Punkt z_0 von Ω eine Umgebung $U(z_0)$ sodaß $u|_{U(z_0)}$ harmonisch in $U(z_0)$ ist, so ist u harmonisch in Ω.

1.0.2 Beispiel. Sei f analytisch in in Ω, d.h. sei f an jeder Stelle z von Ω im komplexen Sinne differenzierbar. Dann gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*: Schreibt man $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$, und $z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$, so gilt

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x .$$

Da f beliebig oft (komplex) differenzierbar ist, und damit u und v beliebig oft nach x und y differenzierbar sind, folgt mit dem Satz von Schwartz über die gemischten partiellen Ableitungen das

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},\ v_{xx} = -u_{yx} = u_{xy} = v_{yy} .$$

Es sind also $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ und damit auch f, harmonisch in Ω.

Direkt aus der Definition einer harmonischen Funktion wollen wir das folgende Eindeutigkeitsprinzip herleiten:

1.0.3 Proposition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt. Weiters sei u eine auf $\overline{\Omega}$ stetige und in Ω harmonische Funktion. Bezeichne $\partial\Omega$ den Rand von Ω, sodaß also $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Dann gilt: Ist $u|_{\partial\Omega} = 0$, so folgt $u = 0$.*

Beweis. Da mit u auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$ stetig auf $\overline{\Omega}$ und harmonisch in Ω sind, genügt es den Fall das u reellwertig ist zu betrachten. Wir nehmen indirekt an es existierte $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > 0$ und führen diese Annahme auf einen Widerspruch.

Da Ω beschränkt ist, ist $\overline{\Omega}$ kompakt, und daher existiert eine Konstante $M > 0$ sodaß

$$|z - z_0|^2 < M, \; z \in \overline{\Omega} \,.$$

Wähle $\delta > 0$ sodaß $\delta M < u(z_0)$ und betrachte die Funktion

$$g(z) := u(z) + \delta(|z - z_0|^2 - M), \; z \in \overline{\Omega} \,.$$

Diese Funktion ist stetig auf $\overline{\Omega}$, nimmt also an einer Stelle $z_1 \in \overline{\Omega}$ ein Maximum an. Wegen $g(z) < 0$ auf $\partial\Omega$ und $g(z_0) > 0$, muß z_1 in Ω liegen. Daher folgt $(\Delta g)(z_1) = g_{xx}(z_1) + g_{yy}(z_1) \leq 0$. Andererseits gilt nach der Definition von g

$$(\Delta g)(z) = (\Delta u)(z) + 4\delta = 4\delta > 0, \; z \in \Omega \,,$$

ein Widerspruch. Wir schliessen das $u \leq 0$.

Wendet man das eben bewiesene auf die Funktion $-u$ an, so erhält man das auch $u \geq 0$.

❑

Man kann in dieser Aussage weder die Voraussetzung der Beschränktheit von Ω noch die der Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega}$ weglassen. Das zeigen die Beispiele

$$\Omega := \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \; u(z) := \operatorname{Im} z \,,$$

$$\Omega := \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \; u(z) := \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \,.$$

1.1 Das Poisson Integral

1.1.1 Definition. Der *Poisson Kern* $P_r(t)$ ist definiert als

$$P_r(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \; 0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R} \,.$$

Diese Reihe ist für jedes $r_0 \in [0,1)$ auf der Menge $[0, r_0] \times \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. Daher ist $P_r(t)$ wohldefiniert und eine stetige Funktion auf $[0,1) \times \mathbb{R}$.

Ist $0 \leq r < 1$, $t, \theta \in \mathbb{R}$, und setzen wir $z = re^{i\theta}$, $\zeta = e^{it}$, so berechnet man

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{z}{\zeta}\big)^n =$$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{z}{\zeta}}{1 - \frac{z}{\zeta}} = 2 \operatorname{Re} \big(\frac{1}{2} + \frac{z}{\zeta - z}\big) = 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}z}{\zeta - z} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{(\zeta + z)(\overline{\zeta} - \overline{z})}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{1 - \overline{\zeta} z - \zeta \overline{z} + |z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \,. \tag{1.1}$$

Insbesondere erhält man die Darstellung

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}, \; 0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

1.1.2 Lemma. *Der Poisson Kern hat die Eigenschaften*

(i) *Für* $0 \leq r < 1$ *und* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $P_r(t) > 0$.

(ii) *Für* $0 \leq r < 1$ *gilt* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1$.

(iii) *Für jedes offene Intervall* I *um* 0 *gilt*

$$\lim_{r\to 1} \sup_{t\in[-\pi,\pi]\setminus I} P_r(t) = 0\,.$$

Es gilt stets $P_r(t) = P_r(-t)$, $P_r(t+2\pi) = P_r(t)$, *sowie* $P_r(t) < P_r(t')$ *für* $0 < t' < t \leq \pi$, $0 < r < 1$.

Beweis. Die Eigenschaften (i) und (iii) sowie die letzten Beziehungen folgen unmittelbar aus (1.2). Die Eigenschaft (ii) folgt aus der Definition von $P_r(t)$, da für jedes $r < 1$ die Reihe gleichmäßig in t konvergiert und daher gliedweise integriert werden darf.

❑

1.1.3 Bemerkung. Eine Familie von Funktionen mit den Eigenschaften (i)-(iii) nennt man auch *approximative identity*, denn die Maße $\frac{1}{2\pi}P_r(t)\,dt$ approximieren die δ-Distribution bei 0. Genauer gesagt gilt $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}P_r(t)\,dt = \delta_0$ wobei δ_0 das Punktmaß bei 0 mit Masse 1 bezeichnet und der Grenzwert in der schwach-* Topologie des Dualraumes von $(C([-\pi,\pi]), \|.\|_\infty)$ zu verstehen ist.

Zur Wiederholung: Der *Darstellungssatz von Riesz* besagt das für einen kompakten Hausdorff-Raum X der Dualraum von $(C(X), \|.\|_\infty)$ isometrisch isomrph ist zum Raum der komplexen regulären Borelmaße μ auf X versehen mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$. Diese Isomorphie wird vermittelt durch die Beziehung

$$\mu \mapsto \phi_\mu(f) := \int_X f\,d\mu,\ f \in C(X)\,.$$

Dabei entsprechen die endlichen positiven Maße genau jenen Funktionalen welche allen nichtnegativen Funktionen nichtnegative Zahlen zuweisen. In den bei uns auftretenden Fällen, $X = \mathbb{T}$ oder ähnliches, ist die Voraussetzung der Regularität an ein Borelmaß automatisch erfüllt.

Um nun die anfangs gemachte Behauptung einzusehen sei $f \in C([-\pi,\pi])$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ sodaß $|f(t) - f(0)| < \epsilon$ für $|t| < \delta$. Wähle $0 \leq r_0 < 1$ sodaß

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} P_r(t) < \epsilon,\ r_0 \leq r < 1\,.$$

Dann gilt für solche r

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t)\,dt - f(0)\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(0))P_r(t)\,dt\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(0)|P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(t)-f(0)|}_{<\epsilon}P_r(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)}\underbrace{|f(t)-f(0)|}_{\leq 2\|f\|_\infty}\underbrace{P_r(t)}_{<\epsilon}\,dt \leq \epsilon\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}P_r(t)\,dt}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty\epsilon\,.$$

Es ist also $\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t)\,dt = f(0) = \int_{[-\pi,\pi]} f\,d\delta_0$.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{T}$ die Einheitskreislinie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

1.1.4 Definition. Sei $P(z, \zeta)$ auf $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ definiert als

$$P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Ist μ ein komplexes (insbesondere also endliches) Borel-Maß auf $\mathbb{T}$, so ist das *Poisson Integral* $\mathcal{P}[d\mu]$ von μ definiert als

$$\mathcal{P}[d\mu](z) := \int\limits_{\mathbb{T}} P(z, \zeta)\, d\mu(\zeta),\ \ z \in \mathbb{D}.$$

1.1.5 Bemerkung.

(i) Bezeichne hier und im folgenden immer λ das *normierte Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{T}$. Das ist das derart normierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}$ welches die Eigenschaft

$$\lambda(\{z \in \mathbb{T} : \alpha \leq \arg z \leq \beta\}) = \frac{1}{2\pi}(\beta - \alpha),\ \ 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$$

hat. Begriffe wie $L^2(\mathbb{T})$ oder ähnliches beziehen sich, wenn nicht anders gesagt stets auf dieses Maß.

Ist $f \in L^1(\mathbb{T})$, so schreiben wir für $\mathcal{P}[f\, d\lambda]$ auch kürzer $\mathcal{P}[f]$.

(ii) Wie wir in der Rechnung (1.1) gesehen haben, gilt

$$P(z, \zeta) = P_{|z|}(\arg z - \arg \zeta),\ \ z \in \mathbb{D}, \zeta \in \mathbb{T}.$$

Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so gilt also

$$\mathcal{P}[f](re^{i\theta}) = \int\limits_{\mathbb{T}} P(re^{i\theta}, \zeta) f(\zeta)\, d\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt,$$

d.h. das Poisson Integral von f ist die bekannte Faltung der Funktionen $f(e^{it})$ und $P_r(t)$. Man interpretiert auch im allgemeinen $\mathcal{P}[d\mu]$ als Faltung des Poisson Kerns mit dem Borel-Maß μ. Dieses Thema gehört in die sogenannte Harmonische Analysis und würde hier weit führen. führen.

(iii) Ist μ reell, so ist $\mathcal{P}[d\mu]$ der Realteil der in $\mathbb{D}$ analytischen Funktion

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu, z \in \mathbb{D}.$$

Insbesondere ist also $\mathcal{P}[d\mu]$ harmonisch in $\mathbb{D}$. Da sich jedes komplexe Maß in Real- und Imaginärteil zerlegen läßt, folgt das stets $\mathcal{P}[d\mu]$ harmonisch in $\mathbb{D}$ ist. Die Umkehrung gilt nicht; es läßt sich nicht jede in $\mathbb{D}$ harmonische Funktion als Poisson Integral darstellen.

(iv) Wie wir in der Rechnung (1.1) gesehen haben, gilt

$$P(z, \zeta) = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\left(\frac{z}{\zeta}\right)}^n.$$

Sei μ ein komplexes Borel-Maß sodaß also $u := \mathcal{P}[d\mu]$ eine in $\mathbb{D}$ harmonische Funktion ist. Dann gilt für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$\mathcal{P}[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta)\; z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{n}\, d\mu(\zeta)\; \overline{z}^n .$$

Wir bemerken das u genau dann sogar analytisch in $\mathbb{D}$ ist, wenn

$$\int_{\mathbb{T}} \zeta^n\, d\mu(\zeta) = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Die Zahlen

$$c_n := \int_{\mathbb{T}} \zeta^n\, d\mu(\zeta),\ n \in \mathbb{Z},$$

heißen auch die *Momente* oder *Fourierkoeffizienten* des Maßes μ.

Die Frage nach der Darstellbarkeit einer in $\mathbb{D}$ harmonischen Funktion als Poisson Integral eines Maßes oder einer Funktion mit gewissen Eigenschaften spielt eine wesentliche Rolle in der Theorie der harmonischen Funktionen. Wir werden diese Frage später ausführlich behandeln, siehe Satz 1.4.1. Bevor wir ein erstes Ergebnis in dieser Richtung zeigen (Satz 1.1.9), wollen wir uns überlegen das, falls eine Funktion u eine Darstellung als Poisson Integral hat, das darstellende Maß jedenfalls eindeutig ist.

1.1.6 Satz (Stieltjessche Umkehrformel). *Sei μ ein komplexes Borel-Maß und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Weiters seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b - a < 2\pi$, und $\gamma := \{\zeta \in \mathbb{T} : a < \arg \zeta < b\}$ der offene Bogen mit Endpunkten $\alpha := e^{ia}$ und $\beta := e^{ib}$. Dann gilt*

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_a^b u(re^{i\theta})\, d\theta = \mu(\gamma) + \frac{1}{2}\mu(\{\alpha\}) + \frac{1}{2}\mu(\{\beta\}) .$$

Zum Beweis benötigen wir

1.1.7 Lemma. *Betrachte für $0 < r < 1$ die Funktion*

$$J(r, t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t P_r(\theta)\, d\theta,\ t \in \mathbb{R} .$$

Für jedes r ist $J(r, t)$ eine stetige ungerade und monoton wachsende Funktion. Es gilt $J(r, 2\pi) = 1$ sowie $J(r, \pi) = \frac{1}{2}$. Insbesondere ist $J(r, t)$ für $t \in [-2\pi, 2\pi]$ gleichmäßig bezüglich r beschränkt. Weiters gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} J(r, t) = \frac{1}{2},\ 0 < t < 2\pi .$$

Beweis. Da $P_r(\theta)$ stetig nichtnegativ und gerade ist, folgt die erste Behauptung. Die Behauptung $J(r, 2\pi) = 1$ folgt wegen Lemma 1.1.2, (ii), und der Tatsache das $P_r(\theta)$ 2π-periodisch ist. Nun ist, wieder mit Lemma 1.1.2, (ii),

$$J(r, \pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} .$$

Die Funktionen $J(r,t)$ und

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\Big(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{t}{2}\Big)$$

sind auf $(0,2\pi)$ stetig differenzierbar und haben die gleiche Ableitung. Weiters stimmen sie an der Stelle $t=\pi$ überein. Es folgt das

$$J(r,t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\Big(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{t}{2}\Big),\ t\in(0,2\pi)\,.$$

Wir erhalten nun unmittelbar $\lim_{r\nearrow 1} J(r,t)=\frac{1}{2}$, $t\in(0,2\pi)$.

❑

Beweis. (von Satz 1.1.6) Betrachte die Funktion $\chi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ die definiert ist als

$$\chi(\zeta):=\begin{cases}1 & ,\ \zeta\in\gamma\\ \frac{1}{2} & ,\ \zeta=\alpha,\beta\\ 0 & ,\ \text{sonst}\end{cases}$$

Nun gilt nach dem Satz von Fubini für jedes $r\in(0,1)$

$$\int\limits_{[a,b]} u(r\xi)\,d\lambda(\xi)-\mu(\gamma)-\frac{1}{2}\mu(\{\alpha\})-\frac{1}{2}\mu(\{\beta\})=$$

$$=\int\limits_{[a,b]}\int\limits_{\mathbb{T}} P(r\xi,\zeta)\,d\mu(\zeta)\,d\lambda(\xi)-\int\limits_{\mathbb{T}}\chi(\zeta)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{[a,b]} P(r\xi,\zeta)\,d\lambda(\xi)-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{a-\arg\zeta}^{b-\arg\zeta} P_r(\theta)\,d\theta-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(J(r,b-\arg\zeta)-J(r,a-\arg\zeta)-\chi(\zeta)\Big)\,d\mu(\zeta)$$

Nach Lemma 1.1.7 ist der Integrand gleichmäßig bezüglich r beschränkt. Weiters strebt er punktweise gegen Null für $r\nearrow 1$: Denn ist $\zeta\in\gamma$, so ist $a-\arg\zeta<0$, $b-\arg\zeta>0$, also $J(r,a-\arg\zeta)\to-\frac{1}{2}$, $J(r,b-\arg\zeta)\to\frac{1}{2}$, $\chi(\zeta)=1$. Die restlichen Fälle behandelt man genauso. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt die Behauptung.

❑

1.1.8 Korollar. *Seien μ,ν zwei komplexe Borel-Maße und gelte $\mathcal{P}[d\mu]=\mathcal{P}[d\nu]$. Dann ist $\mu=\nu$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen dass $\mathcal{P}[d\mu]=0$ impliziert $\mu=0$. Sei γ ein beliebiger offener Bogen auf $\mathbb{T}$. Wähle Bögen γ_n mit $\gamma_1\subseteq\gamma_2\subseteq\dots$ und $\gamma=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\gamma_n$, sodaß die für die Endpunkte $\alpha_n = e^{ia_n}$, $\beta_n = e^{ib_n}$ stets gilt $\mu(\{\alpha_n\}) = \mu(\{\beta_n\}) = 0$. Dann gilt

$$\mu(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \mu\gamma_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{a_n}^{b_n} \mathcal{P}[d\mu](re^{i\theta})\, d\theta = 0\,.$$

Da die offenen Bögen die σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{T}$ erzeugen, folgt $\mu = 0$.

❑

1.1.9 Satz (Poissonsche Integraldarstellung). *Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so ist die Funktion*

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & ,\ |z| = 1 \\ \mathcal{P}[f](z) & ,\ |z| < 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$.

Umgekehrt, sei u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Dann ist u in $\mathbb{D}$ das Poisson Integral seiner Randwerte:

$$u(z) = \mathcal{P}[u(e^{it})](z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big) u(\zeta)\, d\lambda(\zeta),\ \ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Sei $f \in C(\mathbb{T})$, dann gilt

$$|\mathcal{P}[f](re^{it})| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| P_r(\theta - t)\, dt \le$$

$$\le \|f\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, dt}_{=1} = \|f\|_\infty\,.$$

D.h. es gilt für $f \in C(\mathbb{T})$, wenn F wie in (1.3) definiert wird, stets

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |F(z)| = \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |f(\zeta)|\,. \tag{1.4}$$

Ist f ein trigonometrisches Polynom, $f(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, so ist wie eine Rechnung zeigt (Anmerkung: Faltung entspricht Multiplikation der Fourier-Koeffizienten und der Poisson Kern P_r ist gerade jene Funktion deren Fourier-Koeffizienten gleich $r^{|n|}$ sind)

$$\mathcal{P}[f](re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta}\,.$$

Offensichtlich ist in diesem Fall F stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$.

Sei nun $f \in C(\mathbb{T})$ beliebig. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es eine Folge trigonometrischer Polynome f_n mit $f_n \to f$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Es folgt mit (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |F_n(z) - F(z)| = 0\,,$$

also ist auch F stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Das F harmonisch in $\mathbb{D}$ ist haben wir schon in Bemerkung 1.1.5, (iii), gesehen.

Sei umgekehrt u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Nach dem bereits bewiesenen hat auch die Funktion $F(z)$ die durch (1.3) definiert ist ausgehend von der Funktion $f(e^{it}) := u(e^{it})$ diese Eigenschaften. Nach dem Eindeutigkeitsprinzip Proposition 1.0.3 folgt $u = F$.

❏

1.1.10 Korollar (Poisson-Jensen Formel). *Ist u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und analytisch in $\mathbb{D}$, dann gibt es eine reelle Konstante c sodaß*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \operatorname{Re} u(e^{it})\, dt + ic, \ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} u(z)$ ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Also gilt $\operatorname{Re} u(z) = \mathcal{P}[\operatorname{Re} u(e^{it})](z)$, $z \in \mathbb{D}$. Nach Bemerkung 1.1.5, (iii), ist $\mathcal{P}[\operatorname{Re} u(e^{it})]$ der Realteil der in $\mathbb{D}$ analytischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \operatorname{Re} u(e^{it})\, dt\,.$$

Nun ist aber eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante eindeutig bestimmt.

❏

1.1.11 Korollar. *Sei u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Dann gilt*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\, dt\,.$$

Beweis. Es ist $u(z) = \mathcal{P}[u(e^{it})](z)$, $z \in \mathbb{D}$. Setze speziell $z = 0$.

❏

1.1.12 Bemerkung. Die Aussage von Satz 1.1.9 kann interpretiert werden als ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das sogenannte *Dirichletsche Randwertproblem* für den Einheitskreis. Dabei fragt man nach der Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung

$$(\Delta u)(z) = 0, \ z \in \mathbb{D}\,,$$

zu vorgegebenen Randwerten u_0:

$$u(e^{it}) = u_0(e^{it}), \ t \in [0, 2\pi)\,.$$

Satz 1.1.9 besagt nun: Zu jeder stetigen Randbedingung existiert genau eine in $\overline{\mathbb{D}}$ stetige Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Diese ist gegeben durch das Poisson Integral der Randbedingung.

1.1.13 Bemerkung. Bezeichne mit $D(a, R)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius R. Aus den obigen Resultaten erhält man mittels Variablentransformation entsprechende Resultate für Funktionen die harmonisch in einer Kreisscheibe $D(a, R)$ sind. Der Poisson Kern für $D(a, R)$ ist gegeben als

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}}, \ 0 \le r < R, t, \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Ist also u stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$, so gilt

$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2} u(a+Re^{it})\,dt,\ 0\le r<R, \theta\in[0,2\pi)\,.$$

Man spricht von der *Poissonschen Integraldarstellung für* $D(a,R)$.

1.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

1.2.1 Definition. Sei $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ eine offene Menge und $u:\Omega\to\mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir sagen u hat die *Mittelwerteigenschaft*, wenn gilt: Für jede Kreisscheibe $D(a,R)$ mit $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,dt\,.$$

1.2.2 Satz (Maximumprinzip). *Sei u eine stetige und reellwertige Funktion auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ (d.h. auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$) und habe u die Mittelwerteigenschaft. Nimmt u in Ω ein Maximum an, dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $m:=\sup_{z\in\Omega}u(z)$ und sei $E:=\{z\in\Omega:\ u(z)=m\}$. Ist $E=\emptyset$, so nimmt u in Ω kein Maximum an. Sei also $E\neq\emptyset$. Wegen $E=u^{-1}([m,\infty))$, ist E abgeschlossen. Sei $a\in E$ und $R>0$ sodaß $D(a,R)\subseteq\Omega$. Angenommen $D(a,R)\cap E^c\neq\emptyset$. Dann gibt es eine ganze offene Kreisscheibe die in $D(a,R)\cap E^c$ enthalten ist. Insbesondere existiert eine Kreislinie $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a|=r\}$ mit $0<r<R$ von der ein ganzer offener Bogen in E^c liegt. Nun ist wegen der Mittelwerteigenschaft insbesondere

$$m=u(a)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{it})\,dt\,.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(m-u(a+re^{it})\big)\,dt\le 0\,.$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, folgt das $u(a+re^{it})=m$ für fast alle $t\in(-\pi,\pi)$. Ein Widerspruch, denn es gilt ja auf einem offenen Bogen $u(a+re^{it})<m$. Wir schließen das $D(a,R)\subseteq E$. Daher ist E auch offen. Da Ω zusammenhängend ist folgt $E=\Omega$, d.h. $u(z)=m$, $z\in\Omega$.

❑

1.2.3 Bemerkung. Im Beweis des Maximumprinzips haben wir nur verwendet das stets $u^{-1}([m,\infty))$ abgeschlossen ist, das für alle hinreichend kleinen $r>0$ die Beziehung $u(a)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{it})\,dt$ gilt, sowie das u meßbar ist. Die letztere Eigenschaft folgt bereits aus der ersten, denn die Intervalle $[m,\infty)$ erzeugen die σ-Algebra der Borelmengen und diese enthält alle abgeschlossenen Mengen. Damit ist eine Funktion mit der Eigenschaft das für jedes $m\in\mathbb{R}$ die Menge $u^{-1}([m,\infty))$ abgeschlossen ist Borel-meßbar. Funktionen mit der genannten Eigenschaft nennt man *halbstetig von oben*, denn sie werden charakterisiert durch die Eigenschaft das für jedes x gilt $\limsup_{y\to x}u(y)\le u(x)$, vgl. Lemma 1.5.3.

Wir geben noch eine etwas andere Formulierung des Maximumprinzips.

1.2.4 Korollar. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\partial A \neq \emptyset$, $u : \overline{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und erfülle u die in Bemerkung 1.2.3 angegebenen Eigenschaften. Dann gilt: Ist $z_0 \in \overline{A}$ sodaß $u(z_0) = \sup_{z \in \overline{A}} u(z)$, dann existiert $z_1 \in \partial A$ mit $u(z_1) = \sup_{z \in \overline{A}} u(z)$.*

Beweis. Angenommen z_0 ist ein Punkt in A an dem u ein Maximum m annimmt. Sei A_0 jene Zusammenhangskomponente von A die z_0 enthält. Nach Satz 1.2.2 ist u auf A_0 konstant gleich m. Sei $z_1 \in \partial A_0$, dann gilt $m = \limsup_{z \to z_1} u(z) \leq u(z_1) \leq m$. Der Rand einer Menge ist leer genau dann wenn die Menge abgeschlossen ist und für jede offene Menge gilt $\partial A = \bigcup \partial A_i$ wenn A_i die Zusammenhangskomponenten von A bezeichnet. Es folgt das $\partial A_0 \neq \emptyset$ ist.

❑

1.2.5 Korollar. *Seien μ, ν reelle Borelmaße auf $\mathbb{T}$ sodaß $\mu - \nu$ ein positives Maß ist. Ist $\mu \neq \nu$, so folgt das für jedes $z \in \mathbb{D}$ gilt $\mathcal{P}[d\mu] > \mathcal{P}[d\nu]$.*

Beweis. Die Funktion $\mathcal{P}[d(\nu - \mu)]$ ist harmonisch und nichtpositiv. Wäre sie an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{D}$ gleich Null, so wäre sie nach dem Maximumprinzip identisch Null, und daher $\mu = \nu$.

❑

1.2.6 Satz. *Sei u eine stetige komplexwertige Funktion auf Ω. Dann ist u harmonisch in Ω genau dann wenn u die Mittelwerteigenschaft hat.*

Beweis. Sei u harmonisch in Ω und $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Dann ist $u|_{\overline{D(a,R)}}$ stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und harmonisch in $D(a,R)$. Setzt man $r = 0$ in Bemerkung 1.1.13, so folgt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,.$$

Also hat u die Mittelwerteigenschaft.

Habe umgekehrt u die Mittelwerteigenschaft. Da mit u auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$ die Mittelwerteigenschaft haben, können wir oBdA u als reellwertig voraussetzen.

Sei $a \in \Omega$. Wähle $R > 0$ sodaß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und sei $U(z)$ jene auf $\overline{D(a,R)}$ stetige und in $D(a,R)$ harmonische Funktion mit $U(a + Re^{it}) = u(a + re^{it})$, $t \in [0, 2\pi)$. Die Funktion $h(z) := U(z) - u(z)$ ist stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und nimmt daher ein Maximum m an. Wegen $h(z) = 0$ auf $\partial D(a,R)$ ist $m \geq 0$. Angenommen $m > 0$, dann nimmt also die Funktion $h|_{D(a,R)}$ ein Maximum in $D(a,R)$ an. Da, nach dem ersten Teil dieses Beweises h die Mittelwerteigenschaft in $D(a,R)$ hat, folgt aus dem Maximumprinzip, daß $h(z) = m$, $z \in D(a,R)$. Ein Widerspruch denn h ist stetig auf $\overline{D(a,R)}$ und verschwindet am Rand. Also muß $m \leq 0$ sein. Führt man dieselbe Argumentation mit mit $-h$ anstelle von h durch, so folgt auch $m \geq 0$. Insgesamt ist also $u|_{\overline{D(a,R)}} = U$ und daher u harmonisch in $D(a,R)$. Da harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist und $a \in \Omega$ beliebig war, folgt das u in Ω harmonisch ist.

❑

1.2.7 Korollar. *Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet Ω und konvergiere $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann ist u harmonisch.*

Beweis. Die Mittelwerteigenschaft bleibt bei lokal gleichmäßigen Grenzübergängen erhalten.

❏

1.2.8 Bemerkung. Ist speziell f analytisch in Ω, so ist die Mittelwerteigenschaft ein Spezialfall der *Cauchysche Integralformel*, denn substituiert man in dieser $z = a + re^{it}$, so folgt $\frac{dz}{dt} = ire^{it}$ und damit

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\, dt\,.$$

1.2.9 Satz (Harnack). *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger harmonischer Funktionen in einem Gebiet Ω, und gelte $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$. Dann existiert der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} u_n =: u$$

lokal gleichmäßig in Ω und es ist entweder $u = \infty$ oder u eine harmonische reellwertige Funktion in Ω.

Beweis. Der Poisson Kern für eine Kreisscheibe $D(a, R)$ erfüllt die Abschätzung

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta - t + r^2} \leq \frac{R + r}{R - r}\,. \tag{1.5}$$

Ist also f eine auf $\overline{D(a, R)}$ stetige nichtnegative Funktion die in $D(a, R)$ harmonisch ist, so gilt wegen der Poissonschen Integraldarstellung und der Mittelwerteigenschaft

$$\frac{R - r}{R + r} f(a) \leq f(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} f(a)\,. \tag{1.6}$$

Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Satz gegeben. OBdA sei $u_1 = 0$. Sei $u(z) := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$, $z \in \Omega$, und betrachte die Mengen

$$A := \{z \in \Omega :\, u(z) = \infty\},\ B := \{z \in \Omega :\, u(z) < \infty\}\,.$$

Wegen (1.6) sind beide Mengen offen. Da Ω zusammenhängend ist, folgt entweder $A = \emptyset, B = \Omega$ oder $A = \Omega, B = \emptyset$.

Im ersten Fall finden wir wieder wegen (1.6) zu jedem Punkt eine Umgebung auf der u_n gleichmäßig gegen ∞ strebt. Betrachte den zweiten Fall. Dann zeigt (1.6) angewandt auf die Differenzen $u_n - u_m$, $n \geq m$, daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt auf der $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist. Da nach Definition $u_n \to u$ punktweise gilt, folgt das u sogar der lokal gleichmäßige Grenzwert der u_n ist. Nach Korollar 1.2.7 ist u harmonisch.

❏

Als nächstes wollen wir bemerken das, in der Situation einer Kreisscheibe $\Omega = D(a, R)$, durch Beispiel 1.0.2 bereits alle in Ω harmonischen Funktionen beschrieben werden.

1.2.10 Proposition. *Sei u harmonisch in der Kreisscheibe $\Omega = D(a, R)$. Dann existieren in Ω analytische Funktionen f, g sodaß*

$$u = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} g\,.$$

Beweis. Sei zunächst u reellwertig. Weiters sei $0 < R' < R$. Dann gilt, vgl. Bemerkung 1.1.5, (iii), sowie Bemerkung 1.1.13,

$$u(a + re^{it}) = \operatorname{Re} f_{R'}(a + re^{it}), 0 \le r < R', t \in [0, 2\pi)\,,$$

mit der in $D(a, R')$ analytischen Funktion

$$f_{R'}(a + re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi,\pi} \frac{R'e^{it} + re^{i\theta}}{R'e^{it} - re^{i\theta}} u(a + R'e^{it})\, dt\,.$$

Es gilt, da u die Mittelwerteigenschaft hat,

$$f_{R'}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R'e^{it})\, dt = u(a)\,.$$

Ist nun $0 < R' < R'' < R$, so sind $f_{R'}$ und $f_{R''}|_{D(a,R')}$ zwei analytische Funktionen auf $D(a, R')$ deren Realteile übereinstimmen und welche an der Stelle a den gleichen Wert annehmen. Daher gilt $f_{R''}|_{D(a,R')} = f_{R'}$. Also definiert die Familie $(f_{R'})_{0<R'<R}$ eine auf $D(a, R)$ analytische Funktion f. Für diese gilt nach Konstruktion $u = \operatorname{Re} f$.

Ist nun u nicht notwendigerweise reellwertig, so schreibe $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$. Nach dem bereits bewiesenen gibt es auf $D(a, R)$ analytische Funktionen f, h sodaß $\operatorname{Re} u = \operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} u = \operatorname{Re} h$. Setzt man $g := ih$, so folgt die Behauptung.

❏

1.2.11 Korollar. *Sei u harmonisch in Ω. Dann ist $u(z)$ als Funktion der beiden reellen Veränderlichen $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Sei $a \in \Omega$. Wähle $R > 0$ so daß $D(a, R) \subseteq \Omega$, dann gibt es f, g analytisch in $D(a, R)$ mit $u|_{D(a,R)} = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} g$. Insbesondere ist u an der Stelle a beliebig oft differenzierbar.

❏

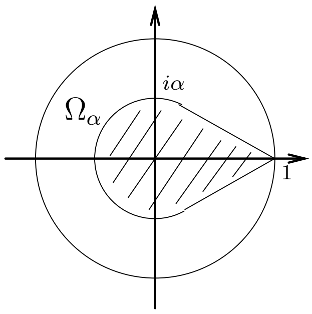
1.3 Randwerte von Poisson Integralen

Ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $F = \mathcal{P}[f]$ so haben wir in Bemerkung 1.1.3 gesehen, daß für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{r \to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})\,.$$

Wir wollen nun die Frage nach Existenz und Wert solcher Limiten für allgemeine Poisson Integrale $\mathcal{P}[d\mu]$ untersuchen.

Wir betrachten nichttangentiale Grenzwerte an Randpunkten. Bezeichne für $0 < \alpha < 1$ mit Ω_α das Innere der konvexen Hülle von $D(0, \alpha)$ und 1:



Die geometrische Tatsache das der Rand des Gebietes Ω_α und die Einheitskreislinie einen echt positiven Winkel bilden drückt sich analytisch in folgendem Sachverhalt aus:

1.3.1 Lemma. *Sei $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma_\alpha > 0$ sodaß*

$$\frac{\big|z - |z|\big|}{1 - |z|} \leq \gamma_\alpha, \; z \in \Omega_\alpha \, .$$

Beweis. Wähle $\epsilon > 0$ sodaß $D(0, \alpha) \cap D(1, \epsilon) = \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit von $\psi(z) := \frac{|z-|z||}{|1-|z||}$ in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, genügt es zu zeigen das ψ auf $D(1, \epsilon) \cap \Omega_\alpha$ beschränkt ist.

Sei $\phi_0 := \sup\{\arg z : z \in D(1, \epsilon) \cap \Omega_\alpha\}$, dann ist $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Da weiters ψ bezüglich der reellen Achse symmetrisch ist und auf dieser stets den Wert 1 annimmt, genügt es also das Supremum von ψ in dem Dreieck $W := \{z \in \Omega_\alpha : 0 < \arg z \leq \phi_0\}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\sup_{z \in W} \psi(z) = \sup_{0 < \phi \leq \phi_0} \sup_{r \in [0,1), re^{i\phi} \in W} \psi(re^{i\phi}) \, .$$

Schreibt man für $z \in \mathbb{D}$

$$\psi(z) = \frac{\left|\frac{z}{|z|} - 1\right|}{\frac{1}{|z|} - 1} \, ,$$

so sieht man das $\psi(re^{i\phi})$ eine mit r wachsende Funktion ist. Das innere Supremum $\Psi(\phi) := \sup_{r \in [0,1), re^{i\phi} \in W} \psi(re^{i\phi})$ in obiger Formel ist also der Wert von ψ an jenem Punkt mit Argument ϕ welcher auf der rechten Seite des Dreiecks W liegt. Wir sehen das $\Psi(\phi)$ eine für $\phi \in (0, \phi_0]$ stetige Funktion ist. Um die Beschränktheit von ψ auf W zu erhalten, genügt es also zu zeigen dass $\lim_{\phi \to 0} \Psi(\phi)$ existiert.

Sei β der Winkel im Dreieck W am Eckpunkt 1. Dann ist $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sei nun z ein Punkt der rechten Seite des Dreiecks W und sei $\phi = \arg z$. Dann gilt

$$\operatorname{Im} z = |z| \sin \phi, \; \operatorname{Re} z = |z| \cos \phi, \; \frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z} = \tan \beta \, .$$

Aus diesen Relationen folgt

$$\frac{|z| \sin \phi}{1 - |z| \cos \phi} = \tan \beta$$

und, durch weitere Umformung,

$$\frac{1}{|z|} = \frac{\sin \phi}{\tan \beta} + \cos \phi \, .$$

Wegen $|e^{i\phi}-1|^2 = 2(1-\cos\phi)$ erhalten wir

$$\Psi(\phi) = \psi(z) = \frac{\sqrt{2(1-\cos\phi)}}{\frac{\sin\phi}{\tan\beta} + \cos\phi - 1}$$

und damit $\lim_{\phi\to 0}\Psi(\phi) = \tan\beta$.

❑

1.3.2 Definition. Sei $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$. Wir sagen das der *nichttangentiale Grenzwert* von f bei e^{it} existiert, wenn der Limes

$$\lim_{z\to e^{it}, z\in e^{it}\Omega_\alpha} f(z) \tag{1.7}$$

für jedes $\alpha\in(0,1)$ existiert und nicht von α abhängt. Man schreibt in diesem Fall für den Wert des Limes (1.7) auch $\lim_{z \hat{\to} e^{it}} f(z)$.

Die Funktion

$$(N_\alpha f)(e^{it}) := \sup\left\{|f(z)| : z\in e^{it}\Omega_\alpha\right\}$$

heißt *nichttangentiale Maximalfunktion*, die Funktion

$$(M_{rad}f)(e^{it}) := \sup\left\{|f(re^{it})| : 0\le r<1\right\}$$

die *radiale Maximalfunktion*. Offensichtlich gilt

$$(M_{rad}f)(e^{it}) \le (N_\alpha f)(e^{it}) \le (N_{\alpha'}f)(e^{it}),\ 0<\alpha\le\alpha'<1\,.$$

Sei μ ein komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und bezeichne mit $|\mu|$ seine Totalvariation. Wir setzen

$$(M\mu)(e^{it}) := \sup_I \frac{|\mu|(I)}{\lambda(I)}\,,$$

wo das Supremum über alle offenen Bögen (inklusive $\mathbb{T}$) mit e^{it} als Mittelpunkt genommen wird. Weiters sei, soferne dieser Grenzwert existiert,

$$(D\mu)(e^{it}) := \lim_I \frac{\mu(I)}{\lambda(I)}\,,$$

wo der Limes über die gerichtete Menge obiger Bögen genommen wird.

Ist $f\in L^1(\lambda)$, so heißt e^{it} ein Lebesgue-Punkt von f falls

$$\lim_I \frac{1}{\lambda(I)}\int_I |f-f(e^{it})|\,d\lambda = 0$$

gilt, wobei der Limes gleich wie oben zu verstehen ist.

1.3.3 Bemerkung. Wir benützen die folgenden nichttrivialen(!) Aussagen:

(*i*) Ist $f\in L^1(\lambda)$, so sind λ-fast alle Punkte von $\mathbb{T}$ Lebesgue-Punkte von f. Siehe [Ru1, Theorem 7.7].

(*ii*) Ist μ singulär zu λ, so ist für λ-fast alle Punkte $(D\mu)(e^{it}) = 0$. Siehe [Ru1, Theorem 7.14].

1.3.4 Lemma. *Sei $0 < \alpha < 1$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante $c_\alpha > 0$, so daß für jedes positive endliche Borel Maß und $u = \mathcal{P}[d\mu]$ die Beziehungen*

$$c_\alpha (N_\alpha u)(e^{it}) \le (M_{rad} u)(e^{it}) \le (M\mu)(e^{it}), \ \ e^{it} \in \mathbb{T}\,,$$

gelten.

Beweis. Wir betrachten oBdA den Randpunkt 1. Wegen

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it})\, d\mu(e^{it})$$

genügt es für die erste Ungleichung zu zeigen, daß es eine Konstante c_α gibt mit

$$c_\alpha P(z, e^{it}) \le P(|z|, e^{it}), \ \ z \in \Omega_\alpha, e^{it} \in \mathbb{T}\,.$$

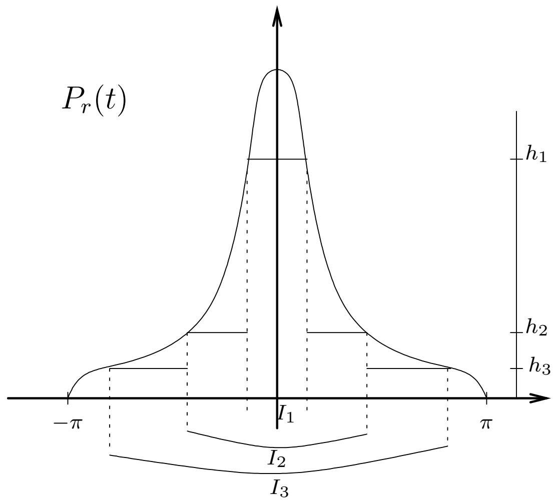
Nach Lemma 1.3.1 ist für $z \in \Omega_\alpha$

$$\big|e^{it} - |z|\big| \le |e^{it} - z| + \big|z - |z|\big| \le |e^{it} - z| +$$

$$+\gamma_\alpha(1 - |z|) \le (1 + \gamma_\alpha)|e^{it} - z|\,.$$

Für $c_\alpha = (1 + \gamma_\alpha)^{-2}$ gilt also $c_\alpha |e^{it} - |z||^2 \le |e^{it} - z|^2$ und daher, vgl. (1.1), $c_\alpha P(z, e^{it}) \le P(|z|, e^{it})$.

Um die zweite Ungleichung zu zeigen approximieren wir $P_r(t)$ durch Treppenfunktionen:



Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots \subseteq I_{n-1}$, eine Folge von offenen Bögen mit Zentrum $1, I_n = \mathbb{T}$. Sei χ_j die Indikatorfunktion von I_j und h_j die größte Zahl so daß $h_j \chi_j(\zeta) \le P(r, \zeta)$. Weiters setze $h_{n+1} = 0$. Wegen der Monotonie von P_r ist $h_j - h_{j+1} \ge 0$.

Setze $K := \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\chi_j$. Nach Definition von $M\mu$ gilt

$$\mu(I_j) \le (M\mu)(1) \cdot \lambda(I_j)\,,$$

also folgt

$$\int_{\mathbb{T}} K\, d\mu = \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\mu(I_j) \le (M\mu)(1) \cdot \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\lambda(I_j) =$$

$$= (M\mu)(1) \cdot \int_{\mathbb{T}} K \, d\lambda \le (M\mu)(1) \cdot \int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\lambda = (M\mu)(1) \, .$$

Da die Bögen I_j beliebig fein gewählt werden können und $P(r,.)$ gleichmäßig stetig ist, folgt

$$\int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\mu(\zeta) \le (M\mu)(1) \, ,$$

also auch

$$(M_{rad}u)(1) = \sup_{0 \le r < 1} \Big| \int_{\mathbb{T}} P(r,\zeta) \, d\mu(\zeta) \Big| \le (M\mu)(1) \, .$$

❑

1.3.5 Lemma. *Sei μ ein positives endliches Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und sei $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Dann hat $\mathcal{P}[d\mu]$ bei $e^{i\theta}$ den nichttangentialen Grenzwert* 0.

Beweis. Die Bedingung $(D\mu)(e^{i\theta}) = 0$ besagt

$$\lim_{I} \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} = 0 \, .$$

Es gibt also zu gegebenem $\epsilon > 0$ einen Bogen I_0, so daß für alle kleineren Bögen I gilt

$$\mu(I) \le \epsilon \lambda(I) \, .$$

Sei μ_0 die Einschränkung von μ auf I_0, $\mu_1 := \mu - \mu_0$, und sei $u_0 = \mathcal{P}[d\mu_0]$, $u_1 = \mathcal{P}[d\mu_1]$. Sei z_j eine Folge in $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ die gegen $e^{i\theta}$ konvergiert, dann ist der Abstand von $\{z_j\}$ zu $\mathbb{T} \setminus I_0$ echt positiv. Die Integranden in

$$u_1(z_j) = \int_{\mathbb{T}\setminus I_0} P(z_j,\zeta) d\mu(\zeta)$$

konvergieren wegen Lemma 1.1.2, (*iii*), gleichmäßig gegen 0 und es folgt

$$\lim_{j \to \infty} u_1(z_j) = 0 \, .$$

Nach Lemma 1.3.4 und der Wahl von I_0 gilt

$$c_\alpha (N_\alpha u_0)(e^{i\theta}) \le (M\mu_0)(e^{i\theta}) \le \epsilon \, .$$

Für jedes $z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$ ist also $u_0(z) \le \frac{\epsilon}{c_\alpha}$ und daher

$$\limsup_{j \to \infty} u_0(z_j) \le \frac{\epsilon}{c_\alpha} \, .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\lim_{j \to \infty} u(z_j) = 0$

❑

1.3.6 Satz (Fatou). *Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{T}$ und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Schreibe $d\mu = f d\lambda + d\mu_s$ wobei $f \in L^1(\lambda)$ und μ_s singulär bezüglich λ ist. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentialen Grenzwert* $\lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z)$ *und ist gleich* $f(\zeta)$.

Beweis. Wendet man Lemma 1.3.5 auf $d\mu_s$ an, d.h. auf die positive und negative Variation des Real- und Imaginärteiles von μ_s an, vgl. Bemerkung 1.3.3, (ii), so findet man $\mathcal{P}[d\mu_s]\hat{\to}0$, λ-fast überall.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{P}[fd\lambda](\zeta)\hat{\to}f(\zeta)$, λ-fast überall. Nach Bemerkung 1.3.3, (i), genügt es dieses für die Lebesgue-Punkte von f zu zeigen. Sei also ζ ein Lebesgue-Punkt von f und sei oBdA angenommen das $f(\zeta) = 0$, ansonsten subtrahiere eine Konstante. Dann gilt also

$$\lim_I \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f|\, d\lambda = 0\,.$$

Betrachte das Borel-Maß

$$\gamma(E) := \int_E |f|\, d\lambda\,.$$

Dann ist $(D\gamma)(\zeta) = 0$ und es folgt nach Lemma 1.3.5 $\mathcal{P}[d\gamma](z)\hat{\to}0$. Nun ist

$$\big|\mathcal{P}[f]\big| \leq \mathcal{P}[|f|] = \mathcal{P}[d\gamma]\,,$$

also folgt das auch $\mathcal{P}[f]\hat{\to}0$.

❑

1.4 Darstellbarkeit durch Poisson Integrale

Ist $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ meßbar, so definieren wir für $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p := \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p d\lambda(\zeta) \Big)^{\frac{1}{p}}\,,$$

sowie, für $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty := \operatorname{esssup}_{\zeta\in\mathbb{T}} |f(\zeta)|\,.$$

Weiters sei $L^p(\mathbb{T})$ die Menge (von Äquivalenzklassen λ-fast überall gleicher) meßbarer Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit $\|f\|_p < \infty$.

Für $p \in [1,\infty]$ ist $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$ ein Banachraum. Ist $p \in (0,1)$, so ist $d_{L^p}(f,g) := \|f-g\|_p^p$ eine Metrik mit der $L^p(\mathbb{T})$ zu einem vollständigen topologischen Vektorraum wird der jedoch nicht lokalkonvex ist. Zur Wiederholung: Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\mathbb{T})^*$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mathbb{T})$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und dieser Isomorphismus wird vermittelt durch die Beziehung $(g \in L^q)$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{T}} fg\, d\lambda\,.$$

Weiters gilt $L^\infty(\mathbb{T})^* \supsetneq L^1(\mathbb{T})$.

Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und $r \in [0,1)$, so definieren wir eine Funktion $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch

$$f_r(\zeta) := f(r\zeta),\ \zeta \in \mathbb{T}\,. \tag{1.8}$$

Eine wesentliche Rolle spielt das Verhalten der Funktionen f_r wenn r gegen 1 strebt. Obwohl wir die Funktion f_r nur als Funktion auf $\mathbb{T}$ auffassen, wäre durch $z \mapsto f(rz)$ eigentlich eine Funktion auf ganz $\frac{1}{r}\mathbb{D}$ definiert. Ist f harmonisch bzw. analytisch auf $\mathbb{D}$, so hat auch diese Funktion die entsprechende Eigenschaft auf $\frac{1}{r}\mathbb{D}$.

1.4.1 Satz. *Sei u eine harmonische Funktion in $\mathbb{D}$. Dann ist u das Poisson Integral*

(i) *eines komplexen Borel-Maßes genau dann, wenn* $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$.

(ii) *einer Funktion $f\in L^1(\mathbb{T})$ genau dann, wenn* $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ *in der Norm* $\|.\|_1$.

(iii) *einer Funktion $f\in L^p(\mathbb{T})$ wobei $p\in(1,\infty)$ genau dann, wenn* $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_p<\infty$. *In diesem Fall gilt* $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ *in der Norm* $\|.\|_p$.

(iv) *einer Funktion $f\in L^\infty(\mathbb{T})$ genau dann, wenn* $\sup_{z\in\mathbb{D}}|u(z)|=\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_\infty<\infty$.

(v) *einer stetigen Funktion f genau dann, wenn* $\lim_{r\nearrow 1}u_r=f$ *in der Norm* $\|.\|_\infty$.

(vi) *eines endlichen positiven Borel-Maßes genau dann, wenn u nichtnegativ ist.*

Die darstellenden Maße bzw. Funktionen sind in jedem Fall eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in mehreren Schritten.
Beweis. (Satz 1.4.1, (i)) Sei zuerst angenommen das $u=\mathcal{P}[d\mu]$. Dann gilt, da der Poisson Kern stets nichtnegativ ist,

$$|u(z)|=\big|\mathcal{P}[d\mu](z)\big|=\Big|\int_{\mathbb{T}}P(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)\Big|\leq\mathcal{P}[d|\mu|](z),\ z\in\mathbb{D}\,.$$

Die Funktion $h:=\mathcal{P}[d|\mu|]$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$, also hat sie die Mittelwerteigenschaft und wir schliessen

$$\|u_r\|_1=\int_{\mathbb{T}}|u_r(\zeta)|\,d\lambda\leq\int_{\mathbb{T}}h(r\zeta)\,d\lambda=h(0),\ r\in[0,1)\,.$$

Also gilt $\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$, tatsächlich sogar

$$\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1\leq h(0)=|\mu|(\mathbb{T})\,.$$

Sei nun $M:=\sup_{0\leq r<1}\|u_r\|_1<\infty$. Betrachte die Maße μ_r die definiert sind als $d\mu_r:=u_r\,d\lambda$ als Elemente von $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)^*$. Es gilt $\|\mu_r\|=\|u_r\|_1\leq M$, $r\in[0,1)$, also existiert nach dem Satz von Banach-Alaoglu ein Maß μ, $\|\mu\|\leq M$ und eine Folge $r_n\in[0,1)$, $r_n\to 1$, sodaß $\lim_{n\to\infty}\mu_r=\mu$ in der schwach-* Topologie von $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)^*$. Beachte hier das $(C(\mathbb{T}),\|.\|_\infty)$ separabel ist, nach dem Satz von Stone-Weierstraß liegen ja zum Beispiel die trigonometrischen Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht. Die Funktion u_r ist stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$, also ist

$$u(rz)=u_r(z)=\mathcal{P}[u_r](z),\ z\in\mathbb{D}\,.$$

Für jedes feste $z\in\mathbb{D}$ ist $P(z,\zeta)\in C(\mathbb{T})$, läßt man in der obigen Beziehung $r=r_n\to 1$ streben folgt also $u(z)=\mathcal{P}[d\mu](z)$, $z\in\mathbb{D}$.

❑

Die Vorgangsweise $u_r\, d\lambda$ als Funktionale aufzufassen leistet noch weiteres.
Beweis. (Satz 1.4.1, $(iii), (iv)$ '$\Leftarrow$') Wir sind in der Situation $1 < p \leq \infty$. Betrachte u_r als Elemente von $L^p(\mathbb{T}) = L^q(\mathbb{T})^*$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $\|u_r\|_{L^q(\mathbb{T})^*} = \|u_r\|_p$. Ist nun $\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_p < \infty$, so existiert $f \in L^p(\mathbb{T})$ und $r_n \to 1$ sodaß $\lim_{n\to\infty} u_r = f$ im schwach-* Sinne von $L^q(\mathbb{T})^*$. Das gleiche Argument wie oben zeigt $u = \mathcal{P}[f]$.

❑

Beweis. (Satz 1.4.1, (vi)) Ist $u = \mathcal{P}[d\mu]$ mit einem positiven Maß so ist, da der Poisson-Kern stets nichtnegativ ist, auch u nichtnegativ. Ist umgekehrt $u \geq 0$ auf $\mathbb{D}$, so folgt mit der Mittelwerteigenschaft das

$$\|u_r\|_1 = \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta)\, d\zeta = u(0)\,.$$

Nach dem bereits bewiesenen Teil (i) des Satzes, folgt $u = \mathcal{P}[d\mu]$ für ein komplexes Borelmaß μ. Da $u \geq 0$ sind die Maße $u_r\, d\lambda$ alle positive Maße. Daher ist auch ihr schwach-* Grenzwert μ ein positives Maß, denn die Eigenschaft nichtnegativen Funktionen nichtnegative Werte zuzuweisen überträgt sich bei schwach-* Grenzübergängen.

❑

Die Implikation '$\Rightarrow$' in (iv) sowie in (v) ist einfach einzusehen.
Beweis. (Satz 1.4.1, $(iv), (v)$ '$\Rightarrow$') Sei zunächst $u = \mathcal{P}[f]$ mit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Es gilt, da $P(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta)$ stets ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist,

$$|u(z)| = \Big| \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta) f(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \Big| \leq \|f\|_\infty\,.$$

Sei $u = \mathcal{P}[f]$ mit einer stetigen Funktion f. Nach Satz 1.1.9 ist u sogar stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Daher ist u auch gleichmäßig stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, d.h. ist $\epsilon > 0$ gegeben, so gibt es $\delta > 0$ mit $|u(z) - u(w)| < \epsilon$ falls $|z - w| < \delta$. Insbesondere gilt für $r > 1 - \delta$ stets $|u_r(\zeta) - u(\zeta)| < \epsilon$.

❑

Etwas komplizierter sind jene Implikationen wo wir zusätzlich noch Konvergenz zu zeigen haben. Wir benützen die *Jensensche Ungleichung*. Zur Wiederholung: Sei Ω eine Menge, μ ein positives Maß auf Ω mit $\mu(\Omega) = 1$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mu)$ mit $a < f(t) < b$, $t \in \Omega$, und sei $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$\varphi\Big(\int_\Omega f\, d\mu \Big) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu\,.$$

Beweis. (Satz 1.4.1, $(ii), (iii)$ '$\Rightarrow$') Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $u = \mathcal{P}[f]$ mit einem $f \in L^p(\mathbb{T})$. Die Jensensche Ungleichung angewandt mit der konvexen Funktion $|.|^p$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P(z,\zeta)\, d\lambda$ zeigt

$$|u_r(\zeta)|^p = \big|\mathcal{P}[f](r\zeta)\big|^p \leq \mathcal{P}[|f|^p](r\zeta)\,.$$

Nach der Mittelwerteigenschaft folgt

$$\|u_r\|_p^p \leq \mathcal{P}[|f|^p](0) = \|f\|_p^p\,,$$

und wir sehen $\sup_{0 \leq r < 1} \|u_r\|_p \leq \|f\|_p$.

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, wähle $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f-g\|_p < \epsilon$, und setze $v := \mathcal{P}[g]$. Dann gilt, nach dem bereits bewiesenen Teil (v) '$\Rightarrow$',

$$\limsup_{r\to 1} \|g - v_r\|_p \le \lim_{r\to 1} \|g - v_r\|_\infty = 0 .$$

Also ist sicher $\|g - v_r\|_p < \epsilon$ für $r > r_0$, r_0 hinreichend nahe bei 1. Weiters ist nach dem oben gezeigten

$$\|u_r - v_r\|_p = \|(f-g)_r\|_p \le \|f-g\|_p < \epsilon .$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|u_r - f\|_p \le \|u_r - v_r\| + \|v_r - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\epsilon, \; r > r_0 .$$

❏

Beweis. (Satz 1.4.1, (v) '$\Leftarrow$') Sei angenommen $\lim_{r\to 1} u_r = f$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Dann ist zum Beispiel für $p = 2$ sicher $\sup_{0\le r<1} \|u_r\|_2 < \infty$, also existiert nach (iii), eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{T})$ mit $u = \mathcal{P}[g]$ und dabei ist $\lim_{r\to 1} u_r = g$ bezüglich $\|.\|_2$. Nun ist Konvergenz in $\|.\|_\infty$ stärker als in $\|.\|_2$ und daher folgt nach unserer Voraussetzung das auch $\lim_{r\to 1} u_r = f$. Also ist $f = g$.

❏

Es bleibt die Implikation (ii) '$\Leftarrow$' zu zeigen. Dazu verwenden wir den Begriff der *Fourierreihe*. Zur Wiederholung, siehe [Ru1, Theorem 5.15]: Betrachte die Abbildung

$$\Phi : f \mapsto \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\,dt\Big)_{n\in\mathbb{Z}} .$$

Dann ist Φ eine beschränkte und injektive lineare Abbildung von $(L^1(\mathbb{T}), \|.\|_1)$ auf einen (echten) Teilraum von $(c_0(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty)$. Dabei ist $c_0(\mathbb{Z})$ der Banachraum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0$ versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Betrachtet man Φ nur am $L^2(\mathbb{T})$, so gilt das Φ eine Isometrie von $(L^2(\mathbb{T}), (.,.)_2)$ auf den $(\ell^2(\mathbb{Z}), (.,.)_2)$ ist. Dabei ist $\ell^2(\mathbb{Z})$ der Hilbertraum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$, versehen mit dem inneren Produkt $((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}})_2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\overline{b_n}$.
Beweis. (Satz 1.4.1, (ii) '$\Leftarrow$') Sei vorausgesetzt das $\lim_{r\to 1} u_r = f$ bezüglich $\|.\|_1$. Sei $r_0 < r < 1$ und $\zeta = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, dann gilt

$$u_{r_0}(\zeta) = u(r_0\zeta) = u_r(\frac{r_0}{r}\zeta) = \mathcal{P}[u_r](\frac{r_0}{r}\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\frac{r_0}{r}}(\theta - t)u_r(t)\,dt .$$

Wir gehen zu den Fourierkoeffizienten über und erhalten, da Faltung von Funktionen der Multiplikation ihrer Fourierkoeffizienten entspricht,

$$(\Phi u_{r_0})(n) = \big(\frac{r_0}{r}\big)^{|n|}(\Phi u_r)(n) .$$

Lässt man in dieser Beziehung $r \to 1$ streben, so folgt

$$(\Phi u_{r_0})(n) = r_0^{|n|}(\Phi f)(n) = (\Phi\mathcal{P}[f]_{r_0})(n), \; n \in \mathbb{Z} .$$

Also ist $u_{r_0} = \mathcal{P}[f]_{r_0}$ und daher, da r_0 beliebig war, $u = \mathcal{P}[f]$.

❏

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes ist eine Folgerung aus der Stieltjesschen Umkehrformel und wurde schon in Korollar 1.1.8 bemerkt. Damit sind alle Aussagen von Satz 1.4.1 bewiesen.

Wir erhalten nun eine allgemeinere Version der Poisson-Jensen Formel, sowie eine Integraldarstellung für in $\mathbb{D}$ analytische Funktionen mit nichtnegativem Realteil.

1.4.2 Korollar (Poisson-Jensen Formel). *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und gelte $\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}}|\operatorname{Re} f_r|\,d\lambda < \infty$. Dann existiert in eindeutiger Weise ein reelles Borel-Maß μ und eine reelle Konstante c, sodaß*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta) + ic,\ \ z\in\mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} f$ ist harmonisch und erfüllt die Voraussetzung von Satz 1.4.1, (i). Also existiert ein komplexes Borel-Maß μ mit

$$\operatorname{Re} f = \mathcal{P}[d\mu] = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\,.$$

Da $\operatorname{Re} f$ reellwertig ist, ist μ ein reelles Maß. Nun ist eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt.

❑

1.4.3 Korollar (Riesz-Herglotz). *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und erfülle $\operatorname{Re} f \geq 0$. Dann existiert in eindeutiger Weise ein endliches positives Borel-Maß μ und eine reelle Konstante c, sodaß*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta) + ic,\ \ z\in\mathbb{D}\,.$$

Beweis. Die Funktion $\operatorname{Re} f$ ist harmonisch und nichtnegativ, also existiert ein endliches positives Borel-Maß μ mit

$$\operatorname{Re} f = \mathcal{P}[d\mu] = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)\,.$$

Nun ist eine analytische Funktion durch ihren Realteil bis auf eine imaginäre Konstante bestimmt.

❑

Kombiniert man Satz 1.4.1, (vi) und (i), so sieht man das folgende

1.4.4 Korollar. *Sei u eine in $\mathbb{D}$ harmonische und nichtnegative Funktion. Dann gilt*

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}} |u_r|\,d\lambda < \infty\,.$$

Wir wollen die folgende Aussage explizit festhalten und diskutieren.

1.4.5 Korollar. *Sei u harmonisch in $\mathbb{D}$, u_r für $0 \leq r < 1$ definiert wie in (1.8), und sei $\sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z) =: u^*(\zeta)$. Ist sogar $(u_r(\zeta))_{0 \leq r<1}$ konvergent in der Norm $\|.\|_1$, so ist u das Poisson Integral seiner Randwerte: $u(z) = \mathcal{P}[u^*](z)$, $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis. Sei u harmonisch in $\mathbb{T}$ und $\sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Dann gibt es nach Satz 1.4.1, (i), ein komplexes Borel-Maß μ sodaß $u = \mathcal{P}[d\mu]$. Nach dem Satz von Fatou existiert daher für λ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z)$.

Sind die $u_r(\zeta)$ konvergent in $\|.\|_1$, so ist nach Satz 1.4.1, (ii), $u = \mathcal{P}[f\, d\lambda]$ mit einem gewissen $f \in L^1(d\lambda)$. Nach dem Satz von Fatou gilt $u^*(\zeta) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z) = f(\zeta)$, λ-fast überall.

❑

1.4.6 Beispiel. Sei μ ein von Null verschiedenes komplexes Borel-Maß welches singulär bezüglich λ ist und setze $u := \mathcal{P}[d\mu]$. Dann ist nach Satz 1.4.1, (i), $\sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_1 < \infty$. Nach dem Satz von Fatou gilt $u(\zeta) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z) = 0$ für λ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}$. Also ist $\mathcal{P}[u(\zeta)] = 0$ und daher u nicht das Poisson Integral seiner Randwerte.

Wählt man in diesem Beispiel speziell $\mu = \delta_0$ das Punktmaß bei 1 mit Masse 1, so erhält man die Funktion

$$u(z) = P(z,1) = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} ,$$

vgl. die Bemerkung nach Proposition 1.0.3.

1.4.7 Beispiel. Man kann die Voraussetzung von Korollar 1.4.5 nicht abschwächen zu

$$\sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_p < \infty \text{ für alle } 0 < p < 1 . \tag{1.9}$$

Denn man kann z.B. zeigen, vgl. [D, §4.6], dass es eine Folge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vorzeichen $\epsilon_n \in \{+1, -1\}$ gibt sodaß die Funktion

$$u(z) := \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

die Eigenschaft (1.9) hat, die Menge aller $\zeta \in \mathbb{T}$ für die $\lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z)$ existiert jedoch Lebesgue-Maß Null hat.

1.4.8 Bemerkung. Wir wollen die obigen Aussagen nochmal von einer etwas anderen Perspektive interpretieren. Bezeichne

$$h^p := \big\{ u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : u \text{ harmonisch} , \sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_p < \infty \big\} .$$

Weiters definiere $\|u\|_{h^p} := \sup_{0 \leq r<1} \|u_r\|_p$ für $u \in h^p$. Diese Definition ist für jedes $p \in (0, \infty]$ sinnvoll. Für $0 < p \leq p' \leq \infty$ gilt $h^p \supseteq h^{p'}$ und $\|u\|_{h^p} \leq \|u\|_{h^{p'}}$, $u \in h^{p'}$. Weiters ist, da $\|.\|_p$ eine Norm ist $(1 \leq p \leq \infty)$ bzw. $\|f-g\|_p^p$ eine Metrik $(0 < p < 1)$, h^p für jedes $p \in (0, \infty]$ ein linearer Raum. Im Fall $p = \infty$ ist $\|u\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$, also ist h^∞ gerade die Menge aller in $\mathbb{D}$ harmonischen und beschränkten Funktionen.

Ist $u \in h^p$ mit $p \in [1,\infty]$, so existiert der nichtangentiale Grenzwert

$$u^*(\zeta) := \lim_{z \hat{\to} \zeta} u(z),\ \text{f.ü.},$$

und gehört zu $L^p(\mathbb{T})$. Ist sogar $p \in (1,\infty]$, dann ist die Abbildung $u \mapsto u^*$ eine Isometrie von $(h^p, \|.\|_{h^p})$ auf $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$. Ihre Inverse ist gegeben als

$$f \mapsto \mathcal{P}[f],\ f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Im Fall $p = \infty$ bemerke das die Ungleichung $\|u\|_\infty \geq \|u^*\|_\infty$ trivial ist, und das umgekehrt aus $u = \mathcal{P}[u^*]$ folgt $\|u\|_\infty \leq \|u^*\|_\infty$.

1.5 Subharmonische Funktionen

Zur Wiederholung (vgl. Bemerkung 1.2.3): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt *halbstetig von oben*, falls für jedes $m \in \mathbb{R}$ die Menge $u^{-1}([m,\infty))$ in Ω abgeschlossen ist.

1.5.1 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $u : \Omega \to [-\infty,\infty)$. Dann heißt u *subharmonisch* in Ω, falls gilt

(i) u ist halbstetig von oben

(ii) Sei $A \subseteq \Omega$ offen sodaß $\overline{A} \subseteq \Omega$ und kompakt ist, und sei h reellwertig und stetig auf $\overline{A}$ sowie harmonisch in A. Gilt $u(z) \leq h(z)$ für alle $z \in \partial A$, so folgt $u(z) \leq h(z)$ für alle $z \in A$.

1.5.2 Bemerkung. Wegen dem Maximumprinzip ist jede reellwertige harmonische Funktion auch subharmonisch. Man beachte, daß subharmonische Funktionen wesentlich weniger glatt zu sein brauchen als harmonische. Auch dürfen sie den Wert $-\infty$ tatsächlich annehmen, z.B. ist die Funktion $u \equiv -\infty$ subharmonisch.

Bevor wir subharmonische Funktionen untersuchen können benötigen wir noch einige Aussagen über halbstetige Funktionen.

1.5.3 Lemma.

(i) *Die Funktion u ist genau dann halbstetig von oben wenn für jedes $x \in \Omega$ gilt*

$$\limsup_{y \to x} u(y) \leq u(x).$$

(ii) *Sind $u_1, \ldots, u_n$ halbstetig von oben und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, dann ist auch $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ halbstetig von oben.*

(iii) *Ist $(u_i)_{i \in I}$ eine Familie von nach oben halbstetigen Funktionen, so ist auch $\inf_{i \in I} u_i$ halbstetig von oben. Ist I endlich, so ist auch $\max_{i \in I} u_i$ halbstetig von oben.*

(iv) *Sei u halbstetig von oben und sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist $u|_K$ nach oben beschränkt und nimmt ein Maximum an.*

Beweis.

`ad`(i): Sei u halbstetig von oben und sei $x \in \Omega$. Angenommen es existierte eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $y_n \to x$ und $\lim_{n\to\infty} u(y_n) > u(x)$. Wäehle $m \in (u(x), \lim_{n\to\infty} u(y_n))$. Dann liegt für hinreichend grosses n stets $y_n \in u^{-1}([m,\infty))$. Da diese Menge abgeschlossen ist, enthält sie auch x, ein Widerspruch.

Erfülle umgekehrt u die angegebene Eigenschaft und sei $m \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $y_n \in u^{-1}([m,\infty))$ und $y_n \to x$, so folgt also

$$u(x) \geq \limsup_{y\to x} u(y) \geq m\,,$$

d.h. $x \in u^{-1}([m,\infty))$.

`ad`(ii): Es gilt

$$\limsup_{y\to x} \big(\lambda_1 u_1(y) + \ldots + \lambda_n u_n(y)\big) \leq \lambda_1 \limsup_{y\to x} u_1(y) + \ldots + \lambda_n \limsup_{y\to x} u_n(y) \leq$$

$$\leq \lambda_1 u_1(x) + \ldots + \lambda_n u_n(x)\,.$$

`ad`(iii): Setze $u := \inf_{i\in I} u_i$. Dann ist $u^{-1}([m,\infty)) = \bigcap_{i\in I} u_i^{-1}([m,\infty))$. Ist $I = \{1,\ldots,n\}$, so haben wir für $v := \max_{i=1,\ldots,n} u_i$ die Beziehung $v^{-1}([m,\infty)) = \bigcup_{i=1}^n u_i^{-1}([m,\infty))$.

`ad`(iv): Die Mengen $u^{-1}([-\infty,T))$ sind eine offene Überdeckung von Ω und daher auch von K. Es genügen also schon endlich viele um K zu überdecken, also ist u auf K beschränkt. Setze $M := \sup_{z\in K} u(z)$. Würde für jedes $a \in K$ gelten $u(a) < M$, so wäere $\bigcup_{m<M} u^{-1}([-\infty,m))$ eine offene Überdeckung von K. Daher existierte $m_0 < M$ mit $K \subseteq u^{-1}([-\infty,m_0))$, ein Widerspruch zur Definition von M. Also nimmt $u|_K$ ein Maximum an.

❑

1.5.4 Lemma. *Sei $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ halbstetig von oben, und sei $K \subseteq \Omega$ sodaß u auf K beschränkt ist, $M := \sup_{z\in K} u(z) < \infty$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf Ω definierten, reellwertigen und stetigen Funktionen, sodaß $M \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ auf Ω, $f_n(z) \geq u(z)$ für alle $z \in K$, und $\lim_{n\to\infty} f_n = u$ punktweise auf K.*

Beweis. Ist $u \equiv -\infty$ auf K, so ist die Behauptung trivial. Sei also $u \not\equiv -\infty$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen

$$f_n(x) := \sup_{y\in K} \big(u(y) - n|x-y|\big),\ x \in \Omega\,.$$

Zunächst ist dieses Supremum nicht $-\infty$, da es ein $y \in K$ mit $u(y) \neq -\infty$ gibt. Weiters ist klarerweise $M \geq f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ auf Ω sowie $f_n \geq u$ auf K.

Sind nun $x_1, x_2 \in \Omega$ und $y \in K$, so gilt

$$u(y) - n|x_1 - y| \geq u(y) - n|x_2 - y| - n|x_1 - x_2|\,,$$

also folgt $f_n(x_2) - f_n(x_1) \leq n|x_1 - x_2|$. Vertauscht man x_1 und x_2, so erhält man $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| \leq n|x_1 - x_2|$, also ist f_n stetig.

Wegen der Monotonie existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Angenommen es wäere $a \in K$ und $f(a) > u(a)$. Wähle $m \in (u(a), f(a))$, dann gibt es nach der Definition von f_n einen Punkt $y_n \in K$ mit $u(y_n) - n|a - y_n| \geq m$, d.h. mit

$$m + n|a - y_n| \leq u(y_n) \leq M\,.$$

Insbesondere folgt das $n|y_n - a|$ beschränkt ist, und daher $y_n \to a$. Weiters folgt $m \leq u(y_n)$ für jedes n und daher wegen der Halbstetigkeit von u

$$m \leq \limsup_{n\to\infty} u(y_n) \leq u(a)\,,$$

ein Widerspruch.

❑

1.5.5 Korollar. *Sei u halbstetig von oben auf der Kreislinie $\Omega := \partial D(a, R)$. Dann existiert eine Folge von Polynomen p_n, sodaß*

$$\operatorname{Re} p_1(z) \geq \operatorname{Re} p_2(z) \geq \operatorname{Re} p_3(z) \geq \ldots \to u(z),\ z \in \partial D(a, R)\,.$$

Beweis. Sei oBdA $a = 0$ und $R = 1$. Da $\mathbb{T}$ kompakt ist, ist u beschränkt. Nach Lemma 1.5.4 gibt es $f_n \in C(\mathbb{T})$ mit $f_n \geq f_{n+1}$ und $f_n \to u$ punktweise. Mit f_n hat auch die Folge $\hat{f}_n := f_n + \frac{1}{n}$ diese Eigenschaften. Zusätzlich gilt noch $\hat{f}_n - \hat{f}_{n+1} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß gibt es trigonometrische Polynome $g_n := a_0 + \sum_{k=1}^{N(n)} (a_{n,k} \cos kt + b_{n,k} \sin kt)$ sodaß

$$\|\hat{f}_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\,.$$

Es folgt das $g_n \geq g_{n+1}$ und $g_n \to u$ punktweise. Die Behauptung des Korollars folgt nun wenn man bemerkt dass jedes trigonometrische Polynom in der Form $\operatorname{Re} p$ mit einem Polynom p geschrieben werden kann.

❑

1.5.6 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ halbstetig von oben. Dann sind äquivalent:*

- (i) *u ist subharmonisch.*
- (ii) *Für jedes $a \in \Omega$, alle hinreichend kleinen $R > 0$, und jedes Polynom p gilt: Ist $u(z) \leq \operatorname{Re} p(z)$, $z \in \partial D(a, R)$, so folgt $u(z) \leq \operatorname{Re} p(z)$, $z \in D(a, R)$.*
- (iii) *Für jedes $a \in \Omega$ und alle hinreichend kleinen $R > 0$ gilt*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,. \tag{1.10}$$

In diesem Fall gelten die Eigenschaften (ii) bzw. (iii) sogar für alle $R > 0$ mit $\overline{D(a, R)} \subseteq \Omega$.

Beweis. Als erstes bemerken wir das, da u halbstetig von oben ist, u auch Borelmeßbar ist und auf jeder kompakten Menge nach oben beschränkt ist. Daher existiert das Integral in (iii) entweder in $\mathbb{R}$ oder als $-\infty$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ so daß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Da $\operatorname{Re} p(z)$ harmonisch ist folgt die gewünschte Eigenschaft aus der Definition von subharmonisch.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sei $a \in \Omega$, $R > 0$, so daß die Eigenschaft (iii) gilt. Nach Korollar 1.5.5 existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen sodaß $\operatorname{Re} p_1 \geq \operatorname{Re} p_2 \geq \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} p_n = u$ punktweise auf $\partial D(a,R)$. Es folgt wegen (ii)

$$u(a) \leq \operatorname{Re} p_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a + Re^{it})\, dt\,.$$

Da p_1 auf $\partial D(a,R)$ stetig und daher insbesondere L^1 ist, folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a + Re^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, dt\,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $A \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{A} \subseteq \Omega$ kompakt und sei h stetig auf $\overline{A}$ und harmonisch in A mit $u(z) \leq h(z)$, $z \in \partial A$. Dann ist $u - h$ halbstetig von oben und erfüllt, da h die Mittelwerteigenschaft, ebenfalls (1.10). Weiters ist $(u-h)(z) \leq 0$, $z \in \partial A$. Nach Bemerkung 1.2.3 gilt für $u-h$ das Maximumprinzip Korollar 1.2.4, und es folgt $(u-h)(z) \leq 0$, $z \in A$.

❑

1.5.7 Korollar.

(i) *Sei u subharmonisch in Ω, dann gilt für u das Maximumprinzip.*

(ii) *Die Eigenschaft subharmonisch zu sein ist eine lokale Eigenschaft: hat jeder Punkt von Ω eine Umgebung sodaß u auf dieser subharmonisch ist, dann ist u in Ω subharmonisch.*

(iii) *Sind $u_1, \ldots, u_n$ subharmonisch in Ω und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, dann ist auch $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ subharmonisch in Ω.*

(iv) *Sind $u_1, \ldots, u_n$ subharmonisch in Ω, so auch* $\max\{u_1, \ldots, u_n\}$.

(v) *Ist h harmonisch in Ω, so ist $|h|$ subharmonisch in Ω.*

(vi) *Sei h eine reellwertige und stetige Funktion auf Ω. Dann ist h harmonisch genau dann wenn h und $-h$ subharmonisch sind.*

Beweis.
`ad`(i): Nach Bemerkung 1.2.3, denn u ist halbstetig von oben und erfüllt (1.10).

`ad`(ii): Die Eigenschaft (iii) aus Satz 1.5.6 ist eine lokale Eigenschaft.

`ad`(iii): Die Beziehung (1.10) bleibt bestehen.

`ad`(iv): Es gilt

$$\max_{i=1,\ldots,n} u_i(a) \leq \max_{i=1,\ldots,n} u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_i(a + Re^{it})\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \max_{i=1,\ldots,n} u_i(a + Re^{it})\, dt\,.$$

`ad`(v): Es gilt

$$|h(a)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(a+Re^{it})\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(a+Re^{it})|\,dt\,.$$

`ad`(vi): Ist sowohl h als auch $-h$ subharmonisch, so ist h stetig und hat die Mittelwerteigenschaft.

❑

1.5.8 Bemerkung. Man kann zeigen: Ist $u:\Omega\to\mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar (als Funktion der beiden reellen Veränderlichen $x=\operatorname{Re} z, y=\operatorname{Im} z$), dann ist u subharmonisch genau dann wenn $\Delta u \ge 0$ ist.

1.5.9 Beispiel. Sei f analytisch im Gebiet Ω. Dann sind die Funktionen

$$|f(z)|,\ \log|f(z)|,\ \log^+|f(z)|$$

subharmonisch in Ω. Dabei bezeichnet $\log^+$ die Funktion $\log^+ x := \max\{\log x, 0\}$.

Zunächst ist eine analytische Funktion f auch harmonisch und daher ist nach Korollar 1.5.7, (v), die Funktion $|f|$ subharmonisch. Um zu zeigen das $\log|f|$ subharmonisch ist, sei $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ und p ein Polynom sodaß $\log|f(z)| \le \operatorname{Re} p(z)$, $z\in\partial D(a,R)$. Dann gilt also

$$\left|e^{-p(z)}f(z)\right| \le 1,\ z\in\partial D(a,R)\,,$$

und, da $e^{-p(z)}f(z)$ analytisch ist, daher auch $|e^{-p(z)}f(z)| \le 1$, $z\in D(a,R)$. D.h. es ist $\log|f(z)| \le \operatorname{Re} p(z)$, $z\in D(a,R)$. Nach Satz 1.5.6 ist $\log|f|$ subharmonisch. Korollar 1.5.7, (iv), zeigt nun das auch $\log^+|f| = \max\{\log|f|, 0\}$ subharmonisch ist.

1.5.10 Bemerkung. Die Tatsache das $\log|f|$ für analytische Funktionen f subharmonisch ist, erhielte man auch auf mehr funktionentheoretischen Wege, nämlich mit Hilfe der *Jensenschen Formel*. Diese besagt: Sei f analytisch in $\overline{D(0,R)}$, $f(0)\neq 0$, sei $0<r<R$ und seien $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ die Nullstellen von f in $\overline{D(0,r)}$ gezählt gemäß ihrer Vielfachheit. Dann gilt

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{it})|\,dt}\,.$$

Sei nun f analytisch in Ω. Dann ist $|f|$ stetig und nichtnegativ und daher $\log|f|$ halbstetig von oben. Ist $a\in\Omega$, $\overline{D(a,R)}\subseteq\Omega$ und $f(a)\neq 0$, so gilt für alle $0<r<R$ nach der Jensenschen Formel

$$\log|f(a)| + \sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n - a|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(a+re^{it})|\,dt\,, \tag{1.11}$$

wobei α_n die Nullstellen von f in $\overline{D(a,r)}$ sind. Nun ist $\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|\alpha_n - a|} \ge 0$. Da die Beziehung (1.10) für $f(a)=0$, d.h. $\log|f(a)| = -\infty$, ohnehin trivial ist folgt das $\log|f|$ die Eigenschaft (iii) von Satz 1.5.6 hat.

Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, daß (1.11) auch zeigt das die Integrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(a+re^{it})|\,dt$ als Funktion von r monoton wachsend sind. Wir werden sehen das diese Aussage für beliebige subharmonische Funktionen richtig ist, vgl. Satz 1.6.4.

1.6 Eigenschaften subharmonischer Funktionen

Eine subharmonische Funktion darf den Wert $-\infty$ annehmen, jedoch nicht zu oft:

1.6.1 Proposition. *Sei Ω ein Gebiet und sei u subharmonisch in Ω, $u \not\equiv -\infty$. Dann gilt für jede Kreisscheibe mit $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$*

$$\iint\limits_{D(a,R)} \big|u(x+iy)\big|\, dxdy < \infty\,. \tag{1.12}$$

Die Menge $\{z \in \Omega:\ u(z) = -\infty\}$ hat (zweidimensionales) Lebesgue-Maß Null.

Beweis. Schreibe $u = u_+ - u_-$ mit $u_+ := \max\{u, 0\}, u_- := -\min\{u, 0\}$. Dann ist also $|u| = u_+ + u_-$. Nach Lemma 1.5.3, (iv), ist u_+ auf jeder kompakten Teilmenge von Ω beschränkt. Insbesondere gilt

$$\iint\limits_{D(a,R)} u_+(x+iy)\, dxdx < \infty\,.$$

Also sind die folgenden Beziehungen äquivalent:

$$\iint\limits_{D(a,R)} u(x+iy)\, dxdx > -\infty, \quad \iint\limits_{D(a,R)} u_-(x+iy)\, dxdx < \infty, \quad \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdx < \infty\,.$$

Wir betrachten die Menge

$$A := \Big\{a \in \Omega:\ \exists\, R > 0 : \overline{D(a,R)} \subseteq \Omega, \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdz = \infty\Big\}\,.$$

Als erstes zeigen wir das $A \subseteq \{a \in \Omega:\ u(a) = -\infty\}$.

Sei $a \in \Omega$ sodaß $u(a) \neq -\infty$ und sei $R > 0$ so daß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Dann gilt wegen (1.10)

$$u(a) \cdot \frac{R^2}{2} = \int_0^R u(a)\, rdr \leq \int_0^R \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\, dt \cdot rdr\,.$$

Substituiert man $x = \operatorname{Re} a + r\cos t, y = \operatorname{Im} a + r \sin t$, so ist $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = r$ und es folgt

$$-\infty < u(a) \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{D(a,R)} u(x+iy)\, dxdx\,.$$

Wir zeigen das A offen ist: Sei $a \in A$ und wähle $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ mit $\iint_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy = \infty$. Wähle $\epsilon > 0$ sodaß $\overline{D(a, R+\epsilon)} \subseteq \Omega$. Ist $|z-a| < \frac{\epsilon}{2}$, so gilt

$$D(a,R) \subseteq \overline{D(z, R + \frac{\epsilon}{2})} \subseteq \overline{D(a, R+\epsilon)} \subseteq \Omega\,,$$

sowie

$$\iint\limits_{D(z,R+\frac{\epsilon}{2})} |u(x+iy)|\, dxdy \geq \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy = \infty\,.$$

Es folgt das $z \in A$.

Wir zeigen das A abgeschlossen ist: Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ sodaß $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und $D(a,R) \cap A \neq \emptyset$. Dann existiert eine Kreisscheibe $D(z,r) \subseteq D(a,R) \cap A$. Nun ist wie wir oben festgestellt haben $u|_A = -\infty$, also folgt

$$\infty = \iint\limits_{D(z,r)} |u(x+iy)|\, dxdy \leq \iint\limits_{D(a,R)} |u(x+iy)|\, dxdy\,,$$

also gilt $a \in A$.

Da Ω zusammenhängend ist und $u \not\equiv -\infty$, ist $A^c \neq \emptyset$ und daher $A = \emptyset$. Es gilt also (1.12) für jede Kreisscheibe $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ und damit ist $\{a \in \Omega : u(a) = -\infty\} \cap D(a,R)$ eine Menge vom zweidimensionalen Lebesgue-Maß Null. Da Ω eine im $\mathbb{R}^2$ offene Menge ist, und daher durch abzählbar viele solche Kreisscheiben ausgeschöpft werden kann, folgt das auch $\{a \in \Omega : u(a) = -\infty\}$ eine Nullmenge ist.

❑

Die folgende Aussage, mit deren Hilfe man aus bekannten subharmonischen Funktionen neue erzeugen kann, folgt aus der Jensenschen Ungleichung.

1.6.2 Proposition. *Sei u eine subharmonische Funktion in Ω und sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex. Setze $\varphi(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Dann ist $\varphi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und subharmonisch in Ω.*

Beweis. Zunächst bemerke, daß eine monoton wachsende und konvexe Funktion stets stetig ist. Es folgt daß $\varphi \circ u$ halbstetig von oben ist. Sei eine Kreisscheibe $D(a,R)$ mit $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ gegeben. Approximiere u auf $\partial D(a,R)$ mit Polynomen sodass $\operatorname{Re} p_1(z) \geq \operatorname{Re} p_2(z) \geq \ldots \to u(z)$, $z \in \partial D(a,R)$. Dann gilt, da u subharmonisch ist, $u(a) \leq \operatorname{Re} p_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt wegen der Monotonie von φ, da $\operatorname{Re} p_n$ harmonisch ist, und wegen der Jensenschen Ungleichung:

$$\varphi(u(a)) \leq \varphi(\operatorname{Re} p_n(a)) = \varphi\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} p_n(a+Re^{i\theta})\, d\theta\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi \circ \operatorname{Re} p_n)(a+Re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Da φ stetig und monoton ist, gilt $\varphi \circ \operatorname{Re} p_n \to \varphi \circ u$ punktweise und monoton fallend auf $\partial D(a,R)$. Da $\operatorname{Re} p_1$ stetig und daher beschränkt ist, ist auch $\varphi \circ \operatorname{Re} p_n$ beschränkt, und es folgt mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz dass

$$\varphi(u(a)) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi \circ u)(a+Re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

Nach Satz 1.5.6 ist $\varphi \circ u$ subharmonisch.

❑

1.6.3 Korollar.

(*i*) *Sei u harmonisch in Ω und sei $p \in [1,\infty)$. Dann ist $|u|^p$ subharmonisch.*

(*ii*) *Sei f analytisch im Gebiet Ω und sei $p \in (0,\infty)$. Dann ist die Funktion $|f|^p$ subharmonisch in Ω.*

Beweis. Für die erste Behauptung wende Proposition 1.6.2 an auf $|u|$ und $\varphi(x) = |x|^p$. Für die zweite auf $u = \log|f|$ und $\varphi(x) = e^{px}$.

❑

Wir betrachten nun Funktionen u die subharmonisch in $\mathbb{D}$ oder in einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ sind. In dieser Situation können wir die folgenden Integralmittel definieren:

$$m(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})\,dt,\ \ 0 \le r < 1 \text{ bzw. } R_1 < r < R_2\,.$$

1.6.4 Satz.

(*i*) *Sei u subharmonisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $m(r)$ für $r \in [0,1)$ monoton wachsend.*

(*ii*) *Sei u subharmonisch in $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$. Dann ist $m(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$, d.h. ist $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, $\alpha \in (0,1)$, und $\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, so gilt*

$$m(r) \le \alpha m(r_1) + (1-\alpha) m(r_2)\,.$$

Beweis.
`ad`(*i*): Sei $0 \le r_1 \le r_2 < 1$ gegeben und sei h eine auf $\overline{D(0,r_2)}$ stetige und in $D(0,r_2)$ harmonische Funktion mit $u(z) \le h(z)$, $|z| = r_2$. Dann gilt $u(z) \le h(z)$ in ganz $D(0,r_2)$, und daher

$$m(r_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_1e^{it})\,dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_1e^{it})\,dt = h(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_2e^{it})\,dt\,.$$

Approximiert man $u(z)$ auf $\partial D(0,r_2)$ gemäß Lemma 1.5.4 mit stetigen Funktionen $f_n(z)$ und setzt $h_n(z) := \mathcal{P}[f_n]$, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$m(r_1) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_n(r_2e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_2e^{it})\,dt = m(r_2)\,.$$

`ad`(*ii*): Seien $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ gegeben. Nach Korollar 1.5.5 existieren Polynome $p_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}, j = 1,2$ sodaß

$$\operatorname{Re} p_{1,j}(r_je^{it}) \ge \operatorname{Re} p_{2,j}(r_je^{it}) \ge \ldots \to u(r_je^{it}),\ \ t \in [0,2\pi), j = 1,2\,.$$

Schreibt man

$$\operatorname{Re} p_{n,j} = \alpha_0(n,j) + \sum_{k=1}^{N(n)} \big(\alpha_k(n,j)\cos kt + \beta_k(n,j)\sin kt\big),\ \ n \in \mathbb{N}, j = 1,2\,,$$

so sieht man das es Zahlen $a_k(n), b_k(n), c_n, d_n$ gibt sodaß für die Funktion

$$h_n(re^{it}) := c_n \log r + d_n + \sum_{\substack{k=-N(n)\\k\neq 0}}^{N(n)} \big(a_k(n)\cos kt + b_k(n)\sin kt\big)$$

gilt

$$h_n(r_je^{it}) = \operatorname{Re} p_{n,j}(r_je^{it}),\ t\in[0,2\pi), j=1,2\,.$$

Nun ist

$$m_n(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_n(re^{it})\,dt = c_n\log r + d_n\,,$$

eine lineare Funktion von $\log r$. Da u subharmonisch ist, und $h_n(r_je^{it}) \geq u(r_je^{it})$, $t\in[0,2\pi), j=1,2$, folgt $h_n(z)\geq u(z)$, $r_1\leq |z|\leq r_2$. Also ist stets $m(r)\leq m_n(r)$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man für r_1 und r_2 sogar $\lim_{n\to\infty} m_n(r_j) = m(r_j)$, $j=1,2$.

Sei nun $\alpha\in(0,1)$ und $\log r = \alpha\log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$. Dann gilt

$$m(r)\leq m_n(r) = \alpha m_n(r_1) + (1-\alpha)m_n(r_2)\,,$$

und damit auch $m(r)\leq \alpha m(r_1) + (1-\alpha)m(r_2)$.

❑

1.6.5 Korollar. *Sei u subharmonisch in $\mathbb{D}$. Bezeichne $u_r:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ die Funktion $u_r(\zeta) := u(r\zeta)$, vgl. (1.8). Dann gilt für jedes $r\in(0,1)$ das $u_r\in L^1(\mathbb{T})$. Insbesondere ist $m(r)>-\infty$, $r\in(0,1)$. Es gilt*

$$\lim_{r\searrow 0} m(r) = u(0)\,.$$

Beweis. Da u auf jeder Kreislinie nach oben beschränkt ist, genügt es für die erste Behauptung zu zeigen daß $m(r)>-\infty$ gilt. Wäre $m(r)=-\infty$, so wäre wegen der Monotonie auch $m(r')=-\infty$ für alle $r'\in[0,r)$. Ein Widerspruch zu Proposition 1.6.1, denn

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D(0,r)} u(x+iy)\,dxdy = \int_0^r rm(r)\,dr\,.$$

Wieder wegen der Monotonie existiert der Limes $\lim_{r\searrow 0} m(r)$. Angenommen es wäre dieser Grenzwert echt grösser als $u(0)$. Dann wähle $m\in(u(0),\lim_{r\searrow 0} m(r))$. Da $u^{-1}([-\infty,m))$ offen ist, existiert ein $R>0$ sodaß $D(0,R)\subseteq u^{-1}([-\infty,m))$. Es folgt $m(r)\leq m$ für alle $r\leq R$, ein Widerspruch. ❑

1.6.6 Korollar. *Sei $p\in[1,\infty]$ und sei $u\in h^p$. Dann gilt*

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1}\|u_r\|_p = \lim_{r\nearrow 1}\|u_r\|_p\,.$$

Beweis. Im Fall $p\in[1,\infty)$ benütze Korollar 1.6.3 und Satz 1.6.4. Für $p=\infty$ ist $\|u_r\|_\infty$ wegen dem Maximumprinzip monoton wachsend.

❑

1.6.7 Korollar (Hardy). *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und sei $0 < p < \infty$. Dann ist die Funktion $\|f_r\|_p$ in r monoton wachsend und die Funktion $\log \|f_r\|_p$ in $\log r$ konvex.*

Beweis. Die Funktion $|f|^p$ ist subharmonisch und daher ist nach Satz 1.6.4 die Funktion $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p \, dt = \|f_r\|_p^p$ monoton wachsend.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion $|z|^\lambda |f(z)|^p$. Sie ist auf $0 < |z| < 1$ definiert und dort subharmonisch, denn sie ist $|.|^p$ von der lokal analytischen Funktion $z^{\frac{\lambda}{p}} f(z)$. Nach Satz 1.6.4 ist daher $r^\lambda \|f_r\|_p^p$ eine konvexe Funktion von $\log r$.

Sei nun $0 < r_1 < r_2 < 1$ und $\alpha \in (0,1)$ gegeben. Wähle $\lambda \leq 0$ sodaß $r_1^\lambda \|f_{r_1}\|_p^p = r_2^\lambda \|f_{r_2}\|_p^p$ und bezeichne diesen Wert mit K. Eine solche Wahl von λ ist möglich da $r_1 < r_2$ und $\|f_{r_1}\|_p \leq \|f_{r_2}\|_p$. Sei $\log r = \alpha \log r_1 + (1-\alpha)\log r_2$, dann gilt also

$$r^\lambda \|f_r\|_p^p \leq \alpha r_1^\lambda \|f_{r_1}\|_p^p + (1-\alpha) r_2^\lambda \|f_{r_2}\|_p^p = K = K^\alpha K^{1-\alpha} =$$

$$= \left(r_1^\lambda \|f_{r_1}\|_p^p\right)^\alpha \left(r_2^\lambda \|f_{r_2}\|_p^p\right)^{1-\alpha} = r^\lambda \left(\|f_{r_1}\|_p^p\right)^\alpha \left(\|f_{r_2}\|_p^p\right)^{1-\alpha}.$$

Durch logarithmieren erhält man die gewünschte Beziehung.

❑

1.6.8 Bemerkung. Die Aussage von Korollar 1.6.7 ist auch für den Fall $p = \infty$ richtig. Die Tatsache das $\|f_r\|_\infty$ monoton wächst ist gerade das Maximumprinzip. Das $\log \|f_r\|_\infty$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, ist die Aussage des *Hadamard'schen Dreikreisesatzes*, eine Folgerung aus dem Maximumprinzips.

1.6.9 Bemerkung. Mittels Variablensubstitution erhält man die Satz 1.6.4 und seinen Folgerungen entsprechenden Ergebnisse für beliebige Kreisscheiben $D(a, R)$ bzw. Kreisringe $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$.

Kapitel 2

Die Räume H^p, N, N^+

2.1 Funktionen von beschränktem Typ

Ist $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ meßbar, so bezeichnen wir

$$\|g\|_0 := \int\limits_{\mathbb{T}} \log^+ |g(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) \, .$$

2.1.1 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$, und sei wieder $f_r(\zeta) := f(r\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, vgl. (1.8). Wir schreiben $f \in N$, falls

$$\sup_{0 \le r < 1} \|f_r\|_0 < \infty \, .$$

N heißt die Menge der *analytischen Funktionen von beschränktem Typ*. Wir definieren weiters

$$\|f\|_0 := \sup_{0 \le r < 1} \|f_r\|_0, \;\; f \in N \, .$$

Bemerke das, da für in $\mathbb{D}$ analytische Funktionen $\log^+ |f|$ subharmonisch ist, $\|f_r\|_0$ stets monoton wachsend mit $r \in (0,1)$ ist. Es folgt

$$\sup_{0 \le r < 1} \|f_r\|_0 = \lim_{r \nearrow 1} \|f_r\|_0 \, .$$

Grundlegend für das Folgende ist

2.1.2 Satz (R.Nevanlinna). *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $f \in N$ genau dann wenn sich f darstellen läßt als $f(t) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ mit in $\mathbb{D}$ analytischen und beschränkten Funktionen φ, ψ. In diesem Fall können φ und ψ so gewählt werden, daß ψ in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen hat und $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \le 1$ gilt.*

Beweis. Ist g analytisch in $\mathbb{D}$, $\|g\|_\infty \le 1$, so ist stets $\log |g(z)| \le 0$. Weiters ist $\log |g|$ subharmonisch. Es folgt das $\int_{\mathbb{T}} \log |g_r(\zeta)| \, d\lambda(\zeta)$ monoton wachsend ist und nach oben beschränkt durch 0. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \to 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \big| \log |g_r(\zeta)| \big| \, d\lambda(\zeta) = - \lim_{r \to 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \log |g_r(\zeta)| \, d\lambda(\zeta) \in [0, \infty) \, .$$

Sei nun $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit in $\mathbb{D}$ analytischen und beschränkten Funktionen. OBdA sei $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$, andernfalls erweitere den Bruch mit $(\max\{\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\})^{-1}$. Es folgt

$$\|f_r\|_0 = \int\limits_{\mathbb{T}} \log^+ |\frac{\varphi_r(\zeta)}{\psi_r(\zeta)}| \, d\lambda(\zeta) \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \Big| \log |\frac{\varphi_r(\zeta)}{\psi_r(\zeta)}| \Big| \, d\lambda(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \big| \log |\varphi_r(\zeta)| - \log |\psi_r(\zeta)| \big| \, d\lambda(\zeta) \leq \int\limits_{\mathbb{T}} \big| \log |\varphi_r(\zeta)| \big| \, d\lambda(\zeta) + \int\limits_{\mathbb{T}} \big| \log |\psi_r(\zeta)| \big| \, d\lambda(\zeta) \,.$$

Da die rechte Seite für $r \to 1$ einen endlichen Grenzwert hat, ist $\|f_r\|_0$ für $r \in [0,1)$ beschränkt, d.h. $f \in N$.

Sei nun umgekehrt $f \in N$, $M := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_0 < \infty$. Betrachte die Maße $\log^+ |f_r| \, d\lambda$ als Elemente des Dualraumes von $C(\mathbb{T})$. Wegen

$$\| \log^+ |f_r| \, d\lambda \| = | \log^+ |f_r| \, d\lambda |(\mathbb{T}) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log^+ |f_r| \, d\lambda = \|f_r\|_0$$

sind alle diese in der Kugel mit Radius M enthalten. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu existiert ein komplexes Borel-Maß μ und eine Folge $r_n \to 1$, sodaß im schwach-* Sinne $\lim_{n \to \infty} \log^+ |f_{r_n}| \, d\lambda = \mu$ gilt. Es ist $\|\mu\| \leq M$ und da alle $\log^+ |f_r| \, d\lambda$ positive Maße sind, hat auch μ diese Eigenschaft. Definiere

$$\psi(z) := e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta - z}{\zeta + z} \, d\mu(\zeta)} \,, \; z \in \mathbb{D} \,.$$

Dann ist ψ eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion, hat keine Nullstellen und ist beschränkt durch 1:

$$\log |\psi(z)| = -\mathcal{P}[d\mu](z) \leq 0 \,.$$

Sei $r \in (0,1)$ und betrachte die subharmonische Funktion $u(z) := \log |f(rz)|$, $z \in \frac{1}{r}\mathbb{D}$. Längs $\mathbb{T}$ gilt $u(\zeta) \leq \log^+ |f_r(\zeta)|$, also folgt

$$\log |f(rz)| = u(z) \leq \mathcal{P}[\log^+ |f_r|], \; z \in \mathbb{D} \,.$$

Sei nun $z \in \mathbb{D}$ festgehalten. Die linke Seite der obigen Beziehung strebt für $r = r_n$ und $n \to \infty$ gegen $\log |f(z)|$, die rechte Seite gegen $\mathcal{P}[d\mu](z) = -\log |\psi(z)|$. Es folgt das

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\psi(z)|}, \; z \in \mathbb{D} \,.$$

Setzen wir $\varphi := f\psi$, so erhalten wir eine Darstellung von f in der gewünschten Form.

❑

Wie wir im ersten Teil des Beweises von Satz 2.1.2 gesehen haben gilt:

2.1.3 Korollar. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und gelte*

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| \, dt < \infty \,.$$

Dann folgt das

$$\limsup_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \big| \log |f(re^{it})| \big| \, dt < \infty \,.$$

2.1.4 Korollar.

(*i*) *Sind $f, g \in N$, so ist auch $f + g$ sowie $f \cdot g$ in N. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist die konstante Funktion α in N. Insbesondere ist N ein linearer Raum. Ist $\frac{f}{g}$ analytisch in $\mathbb{D}$, so ist auch $\frac{f}{g} \in N$.*

(*ii*) *Sei $f \in N$. Dann existiert für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ der nichttangentiale Grenzwert $\lim_{z \hat{\to} \zeta} f(z) =: f^*(\zeta)$. Ist $f \neq 0$, so ist $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Es gilt $\|f^*\|_0 \leq \|f\|_0$.*

(*iii*) *Sind $f, g \in N$ und gilt $f^*(\zeta) = g^*(\zeta)$ für alle ζ aus einer Menge mit positivem Maß, so folgt $f = g$.*

Beweis. Die Aussage (*i*) folgt unmittelbar aus Satz 2.1.2. Um (*ii*) zu zeigen sei zunächst g analytisch in $\mathbb{D}$, $g \neq 0$, mit $\|g\|_\infty \leq 1$ gegeben. Dann hat g nach Korollar 1.4.5 λ-fast überall einen nichttangentiale Grenzwert $f^*(\zeta)$. Wir wenden das *Lemma von Fatou* an. Zur Wiederholung: Ist μ ein positives Maß und sind $f_n \geq 0$ und meßbar, so gilt $\int(\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$. Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir

$$\int_{\mathbb{T}} \big|\log|g^*(\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \lim_{r\nearrow 1} \big|\log|g(r\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta) \leq \liminf_{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \big|\log|g(r\zeta)|\big|\, d\lambda(\zeta)\,.$$

Die rechte Seite ist nach Korollar 2.1.3 endlich. Also ist $\log|g^*| \in L^1(\mathbb{T})$, insbesondere ist g^* λ-fast überall verschieden von Null.

Sei nun $f \in N$ und schreibe $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq 1$. Nach dem gerade Bemerkten existiert λ-fast überall

$$f^*(\zeta) := \lim_{z \hat{\to} \zeta} f(z) = \frac{\lim_{z \hat{\to} \zeta} \varphi(z)}{\lim_{z \hat{\to} \zeta} \psi(z)}$$

und es ist $\log|f^*| = \log|\varphi^*| - \log|\psi^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ebenfalls wegen dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\|f^*\|_0 = \int_{\mathbb{T}} \lim_{r\nearrow 1} \log^+|f_r(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) \leq \liminf_{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log^+|f_r(\zeta)|\, d\lambda(\zeta) = \|f\|_0\,.$$

Die Behauptung (*iii*) folgt aus den bereits bewiesenen, denn sind $f, g \in N$ so ist auch $f - g \in N$ und, falls $f - g \neq 0$, so ist $f^* - g^* = (f - g)^* \in L^1(\mathbb{T})$.

❑

Wir gehen nun daran die multiplikative Struktur von N näher zu untersuchen. Zuerst wollen wir etwaige Nullstellen abspalten. Dies geschieht mit Hilfe sogenannter *Blaschke Produkte*:

2.1.5 Lemma. *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $\alpha_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es gelte die* Blaschke Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty\,, \tag{2.1}$$

oder äquivalent $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| > 0$. *Dann ist das Produkt*

$$B(z) := z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, z \in \mathbb{D},$$

lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus \overline{\{(\overline{\alpha_n})^{-1} : n \in \mathbb{N}\}}$ *und stellt daher eine in dieser Menge analytische Funktion dar. Diese nennt man das Blaschke Produkt zu der Folge* α_n *und* k. *Die Funktion* B *hat genau (inklusive Vielfachheit) die Nullstellen* α_n *und* 0 *als Nullstelle der Ordnung* k. *Es gilt die Symmetrieeigenschaft* $B((\overline{z})^{-1}) = (\overline{B(z)})^{-1}$.

Beweis. Sei K eine kompakte Menge mit $K \cap \overline{\{(\overline{\alpha_n})^{-1} : n \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$. Dann existiert $\delta_1 > 0$ sodaß $|1 - \overline{\alpha_n}z| = |\alpha_n|\,|z - (\overline{\alpha_n})^{-1}| \geq \delta$. Weiters gilt auf Grund der Blaschke Bedingung $|\alpha_n| \to 1$, also ist auch $|\alpha_n| \geq \delta_2 > 0$. Ausserdem ist $|z| \leq \delta_3$, $z \in K$. Nun ist

$$\Big|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\Big| = \Big|\frac{\alpha_n - |\alpha_n|^2 z - |\alpha_n|\alpha_n + |\alpha_n|z}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\Big| =$$

$$= \Big|\frac{\alpha_n + |\alpha_n|z}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\Big|(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+\delta_3}{\delta_1\delta_2}(1-|\alpha_n|),$$

und schliessen aufgrund der Blaschke Bedingung das die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\Big|$$

auf K gleichmäßig konvergiert. Damit ist auch das Produkt $B(z)$ gleichmäßig konvergent auf K.

❑

Bemerke das, falls die Blaschke Bedingung nicht erfüllt ist, das obige Produkt in $\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert und außerhalb gegen ∞.

2.1.6 Lemma. *Die Folge* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *erfülle die Blaschke Bedingung* (2.1). *Sei* B *das Blaschke Produkt zu den* α_n *und einem* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dann gilt* $\|B\|_\infty = 1$ *und* $|B^*(\zeta)|_\infty = 1$, λ*-fast überall. Weiters ist*

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log\big|B_r(\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) = 0\,. \tag{2.2}$$

Beweis. Da stets $\|\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}\|_\infty = 1$ ist, ist sicher $\|B\|_\infty \leq 1$. Also existiert fast überall der Grenzwert $\lim_{z \hat{\to} \zeta} B(z) =: B^*(\zeta)$ und $\|B^*\|_\infty \leq 1$. Da $\log|B|$ subharmonisch ist, existiert der obige Grenzwert. Klarerweise ist er nichtpositiv. Sei für $N \in \mathbb{N}$

$$B_N(z) := \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n},$$

dann hat die rationale Funktion $\frac{B}{B_N}$ in einer offenen Umgebung von $\mathbb{T}$ keine Null- oder Polstellen, und $|\frac{B}{B_N}| = 1$ längs $\mathbb{T}$. Es folgt

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} \log\Big|\frac{B}{B_N}(r\zeta)\Big|\,d\lambda(\zeta) = 0\,,$$

und daher

$$\lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\big|B(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) = \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\big|B_N(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta)\,.$$

Wir erhalten, da $\log|B_N|$ subharmonisch ist und mit Hilfe des Lemmas von Fatou

$$\log|B_N(0)| = \lim_{r\searrow 0}\int_{\mathbb{T}} \log\big|B_N(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) \le \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\big|B_N(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) =$$

$$= \lim_{r\nearrow 1}\int_{\mathbb{T}} \log\big|B(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) \le \int_{\mathbb{T}} \lim_{r\nearrow 1} \log\big|B(r\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \log\big|B^*(\zeta)\big|\,d\lambda(\zeta) \le 0\,.$$

Für $N \to \infty$ strebt $\log|B_N(0)|$ gegen 0. Es folgt das die Beziehung (2.2) gilt und das fast überall $\log|B^*(\zeta)| = 0$ gilt. Daraus wiederum folgt das auch $\|B\|_\infty = 1$ ist.

❑

2.1.7 Bemerkung. Ist eine endliche Anzahl von Nullstellen $\alpha_n \in \mathbb{D}$ vorgegeben, und ist $B(z)$ das entsprechend gebildete Produkt, so ist B eine rationale Funktion und die Eigenschaften von Lemma 2.1.6 sind trivialerweise erfüllt.

2.1.8 Proposition. *Ist $f \in N$, $f \neq 0$, dann erfüllen die Nullstellen von f die Blaschke Bedingung. Sei B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und setze $g := B^{-1}f$. Dann ist $g \in N$ und $\|g\|_0 = \|f\|_0$.*

Beweis. Da $f \in N$ gerade bedeutet das f geschrieben werden kann als $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \le 1$ und ψ nullstellenfrei, genügt es für die ersten beiden Behauptungen den Fall $\|f\|_\infty \le 1$ zu betrachten.

Sei also f analytisch in $\mathbb{D}$ und $\|f\|_\infty \le 1$. Habe f an der Stelle 0 eine Nullstelle der Ordnung k und seien α_n die von Null verschiedenen Nullstellen von f (aufgezählt gemäß ihrer Vielfachheit). Setze für $N \in \mathbb{N}$

$$B^N(z) := z^k \prod_{j=1}^{N} b_{\alpha_j}(z)\,, \tag{2.3}$$

wobei

$$b_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\,\frac{|\alpha|}{\alpha}\,.$$

Wir zeigen das gilt

$$\|(B^N)^{-1}f\|_\infty \le 1\,, \tag{2.4}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann existiert $R \in (0,1)$ sodaß

$$\big|B^N(z)\big| \ge 1-\epsilon,\ |z| \in [R,1)\,.$$

Es folgt $|(B^N)^{-1}f(z)| \le (1-\epsilon)^{-1}$, $|z| \in [R,1)$. Nach dem Maximumprinzip folgt $\|(B^N)^{-1}f(z)\|_\infty \le (1-\epsilon)^{-1}$. Da ϵ beliebig war, folgt $\|(B^N)^{-1}f(z)\|_\infty \le 1$, d.h. es ist

$$\Big|\frac{f(z)}{z^k}\Big| \le \Big|\prod_{j=1}^{N} b_{\alpha_j}(z)\Big|,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Setzt man in dieser Beziehung $z = 0$ ein, so folgt

$$0 < \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \le \prod_{j=1}^{N} |\alpha_j| .$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist die Blaschke Bedingung erfüllt. Weiters schliessen wir wegen (2.4) das $\|B^{-1}f\|_\infty \le 1$ ist.

Wir müssen noch zeigen das, in der Situation des Satzes, $\|B^{-1}f\|_0 = \|f\|_0$ ist. Es gilt

$$\log^+ \left|\frac{f}{B}\right| \le \log^+ |f| + \log^+ \left|\frac{1}{B}\right| = \log^+ |f| - \log |B| .$$

Wegen Lemma 2.1.6 folgt $\|B^{-1}f\|_0 \le \|f\|_0$. Die umgekehrte Ungleichung ist klar, da stets $|f| \le |B^{-1}f|$.

❑

2.1.9 Bemerkung. Wir wollen die folgende Tatsache die im Beweis von Proposition 2.1.8 aufgetreten ist explizit festhalten: Ist f analytisch in $\mathbb{D}$ und gilt $\|f\|_\infty \le 1$, so konvergiert das Blaschke Produkt B zu den Nullstellen von f und es ist $\|B^{-1}f\|_\infty \le 1$.

2.1.10 Satz. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist f genau dann von beschränktem Typ, wenn sich f schreiben läßt als*

$$f = B\frac{S_1}{S_2}F \tag{2.5}$$

wobei B ein Blaschke Produkt ist, S_1 und S_2 nullstellenfreie analytische Funktionen mit

$$\|S_j\|_\infty = 1,\ |S_j^*(\zeta)| = 1 \text{ f.ü.},\ j = 1, 2 ,$$

und wobei F von der Gestalt

$$F(z) = e^{\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\phi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)}$$

mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ ist. Tatsächlich gilt in diesem Fall $\phi = \log |f^*|$.

Ist $f \in N$, so sind in (2.5) die Faktoren B und F (bis auf eine multiplikative Konstante vom Betrag eins) eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $f \in N$ gegeben und bezeichne mit f^* die Randfunktion von f. Wegen Proposition 2.1.8 können wir oBdA annehmen das f keine Nullstellen hat. Dann ist also $\log f$ eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion. Weiters gilt wegen Korollar 2.1.3 das $\operatorname{Re} \log f = \log |f| \in h^1$. Nach der Poisson-Jensen Formel Korollar 1.4.2 existiert ein reelles Borel-Maß μ und eine reelle Konstante C mit

$$\log f(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta) + iC,\ z \in \mathbb{D} .$$

Schreibe $d\mu = \phi d\lambda + \mu_s$ mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und μ_s singulär bezüglich λ. Weiter schreibe $\mu_s = \mu_2 - \mu_1$ mit positiven zu λ singulären Maßen μ_j. Setze

$$S_j(z) := e^{-\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu_j(\zeta)} ,$$

$$F(z) = e^{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}.$$

Dann gilt $f = \frac{e^{iC}S_1}{S_2}F$. Die Funktion F hat nach Definition die verlangte Gestalt. Da die μ_j positiv sind, ist $\|S_j\|_\infty \leq 1$. Nach dem Satz von Fatou ist $|S_j^*(\zeta)| = 1$ fast überall.

Wir zeigen umgekehrt, daß jedes Produkt der Gestalt (2.5) von beschränktem Typ ist. Da B, S_1, S_2 beschränkt sind, ist nur mehr zu zeigen das $F \in N$. Dazu schreibe $F = \frac{F_1}{F_2}$ mit

$$F_1(z) = e^{-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi^-(\zeta)\,d\lambda(\zeta)},\ F_2(z) = e^{-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi^+(\zeta)\,d\lambda(\zeta)},$$

wobei $\phi^+ := \max\{\phi, 0\}$ und $\phi^- := -\min\{\phi, 0\}$.

Um die Eindeutigkeitsaussage einzusehen, bemerke zunächst das das Blaschke Produkt eindeutig durch die Nullstellen von f gegeben ist. Weiters gilt $|f^*| = |F^*|$ fast überall, und wir erhalten wegen dem Satz von Fatou

$$\phi(\zeta) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} \mathcal{P}[\phi d\lambda](z) = \lim_{z \hat{\to} \zeta} \operatorname{Re}\log F(z) =$$

$$= \lim_{z \hat{\to} \zeta} \log|F(z)| = \log|F^*(\zeta)| = \log|f^*(\zeta)|, \quad \text{f.ü.}\,.$$

Also ist auch ϕ und damit F bis auf die multiplikative Konstante, durch f bestimmt.

❑

Der obige Satz motiviert die folgende Definition:

2.1.11 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann heißt die Funktion f *inner*, falls $\|f\|_\infty = 1$ und $|f^*(\zeta)| = 1$, λ-fast überall. Sie heißt *singular inner*, wenn sie zusätzlich nullstellenfrei ist. Schließlich heißt f *outer für* N, wenn

$$f(z) = \alpha \cdot e^{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\phi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)}$$

mit $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, hat.

Wir werden später sehen, daß outer functions durch gewissen Extremaleigenschaften charakterisiert werden, vgl. Proposition 2.1.18. Angesichts dieser Namensgebung spricht man von der Faktorisierung (2.5) auch als *inner-outer Faktorisierung*.

Aus der in Satz 2.1.10 durchgeführten Konstruktion erhalten wir:

2.1.12 Korollar. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist f genau dann singular inner, wenn es ein bezüglich λ singuläres reelles Borel-Maß und eine Konstante α vom Betrag* 1 *gibt sodaß*

$$f(z) = \alpha\, e^{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)},\ z \in \mathbb{D}.$$

2.1.13 Beispiel. Wie wir in Korollar 2.1.4, (ii), gesehen haben gilt für $f \in N$ stets $\|f^*\|_0 \leq \|f\|_0$. Betrachte die Funktion

$$S(z) := e^{-\frac{1+z}{1-z}},\ z \in \mathbb{D},$$

vgl. Beispiel 1.4.6. Sie ist beschränkt und gehört daher zu N. Es ist $f := S^{-1} \in N$ und

$$\|f^*\|_0 = 0 < 1 = \log|f(0)| \leq \|f\|_0 \,.$$

Dieses Beispiel ist eigentlich von allgemeiner Natur: Ist S singular inner und nicht konstant, so ist $f := S^{-1} \in N$ und es gilt $\|f^*\|_0 < \|f\|_0$.

2.1.14 Definition. Bezeichne mit N^+ jene (echte) Teilmenge von N die aus allen Funktionen $f \in N$ mit $\|f^*\|_0 = \|f\|_0$ besteht. Die Menge N^+ heißt manchmal auch *Smirnov Klasse*.

2.1.15 Proposition. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) $f \in N^+$.

(*ii*) $f \in N$ *und* $\lim_{r\nearrow 1} \log^+|f_r| = \log^+|f^*|$ *im Sinne des* $L^1(\mathbb{T})$.

(*iii*) *Die Funktion f lässt sich faktorisieren als $f = BSF$ wobei B ein Blaschke Produkt, S singulär inner und F outer für N ist.*

Zum Beweis benötigen wir die folgenden maßtheoretischen Aussagen. Zuerst eine allgemeinere Variante des Satzes von der beschränkten Konvergenz wobei wir uns aus pragmatischen Gründen auf den Fall reellwertiger Funktionen beschränken.

2.1.16 Lemma. *Sei μ ein Maß auf der Menge X und seien u_n, v_n, $n \in \mathbb{N}$, reellwertige meßbare Funktionen mit*

$$|u_n| \leq v_n,\ v_n \in L^1(\mu),\ \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Gilt $u_n \to u$ und $v_n \to v$ punktweise fast überall, und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X v_n \, d\mu = \int_X v \, d\mu < \infty\,,$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu = \int_X u \, d\mu\,.$$

Beweis. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_X v \, d\mu + \int_X u \, d\mu = \int_X (v+u)\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (v_n + u_n) \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (v_n + u_n) = \int_X v\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu\,,$$

sowie

$$\int_X v \, d\mu - \int_X u \, d\mu = \int_X (v-u)\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (v_n - u_n) \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (v_n - u_n) = \int_X v\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu\,.$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu \leq \int_X u\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n \, d\mu\,.$$

❑

2.1.17 Korollar. *Sei μ ein Maß auf der Menge X, sei $p \in (0,\infty)$, und sei $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in X\ \mu\text{-f.ü., und } \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu\,,$$

dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p\, d\mu = 0\,.$$

Beweis. Setze $u_n := |f_n - f|^p$, $u = 0$, und $v_n := 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$, $v = 2^{p+1}|f|^p$. Dann gilt

$$|u_n|^{\frac{1}{p}} = |f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2\max\{|f_n|, |f|\} =$$
$$= 2\max\{|f_n|^p, |f|^p\}^{\frac{1}{p}} \le 2(|f_n|^p, |f|^p)^{\frac{1}{p}} = v_n^{\frac{1}{p}}\,.$$

Lemma 2.1.16 liefert das gewünschte Resultat.

❑

Beweis. (von Proposition 2.1.15)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Wende Korollar 2.1.17 an mit $p = 1$ und den Funktionen $\log^+|f_r|$ und $\log^+|f^*|$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Schreibe $f = B \cdot S_2^{-1} S_1 \cdot F$ wie in (2.5). Sei $r \in (0,1)$ sodaß f längs $r\mathbb{T}$ keine Nullstellen hat. Die Funktion $\log|f(rz)|$ ist subharmonisch auf $\frac{1}{r}\mathbb{D}$, und hat längs $\mathbb{T}$ die Werte $\log|f_r|$. Also folgt das

$$\log|f(rz)| \le \mathcal{P}[\log|f_r|](z) = \mathcal{P}[\log^+|f_r|](z) - \mathcal{P}[\log^-|f_r|](z),\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$-\liminf_{r\nearrow 1} \mathcal{P}[\log^-|f_r|](z) \le -\mathcal{P}[\log^-|f^*|](z),\ z \in \mathbb{D}\,,$$

und nach unserer Voraussetzung

$$\lim_{r\nearrow 1} \mathcal{P}[\log^+|f_r|](z) = \mathcal{P}[\log^+|f^*|](z),\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Wir erhalten also für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$\log|f(z)| = \lim_{r\nearrow 1} \log|f(rz)| \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|](z) - \mathcal{P}[\log^-|f^*|](z) =$$
$$= \mathcal{P}[\log|f^*|](z) = \log|F(z)|\,.$$

Die Funktion $F^{-1}f$ ist also beschränkt durch 1. Nach Bemerkung 2.1.9 ist auch $B^{-1}F^{-1}f = S_2^{-1}S_1$ beschränkt durch 1, d.h. singular inner.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $f = BSF$ in der angegebenen Weise. Dann ist $f \in N$ und es gilt $|f| \le |F|$. Wegen $\log|F| = \mathcal{P}[\log|f^*|] \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|]$ erhalten wir das auch $\log^+|f| \le \mathcal{P}[\log^+|f^*|]$, und es folgt

$$\|f_r\|_0 = \|\log^+|f_r|\|_1 \le \|\mathcal{P}[\log^+|f^*|]_r\|_1\,.$$

Die rechte Seite strebt nach Satz 1.4.1, (ii), gegen $\|\log^+|f^*|\|_1 = \|f^*\|_0$, die linke gegen $\|f\|_0$. Also haben wir auch $\|f\|_0 \le \|f^*\|_0$. Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen Korollar 2.1.4, (ii), sowieso.

❑

Wir können nun die Eigenschaft einer Funktion outer zu sein, durch eine Extremaleigenschaft charakterisieren.

2.1.18 Proposition. *Sei $f \in N^+$. Dann sind äquivalent*

(i) *f ist outer.*

(ii) *Sei $g \in N^+$ und sei $g \neq \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$. Ist $|g^*(\zeta)| = |f^*(\zeta)|$ fast überall, dann folgt*
$$|g(z)| \leq |f(z)| \text{ für ein } z \in \mathbb{D}\,.$$

(iii) *Sei $g \in N^+$ und sei $g \neq \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$. Ist $|g^*(\zeta)| \leq |f^*(\zeta)|$ fast überall, dann folgt*
$$|g(z)| < |f(z)|,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

(iv) *Es gilt*
$$\log|f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f^*(\zeta)|\, d\lambda(\zeta)\,.$$

Beweis. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ ist trivial. Ebenso $(i) \Rightarrow (iv)$, denn ist f outer so gilt die gewünschte Beziehung nach Definition.

Sei nun angenommen das (i) falsch ist, d.h. $f = BSF$ mit BS nicht konstant. Dann gilt wegen dem Maximumprinzip $|(BS)(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$. Wir sehen das F eine Funktion ist mit $|F^*| = |f^*|$ f.ü. aber $|F(z)| > |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Insbesondere folgt nach Definition der outer function F
$$\log|f(0)| < \log|F(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f^*(\zeta)|\, d\lambda(\zeta)\,.$$
Wir haben gezeigt das $(ii) \Rightarrow (i)$ und $(iv) \Rightarrow (i)$.

Wir zeigen $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei f outer, und sei $g \in N^+$ mit $|g^*| \leq |f^*|$ gegeben. Schreibe $g = BSG$. Es gilt nach unserer Vorausssetzung $|G(z)| \leq |f(z)|$. Ist BS nicht konstant, so folgt bereits $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Ist nicht $\log|g^*| = \log|f^*|$ f.ü., so ist nach Korollar 1.2.5 $|G(z)| < |f(z)|$ für jedes $z \in \mathbb{D}$. Es folgt das $g = \alpha f$ mit $|\alpha| = 1$.

❑

Da die Funktion 1 outer ist, erhalten wir insbesondere

2.1.19 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Dann ist f inner genau dann, wenn $|f^*(\zeta)| = 1$ f.ü.*

2.2 Hardy Räume

2.2.1 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$, $p \in (0, \infty]$ und setze wieder $f_r(\zeta) := f(r\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Wir schreiben $f \in H^p$, falls
$$\sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty\,.$$

H^p heißt *Hardy Raum*. Wir definieren weiters

$$\|f\|_p := \sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_p,\ f \in H^p\,.$$

Es besteht also H^p aus jenen Funktionen in h^p die sogar analytisch sind. Nach Korollar 1.6.7 bzw. Bemerkung 1.6.8 ist $\|f_r\|_p$ stets monoton wachsend mit $r \in (0,1)$ und wir erhalten wieder

$$\sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_p = \lim_{r\nearrow 1} \|f_r\|_p\,.$$

Nach der Jensenschen Ungleichung gilt $\|.\|_p \leq \|.\|_{p'}$ für $0 < p \leq p' \leq \infty$, und daher auch $H^p \supseteq H^{p'}$.

Wir benötigen die folgende elementare Ungleichung.

2.2.2 Lemma. *Es gilt für $0 < p \leq 1$ und $x, y \geq 0$ stets*

$$\big|\log^+ x - \log^+ y\big| \leq \frac{1}{p}\big|x-y\big|^p\,.$$

Beweis. Betrachte $f(t) := t^p - 1, g(t) := (t-1)^p$, auf $[1,\infty)$. Dann gilt $f(1) = g(1) = 0$ und da $p - 1 \leq 0$

$$f'(t) = pt^{p-1} \leq p(t-1)^{p-1} = g'(t),\ t \geq 1\,.$$

Es folgt $f(t) \leq g(t), t \in [1,\infty)$. Wir erhalten wegen $1+x \leq e^x$ das $\log(t^p) \leq f(t)$, und damit

$$\log t \leq \frac{1}{p}(t-1)^p,\ t \geq 1\,.$$

Daraus erhalten wir mittels Fallunterscheidung die gewünschte Ungleichung. Sei zunächst $x \geq y \geq 1$, dann gilt

$$\log\frac{x}{y} \leq \frac{1}{p}(\frac{x}{y}-1)^p \leq \frac{1}{p}(\frac{x}{y}-1)^p y^p = \frac{1}{p}(x-y)^p\,.$$

Ist $x \geq 1 \geq y$, so gilt

$$\log x \leq \frac{1}{p}(x-1)^p \leq \frac{1}{p}(x-y)^p\,.$$

Ist $1 \geq x \geq y$, so ist die gewünschte Ungleichung trivial.

❑

Setzt man in dieser Ungleichung speziell $y = 0$, so folgt das $\log^+ x \leq \frac{1}{p}|x|^p$. Da der Raum H^p mit wachsendem p kleiner wird, folgt

2.2.3 Korollar. *Sei $p \in (0,\infty]$, dann gilt $H^p \subseteq N$. Insbesondere besitzt jede Funktion $f \in H^p$ für λ-fast alle Punkte $\zeta \in \mathbb{T}$ einen nichttangentialen Grenzwert $f^*(\zeta) := \lim_{z \hat{\to} \zeta} f(z)$, und die Nullstellen von f genügen der Blaschke Bedingung.*

Das Abspalten der Nullstellen führt uns nicht aus H^p hinaus:

2.2.4 Lemma. *Sei $p \in (0,\infty]$, $f \in H^p$ und bezeichne mit B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f. Dann ist $B^{-1}f \in H^p$ und $\|B^{-1}f\|_p = \|f\|_p$.*

Beweis. Der Fall $p = \infty$ ist gerade Bemerkung 2.1.9. Sei also $p \in (0, \infty)$. Bezeichne wie in (2.3) wieder mit B^N das Produkt der ersten N elementaren Blaschke Faktoren zu den Nullstellen von f. Da $\lim_{r\to 1} B^N(r\zeta) = B^N(\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta \in \mathbb{T}$ gilt, erhalten wir

$$\Big\|\Big(\frac{f}{B^N}\Big)_r\Big\|_p \leq \lim_{r\nearrow 1} \Big\|\Big(\frac{f}{B^N}\Big)_r\Big\|_p = \lim_{r\nearrow 1} \|f_r\|_p = \|f\|_p \,.$$

Da $(B^N)^{-1}f$ für $N \to \infty$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ gegen $B^{-1}f$ konvergiert, strebt die linke Seite in dieser Ungleichung gegen $\|(B^{-1}f)_r\|_p$. Wir schliessen das $B^{-1}f \in H^p$ und $\|B^{-1}f\|_p \leq \|f\|_p$. Wegen $|B| \leq 1$ ist die umgekehrte Ungleichung trivial.

❑

2.2.5 Satz. *Sei $p \in (0, \infty)$ und $f \in H^p$. Dann gilt $\lim_{r\nearrow 1} f_r = f^*$ im Sinne des $L^p(\mathbb{T})$.*

Beweis. Für $p > 1$ folgt die Behauptung aus Satz 1.4.1, (*iii*). Sei nun $p \in (0, \infty)$ beliebig und $f \in H^p$. Sei B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und setze $g := B^{-1}f$. Dann ist $g \in H^p$ und $\|g\|_p = \|f\|_p$. Da g in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen hat gibt es eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion h mit $h^{\frac{2}{p}} = g$. Nun gilt $\|h_r\|_2 = \|g_r\|_p$ und daher $h \in H^2$. Wir haben auch $(h^*)^{\frac{2}{p}} = g^*$. Da stets $|f(z)| \leq |g(z)|$ ist, und $|f^*| = |g^*|$, erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{T}} |f_r|^p \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{T}} |g_r|^p \, d\lambda = \int_{\mathbb{T}} |h_r|^2 \, d\lambda \xrightarrow{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} |h^*|^2 \, d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |g^*|^p \, d\lambda = \int_{\mathbb{T}} |f^*|^p \, d\lambda \leq \liminf_{r\nearrow 1} \int_{\mathbb{T}} |f_r|^p \, d\lambda = \|f\|_p \,.$$

Lässt man in dieser Beziehung r gegen 1 streben, so folgt $\|f^*\|_p = \|f\|_p$. Wendet man Korollar 2.1.17 an mit f_r und f^*, so folgt

$$\lim_{r\nearrow 1} \|f_r - f^*\|_p = 0 \,.$$

❑

2.2.6 Bemerkung. Die Aussage dieses Satzes ist für $p = \infty$ nicht richtig, denn sonst müßte jede Funktion aus H^∞ eine stetige Randfunktion haben. Betrachte aber die Funktion S aus Beispiel 2.1.13. Beachte das trotzdem $\lim_{r\nearrow 1} \|f_r\|_\infty = \|f^*\|_\infty$.

2.2.7 Korollar. *Betrachte die Abbildung $f \mapsto f^*$. Ist $p \in [1, \infty]$, so ist diese eine Isometrie von $(H^p, \|.\|_p)$ in $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$. Ist $p \in (0, 1)$, so ist sie isometrisch bezüglich der Metriken $d_{H^p}(f, g) := \|f - g\|_p^p$ auf H^p sowie $d_{L^p}(f, g) := \|f - g\|_p^p$ auf $L^p(\mathbb{T})$. Ist $f \in H^1$, so kann f aus seinen Randwerten f^* rekonstruiert werden als Poisson Integral*

$$f(z) = \mathcal{P}[f^*](z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, \zeta) f^*(\zeta) \, d\lambda(\zeta) \,,$$

sowie auch als Cauchy Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} \, d\lambda(\zeta) \,.$$

Beweis. Die Aussagen folgen sämtliche der Konvergenz $\|f_r - f^*\|_p \to 0$. Für die Cauchysche Integraldarstellung bemerke das für jedes $r \in (0,1)$ wegen der Analytizität von f gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta - z} \, d\lambda(\zeta), \; |z| < r \,.$$

❑

2.2.8 Bemerkung. In den vorangegangenen Sätzen manifestiert sich ein wesentlicher Unterschied zwischen allgemeinen harmonischen Funktionen und analytischen Funktionen. Denn für jedes $p \in (0,\infty]$ hat jedes $f \in H^p$ Randwerte und, falls $p \neq \infty$, gilt $f_r \to f^*$ im $L^p(\mathbb{T})$. Dagegen muß $u \in h^p$ für $p < 1$ keine Randwerte haben, vgl. Beispiel 1.4.7, und im Fall $p = 1$, wo zwar Randwerte existieren, muß nicht $\|f_r - f^*\|_1 \to 0$ gelten, vgl. Beispiel 1.4.6.

2.2.9 Bemerkung. Wir wollen diesen Unterschied im Fall $p = 1$ noch einmal etwas anders interpretieren: Sei μ ein komplexes Borel-Maß, sodaß also $u = \mathcal{P}[d\mu]$ eine harmonische Funktion ist und zu h^1 gehört. Ist die Funktion u sogar analytisch, d.h. gehört sie zu H^1, so gilt $u_r \to u^*$ bezüglich $\|.\|_1$ und daher ist nach Satz 1.4.1, (ii), $u = \mathcal{P}[u^*]$. wegen der Eindeutigkeit des Maßes in der Poissonschen Integraldarstellung folgt $d\mu = u^* \, d\lambda$. Also ist μ absolut stetig. Nach Bemerkung 1.1.5, (iv), bedeutet die Forderung der Analytizität von u nichts anderes als $\int_{\mathbb{T}} \zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir haben eben die Aussage eines *Satzes von F. und M.Riesz* hergeleitet: Ist μ eine komplexes Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und verschwinden die Momente $\int_{\mathbb{T}} \zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, so ist μ absolut stetig.

Mit Hilfe der Ungleichung Lemma 2.2.2 erhalten wir als weitere Folgerung Satz 2.2.5

2.2.10 Korollar. *Für jedes* $p \in (0,\infty]$ *gilt* $H^p \subseteq N^+$.

Wir wollen noch die inner-outer Faktorisierung von H^p Funktionen bestimmen. Dazu definieren wir:

2.2.11 Definition. Eine Funktion f heißt *outer für* H^p, wenn sie die Gestalt

$$f(z) = \alpha \cdot e^{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \phi(\zeta) \, d\lambda(\zeta)}$$

hat, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, und einer Funktion ϕ die $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ und $e^\phi \in L^p(\mathbb{T})$ erfüllt.

2.2.12 Proposition. *Sei* f *analytisch in* $\mathbb{D}$ *und sei* $p \in (0,\infty]$. *Dann gehört* f *zu* H^p *genau dann, wenn sich* f *faktorisieren lässt als* $f = BSF$ *mit einem Blaschke Produkt* B, *einer singular inner function* S *und einer Funktion* F *outer für* H^p.

Beweis. Sei $p \in (0, \infty)$ und F outer für H^p. Dann gilt

$$\log |F(z)| = \mathcal{P}[\phi](z) = \int_{\mathbb{T}} \phi(\zeta) \big(P(z, \zeta)\, d\lambda(\zeta)\big)$$

Wir erhalten mit der Jensenschen Ungleichung angewandt auf die konvexe Funktion e^{px}

$$|F(z)|^p = e^{p \log |F(z)|} \leq \int_{\mathbb{T}} e^{p\phi(\zeta)} \big(P(z, \zeta)\, d\lambda(\zeta)\big) = \mathcal{P}[(e^\phi)^p](z)\,. \tag{2.6}$$

Da $(e^\phi)^p \in L^1(\mathbb{T})$ ist, folgt $\mathcal{P}[(e^\phi)^p] \in h^1$. Insbesondere ist $\sup_{0 \leq r < 1} \|F(z)\|_p < \infty$, d.h. $F \in H^p$.

Sei F outer für H^∞, dann ist $e^\phi \in L^\infty$ und daher $\phi \leq M$ für ein gewisses $M < \infty$. Es folgt

$$\log |F(z)| = \mathcal{P}[\phi](z) \leq M, \ z \in \mathbb{D}\,,$$

also $F \in H^\infty$.

Da eine beschränkte Funktion zu jedem Raum H^p, $p \in (0, \infty]$, gehört, haben wir gezeigt das eine Funktion der Gestalt BSF wobei B ein Blaschke Produkt, S singular inner und F outer für H^p ist, zu H^p gehört.

Umgekehrt sei $f \in H^p$. Dann ist $f \in N^+$ und lässt sich daher faktorisieren als $f = BSF$. Dabei ist F die von $\phi = \log |f^*|$ erzeugte outer (für N) Funktion. Also gilt $e^\phi = |f^*| \in L^p(\mathbb{T})$ und wir sehen das F sogar outer für H^p ist.

❑

Kombiniert man Proposition 2.1.15 und Proposition 2.2.12, so erhält man die folgende Aussage:

2.2.13 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Dann ist $f \in H^p$ genau dann, wenn $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.*

Wie uns Beispiel 2.1.13 zeigt ist die Voraussetzung $f \in N^+$ in diesem Korollar wesentlich.

2.3 H^p als linearer Raum

2.3.1 Satz. *Sei $p \in (0, \infty]$. Dann ist H^p mit der Norm $\|.\|_p$, bzw. der Metrik d_{H^p} im Fall $p < 1$, vollständig. Es gilt*

$$\overline{\mathbb{C}[z]}^{\|.\|_p} = H^p, \ p \in (0, \infty)\,, \quad \overline{\mathbb{C}[z]}^{\|.\|_\infty} = A \subsetneq H^\infty\,,$$

wobei A die Menge aller auf $\mathbb{D}$ stetigen und in $\mathbb{D}$ analytischen Funktionen bezeichnet.

Beweis. Im ersten Schritt bemerken wir das für eine Folge $f_n \in H^p$, $n \in \mathbb{N}$, Konvergenz in der Norm $\|.\|_p$ lokal gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{D}$ impliziert. Für $p = \infty$ ist dies trivial. Für $p \in (0, \infty)$ ist dies eine Folgerung aus der Ungleichung

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \frac{1}{(1 - |z|)^{\frac{1}{p}}}, f \in H^p, z \in \mathbb{D}\,,$$

welche wir nun beweisen: Für $f \in H^p$ betrachte die inner-outer Faktorisierung $f = BSF$. Nun gilt, da F outer für H^p ist, die Beziehung (2.6), und wir erhalten mit der Abschätzung (1.5) des Poissonkernes

$$|f(z)|^p \leq |F(z)|^p \leq \int\limits_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)|f^*|^p \, d\lambda(\zeta) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \int\limits_{\mathbb{T}} |f^*|^p \, d\lambda \leq$$
$$\leq \frac{2}{1-|z|} \|f^*\|_p, \; z \in \mathbb{D}.$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in H^p$, eine Cauchy-Folge. Dann ist nach der obigen Ungleichung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine lokal gleichmäßige Cauchy-Folge. Also existiert eine in $\mathbb{D}$ analytische Funktion f sodaß $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ lokal gleichmäßig. Wähle, zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\|f_n - f_m\|_p \leq \epsilon$, $n, m \geq N$. Dann gilt für jedes $m \geq N$ und $r \in [0,1)$

$$\|f_r - f_{m,r}\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_{n,r} - f_{m,r}\|_p \leq \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{r\in[0,1)} \|(f_n - f_m)_r\|_p}_{=\|f_n - f_m\|_p} \leq \epsilon \,.$$

Also haben wir $\|f_r\|_p \leq \|f_{N,r}\|_p + \|f_r - f_{N,r}\|_p$, bzw. noch mit einem Exponenten p falls $p < 1$, und schließen das $f \in H^p$. Bildet man in der letzten Ungleichung das Supremum über $r \in [0,1)$, so folgt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich $\|.\|_p$. Wir sehen das H^p vollständig ist.

Wir kommen zum Beweis des zweiten Teils des Satzes. Bemerke zuerst das $\mathbb{C}[z] \subseteq A \subseteq H^p$. Die singular inner Funktion S aus Beispiel 2.1.13 gehört zu H^∞ aber nicht zu A, also ist $A \subsetneq H^\infty$.

Sei nun entweder $f \in H^p$ mit $p \in (0,\infty)$ oder $f \in A$. Dann gilt $\lim_{r\nearrow 1} \|f_r - f^*\|_p = 0$. Im Fall $p \in (0,\infty)$ wegen Satz 2.2.5, für $p = \infty$ wegen Korollar 2.2.7 gemeinsam mit Satz 1.4.1, (v).

Betrachte die Taylorreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ von f um 0. Dann ist diese (mindestens) in ganz $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig konvergent, und zwar gegen f. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann können wir $r \in [0,1)$ so wählen daß $\|f_r - f^*\|_p \leq \epsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\|(\sum_{n=0}^N a_n z^n)_r - f_r\|_p \leq \epsilon$. Setze $q(z) := \sum_{n=0}^N (a_n r^n) z^n$, dann ist q als Polynom auch in H^p und es gilt

$$\|q - f\|_p = \|q^* - f^*\|_p = \Big\| \Big(\sum_{n=0}^N a_n z^n \Big)_r - f^* \Big\|_p \leq 2\epsilon \,,$$

bzw. $\leq 2^{\frac{1}{p}} \epsilon$ falls $p < 1$. Wir haben also in den behaupteten Gleichheiten auch die Inklusion '$\supseteq$' gezeigt.

❑

Wie wir in Korollar 2.2.7 gesehen haben, ist die Abbildung $f \mapsto f^*$ eine Isometrie von H^p auf einen Teilraum von L^p. In diesem Sinne können wir für jedes $p \in (0,\infty]$ also H^p auffassen als Teilraum von L^p. Wegen der obigen Aussage ist H^p sogar ein abgeschlossener Teilraum von L^p.

2.3.2 Bemerkung. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Setzt man formal $z = e^{it}$, so erhält man '$f(e^{it}) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{int}$', die Fourierreihe von $f(e^{it})$. Diese heuristische Vorgangsweise legt es also nahe, daß die Potenzreihenkoeffizienten gerade die Fourierkoeffizienten der Randfunktion sind. Wir wollen im folgenden diesen Themenkreis etwas näher studieren.

2.3.3 Proposition. *Sei $p \in [1,\infty]$. Dann gilt*

$$H^p = \big\{ f \in L^p : (\Phi f)_n = 0 \text{ für alle } n < 0 \big\}\,,$$

wobei wir in dieser Beziehung wieder H^p vermöge $f \mapsto f^*$ als Teilraum von L^p auffassen. Ist $f \in H^p$, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi f^*)_n z^n,\ z \in \mathbb{D}\,.$$

Beweis. Sei $f \in H^1$ und schreibe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Weiters sei $r \in (0,1)$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\,dt = \begin{cases} a_n & ,\ n \geq 0 \\ 0 & ,\ n < 0 \end{cases}.$$

Für $n \geq 0$ erhalten wir $|r^n a_n - \Phi(f^*)_n| \leq \|f_r - f^*\|_1$. Läßt man r gegen 1 streben, so folgt $a_n = \Phi(f^*)$. Genauso erhält man $\Phi(f^*)_n = 0$ für $n < 0$.

Sei nun $g \in L^p(\mathbb{T})$ gegeben sodaß $\Phi(g)_n = 0$, $n < 0$, und setze $f := \mathcal{P}[g]$. Nach Satz 1.4.1 ist $f \in h^p$, nach Bemerkung 1.1.5, (iv), ist f analytisch in $\mathbb{D}$. Also ist $f \in H^p$. Nach dem Satz von Fatou gilt $f^* = g$.

❑

2.3.4 Bemerkung. Wir wollen zwei Folgerungen explizit erwähnen.

(i) Es gilt $H^2 \cong \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ wobei die Isomorphie vermittelt wird durch die Beziehung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Anders ausgedrückt: Der Raum H^2 besteht aus genau jenen analytischen Funktionen deren Potenzreihenkoeffizienten quadratisch summierbar sind. Beachte hier das jede Potenzreihe mit quadratisch summierbaren Koeffizienten Konvergenzradius mindestens 1 hat. Weiters gilt in diesem Fall

$$\sup_{r\in[0,1)} \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \Big\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\,.$$

(ii) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens 1 und gilt $\sup_{r\in[0,1)} \|f_r\|_1 < \infty$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tatsächlich erfüllen die Potenzreihenkoeffizienten einer H^1-Funktion eine viel stärkere asymptotische Eigenschaft:

2.3.5 Proposition (Hardy). *Sei $f \in H^1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \pi \|f\|_1\,.$$

Beweis. Sei zunächst $a_n \geq 0$. Dann gilt für $r \in (0,1)$

$$\operatorname{Im} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta$$

Es ist
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{1}{n}\,,$$
also folgt
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\,\mathrm{Im}\,f(re^{i\theta})d\theta\le\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta\le\pi||f||_1\,.$$
Für $r\to 1$ folgt die Behauptung.

Sei nun $f\in H^1$ beliebig, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. Bezeichne mit B das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f und zerlege f als $g\cdot h$ mit
$$g:=B\Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}},\ h:=\Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
Schreibt man
$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\,,$$
so haben wir also $a_n=\sum_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}$. Definiere Funktionen G und H durch
$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|z^n,\ H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|z^n\,,$$
dann gilt $F(z):=G(z)H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_nz^n$ wobei $\tilde{a}_n=\sum_{k=0}^{n}|b_k|\,|c_{n-k}|\ge|a_n|$.

Nun ist $f\in H^1$, also sind g und $h\in H^2$. Das bedeutet gerade das $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2,\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<\infty$. Damit gehören auch G und H zu H^2, und daher F zu H^1. Nun folgern wir:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{a_n}\le\pi\|F\|_1\le\pi\|G\|_2\|H\|_2=\pi\|g\|_2\|h\|_2=\pi\|f\|_1\,.$$
Dabei gilt die zweite Ungleichung wegen dem ersten Teil des Beweises angewandt auf F, die dritte Ungleichung wegen der Schwarzschen Ungleichung im L^2, das erste Gleichheitszeichen aufgrund der Isometrie von H^2 mit $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$, und schliesslich das zweite Gleichheitszeichen da $|B^*|=1$.

❏

2.4 Der Multiplikationsoperator im H^2

2.4.1 Bemerkung. Sei $p\in(0,\infty]$ und sei φ inner. Dann ist die Abbildung $S_\varphi: f(z)\mapsto\varphi(z)f(z)$ eine Isometrie von H^p auf einen Teilraum von H^p. Man bezeichnet diese Isometrie auch als *Multiplikationsoperator* mit φ. Bemerke das stets $S_\varphi\circ S_\psi=S_\psi\circ S_\varphi$.

Wir wollen uns mit dem folgenden speziellen Multiplikationsoperator beschäftigen: Der *Multiplikationsoperator mit z* am H^2 ist gegeben als
$$S:\left\{\begin{array}{ccc}H^2&\to&H^2\\ f(z)&\mapsto&zf(z)\end{array}\right.$$

Nun ist H^2 isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$ via der Abbildung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\,.$$

Bei diesem Isomorphismus geht der Multiplikationsoperator mit z über in den *Shift-Operator* am $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$. Dieser ist definiert als

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)\,,$$

und ist eine Isometrie von $\ell^2(\mathbb{N}\cup\{0\})$ in sich. Um den Shift-Operator zu studieren kann man also auch äquivalent den Multiplikationsoperator mit z am H^2 untersuchen.

Ein Teilraum Y von H^2 heißt *invarianter Teilraum* von S, wenn er abgeschlossen ist und wenn $S(Y)\subseteq Y$.

2.4.2 Satz (Beurling). *Sei S der Multiplikationsoperator mit z am H^2. Ein Teilraum Y ist ein invarianter Teilraum von S genau dann wenn er von der Gestalt $Y=\varphi H^2$ ist, wobei φ einen inner Funktion ist.*

Es ist $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$ genau dann, wenn sich φ_1 und φ_2 nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden.

Beweis. Sei φ inner und betrachte $Y := \varphi H^2$. Da S_φ eine Isometrie ist, ist $\varphi H^2 = \operatorname{ran} S_\varphi$ abgeschlossen. Weiters gilt

$$S(Y) = (S\circ S_\varphi)(H^2) = (S_\varphi\circ S)(H^2) \subseteq S_\varphi(H^2) = Y\,.$$

Ist φ inner und $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $|\alpha|=1$, dann gilt klarerweise $\varphi H^2 = (\alpha\varphi)H^2$. Seien umgekehrt φ_1,φ_2 inner und gelte $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$. Dann existiert $f\in H^2$ mit $\varphi_1 = \varphi_1\cdot 1 = \varphi_2\cdot f$, d.h. $(\varphi_2)^{-1}\varphi_1 = f \in H^2 \subseteq N^+$. Wegen $|((\varphi_2)^{-1}\varphi_1)^*| = 1$ f.ü. folgt mit Korollar 2.1.19 das $(\varphi_2)^{-1}\varphi_1$ inner ist. Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von φ_1 und φ_2, so folgt das auch $(\varphi_1)^{-1}\varphi_2$ inner ist und daher das sich φ_1 und φ_2 nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden können.

Sei $Y\neq 0$ ein invarianter Teilraum. Bezeichne k die kleinste Zahl, so daß Y ein Element f der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$$

enthält. Dann ist $f\notin zY$, d.h. zY ist ein echter abgeschlossener Teilraum von Y. Daher gibt es ein Element $\varphi\in Y$, $\|\varphi\|_2 = 1$, sodaß $\varphi\perp zY$. Speziell gilt $\varphi\perp z^n\varphi$, $n=1,2,\ldots$, d.h.

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})\cdot e^{-int}\overline{\varphi(e^{it})}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{it})|^2 e^{-int}\,dt,\ n=1,2,\ldots\,.$$

Durch konjugieren sieht man, daß diese Beziehung auch für $n=-1,-2,\ldots$ gilt. Nun ist $|\varphi(e^{it})|^2\in L^1$ und nach dem eben gezeigten gilt $(\Phi\varphi)_n = 0$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Wegen der Injektivität von Φ folgt daraus das $|\varphi(e^{it})|^2 = 1$ f.ü. Wegen $\varphi\in H^2\subseteq N^+$ erhalten wir aus Korollar 2.1.19 das φ inner ist.

Der Teilraum Y ist invariant unter S und abgeschlossen. Weiters enthält er φ. Da die Polynome dicht in H^2 sind, erhalten wir $\varphi H^2\subseteq Y$.

Angenommen $h \in Y$ und $h \perp \varphi H^2$, dann ist auch $h \perp z^n\varphi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) \cdot e^{-int}\overline{\varphi(e^{it})}\, dt = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Es ist $z^n h \in zY$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nach der Wahl von φ gilt also $z^n h \perp \varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} h(e^{it}) \cdot \overline{\varphi(e^{it})}\, dt = 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Die Funktion $h\overline{\varphi}$ gehört zu $L^1(\mathbb{T})$ und wie wir gerade gesehen haben ist $\Phi(h\overline{\varphi}) = 0$. Also folgt $h\overline{\varphi} = 0$. Da φ inner ist erhalten wir $h = 0$.

❑

2.4.3 Korollar. *Sei $f \in H^2$ und $f = BSF$ die inner-outer Faktorisierung. Dann gilt*

$$\operatorname{cls}\big\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\big\} = (BS)H^2 .$$

Beweis. Der Raum $Y := \operatorname{cls}\big\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\big\}$ ist ein invarianter Teilraum. Also gilt $Y = \varphi H^2$ mit einer gewissen inner Funktion φ. Wegen $f \in Y$ existiert eine Funktion $h \in H^2$ mit $f = \varphi h$. Sei $h = B_1 S_1 H$ die inner-outer Faktorisierung von h. Da φ inner ist, ist $|h^*| = |f^*|$ und daher $H = \alpha F$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Nun folgt aus $BSF = f = \varphi h = \varphi B_1 S_1 H$ das $BS = \varphi \cdot \alpha B_1 S_1 \in \varphi H^2$, und damit $(BS)H^2 \subseteq \varphi H^2 = Y$. Wegen $f = BSF \in (BS)H^2$ folgt auch die umgekehrte Inklusion.

❑

Bemerke das der Raum $\operatorname{cls}\{z^n f : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ der kleinste invariante Teilraum ist der f enthält.

2.4.4 Bemerkung. Wir betrachten auf der Menge aller inner Funktionen die *Teilbarkeitsrelation*

$$\varphi | \psi \ :\Leftrightarrow\ \varphi^{-1}\psi \text{ inner} .$$

Es gilt genau dann sowohl $\varphi|\psi$ als auch $\psi|\varphi$, wenn sich φ und ψ nur einen konstanten Faktor unterscheiden. Weiters gilt, wie wir im ersten Teil des Beweises von Satz 2.4.2 gesehen haben,

$$\varphi|\psi \ \Leftrightarrow\ \psi H^2 \subseteq \varphi H^2 .$$

Identifiziert man inner Funktionen die sich nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden, so erhält man also eine ordnungsumkehrende Bijektion von der Menge aller (Äquivalenzklassen) von inner Funktionen und der Menge aller invarianten Teilräume des Multiplikationsoperators. Insbesondere schließen wir: Die Menge der inner Funktionen bildet mit der Teilbarkeitsrelation einen vollständigen Verband. Dieser besitzt ein kleinstes Element, nämlich die Funktion konstant 1.

Kapitel 3

Hardy Räume auf der Halbebene

3.1 Konform invariante Definition

Für ein Gebiet Ω bezeichne mit $\mathfrak{H}^\infty(\Omega)$ die Menge aller in Ω analytischen und beschränkten Funktionen. Sind Ω_1 und Ω_2 Gebiete und $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine analytische Bijektion, so ist die Abbildung

$$f \mapsto f \circ \phi \tag{3.1}$$

eine Bijektion von $\mathbb{C}^{\Omega_2}$ auf $\mathbb{C}^{\Omega_1}$. Diese bildet die in Ω_2 analytischen Funktionen auf die in Ω_1 analytischen Funktionen ab. Da auch $\sup_{z\in\Omega_2} |f(z)| = \sup_{w\in\Omega_1} |(f \circ \phi)(w)|$ ist, erhalten wir eine Bijektion von $\mathfrak{H}^\infty(\Omega_2)$ auf $\mathfrak{H}^\infty(\Omega_1)$.

Betrachte die Klasse N. Ihre Definition wie in Definition 2.1.1 läßt sich nicht unmittelbar auf andere Gebiete verallgemeinern, wohl aber ihre Charakterisierung über den Satz von Nevannlinna. Wir wollen dies jedoch nicht zu einer Definition von "$N(\Omega)$" heranziehen, sondern eine Vorgangsweise wählen die auch eine Verallgemeinerung der Räume H^p zuläßt.

3.1.1 Definition. Sei Ω offen und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ subharmonisch. Weiters sei $h : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonisch. Wir sagen h ist eine *harmonische Majorante* von u in Ω, wenn $u(z) \le h(z)$ für alle $z \in \Omega$.

3.1.2 Definition. Sei Ω ein Gebiet.

(i) Bezeichne mit $N(\Omega)$ die Menge aller in Ω analytischen Funktionen f sodaß $\log^+ |f|$ in Ω eine harmonische Majorante besitzt.

(ii) Sei $p \in (0, \infty)$. Bezeichne mit $\mathfrak{H}^p(\Omega)$ die Menge aller in Ω analytischen Funktionen f sodaß $|f|^p$ in Ω eine harmonische Majorante besitzt.

3.1.3 Bemerkung. Es gilt

$$\mathfrak{H}^{p'}(\Omega) \subseteq \mathfrak{H}^p(\Omega) \subseteq N(\Omega), 0 < p \le p' \le \infty\,,$$

denn wir haben $\limsup_{t\to\infty} \frac{|t|^p}{|t|^{p'}} < \infty$ bzw. $\limsup_{t\to\infty} \frac{\log^+|t|}{|t|^p} < \infty$. Findet man also zum Beispiel eine harmonische Majorante h für $|f|^p$, so gibt es $a, b \ge 0$ sodaß $ah(z) + b$ eine harmonische Majorante für $\log^+ |f|$ ist.

3.1.4 Proposition. *Seien Ω_1 und Ω_2 Gebiet und $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine analytische Bijektion. Dann induziert die Abbildung* (3.1) *eine Bijektion von $N(\Omega_2)$ auf $N(\Omega_1)$ sowie von $\mathfrak{H}^p(\Omega_2)$ auf $\mathfrak{H}^p(\Omega_1), p \in (0,\infty)$. Es gilt*

$$N(\mathbb{D}) = N, \mathfrak{H}^p(\mathbb{D}) = H^p,\ \ p \in (0,\infty)\,.$$

Beweis. Sei h harmonisch in Ω_2 und sei $w \in \Omega_1$. Wähle eine Kreisscheibe $\overline{D(\phi(w),r)} \subseteq \Omega_2$. Nach Proposition 1.2.10 gibt es in $D(\phi(w),r)$ analytische Funktionen f,g mit $h = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} g$. Dann gilt

$$h \circ \phi = \operatorname{Re}(f \circ \phi) + i \operatorname{Im}(g \circ \phi)\,,$$

und daher ist $h \circ \phi$ harmonisch in $\phi^{-1}(D(\phi(w),r))$. Diese Menge ist offen und enthält w. Wir haben also gezeigt das jeder Punkt in Ω_1 eine Umgebung hat auf der $h \circ \phi$ harmonisch ist, daher ist $h \circ \phi$ harmonisch in Ω_1

Da ϕ^{-1} eine analytische Bijektion von Ω_2 und Ω_1 ist, und die Inverse von (3.1) gegeben ist durch $g \mapsto g \circ \phi^{-1}$, können wir das gleiche Argument anwenden. Es folgt das (3.1) die Menge der in Ω_2 harmonischen Funktionen bijektiv auf die Menge der in Ω_1 harmonischen Funktionen abbildet.

Die Abbildung (3.1) ist offenbar ordnungstreu, d.h. $f \leq g$ auf Ω_2 genau dann wenn $f \circ \phi \leq g \circ \phi$ auf Ω_1. Die erste Behauptung folgt.

Betrachten wir nun speziell $\Omega = \mathbb{D}$. Ist $f \in N(\mathbb{D})$, und ist h eine harmonische Majorante von $\log^+ |f|$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f|re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(re^{it})dt = h(0),\ 0 \leq r < 1\,,$$

also ist $f \in N$. Umgekehrt, sei $f \in N$. Sei B das Blaschke Produkt der Nullstellen von f und $g := B^{-1}f$. Dann ist $\log|g| = \operatorname{Re}\log g$ harmonisch in $\mathbb{D}$ und kann wegen Korollar 2.1.3 und Satz 1.4.1, (i), dargestellt werden als $\log|g| = \mathcal{P}[d\mu]$ mit einem komplexen Borel-Maß μ. Es folgt $\log|g| = \mathcal{P}[d\mu] \leq \mathcal{P}[d|\mu|]$ und da $\mathcal{P}[d|\mu|] \geq 0$ ist, auch

$$\log^+ |f| \leq \log^+ |g| \leq P[d|\mu|]\,.$$

Also ist $f \in N(\mathbb{D})$.

Sei nun $p \in (0,\infty)$ und $f \in \mathfrak{H}^p(\mathbb{D})$. Ist h eine harmonische Majorante von $|f|^p$, so gilt

$$||f_r||_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(re^{it})dt = h(0),\ 0 \leq r < 1\,,$$

also ist $f \in H^p$. Umgekehrt, ist $f \in H^p$ und $f = BSF$, so gilt wegen (2.6)

$$|f|^p \leq |F|^p \leq \mathcal{P}[|f^*|^p]\,,$$

also ist $f \in \mathfrak{H}^p(\mathbb{D})$.

❑

3.1.5 Bemerkung. Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stark konvex*, wenn sie konvex, nichtfallend, nichtnegativ ist, wenn $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\varphi(t) = \infty$ ist und wenn es Konstanten $c > 0, M \geq 0,\ a \in \mathbb{R}$ gibt sodaß $\varphi(t+c) \leq M\varphi(t),\ t \geq a$. Genauso wie die Räume $\mathfrak{H}^p(\Omega)$ können wir $\mathfrak{H}^\varphi(\Omega)$ definieren als die Menge aller in Ω analytischen Funktionen f sodaß $\varphi(\log|f|)$ in Ω eine harmonische Majorante besitzt. Zum Beispiel für $\varphi(t) := e^{pt}$ erhält man $\mathfrak{H}^\varphi(\Omega) = \mathfrak{H}^p(\Omega)$.

Man kann zeigen das $N^+ = \bigcup_\varphi \mathfrak{H}^\varphi(\mathbb{D})$ wo φ alle stark konvexen Funktionen durchläuft. Dies legt es nahe im allgemeinen $N^+(\Omega)$ als $\bigcup_\varphi \mathfrak{H}^\varphi(\Omega)$ zu definieren.

3.1.6 Korollar. *Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Dann gilt $f \in N(\Omega)$ genau dann, wenn sich f schreiben läßt als $f = \psi^{-1}\varphi$ mit $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}^\infty(\Omega)$.*

3.2 Die Räume $N(\mathbb{C}^+), \mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$

Wir benützen eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C}^+$ um Ergebnisse von dem behandelten "Fall $\mathbb{D}$" auf den "Fall $\mathbb{C}^+$" zu übertragen. Es stellt sich heraus das zwischen der Theorie am Einheitskreis und der Theorie auf der Halbebene durchaus beträchtliche Unterschiede bestehen.

Sei $\alpha(w) := i\frac{1+w}{1-w}$ und $\beta(z) := \frac{z-i}{z+i}$. Dann ist $\beta = \alpha^{-1}$ und α bildet $\mathbb{D}$ konform auf $\mathbb{C}^+$ ab. Tatsächlich ist α eine analytische Bijektion von der Riemannschen Zahlenkugel auf sich.

Wir werden häufig Variablensubstitutionen in Integralen ausführen: Die Abbildung $A \mapsto \beta(A)$ ist eine Bijektion der Menge aller Borelmengen auf $\mathbb{R}$ auf die Menge aller Borelmengen auf $\mathbb{T}$ die den Punkt 1 nicht enthalten. Die Menge aller komplexen bzw. positiven Borelmaße ν auf $\mathbb{T}$ steht in bijektiver Beziehung zu den Paaren (c, μ) wobei $c \in \mathbb{C}$ bzw. $c \in [0, \infty]$ und μ ein komplexes bzw. positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist. Dabei ist ν ein endliches positives Borelmaß genau dann wenn $c \neq \infty$ und μ endlich ist. Diese Beziehung wird vermittelt durch

$$c = \nu(\{1\}), \mu(A) = (\nu \circ \beta)(A)$$

bzw. umgekehrt durch

$$\nu(E) = \chi_E(1) \cdot c + (\mu \circ \alpha)(E \setminus \{1\})\,.$$

Ist $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Borelmeßbar, so ist $f \circ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ebenfalls Borelmeßbar und es gilt, wenn ν und (c, μ) in obiger Beziehung stehen,

$$\int_{\mathbb{T}} f d\nu = cf(1) + \int_{\mathbb{R}} f \circ \beta \, d\mu\,.$$

Stehen ν und (c, μ) in der obigen Beziehung, so entspricht $|\nu|$ dem Paar $(|c|, |\mu|)$. Ist ν absolut stetig bzgl. λ, $d\nu = hd\lambda$, so entspricht ν dem Paar $(0, \frac{(h\circ\beta)(t)}{\pi(1+t^2)}\,dt)$. Dies ergibt sich wie folgt: Setzt man $e^{i\theta} = \beta(t)$, so ist $\theta = \frac{1}{i}\log\frac{t-i}{t+i}$ und daher

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{1+t^2}\,.$$

In diesem Fall schreibt sich die obige Integraltransformation also als

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\beta(t))}{1+t^2}dt\,. \tag{3.2}$$

Insbesondere ist die Abbildung $f \mapsto f \circ \beta$ eine isometrische Bijektion von $L^p(\mathbb{T})$ auf $L^p(\frac{1}{\pi}\frac{dt}{1+t^2})$, $p \in (0,\infty)$.

Wir wollen als erstes die Poissonsche Integraldarstellung übertragen. Dazu berechnen wir wie sich der Poisson-Kern transformiert: Setze $\zeta = \beta(t)$ und $w = \beta(z)$, dann ist

$$\frac{\zeta + w}{\zeta - w} = \frac{\beta(t)+\beta(z)}{\beta(t)-\beta(z)} = \frac{\frac{t-i}{t+i} + \frac{z-i}{z+i}}{\frac{t-i}{t+i} - \frac{z-i}{z+i}} =$$

$$= \frac{(t-i)(z+i)+(z-i)(t+i)}{(t-i)(z+i)-(z-i)(t+i)} = \frac{1+tz}{i(t-z)}$$

und daher ($z = x+iy$)

$$P(w,\zeta) = \operatorname{Re}\frac{\zeta+w}{\zeta-w} = \operatorname{Re}\frac{1+tz}{i(t-z)} = \operatorname{Im}\frac{1+tz}{t-z} =$$

$$= \operatorname{Im}\frac{(1+tz)(t-\overline{z})}{|t-z|^2} = \operatorname{Im}\frac{t+t^2z-\overline{z}-t|z|^2}{|t-z|^2} = \frac{y}{(t-x)^2+y^2}(1+t^2)\,.$$

Weiters ist

$$P(\beta(z),1) = \operatorname{Re}\frac{1+\frac{z-i}{z+i}}{1-\frac{z-i}{z+i}} = \operatorname{Re}\frac{z}{i} = y\,.$$

Ist also ν ein komplexes Borelmaß auf $\mathbb{T}$ und entspricht ν dem Paar (c,μ), so gilt

$$\mathcal{P}[d\nu](\beta(z)) = cy + \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}(1+t^2)d\mu(t),\ z \in \mathbb{C}^+\,. \tag{3.3}$$

3.2.1 Proposition (Poissonsche Integraldarstellung für $\mathbb{C}^+$). *Es gilt*

(i) Sei u stetig auf $\overline{\mathbb{C}^+}$, harmonisch in $\mathbb{C}^+$ und existiere der Grenzwert $\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{\mathbb{C}^+}}} u(z)$. Dann gilt

$$u(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2+y^2}dt,\ z = x+iy \in \mathbb{C}^+\,.$$

Umgekehrt, ist u stetig auf $\mathbb{R}$ und gilt $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to-\infty} u(t) =: u(\infty)$, so definiert diese Formel eine in $\mathbb{C}^+$ harmonische Funktion die eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{C}^+}$ mit Randwerten $u(t)$ hat und für die gilt $\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{\mathbb{C}^+}}} u(z) = u(\infty)$.

(ii) Sei u harmonisch und nichtnegativ in $\mathbb{C}^+$. Dann existiert in eindeutiger Weise $c \in [0,\infty)$ und ein positives Borelmaß σ auf $\mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$$

sodaß

$$u(x+iy) = cy + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-x)^2+y^2},\ x+iy \in \mathbb{C}^+\,.$$

Sind umgekehrt c und σ in der angegebenen Weise gegeben, so definiert diese Formel eine in $\mathbb{C}^+$ harmonische und nichtnegative Funktion.

Beweis.
`ad`(i): Eine Funktion u hat die angegebenen Eigenschaften genau dann, wenn $u \circ \alpha$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$ ist. Mit Satz 1.1.9 und der Formel (3.3) folgt ($z = x + iy \in \mathbb{C}^+$)

$$u(z) = (u \circ \alpha)(\beta(z)) = \mathcal{P}[(u \circ \alpha)(e^{it})](\beta(z)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}(1+t^2)\frac{u(t)}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2+y^2}dt\,.$$

Die Umkehrung sieht man genauso.

`ad`(ii): Eine Funktion u ist harmonisch und nichtnegativ in $\mathbb{C}^+$ genau dann, wenn $u \circ \alpha$ diese Eigenschaft in $\mathbb{D}$ hat. Es existiert also in eindeutiger Weise ein endliches positives Borel-Maß ν auf $\mathbb{T}$ sodaß $u \circ \alpha = \mathcal{P}[d\nu]$. Entspricht ν dem Paar (c, μ) und setzt man $d\sigma(t) := \pi(1 + t^2)d\mu(t)$, so folgt mit (3.3)

$$u(z) = \mathcal{P}[d\nu](\beta(z)) = cy + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-x)^2 + y^2}\,.$$

Offenbar gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$. Die Umkehrung sieht man genauso.

❑

3.2.2 Bemerkung. Das Maß σ in der Darstellung einer nichtnegativen harmonischen Funktion kann explizit bestimmt werden über eine Halbebenen-Variante der *Stieltjesschen Umkehrformel*: Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$\lim_{y \searrow 0} \int_a^b u(x+iy)dx = \sigma((a,b)) + \frac{1}{2}\sigma(\{a\}) + \frac{1}{2}\sigma(\{b\})\,.$$

Der Beweis ist analog dem für den Kreis und wird hier nicht ausgeführt.

Auch die reelle Konstante c kann explizit bestimmt werden: Es gilt nämlich

$$c = \lim_{z \hat{\to} i\infty} \frac{u(z)}{\operatorname{Im} z}\,.$$

Denn nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \epsilon \le \arg z \le \pi - \epsilon}} \frac{u(z)}{y} = \lim_{\substack{z\to\infty \\ \epsilon \le \arg z \le \pi - \epsilon}} \Big(c + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+t^2}{(t-x)^2+y^2}\frac{d\mu(t)}{1+t^2}\Big) = c\,.$$

Das man den Satz von der beschränkten Konvergenz tatsächlich anwenden darf bedarf einer Rechtfertigung: Betrachte die gebrochen lineare Abbildung $t \mapsto \frac{t-i}{t-z}$ für ein $z \in \mathbb{C}^+$. Dabei geht die reelle Achse in einen beschränkten Kreis über der den Punkt 1 enthält. Der Punkt ∞ wird erhalten wenn man z abbildet. Also erhält man den den Mittelpunkt dieses Kreises als Bild von $\overline{z}$. Der Radius des Kreises ist daher

$$\left|\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}-z}-1\right|^2=\frac{x^2+(y-1)^2}{4y^2}\,.$$

Da auf einem Winkelraum $\{z\in\mathbb{C}:\epsilon\leq\arg z\leq\pi-\epsilon\}$ gilt $|\frac{x}{y}|\leq\cot\epsilon$ ist dieser Ausdruck für z aus diesem Winkelraum mit $\operatorname{Im} z\geq 1$ gleichmäßig beschränkt.

Als nächstes betrachten wir Randwerte von Funktionen von beschränkten Typ.

3.2.3 Proposition. *Es gilt:*

(i) *Sei $f\in N(\mathbb{C}^+)$. Dann existiert fast überall der nichttangentiale Grenzwert*

$$f^*(t):=\lim_{z\hat{\to}t}f(z),\ t\in\mathbb{R}\,,$$

und es gilt

$$\log|f^*|\in L^1(\frac{dt}{1+t^2})\,.$$

(ii) *Ist $p\in(0,\infty)$ und $f\in\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$, so ist $f^*\in L^p(\frac{dt}{1+t^2})$. Vermöge der Zuordnung $f\mapsto f^*$ entspricht $\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$ einem abgeschlossenen Teilraum von $L^p(\frac{dt}{1+t^2})$.*

(iii) *Ist $f\in\mathfrak{H}^1(\mathbb{C}^+)$, so kann f aus seinen Randwerten rekonstruiert werden als Poisson-Integral*

$$f(z)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(t)}{(t-x)^2+y^2}dt,\ z=x+iy\in\mathbb{C}^+\,.$$

Beweis. Ist $f\in N(\mathbb{C}^+)$, so ist $f\circ\alpha\in N$ und besitzt daher Randwerte. Da β winkeltreu ist hat auch f Randwerte. Wegen (3.2) gilt $\log|f^*|\in L^1(\frac{dt}{1+t^2})$.

Sei $f\in\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$, sodaß also $f\circ\alpha\in H^p$. Wegen (3.2) ist $f^*\in L^p(\frac{dt}{1+t^2})$ und die Abbildung $F\mapsto F\circ\beta$ eine Isometrie von H^p auf $\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$ aufgefasst als Teilraum von $L^p(\frac{dt}{\pi(1+t^2)})$.

Ist $f\in\mathfrak{H}^1(\mathbb{C}^+)$, so ist $f\circ\alpha\in H^1$ und daher gilt $f\circ\alpha=\mathcal{P}[(f\circ\alpha)^*]$. Mit (3.3) folgt

$$f(z)=(f\circ\alpha)(\beta(z))=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(t)}{(t-x)^2+y^2}dt,\ z\in\mathbb{C}^+\,.$$

❑

Geht man an die Frage nach Analoga der Räume $H^p(\mathbb{D}),N(\mathbb{D})$ für $\mathbb{C}^+$ naiv heran, so könnte man eine Beschränkungsbedingung an die Integrale von f längs der Parallelen zur reellen Achse erwarten, genauso wie man auf $\mathbb{D}$ Beschränktheit der Integrale längs der konzentrischen Kreise hat. Aus der gegebenen konform invarianten Definition erhält man dieses jedoch nicht unmittelbar, denn die Geraden parallel zur reellen Achse werden abgebildet auf Kreise die den Punkt 1 enthalten, sich also insbesondere sogars tangential an 1 annähern. Die Aussage das diese ursprüngliche Erwartung dennoch zutrifft ist ein nichttrivialer Satz:

3.2.4 Satz (Flett-Kuran). *Sei $u : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ nichtnegativ und subharmonisch. Dann hat u eine harmonische Majorante in $\mathbb{C}^+$ genau dann wenn*

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{x^2+(y+1)^2}\, dx < \infty\,.$$

3.2.5 Korollar. *Sei f analytisch in $\mathbb{C}^+$. Dann gilt*

(*i*) *$f \in N(\mathbb{C}^+)$ genau dann, wenn*

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x+iy)|}{x^2+(y+1)^2}\, dx < \infty\,.$$

(*ii*) *$f \in \mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+), p \in (0,\infty)$, genau dann, wenn*

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+iy)|^p}{x^2+(y+1)^2}\, dx < \infty\,.$$

Beweis. Wende Satz 3.2.4 auf $\log^+ |f|$ bzw. $|f|^p$ an.

❑

Zum Beweis des Satzes von Flett-Kuran benötigen wir noch zwei Hilfsaussagen. Das erste Lemma ist in impliziter Form schon im Beweis von Proposition 3.1.4 aufgetreten und könnte zu einem elementaren Beweis dieses Resultats herangezogen werden.

3.2.6 Lemma. *Sei u subharmonisch in $\mathbb{D}$ und $u \geq 0$. Dann hat u eine harmonische Majorante genau dann, wenn*

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta)\, d\lambda(\zeta) < \infty\,.$$

Beweis. Hat u die harmonische Majorante h, so gilt

$$\int_{\mathbb{T}} u(r\zeta)\, d\lambda(\zeta) \leq \int_{\mathbb{T}} h(r\zeta)\, d\lambda(\zeta) = h(0)\,.$$

Sei umgekehrt die Bedingung des Lemmas erfüllt. Betrachte die Maße $u(r\zeta) d\lambda(\zeta)$ als Elemente von $C(\mathbb{T})^*$. Es ist

$$\sup_{0\leq r<1} ||u(r\zeta)\, d\lambda(\zeta)|| = \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta)\, d\lambda(\zeta) < \infty\,,$$

also gibt es eine Teilfolge $r_n \nearrow 1$ und ein Borelmaß μ sodaß $\lim_{n\to\infty} u(r_n\zeta) d\lambda(\zeta) = \mu$ im schwach-* Sinne.

Sei $r \in (0,1)$ festgehalten. Wähle stetige Funktionen f_n die monoton fallend punktweise gegen $u(r\zeta)$ streben. Dann folgt $\mathcal{P}[f_n](z) \geq u(rz)$, $z \in \mathbb{D}$, und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz auch $\mathcal{P}[u(r\zeta)](z) \geq u(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Ist $R > r$, so folgt $\mathcal{P}[u(R\zeta)](\frac{r}{R}\zeta) \geq u(r\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, und daher $\mathcal{P}[u(R\zeta)](\frac{r}{R}z) \geq$

$\mathcal{P}[u(r\zeta)](z)$, $z \in \mathbb{D}$, denn eine auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetige in $\mathbb{D}$ harmonische Funktion ist das Poisson-Integral ihrer Randwerte, also

$$\mathcal{P}\big[\mathcal{P}[u(R\zeta)](\frac{r}{R}\zeta)\big](z) = \mathcal{P}[u(R\zeta)](\frac{r}{R}z)\,.$$

Sei nun $w \in \mathbb{D}$ und $1 > R > r > |w|$. Dann gilt

$$\mathcal{P}[u(R\zeta)](w) \geq \mathcal{P}[u(r\zeta)](\frac{R}{r}w)$$

Für $R = r_n \to 1$ strebt die linke Seite gegen $\mathcal{P}[d\mu](w)$ und die rechte gegen $\mathcal{P}[u(r\zeta)](\frac{w}{r}) \geq u(w)$. Also ist $\mathcal{P}[d\mu](w)$ eine harmonische Majorante von u in $\mathbb{D}$.

❑

3.2.7 Lemma. *Sei $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und monoton wachsend. Weiters sei $p : (0,1) \to \mathbb{R}$ meßbar und nichtnegativ sodaß*

$$0 < \int_0^a p(t)\,dt < \infty,\ a \in (0,1) \ \text{und} \ \int_0^1 p(t)\,dt = \infty\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\nearrow 1} g(x) = \sup_{0<\lambda<1} \frac{\int_0^1 g(t)p(\lambda t)\,dt}{\int_0^1 p(\lambda t)\,dt}$$

Beweis. Für $\lambda \in (0,1)$ setze

$$q(\lambda) := \frac{\int_0^1 g(t)p(\lambda t)\,dt}{\int_0^1 p(\lambda t)\,dt}$$

Ist $\lim_{x\nearrow 1} g(x) = M < \infty$, so gilt $q(\lambda) \leq M$. Ist $\lim_{x\nearrow 1} g(x) = \infty$, so gilt trivialerweise $q(\lambda) \leq \lim_{x\nearrow 1} g(x)$. Also gilt in jedem Fall in der behaupteten Beziehung “$\geq$“. Ist $\sup_{0<\lambda<1} q(\lambda) = \infty$, so gilt trivialerweise Gleichheit. Sei also $\sup_{0<\lambda<1} q(\lambda) = K < \infty$. Für $0 < x < \lambda < 1$ gilt

$$K \geq q(\lambda) \geq \frac{\int_x^1 g(t)p(\lambda t)\,dt}{\int_0^1 p(\lambda t)\,dt} \geq g(x)\frac{\int_x^1 p(\lambda t)\,dt}{\int_0^1 p(\lambda t)\,dt} =$$

$$= g(x)\Big(1 - \frac{\int_0^x p(\lambda t)\,dt}{\int_0^1 p(\lambda t)\,dt}\Big)\,.$$

Läßt man $\lambda \to 1$ streben, so folgt $K \geq g(x)$. Damit ist auch $K \geq \lim_{x\nearrow 1} g(x)$.

❑

Beweis. (von Satz C10) Wir nehmen zuerst an das u eine harmonische Majorante hat, $u(z) \leq h(z)$ mit h harmonisch in $\mathbb{C}^+$, $z \in \mathbb{C}^+$. Es folgt insbesondere $h \geq 0$ und daher gibt es nach Proposition 3.2.1 $c \geq 0$ und ein positives Borelmaß σ auf $\mathbb{R}$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$ sodaß

$$u(x+iy) \leq h(x+iy) = cy + \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-x)^2+y^2}, \ x+iy \in \mathbb{C}^+ .$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{x^2+(y+1)^2}\, dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(cy + \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2+y^2}\, d\sigma(t) \Big) \frac{1}{x^2+(y+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{c\pi y}{y+1} \cdot \frac{y+1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+(y+1)^2} \cdot 1\, dx +$$

$$+ \frac{1}{y+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2+y^2} \cdot \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\, dx \Big)\, d\sigma(t) . \tag{3.4}$$

Die Funktion $f(z) := 1$ gehört zu $\mathfrak{H}^\infty(\mathbb{C}^+)$ und daher gilt

$$\frac{y+1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+(y+1)^2} \cdot 1\, dx = f\big(i(y+1)\big) = 1 .$$

Für jedes $y_0 > 0$ ist eine Funktion g_{y_0} definiert als

$$g_{y_0}(z) := \operatorname{Im}\Big(-\frac{1}{z+iy_0} \Big), \ z \in \mathbb{C}^+ .$$

Sie ist harmonisch in $\mathbb{C}^+$, stetig in $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und erfüllt $\lim_{y \to +\infty} y^{-1} g_{y_0}(iy) = 0$. Nach Proposition 3.2.1 folgt

$$g_{y_0}(t+iy) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2+y^2} \cdot g_{y_0}(x)\, dx .$$

Nun ist

$$g_{y_0}(x) = \operatorname{Im}\Big(-\frac{1}{x+iy_0} \Big) = \frac{y_0}{x^2+y_0^2} ,$$

also ist der Integrand in (3.4) gleich

$$g_{y+1}(t+iy) = \operatorname{Im}\Big(-\frac{1}{t+iy+i(y+1)} \Big) = \frac{2y+1}{t^2+(2y+1)^2} .$$

Wir erhalten also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{x^2+(y+1)^2}\, dx \leq \frac{c\pi y}{y+1} + \frac{2y+1}{y+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^2+(2y+1)^2} \leq$$

$$\leq c\pi + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^2+1} .$$

Sei nun umgekehrt angenommen das die Bedingung des Satzes erfüllt ist. Um zu zeigen das u eine harmonische Majorante in $\mathbb{C}^+$ hat ist es äquivalent zu zeigen das $w \circ \alpha$ eine harmonische Majorante in $\mathbb{D}$ hat. Wegen Lemma 3.2.6 ist das äquivalent dazu das für die Funktion

$$g(r) := r \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (u \circ \alpha)(re^{it})\, dt$$

gilt $\lim_{r \nearrow 1} g(r) < \infty$. Beachte das diese Funktion nichtfallend ist, da $u \circ \alpha$ subharmonisch in $\mathbb{D}$ ist. Wir wenden Lemma 3.2.7 an auf $g(r)$ und $p(t) := \frac{1}{1-t^2}$. Es gilt

$$\int_0^1 \frac{g(r)}{1-\lambda^2 r^2} dr = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u \circ \alpha)(re^{it})}{1-\lambda^2 r^2}\, r dt dr =$$

$$= \iint_{\mathbb{D}} \frac{(u \circ \alpha)(w)}{1-\lambda^2 |w|^2}\, dudv = \iint_{\mathbb{C}^+} \frac{u(z)}{1+\lambda^2 |\beta(z)|^2} |\beta'(z)|^2\, dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbb{C}^+} \frac{u(z)\, |z+1|^2}{|z+i|^2 - \lambda^2 |z-i|^2} \, \frac{4}{|z+i|^4}\, dxdy =$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{x^2+(y+1)^2} \cdot \frac{dxdy}{(1-\lambda^2)x^2 + (y+1)^2 - \lambda^2 (y-1)^2} \leq$$

$$\leq 4 \int_0^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x+iy)}{x^2+(y+1)^2} dx \Big) \frac{dy}{(y+1)^2 - \lambda^2 (y-1)^2} .$$

Bezeichnet man das Supremum in der Behauptung des Satzes mit M, so gilt also

$$\int_0^1 \frac{g(r)}{1-\lambda^2 r^2} \leq 4M \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y+1)^2 - \lambda^2 (y-1)^2} .$$

Setzt man $t = \frac{y-1}{y+1}$, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{(y+1)^2 - \lambda^2 (y-1)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1-\lambda^2 t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1-\lambda^2 t^2} .$$

Nach Lemma 3.2.7 folgt $\lim_{r \nearrow 1} g(r) \leq 4M$.

❑

3.3 Der Raum $H^p(\mathbb{C}^+)$

3.3.1 Definition. Sei $p \in (0,\infty)$. Bezeichne mit $H^p(\mathbb{C}^+)$ die Menge aller in $\mathbb{C}^+$ analytischen Funktionen f mit

$$||f||_p := \sup_{y>\circ} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \,.$$

Wegen Korollar 3.2.5 gilt stets $H^p(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$. Diese Inklusion ist strikt, denn zum Beispiel ist $1 \notin H^p(\mathbb{C}^+)$. Bemerke das also $\mathfrak{H}^\infty(\mathbb{C}^+) \not\subseteq H^p(\mathbb{C}^+)$.

Insbesondere, vgl. Proposition 3.2.3, besitzt jede Funktion $f \in H^p(\mathbb{C}^+)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ nichttangentiale Randwerte $f^*(x)$. Ist $f^*(x) = 0$ für alle x aus einer Menge mit positiven Maß, so ist $f = 0$.

3.3.2 Lemma. *Die Abbildung $f \mapsto f^*$ ist eine Isometrie von $H^p(\mathbb{C}^+)$ in $L^p(\mathbb{C}^+)$. Dabei setzen wir hier der Einfachheit halber vorraus das $p \in [1,\infty)$.*

Beweis. Sei $f \in H^p(\mathbb{C}^+)$. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)|^p dt \leq \liminf_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \leq ||f||_p^p \,,$$

also ist $f^* \in L^p(\mathbb{R})$ und $\|f^*\|_p \geq \|f\|_p$.

Da wir $p \geq 1$ voraussetzen, läßt sich f als Poisson Integral darstellen. Es gilt also

$$f(x+iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{(t-x)^2 + y^2} \, dt \,.$$

Ist $p = 1$, so folgt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{(t-x)^2+y^2} \, dt \Big| \, dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^*(t)|}{(t-x)^2+y^2} \, dt \, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^*(t)|}{(t-x)^2+y^2} \, dx \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)| \, dt \,.$$

Wir sehen, dass $\|f\|_1 \leq \|f^*\|_1$.

Ist $p \in (1,\infty)$, so schließt man analog mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\frac{y}{\pi}}{(t-x)^2+y^2} \Big]^{\frac{1}{p}} f^*(t) \Big[\frac{\frac{y}{\pi}}{(t-x)^2+y^2} \Big]^{\frac{1}{q}} dt \Big|^p \, dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{y}{\pi}}{(t-x)^2+y^2} |f^*(t)|^p \, dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)|^p \, dt \,,$$

und auch in diesem Fall folgt $\|f\|_p \leq \|f^*\|_p$.

❑

3.3.3 Lemma. *Die Abbildung*

$$f(z) \mapsto \pi^{-\frac{1}{p}} \frac{(f \circ \beta)(z)}{(z+i)^{\frac{2}{p}}}, \tag{3.5}$$

wobei wir den Zweig der Wurzel mit $0 < \arg(z+i) < \pi$ *wählen, ist eine Isometrie von* H^p *auf* $H^p(\mathbb{C}^+)$*. Wieder setzen wir der Einfachheit halber vorraus, dass* $p \in [1, \infty)$*. Insbesondere ist* $(H^p(\mathbb{C}^+), \|.\|_p)$ *ein abgeschlossener Teilraum von* $L^p(\mathbb{R})$ *und damit vollständig, im Fall* $p \geq 1$ *ein Banachraum, im Fall* $p = 2$ *ein Hilbertraum.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $f \mapsto f(z)(z+i)^{-\frac{2}{p}}$. Diese ist eine Bijektion der Menge aller in $\mathbb{C}^+$ analytischen Funktionen auf sich. Es gilt

$$\left| \frac{f(x+iy)}{((x+iy)+i)^{\frac{2}{p}}} \right|^p = \frac{|f(x+iy)|^p}{x^2+(y+1)^2},$$

also geht bei dieser Bijektion $\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$ genau in $H^p(\mathbb{C}^+)$ über. Wir wissen das die Abbildung $f \mapsto f \circ \beta$ eine Bijektion von H^p auf $\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$ ist, also ist (3.5) eine Bijektion von H^p auf $H^p(\mathbb{C}^+)$. Die Norm im H^p ist gegeben als die p-Norm der Randfunktion. Nun gilt für $f \in H^p$ wegen (3.2)

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it})|^p \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f^*(\beta(x))|^p}{1+x^2} \, dx.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist genau die p-te Potenz des Betrages der Randfunktion des Bildes von f unter (3.5).

❑

Oft spielt der Raum $H^p(\mathbb{C}^+)$ trotzdem eine wichtigere Rolle als $\mathfrak{H}^p(\mathbb{C}^+)$. Dies liegt zum Beispiel darin begründet das für $H^p(\mathbb{C}^+)$ genaue Analoga von Korollar 2.2.7 und, im Fall $p = 2$, von Proposition 2.3.3 gelten.

3.3.4 Satz (Cauchysche Integraldarstellung). *Sei* $p \in [1, \infty)$ *und* $f \in H^p(\mathbb{C}^+)$*. Dann gilt* $f^* \in L^p(\mathbb{R})$ *und* f *kann aus seinen Randwerten rekonstruiert werden als Cauchy-Integral*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{t-z} \, dt, \;\; z \in \mathbb{C}^+.$$

Beweis. Da für jedes $z \notin \mathbb{R}$ die Funktion $(t-\overline{z})^{-1}$ zu $L^q(\mathbb{R})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gehört, ist eine Funktion g wohldefiniert durch

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{t-z} \, dt, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz ist g analytisch in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Es gilt wegen der Poissonschen Integraldarstellung für $f \in H^p(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathfrak{H}^1(\mathbb{C}^+)$ für $z \in \mathbb{C}^+$

$$g(z) - g(\overline{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\overline{z}} \Big) f^*(t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z-\overline{z}}{(t-x)^2+y^2} f^*(t)dt = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{(t-x)^2+y^2}dt = f(z)\,.$$

Insbesondere folgt das $g(\overline{z})$ in $\mathbb{C}^+$ analytisch ist und daher das $\overline{g(z)}$ in $\mathbb{C}^-$ analytisch ist. Da auch $g(z)$ in $\mathbb{C}^-$ analytisch ist, muß $g(z)$ auf $\mathbb{C}^-$ konstant sein. Nun gilt nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{y\to+\infty} g(-iy) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+i}{t+iy}\,\frac{f^*(t)}{t+i}\,dt = 0$$

und es folgt das $g(z)=0$, $z\in\mathbb{C}^-$, und daher auch $g(z)=f(z)$, $z\in\mathbb{C}^+$.

❑

Wir haben in Bemerkung 2.3.2 die Fouriertransformation am Einheitskreis betrachtet, das war die Isometrie

$$\Phi : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ g & \mapsto & \left(\int_{\mathbb{T}} g(\zeta)\zeta^{-n}\,d\lambda\right)_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

Der Raum H^2 entspricht bei dieser Isometrie gerade $\{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z}) : a_n = 0,$ $n<0\}$.

Jetzt haben wir als Rand die reelle Achse, werden also die *Fouriertransformation auf* $\mathbb{R}$ betrachten. Zur Wiederholung: Die Abbildung

$$f(t)\mapsto F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\,dt$$

bildet $(L^2(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R}),\ ||\cdot||_2)$ isometrisch in $(L^2(\mathbb{R}),\ ||\cdot||_2)$ ab. Durch stetige Fortsetzung erhält man eine Isometrie Φ von $L^2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\mathbb{R})$. Diese ist gegeben als

$$(\Phi f)(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(t)e^{-ixt}\,dt$$

wobei der Grenzwert in der Norm von $L^2(\mathbb{R})$ zu verstehen ist. Man schreibt oft abkürzend $(\Phi f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixz}dt$. Die Inverse von Φ ist gegeben als

$$(\Phi^{-1}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixt}\,dx\,.$$

3.3.5 Satz (Paley-Wiener). *Die Abbildung*

$$f(t)\mapsto F(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{itz}f(t)\,dt,\ \ z\in\mathbb{C}^+\,, \tag{3.6}$$

ist eine Isometrie von $L^2(0,\infty)$ *auf* $H^2(\mathbb{C}^+)$.

Beweis. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz ist für jedes $f \in L^2(0,\infty)$ die durch (3.6) definierte Funktion analytisch in $\mathbb{C}^+$. Da die Fouriertransformation isometrisch ist, und

$$F(x+iy) = \Phi^{-1}\big(\chi_{[0,\infty]}(t) \cdot e^{-ty} f(t)\big)$$

ist, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2\, dx = \int_0^{\infty} e^{-2ty} |f(t)|^2\, dt \le ||f||_2^2,\ y > 0\,.$$

Also gehört F zu $H^2(\mathbb{C}^+)$. Läßt man in der obigen Beziehung $y \to 0$ streben, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx = ||f||_2^2\,,$$

also ist $||F||_2 = ||f||_2$.

Sei $w \in \mathbb{C}^+$, dann ist $f(t) := i\sqrt{2\pi}\, e^{-it\overline{w}} \in L^2(0,\infty)$ und es gilt

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itz}(i\sqrt{2\pi}\, e^{-it\overline{w}})\, dt = \frac{e^{it(z-\overline{w})}}{z-\overline{w}}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{z-\overline{w}}\,.$$

Also enthält das Bild der Abbildung (3.6) alle Funktionen $\frac{1}{z-\overline{w}}$, $w \in \mathbb{C}^+$. Wegen der Cauchyschen Integraldarstellung ist die lineare Hülle dieser dicht in $H^2(\mathbb{C}^+)$.

❏

Das folgende Korollar zeigt einen weiteren Unterschied zwischen der Situation auf $\mathbb{C}^+$ und der auf $\mathbb{D}$ auf.

3.3.6 Korollar. *Es gilt*

$$L^2(\mathbb{R}) \ominus H^2(\mathbb{C}^+) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \overline{f} \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\}.$$

Beweis. Bei der Fouriertransformation geht $L^2(0,\infty)$ auf $H^2(\mathbb{C}^+)$ über, und daher $L^2(-\infty,0)$ auf $L^2(\mathbb{R}) \ominus H^2(\mathbb{C}^+)$. Nun ist $\Phi(f(t)) = \overline{\Phi(\overline{f}(-t))}$, also ist $\Phi(L^2(-\infty,0)) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \overline{f} \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\}$.

❏

Kapitel 4

Räume mit reproduzierendem Kern

4.1 Reproduzierende Kerne

Sei $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$, dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(t)}{t-w} dt \, w \in \mathbb{C}^+ .$$

Die Funktion

$$K_w(z) := \frac{1}{z - \overline{w}}$$

gehört für jedes $w \in \mathbb{C}^+$ zu $H^2(C^+)$, und die obige Formel besagt

$$f(w) = \big(f, K_w(\cdot)\big), \; w \in \mathbb{D} ,$$

wobei $(.,.)$ das innere Produkt des $H^2(\mathbb{C}^+)$ bezeichnet, das ist das L^2-innere Produkt der Randwerte

$$(f,g) := (f^*, g^*)_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\overline{g^*(t)} \, dt, \; f, g \in H^2(\mathbb{C}^+) .$$

Wir sehen das also das *Punktauswertungsfunktional*

$$\chi_w : f \mapsto f(w)$$

am H^2 gegeben ist als $\chi_w = (., K_w)$. Es ist also für jedes $w \in \mathbb{D}$ stetig.

4.1.1 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(\mathcal{H}, (.,.))$ ein Hilbertraum dessen Elemente Funktionen auf Ω sind und dessen Vektorraumoperationen punktweise erklärt sind

$$(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha f(w) + \beta g(w), w \in \Omega, \; f, g \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

Dann heißt $(\mathcal{H}, (.,.))$ ein *Hilbertraum mit reproduzierendem Kern* (abkürzend schreiben wir *rK-HR*), wenn für jedes $w \in \Omega$ das Funktional $\chi_w : f \mapsto f(w)$ stetig ist.

Da die stetigen linearen Funktionale eines Hilbertraumes $(\mathcal{H},(.,.))$ in bijektiver Beziehung stehen mit $\mathcal{H}$ vermöge der Zuordnung $y \mapsto f_y$ wobei

$$f_y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x,y) \end{array} \right.$$

können wir die Definition einer rK-HR auch wie folgt formulieren: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $(\mathcal{H},(.,.))$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}^\Omega$. Dann ist $(\mathcal{H},(.,.))$ ein rK-HR genau dann, wenn es zu jedem $w \in \Omega$ ein Element $K_w \in \mathcal{H}$ gibt, sodaß $f(w) = (f, K_w)$, $f \in \mathcal{H}$. Nun ist K_w, als Element von $\mathcal{H}$, selbst eine Funktion auf Ω. Wir können die Bedingung für rK-HR also weiter umformulieren zu: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $(\mathcal{H},(.,.))$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}^\Omega$. Dann ist $(\mathcal{H},(.,.))$ ein rK-HR genau dann, wenn es eine Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ gibt, sodaß

(i) Für jedes $w \in \Omega$ ist$K(w,.) \in \mathcal{H}$.

(ii) Für jedes $w \in \Omega$ und $f \in \mathcal{H}$ gilt $f(w) = (f, K(w,.))$.

In diesem Fall nennen wir die Funktion K den *reproduzierenden Kern* von $(\mathcal{H},(.,.))$.

4.1.2 Satz. *Sei $(\mathcal{H},(.,.))$ ein rK-HR auf der Menge Ω und sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ sein reproduzierender Kern. Dann gilt*

(i) $K(w,z) = \overline{K(z,w)}$, $z, w \in \Omega$.

(ii) *Für je endlich viele Punkte $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ ist*

$$Q_K(\xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{i,j=1}^n K(z_i, z_j)\xi_i\overline{\xi_j} \geq 0\,.$$

Erfüllt umgekehrt $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ die Eigenschaften (i) und (ii), so existiert genau ein rK-HR auf Ω sodaß K sein reproduzierender Kern ist.

Beweis. Sei $(\mathcal{H},(.,.))$ ein rK-HR und sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ sein reproduzierender Kern. Dann gilt

$$K(w,z) = (K(w,.), K(z,.)) = \overline{(K(z,.), K(w,.))} = \overline{K(z,w)}\,.$$

Seien $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$0 \leq || \sum_{i=1}^n \xi_i K(z_i,.)||^2 = \sum_{i,j=1}^n \big(\xi_i K(z_i,.), \xi_i K(z_j,.)\big) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n K(z_i,z_j)\xi_i\overline{\xi_j}\,.$$

Sei nun umgekehrt $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben sodaß die Eigenschaften (i) und (ii) gelten. Betrachte den linearen Raum

$$\mathfrak{L} := \operatorname{span}\{K(w,.) : w \in \Omega\} \subseteq \mathbb{C}^\Omega \tag{4.1}$$

und definiere für $f, g \in \mathfrak{L}$, $f = \sum_{i=1}^n \xi_i K(w_i, .)$, $g = \sum_{j=1}^m \eta_j K(z_j, .)$,

$$(f, g) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K(w_i, z_j)\xi_i \overline{\eta_j} \,. \tag{4.2}$$

Wir zeigen, daß $(.,.)$ wohldefiniert ist: Angenommen es gilt $\sum_{i=1}^n \xi_i K(w_i, z) = 0$, $z \in \Omega$, dann ist

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m K(w_i, z_j)\xi_i \overline{\eta_j} = \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^n K(w_i, z_j)\xi_i \Big) \overline{\eta_j} = 0 \,.$$

Ist $f \in \mathfrak{L}$, $f = \sum_{i=1}^n \xi_i K(w_i, .)$, so gilt für jedes $z \in \Omega$

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \xi_i K(w_i, z) = (f, K(z, .)) \,. \tag{4.3}$$

Die Bedingung (ii) besagt gerade $(f, f) \geq 0$, $f \in \mathfrak{L}$, wegen (i) gilt stets $(f, g) = \overline{(g, f)}$. Die Tatsache das $(.,.)$ in der ersten Komponente linear ist, ist klar. Also ist $(.,.)$ ein positiv semidefinites inneres Produkt. Angenommen es ist $(f, f) = 0$. Wegen der Schwarzschen Ungleichung folgt $(f, g) = 0$, $g \in \mathfrak{L}$. Wir erhalten insbesondere mit (4.3)

$$f(z) = (f, K(z, .)) = 0, \ z \in \Omega \,,$$

d.h. $f = 0$. Also ist $(.,.)$ tatsächlich positiv definit.

Sei $(\hat{\mathfrak{L}}, (.,.))$ die Hilbertraum Vervollständigung von $(\mathfrak{L}, (.,.))$ und betrachte die Abbildung

$$\iota : \begin{cases} \hat{\mathfrak{L}} & \to & \mathbb{C}^\Omega \\ x & \mapsto & \iota(x)(z) := (x, K(z, .))_{\hat{\mathfrak{L}}} \end{cases}$$

Da $\mathfrak{L}$ dicht in $\hat{\mathfrak{L}}$ ist, ist ι injektiv. Setze $\mathcal{H} := c(\hat{\mathfrak{L}})$ und definiere auf $\mathcal{H}$ ein inneres Produkt so daß c isometrisch ist. Dann ist $(\mathcal{H}, (.,.))$ ein Hilbertraum dessen Elemente Funktionen auf Ω sind. Es gilt $K(w, .) \in \mathcal{H}$, denn $K(w, .) \in \mathfrak{L} \subseteq \hat{\mathfrak{L}}$ und wegen (4.3) gilt

$$(\iota K(w, .))(z) = (K(w, .), K(z, .)) = K(w, z) \,.$$

Weiters gilt für $f \in \mathcal{H}$, $f = \iota x$, und $w \in \Omega$

$$(f, K(w, .))_{\mathcal{H}} = (x, K(w, .))_{\hat{\mathfrak{L}}} = (\iota x)(w) = f(w)$$

Also ist $(\mathcal{H}, (.,.))$ ein rK-HR und K sein reproduzierender Kern.

Seien nun $(\mathcal{H}, (.,.))$ und $(\mathcal{H}_1, (.,.)_1)$ rK-HR auf Ω die beide K als reproduzierenden Kern haben. Dann enthalten beide (4.1) als dichten linearen Teilraum und auf diesem ist das jeweilige innere Produkt gegeben durch (4.2). Also ist $\mathrm{id} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ isometrisch. Sie gestattet daher eine Fortsetzung zu einer Isometrie Φ von $(\mathcal{H}, (.,.))$ auf $(\mathcal{H}_1, (.,.))$. Nun gilt $(\chi_w \circ \Phi)|_{\mathfrak{L}} = \chi_w|_{\mathfrak{L}}$ und da punktauswerten stetig ist folgt $\chi_w \circ \Phi = \chi_w$, d.h. $\Phi = \mathrm{id}$.

❑

Ist $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ so sagen wir K ist ein *positiv definiter Kern*, wenn die Eigenschaften (i) und (ii) von Satz 4.1.2 erfüllt sind. Den vermöge des letzten Satzes in eindeutiger Weise existierenden rK-HR der K als reproduzierenden Kern hat bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_K$.

4.2 Eigenschaften von reproduzierenden Kernen

Wir wollen zuerst einige Glattheitseigenschaften eines positiv definiten Kernes in Eigenschaften des von ihm erzeugten rK-HR übersetzen.

Die Definition eine rK-HR besagt gerade das Konvergenz in der Norm stets punktweise Konvergenz impliziert.

4.2.1 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und sei K ein positiv definiter Kern auf Ω. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *Alle Elemente von $\mathcal{H}_K$ sind lokal beschränkt auf Ω.*

(*ii*) *Die Funktion $K(w,w) : \Omega \to \mathbb{C}$ ist lokal beschränkt.*

In diesem Fall impliziert Konvergenz in der Norm von $\mathcal{H}_K$ lokal gleichmäßige Konvergenz in Ω.

Beweis. Sei zuerst angenommen das $K(w,w)$ lokal beschränkt ist und sei eine kompakte Teilmenge A von Ω gegeben. Dann gilt also für eine gewissen Konstante $M > 0$

$$\|K(w,.)\| = K(w,w)^{\frac{1}{2}} \leq M,\ w \in A\,.$$

Ist $f \in \mathcal{H}_K$, so ist

$$|f(w)| = \big|(f, K(w,.)\big| \leq M\|f\|,\ w \in A\,.$$

Wir sehen das jede Funktion $f \in \mathcal{H}_K$ lokal beschränkt ist und das die Abbildung $f \mapsto f|_A$ den Raum $\mathcal{H}_K$ stetig in den $L^\infty(A)$ abbildet.

Setzen wir nun voraus das (i) gilt. Sei $A \subseteq \Omega$ kompakt, dann ist für jedes $f \in \mathcal{H}_K$

$$\sup_{w\in A} |(f, K(w,.))| = \sup_{w\in A} |f(w)| < \infty\,.$$

Damit ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus $\sup_{w\in A} \|(., K(w,.))\|_{\mathcal{H}_K^*} < \infty$. Nun ist $K(w,w)^{\frac{1}{2}} = \|K(w,.)\| = \|(., K(w,.))\|_{\mathcal{H}_K^*}$. Also ist $K(w,w)$ lokal beschränkt.

❑

Ist $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion in den zwei Variablen w und z, so sagen wir K sei in den *Variablen w und z einzeln stetig*, wenn für jedes feste $w \in \Omega$ die Funktion $z \mapsto K(w,z)$ stetig für $z \in \Omega$ ist und für jedes feste $z \in \Omega$ die Funktion $w \mapsto K(w,z)$ stetig für $w \in \Omega$ ist. Zur Unterscheidung sprechen wir manchmal von einer *in beiden Variablen (w,z) gleichzeitig stetiger* Funktion, wenn sie als Funktion $\Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ stetig ist.

4.2.2 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und sei K ein positiv definiter Kern auf Ω. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *Alle Elemente von $\mathcal{H}_K$ sind stetig auf Ω.*

(*ii*) *Die Funktion*

$$K(.,z) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathcal{H}_K \\ w & \mapsto & K(w,z) \end{array} \right. \tag{4.4}$$

ist schwach stetig.

(*iii*) *Der Kern $K(w,z)$ ist in den Variablen w und z einzeln stetig und die Funktion $K(w,w)$ ist lokal beschränkt.*

Weiters sind äquivalent:

(*iv*) *Die Menge $\{f \in \mathcal{H}_K : \|f\| \leq 1\}$ ist gleichgradig stetig.*

(*v*) *Die Funktion* (4.4) *ist in der Norm von $\mathcal{H}_K$ stetig.*

Ist (*iv*), *oder äquivalent* (*v*), *erfüllt, so ist $K(w,z)$ stetig auf $\Omega\times\Omega$ in den beiden Variablen (w,z) gleichzeitig.*

Beweis. Die Äquivalenz von (*i*) und (*ii*) ist klar, denn die Tatsache das die Funktion (4.4) schwach stetig ist bedeutet gerade das für jedes $f \in \mathcal{H}_K$ die Funktion $f(w) = (K(w,z), f)$ stetig von $w \in \Omega$ abhängt.

Es gelte (*i*). Dann ist insbesondere jedes $f \in \mathcal{H}_K$ lokal beschränkt und daher nach Satz 4.2.1 $K(w,w)$ lokal beschränkt. Weiters ist für jedes feste $w \in \Omega$ die Funktion $z \mapsto K(w,z)$ ein Element von $\mathcal{H}_K$ und daher stetig. Wegen $K(w,z) = \overline{K(z,w)}$ ist auch für jedes feste $z \in \Omega$ die Funktion $w \mapsto K(w,z)$ stetig.

Sei nun (*iii*) vorausgesetzt. Wegen Satz 4.2.1 ist Konvergenz in der Norm von $\mathcal{H}_K$ stärker als lokal gleichmäßige Konvergenz. Die Menge $\operatorname{span}\{K(w,.) : w \in \Omega\}$ besteht aus stetigen Funktionen und ist dicht in $\mathcal{H}_K$. Also ist jedes Element von $\mathcal{H}_K$ der lokal gleichmäßige Grenzwert von stetigen Funktionen und damit selbst stetig.

Wir kommen zum zweiten Teil der Behauptung. Ist $f \in \mathcal{H}_K$, $\|f\| \leq 1$, so gilt

$$|f(w) - f(w_0)| = |(f, K(w,.) - K(w_0,.)| \leq \|K(w,.) - K(w_0,.)\|$$

Ist $w \mapsto K(w,.)$ in der Norm von $\mathcal{H}_K$ stetig, so ist daher die Einheitskugel von $\mathcal{H}_K$ gleichgradig stetig. Also impliziert (*v*) die Eigenschaft (*iv*). Umgekehrt, sei (*iv*) vorausgesetzt und sei $w_0 \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ sodaß für alle $f \in \mathcal{H}_K$, $\|f\| \leq 1$, gilt $|f(w) - f(w_0)| \leq \epsilon$ für $|w - w_0| \leq \delta$. Dann folgt

$$\|K(w,.) - K(w_0,.)\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |(f, K(w,.) - K(w_0,.))| \leq \epsilon,\ |w - w_0| \leq \delta\,.$$

Ist die Funktion (4.4) in der Norm stetig, so ist die Funktion

$$(w,w') \mapsto \big(K(w,.), K(w',.)\big) = K(w,w')$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig.

❑

Wir werden uns besonders für rK-HR interessieren, deren Elemente analytische Funktionen sind.

4.2.3 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und K ein positiv definiter Kern auf Ω. Dann sind äquivalent*

(*i*) *Alle Elemente von $\mathcal{H}_K$ sind analytisch in Ω.*

(*ii*) *Für jedes feste $w \in \Omega$ ist $K(w,z)$ analytisch in $z \in \Omega$ und die Funktion $K(w,w)$ ist auf Ω lokal beschränkt.*

In diesem Fall ist die Funktion

$$K(\bar{.}, z) : \begin{cases} \overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathcal{H}_K \\ w & \longmapsto & K(\overline{w}, z) \end{cases}$$

analytisch bezüglich $||.||_{\mathcal{H}_K}$ *und es gilt*

$$f'(w) = (f, \frac{\partial}{\partial \overline{w}} K(w, z)), \;\; f \in \mathcal{H}_K, w \in \Omega\,.$$

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen müssen wir noch klären was Analytizität bzgl. $||.||_{\mathcal{H}_K}$ bedeutet.

4.2.4 Proposition. *Sei* $(X, ||.||)$ *ein Banachraum, sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und sei* $f : \Omega \to X$*. Dann sind äquivalent*

(*i*) *Für jedes* $w \in \Omega$ *existiert der Grenzwert*

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

in der Norm $||.||$*.*

(*ii*) *Für jedes* $x^* \in X^*$ *ist die Funktion* $x^* \circ f$ *analytisch in* Ω*.*

In diesem Fall nennt man f *analytisch in* Ω*.*

Der Beweis beruht auf folgendem Lemma:

4.2.5 Lemma. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analytisch und sei* $S \subseteq \Omega$ *kompakt. Dann gibt es eine Konstante* $M(f, S)$ *sodaß*

$$\Big|\frac{1}{\alpha - \beta}\Big(\frac{f(\zeta - \alpha) - f(\zeta)}{\alpha} - \frac{f(\zeta + \beta) - f(\zeta)}{\beta}\Big)\Big| \leq M(f, S), \;\; \zeta, \zeta + \alpha, \zeta + \beta \in S\,.$$

Beweis. Da S kompakt ist, ist die Distanz von S zu $\partial\Omega$ positiv. Sei $\mathcal{C}$ die Vereinigung endlich vieler rektifizierbarer Kurven die S umfassen in Ω verlaufen und die positive Distanz von S haben. Dann gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für alle $w \in S$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - w} dz\,.$$

Nun gilt

$$\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{z - (\zeta + \alpha)} - \frac{1}{z - \zeta}\Big) - \frac{1}{\beta}\Big(\frac{1}{z - (\zeta + \beta)} - \frac{1}{z - \zeta}\Big) =$$

$$\frac{1}{(z - (\zeta + \alpha))(z - \zeta)} - \frac{1}{(z - (\zeta + \beta))(z - \zeta)} = \frac{\alpha - \beta}{(z - \zeta)(z - (\zeta + \alpha))(z - (\zeta + \beta))}\,,$$

also folgt

$$\frac{1}{\alpha - \beta}\Big(\frac{f(\zeta + \alpha) - f(\zeta)}{\alpha} - \frac{f(\zeta + \beta) - f(\zeta)}{\beta}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{(z - \zeta)(z - (\zeta + \alpha))(z - (\zeta + \beta))}$$

und damit die Existenz einer gewünschten Konstanten.

❑

Beweis. (von Proposition 4.2.4) Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist klar. Sei also (ii) erfüllt. Setze

$$U(\zeta;\alpha,\beta) := \frac{f(\zeta+\alpha)-f(\zeta)}{\alpha} - \frac{f(\zeta+\beta)-f(\zeta)}{\beta},$$

dann gibt es wegen Lemma 4.2.5 zu einer kompakten Menge $S \subseteq \Omega$ und $x^* \in X^*$ eine Konstante $M(x^*,S)$ sodaß

$$\left|\frac{1}{\alpha-\beta}x^*U(\zeta;\alpha,\beta)\right| \leq M(x^*,S),\ \zeta,\zeta+\alpha,\zeta+\beta \in S\,.$$

Es ist also die Familie

$$\{\frac{1}{\alpha-\beta}U(\zeta;\alpha,\beta) : \zeta,\zeta+\alpha,\zeta+\beta \in S\} \subseteq X^{**}$$

punktweise beschränkt. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt die Existenz einer Konstanten $M(S)$ mit

$$||\frac{1}{\alpha-\beta}U(\zeta;\alpha,\beta)||_{X^{**}} \leq M(S),\ \zeta,\zeta+\alpha,\zeta+\beta \in S\,.$$

Wir erhalten

$$||U(\zeta;\alpha,\beta)||_X \leq M(S)(\alpha-\beta),\ \zeta,\zeta+\alpha,\zeta+\beta \in S$$

Läßt man nun α,β gegen Null stehen und benützt man die Vollständigkeit von X, so sieht man das in jedem inneren Punkt von S der Grenzwert

$$\lim_{z\to\zeta}\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

in der Norm $||\cdot||$ existiert.

❑

Beweis. (von Satz 4.2.3) Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (i)$. Sei also (ii) erfüllt, dann besteht der dichte lineare Teilraum $\mathfrak{L}$ aus (4.1) aus in Ω analytischen Funktionen. Wegen Satz 4.2.1 impliziert Konvergenz in der Norm von $\mathcal{H}_K$ lokal gleichmäßige Konvergenz. Ist $f \in \mathcal{H}_K$, so wähle $f_n, n \in \mathbb{N}$, in $\mathfrak{L}$ mit $f_n \to f$ in der Norm von $\mathcal{H}_K$. Also folgt $f_n \to f$ lokal gleichmäßig und da alle f_n analytisch sind hat auch f diese Eigenschaft.

Sei nun umgekehrt (i) erfüllt. Ist $x^* \in \mathcal{H}_K^*$, d.h. $x^* = (.,f)$ mit einem $f \in \mathcal{H}_K$, so gilt

$$x^*K(\overline{w},.) = (K(\overline{w},.),f) = \overline{f(\overline{w})}\,.$$

Die Funktion $w \mapsto \overline{f(\overline{w})}$ ist analytisch auf $\overline{\Omega} = \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in \Omega\}$. Nach Proposition 4.2.4 ist die Funktion $w \mapsto K(\overline{w},z)$ analytisch bezüglich $||\cdot||_{\mathcal{H}_K}$. Insbesondere ist $||K(\overline{w},z)||_{\mathcal{H}_K} = K(\overline{w},\overline{w})^{\frac{1}{2}}$ stetig auf $\overline{\Omega}$ und daher lokal beschränkt. Für jedes feste $w \in \Omega$ ist $K(w,.) \in \mathcal{H}_K$ und daher analytisch.

Wie wir gesehen haben existiert der Limes $\lim_{\zeta\to w}\frac{K(\overline{\zeta},.)-K(\overline{w},.)}{\zeta-w}$ in der Norm $||\cdot||_{\mathcal{H}_K}$. Für jedes feste $z\in\Omega$ ist die Funktion $K(\overline{w},z)$ wegen $K(\overline{w},z)=\overline{K(z,\overline{w})}$ analytisch in w, also gilt

$$\lim_{\zeta\to w}\frac{K(\overline{\zeta},z)-K(\overline{w},z)}{\zeta-w}=\frac{\partial}{\partial w}K(\overline{w},z),\ z\in\Omega\,.$$

Insbesondere ist $\frac{\partial}{\partial w}K(\overline{w},z)\in\mathcal{H}_K$.

Sei $f\in\mathcal{H}_K$, dann gilt

$$\frac{f(\zeta)-f(w)}{\zeta-w}=\frac{(f,K(\zeta,.))-(f,K(w,.))}{\zeta-w}=\Big(f,\frac{K(\zeta,.)-K(w,.)}{\overline{\zeta}-\overline{w}}\Big)$$

Für $\zeta\to w$ strebt die linke Seite gegen $f'(w)$ und die rechte Seite gegen $(f,\frac{\partial}{\partial\overline{w}}K(w,.))$.

❏

4.2.6 Bemerkung. Die Voraussetzung in (ii) von Satz 4.2.3 das $K(w,w)$ lokal beschränkt ist, ist nicht notwendig: Tatsächlich folgt aus der Tatsache das $K(w,z)$ für jedes feste w analytisch in z und daher wegen $K(z,w)=\overline{K(w,z)}$ auch für jedes feste z analytisch in $\overline{w}$ ist, bereits das $K(w,z)$ analytisch in den beiden Variablen $(\overline{w},z)$ gleichzeitig ist und daher insbesondere stetig ist auf $\Omega\times\Omega$. Das folgt aus einem nichttrivialen(!) Satz von Hartog.

Unser zweites Ziel in diesem Abschnitt ist es einige elementare Konstruktionen die mit positiv definiten Kernen durchgeführt werden können zu sammeln.

4.2.7 Proposition. *Sei K ein positiv definiter Kern auf Ω. Dann gilt:*

(i) *Ist $\phi:\Omega\to\mathbb{C}$, dann ist auch $K_1(w,z):=\phi(z)K(w,z)\overline{\phi(w)}$ ein positiv definiter Kern auf Ω. Die Abbildung $f\mapsto\phi f$ ist eine Isometrie von* $\operatorname{cls}\{K(w,.):\phi(w)\neq 0\}\subseteq\mathcal{H}_K$ *auf $\mathcal{H}_{K_1}$.*

(ii) *Ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_K$, dann ist $\mathcal{K}$ ein rK-HR. Bezeichne mit L_1 bzw. L_2 den reproduzierenden Kern von $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}^\perp$, dann gilt $K=L_1+L_2$.*

(iii) *Ist $\Omega_1\subseteq\Omega$, dann ist $K_1:=K|_{\Omega_1\times\Omega_1}$ ein positiv definiter Kern auf Ω_1. Die Abbildung $f\mapsto f|_{\Omega_1}$ ist eine Isometrie von* $\operatorname{cls}\{K(w,.):w\in\Omega_1\}\subseteq\mathcal{H}_K$ *auf $\mathcal{H}_{K_1}$.*

(iv) *Besitzt K eine Fortsetzung $K_1(w,z)$ auf $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ die in den beiden Variablen w und z einzeln stetig ist, dann ist K_1 ein positiv definiter Kern auf $\overline{\Omega}$.*

Beweis.
`ad`(i): Die Beziehung $K_1(w,z)=\overline{K_1(z,w)}$ ist klar. Seien $z_1,\dots,z_n\in\Omega$ und $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbb{C}$ gegeben, dann ist

$$\sum_{i,j=1}^n K_1(z_j,z_i)\xi_i\overline{\xi_j}=\sum_{i,j=1}^n K(z_j,z_i)\big(\phi(z_i)\xi_i\big)\overline{\big(\phi(z_j)\xi_j\big)}\geq 0\,.$$

Ist $\phi(w)\neq 0$, so gehört die Funktion $\phi(z)K(w,z)$ zu $\mathcal{H}_{K_1}$ und es gilt für alle w,w' mit $\phi(w),\phi(w')\neq 0$

$$\big(K(w,.),K(w',.)\big)_{\mathcal{H}_K}=K(w,w')=\frac{K_1(w,w')}{\phi(w')\overline{\phi(w)}}=\frac{\big(K_1(w,.),K_1(w',.)\big)_{\mathcal{H}_{K_1}}}{\phi(w')\overline{\phi(w)}}=$$

$$= \frac{\big(\phi(z)K(w,z)\overline{\phi(w)}, \phi(z)K(w',z)\overline{\phi(w')}\big)_{\mathcal{H}_{K_1}}}{\phi(w')\overline{\phi(w)}} = \big(\phi(z)K(w,z), \phi(z)K(w',z)\big)_{\mathcal{H}_{K_1}}$$

Also ist die Abbildung $f \mapsto \phi f$ eine Isometrie von $\operatorname{span}\{K(w,.) : w \in \Omega, \phi(w) \neq 0\}$ auf $\operatorname{span}\{K_1(w,z) : w \in \Omega, \phi(w) \neq 0\} = \operatorname{span}\{K_1(w,z) : w \in \Omega\}$ und erlaubt daher eine Forstsetzung zu einer Isometrie der entsprechenden Abschlüsse aufeinander.

`ad`(ii): Die Tatsache das alle Punktauswertungsfunktionale stetig sind vererbt sich auf abgeschlossene Teilräume. Sei nun L_1 der Kern von $\mathcal{K}$ und L_2 der von $\mathcal{K}^\perp$. Dann gehört L_1 zu $\mathcal{K}$ und L_2 zu $\mathcal{K}^\perp$. Es folgt $L_1 + L_2 \in \mathcal{H}_K$. Weiters ist für $f \in \mathcal{H}_K$, $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{K}$, $f_2 \in \mathcal{K}^\perp$,

$$(f, L_1(w,.) + L_2(w,.)) = (f_1 + f_2, L_1(w,.) + L_2(w,.)) =$$

$$= (f_1, L_1(w,.)) + (f_2, L_2(w,.)) = f_1(w) + f_2(w) = f(w)\,,$$

und wir sehen das $K = L_1 + L_2$.

`ad`(iii): Die Tatsache das $K_1 = K|_{\Omega_1\times\Omega_1}$ ein positiv definiter Kern ist, ist trivial. Die Einschränkungsabbildung liefert eine Isometrie von $\operatorname{span}\{K(w,.) : w \in \Omega_1\}$ auf $\operatorname{span}\{K_1(w,.) : w \in \Omega_1\}$ und läßt sich daher zu einer Isometrie der entsprechenden Abschlüsse aufeinander fortsetzen.

`ad`(iv): Sei $z, w \in \overline{\Omega}$ und wähle $z_n, w_m \in \Omega$ mit $z_n \to z$, $w_m \to w$. Dann gilt

$$K_1(w,z) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} K(w_m, z_n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \overline{K(z_n, w_m)} = \overline{K_1(z,w)}\,.$$

Genauso sieht man dass sich die nichtnegativität der quadratischen Formen überträgt.

❑

4.2.8 Bemerkung. Sind L_1, L_2 positiv definite Kerne auf Ω, so ist auch $K := L_1 + L_2$ ein positiv definiter Kern auf Ω. Es muß aber nicht gelten daß $\mathcal{H}_{L_i}$ isometrisch in $\mathcal{H}_K$ enthalten ist.

4.2.9 Korollar. *Sei $\phi : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ analytisch, $|\phi(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$ und $|\phi^*(t)| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, f.ü. Dann ist die Abbildung $f \mapsto \phi f$ eine Isometrie von $H^2(\mathbb{C}^+)$ in sich, vgl. auch Bemerkung 2.4.1. Insbesondere sind ihr Bild $\phi H^2(\mathbb{C}^+)$, sowie das orthogonales Komplement $H^2(\mathbb{C}^+) \ominus \phi H^2(\mathbb{C}^+)$ abgeschlossene Teilräume von $H^2(\mathbb{C}^+)$, und daher selbst mit dem von $H^2(\mathbb{C}^+)$ vererbten inneren Produkt rK-HR. Die entsprechenden Kerne sind gegeben durch*

$$L_1(w,z) := i\frac{\phi(z)\overline{\phi(w)}}{2\pi(z-\overline{w})},\ z, w \in \mathbb{C}^+$$

für $\phi H^2(\mathbb{C}^+)$ bzw.

$$L_2(w,z) := i\frac{1-\phi(z)\overline{\phi(w)}}{2\pi(z-\overline{w})},\ z, w \in \mathbb{C}^+$$

für $H^2(\mathbb{C}^+) \ominus \phi H^2(\mathbb{C}^+)$.

Beweis. Der Raum $H^2(\mathbb{C}^+)$ ist ein rK-HR mit Kern $K(w,z) = i\frac{1}{2\pi(z-\overline{w})}$. Nach Proposition 4.2.7, (i), ist L_1 ein positiv definiter Kern auf $\mathbb{C}^+$ und die Abbildung $f \mapsto \phi f$ ist eine Isometrie von $\operatorname{cls}\{K(w,.) : \phi(w) \neq 0\} \subseteq \mathcal{H}_K$ auf $\mathcal{H}_{L_1}$. Nun ist ϕ analytisch und die Nullstellenmenge von ϕ daher diskret. Also ist $\operatorname{cls}\{K(w,.) : \phi(w) \neq 0\} = \mathcal{H}_K$. Da die selbe Abbildung $f \mapsto \phi f$ eine Isometrie von $\mathcal{H}_K$ in sich ist, folgt das $\mathcal{H}_{L_1} = \phi H^2(\mathbb{C}^+) \subseteq H^2(\mathbb{C}^+)$ als Menge und auch isometrisch. Nach Proposition 4.2.7, (ii), ist der reproduzierende Kern des orthogonalen Komplementes gleich $K - L_1$.

❑

4.3 Carathedory-Funktionen

4.3.1 Definition. Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller in $\mathbb{D}$ analytischen Funktionen f mit $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, $z \in \mathbb{D}$. Diese heißt auch *Carathedory-Klasse*.

Vermöge der Integraldarstellung von Riesz-Herglotz (Korollar 1.4.3) steht $\mathcal{C}$ in bijektiver Beziehung zu (μ, c) wobei μ ein positives endliches Borelmaß ist und c eine reelle Konstante.

4.3.2 Satz. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $f \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn*

$$L_f(w,z) := \frac{f(z) + \overline{f(w)}}{1 - z\overline{w}} \tag{4.5}$$

ein auf $\mathbb{D}$ positiv definiter Kern ist. Definiert man in diesem Fall

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & , \quad z \in \mathbb{D} \\ -\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})} & , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases} \tag{4.6}$$

so ist der Kern L_F positiv definit auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Beweis. Ist L_f positiv definit auf $\mathbb{D}$, so gilt insbesondere für jedes $z \in \mathbb{D}$

$$0 \leq L_f(z,z) = \frac{2 \operatorname{Re} f(z)}{1 - |z|^2}.$$

Also ist $f \in \mathcal{C}$.

Sei umgekehrt $f \in \mathcal{C}$, dann gibt es μ, c sodaß

$$f(z) = ic + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta), \ z \in \mathbb{D}. \tag{4.7}$$

Dieses Integral ist auch für $|z| > 1$ wohldefiniert und analytisch in z. Die rechte Seite von (4.7) stellt also eine in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ analytische Funktion dar. Wir zeigen das diese gerade gleich F aus (4.6) ist: Da für $\zeta \in \mathbb{T}$ stets $(\overline{\zeta})^{-1} = \zeta$ ist, gilt

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\zeta}}{\frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta}} = -\overline{\left(\frac{\zeta + \frac{1}{\overline{z}}}{\zeta - \frac{1}{\overline{z}}}\right)}.$$

Für $|z| > 1$ gilt also

$$ic + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) = -\overline{\left(ic + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta - \frac{1}{\overline{z}}}{\zeta - \frac{1}{\overline{z}}} \, d\mu(\zeta)\right)} = -\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Wir betrachten den Kern L_F. Dieser ist durch die Vorschrift (4.5) definiert für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, $z\overline{w} \neq 1$. Nun gilt für solche z, w

$$L_F(w,z) = -\frac{1}{\overline{w}} \frac{F(z) - F(\frac{1}{\overline{w}})}{z - \frac{1}{\overline{w}}},$$

also ist $\lim_{z \to \frac{1}{\overline{w}}} L_F(w,z) = -(\overline{w})^{-1} F'(\frac{1}{\overline{w}}$. Also hat L_F eine Fortsetzung zu einer in den Variablen z, w einzeln stetigen Funktion $L_F : \mathbb{C}\setminus\mathbb{T} \times \mathbb{C}\setminus\mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Aufgrund der Stetigkeit genügt es zu zeigen, daß L_F auf der Menge $\{z, w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{T} : z\overline{w} \neq 1\}$ ein positiv definiter Kern ist.

Die Eigenschaft $L_F(z,w) = \overline{L_F(w,z)}$ ist klar aus der Definition (4.5). Es gilt

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \overline{\left(\frac{\zeta + w}{\zeta - w}\right)} = \frac{(\zeta + z)\overline{(\zeta - w)} + (\zeta - z)\overline{(\zeta + w)}}{(\zeta - z)\overline{(\zeta - w)}} = \frac{2(1 - z\overline{w})}{(\zeta - z)\overline{(\zeta - w)}}$$

also erhalten wir vermöge der Integraldarstellung (4.7) von F das

$$L_F(w,z) = 2 \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{(\zeta - z)\overline{(\zeta - w)}} \, d\mu(\zeta)\,.$$

Seien nun $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ sodaß stets $z_i\overline{z_j} \neq 1$, und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ gegeben.

Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_F(z_j, z_i)\xi_i\overline{\xi_j} = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\xi_i\overline{\xi_j}}{(\zeta - z_i)\overline{(\zeta - z_j)}} \, d\mu(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \Big| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\zeta - z_i} \Big|^2 \, d\mu(\zeta) \geq 0\,.$$

❑

Analoge Aussagen gelten für Funktionen zwischen anderen Kreisen. Diese erhält man durch Transformation mittels gebrochenen linearen Abbildungen. Zum Beispiel betrachten wir die Menge aller in $\mathbb{C}^+$ analytischen Funktionen die durch 1 beschränkt sind. Sei wieder α die gebrochen lineare Abbildung

$$\alpha(z) := i\frac{1+z}{1-z},$$

die $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C}^+$ abbildet.

4.3.3 Proposition. *Sei f analytisch in $\mathbb{C}^+$. Dann gilt $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}^+$, genau dann wenn*

$$Q_f(w,z) := i\frac{1 - f(z)\overline{f(w)}}{z - \overline{w}}$$

ein auf $\mathbb{C}^+$ positiv definiter Kern ist. Definiert man in diesem Fall

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & , \quad z \in \mathbb{C}^+ \\ (\overline{f(\overline{z})})^{-1} & , \quad z \in \mathbb{C}^-, f(\overline{z}) \neq 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

so ist der Kern Q_F positiv definit auf $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C}^- : f(\overline{z}) = 0\})$.

Beweis. Betrachte die Funktion $g := (-i\alpha) \circ f \circ \alpha$. Dann gilt $f(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathbb{D}$ genau dann wenn $g(\mathbb{D}) \subseteq \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 0\} = -i\mathbb{C}^+$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^+ \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "-i\alpha"] \\
\mathbb{D} \arrow[r, dotted, "g"'] & -i\mathbb{C}^+
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen das sich die entsprechenden Kerne von f und g ineinander transformieren. Dann bemerke das gilt

$$\alpha(a) - \overline{\alpha(b)} = i\frac{1+a}{1-a} + i\frac{1+\overline{b}}{1-\overline{b}} = 2i\frac{1-a\overline{b}}{(1-a)(1-\overline{b})} \,.$$

Es folgt

$$g(z) + \overline{g(w)} = \frac{\alpha}{i}f(\alpha z) + \overline{\frac{\alpha}{i}f(\alpha w)} = 2\frac{1-f(\alpha z)\overline{f(\alpha w)}}{(1-f(\alpha z))(1-\overline{f(\alpha w)})} \,,$$

und

$$1 - z\overline{w} = (\alpha(z) - \overline{\alpha(w)})\frac{(1-z)(1-\overline{w})}{2i} \,,$$

insgesamt also

$$L_g(w,z) = \frac{2}{(1-z)(1-f(\alpha z))}Q_f(\alpha w, \alpha z)\frac{2}{(1-\overline{w})(1-\overline{f(\alpha w)})} \,.$$

Daraus folgt das L_g und Q_f beide gemeinsame positiv definit sind, oder eben nicht, denn für $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_g(z_j, z_i)\xi_i\overline{\xi_j} = \sum_{i,j=1}^{n} Q_f(\alpha z_j, \alpha z_i)\frac{\xi_i}{(1-z_i)(1-f(\alpha z_i))}\overline{\Big(\frac{\xi_j}{(1-z_j)(1-f(\alpha z_j))}\Big)}$$

Sei G die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ mittels (4.6) aus g definierte Funktion. Wir zeigen das $G = \frac{\alpha}{i} \circ F \circ \alpha$ gilt wobei F wie (4.8) definiert ist. Dazu bemerke das gilt

$$\alpha(\frac{1}{\overline{a}}) = i\frac{1+\frac{1}{\overline{a}}}{1-\frac{1}{\overline{a}}} = i\frac{\overline{a}+1}{\overline{a}-1} = \overline{\alpha(a)} \,.$$

Wir erhalten für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$

$$G(z) = -\overline{g(\frac{1}{\overline{z}})} = -\overline{\frac{\alpha}{i}(f(\alpha(\frac{1}{\overline{z}})))} = \frac{1}{i}\alpha\Big(\frac{1}{\overline{f(\overline{\alpha z})}}\Big) = \frac{\alpha}{i} \circ F \circ \alpha \,.$$

❑

Kapitel 5

DeBranges Theorie

5.1 DeBranges Räume ganzer Funktionen

Eine Funktion heißt *ganz*, wenn sie auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und analytisch ist.

5.1.1 Definition. Sei $\mathcal{HB}$ die Menge aller ganzen Funktionen E die in $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ keine Nullstellen haben und für die gilt:

$$|E(\overline{z})| \leq |E(z)|,\ z \in \mathbb{C}^+ .$$

Die Menge $\mathcal{HB}$ heißt die *Hermite-Biehler Klasse*.

Ist F eine ganze Funktion, so bezeichnen wir mit $F^\#$ die ganze Funktion die definiert ist als $F^\#(z) := \overline{F(\overline{z})}$, $z \in \mathbb{C}$.

5.1.2 Satz. *Sei $E \in \mathcal{HB}$ und definiere*

$$K(w,z) := \begin{cases} \frac{E(z)\overline{E(w)} - E^\#(z)E(\overline{w})}{-2\pi i(z-\overline{w})} & ,\ z \neq \overline{w} \\ \frac{i}{2\pi}\Big(E'(\overline{w})\overline{E}(w) - \overline{E'(w)}E(\overline{w})\Big) & ,\ z = \overline{w} \end{cases}$$

Dann ist K ein positiv definiter Kern auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und der von ihm erzeugte rK-HR besteht aus ganzen Funktionen. Wir bezeichnen diesen Raum mit $\mathcal{H}(E)$ und sprechen von dem von E erzeugten deBranges Raum. *Die Abbildung $F \mapsto (E^{-1}F)|_{\mathbb{C}^+}$ ist eine Isometrie von $\mathcal{H}(E)$ auf $H^2(\mathbb{C}^+) \ominus \frac{E^\#}{E} H^2(\mathbb{C}^+)$.*

Beweis. Betrachte die Funktion $M(z) := \frac{E^\#(z)}{E(z)}$. Diese ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Nst}(E)$, wobei $\mathrm{Nst}(E)$ die Menge aller Nullstellen von E bezeichnet. Da E ganz ist, ist dieses Menge diskret. Weiters sind die Nullstellen von M genau $\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \mathrm{Nst}(E)\}$. Betrachte den Kern

$$Q_{M|_{\mathbb{C}^+}}(w,z) = i\frac{1 - \frac{E^\#(z)}{E(z)}\overline{\left(\frac{E^\#(w)}{E(w)}\right)}}{2\pi(z-\overline{w})} .$$

Wegen $E \in \mathcal{HB}$ und Proposition 4.3.3 ist dieser positiv definit auf $\mathbb{C}^+$. Setzt man M wie in (4.8) durch Symmetrie fort

$$\tilde{M} := \begin{cases} M(z) & ,\ z \in \mathbb{C}^+ \\ M^\#(z)^{-1} & ,\ z \in \mathbb{C}^-, \overline{z} \notin \mathrm{Nst}(M) \end{cases}$$

so ist der Kern $Q_{\tilde{M}}$ positiv definit auf $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- \setminus \{z \in \mathbb{C}^- : \overline{z} \in \mathrm{Nst}(M)\} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- \setminus \mathrm{Nst}(E)$. Nun gilt

$$\frac{1}{M^\#(z)} = \Big[\big(\frac{E^\#(z)}{E(z)} \big)^\# \Big]^{-1} = \Big[\frac{E(z)}{E^\#(z)} \Big]^{-1} = M(z), \; z, \overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Nst}(E) .$$

also ist $\tilde{M} = M|_{\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- \setminus \mathrm{Nst}(E)}$. Daher ist Q_M positiv definit auf $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^- \setminus \mathrm{Nst}(E)$ und, da Q_M wegen der Analytizität von M insbesondere stetig in den Variablen w und z einzeln ist, folgt mit Proposition 4.2.7, (iv), das Q_M auf ganz $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Nst}(E)$ positiv definit ist. Nun gilt

$$K(w,z) = E(z) Q_M(w,z) \overline{E(w)}, \; z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Nst}(E) , \tag{5.1}$$

also ist nach Proposition 4.2.7, (i), K ein positiv definiter Kern auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Nst}(E)$.

Für jedes feste $w \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $A_w(z) := E(z)\overline{E(w)} - E^\#(z)E(\overline{w})$ ganz in der Variablen z und hat an der Stelle $z = \overline{w}$ eine Nullstelle. Daher ist für festes w die Funktion $K(w,z)$, die ja gerade gegeben ist als

$$K(w,z) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi} \frac{A_w(z)}{z - \overline{w}} & , \; z \neq \overline{w} \\ \frac{i}{2\pi} A_w'(\overline{w}) & , \; z = \overline{w} \end{cases}$$

ganz in der Variablen z. Beachte hier das $E^\#(z)' = E'(z)^\#$. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von K gilt genauso dass für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $w \mapsto K(\overline{w}, z)$ ganz ist. Insbesondere ist also $K(w,z)$ stetig in den Variablen z und w einzeln, und wir erhalten aus Proposition 4.2.7, (iv), das K auf $\mathbb{C}$ positiv definit ist.

Wir zeigen das $K(w,z)$ lokal beschränkt ist: Sei $w_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Nach dem Lemma von Schwarz gilt für jedes feste $w \in \mathbb{C}$

$$\sup_{\{z : |z-w| \leq 2\}} |K(w,z)| = \frac{1}{4\pi} \sup_{\{z : |z-w| = 2\}} |A_w(z)| .$$

Nun ist die Funktion $A_w(z)$ stetig in den beiden Variablen (w,z) gleichzeitig, also gilt

$$\sup_{\{(w,z) : |w-w_0| \leq 1, |z-w_0| \leq 1\}} |K(w,z)| \leq \sup_{\{w : |w-w_0| \leq 1\}} \Big(\sup_{\{z : |z-w| \leq 2\}} |K(w,z)| \Big) \leq$$

$$\leq \sup_{\{w : |w-w_0| \leq 1\}} \Big(\frac{1}{4\pi} \sup_{\{z : |z-w| = 2\}} |A_w(z)| \Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \sup_{\{(w,z) : |w-w_0| \leq 1, |z-w_0| \leq 3\}} |A_w(z)| < \infty .$$

Wir sehen insbesondere das $K(w,w)$ lokal beschränkt ist. Nach Satz 4.2.3 besteht $\mathcal{H}_K$ aus ganzen Funktionen.

Wegen der Beziehung (5.1) ist laut Proposition 4.2.7, (i) und (iii), die Abbildung $F \mapsto \frac{F}{E}\big|_{\mathbb{C}^+}$ eine Isometrie von $\mathrm{cls}\{K(w,.) : w \in \mathbb{C}^+\} \subseteq \mathcal{H}_K$ auf $\mathcal{H}_{Q_{M|_{\mathbb{C}^+}}}$. Da $\mathcal{H}_K$ aus ganzen Funktionen besteht ist $\mathrm{cls}\{K(w,.) : w \in \mathbb{C}^+\} = \mathcal{H}_K$ und nach Korollar 4.2.9 ist $\mathcal{H}_{Q_{M|_{\mathbb{C}^+}}} = H^2(\mathbb{C}^+) \ominus \frac{E^\#}{E} H^2(\mathbb{C}^+)$.

❑

5.1.3 Bemerkung. Wir wollen explizit festhalten, das gilt:

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}(E)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{F(t)}{E(t)}\Big|^2 \, dt, \ F \in \mathcal{H}(E) .$$

5.1.4 Korollar. *Ist $F \in \mathcal{H}(E)$, so ist auch $F^\# \in \mathcal{H}(E)$. Es gilt*

$$\big(F^\#, G^\#\big) = (G, F), \ F, G \in \mathcal{H}(E) .$$

Beweis. Wie man aus der Definition von $K(w,z)$ sieht gilt

$$K(\overline{w}, \overline{z}) = K(z, w) = \overline{K(w,z)} ,$$

und damit $K(w,.)^\# = K(\overline{w}, .)$. Es folgt

$$\big(K(w,.)^\#, K(w',.)^\#\big) = \big(K(\overline{w},.), K(\overline{w'},.)\big) = K(\overline{w}, \overline{w'}) =$$
$$= K(w', w) = \big(K(w',.), K(w,.)\big) ,$$

und damit das $F \mapsto F^\#$ eine konjugiert-lineare und anti-isometrische Involution von $\operatorname{span}\{K(w,.) : w \in \mathbb{C}\}$ auf sich ist. Diese besitzt eine stetige Fortsetzung zu einer konjugiert-linearen und anti-isometrischen Involution von $\mathcal{H}(E)$ auf sich. Da alle Punktauswertungen stetig sind, muß diese Fortsetzung durch $F \mapsto F^\#$ gegeben sein.

❏

5.1.5 Korollar. *Eine ganze Funktion F gehört genau dann zu $\mathcal{H}(E)$, wenn $\frac{F}{E}$ und $\frac{F^\#}{E}$ beide in $H^2(\mathbb{C}^+)$ liegen.*

Beweis. Die Abbildung $f \mapsto \frac{E^\#(t)}{E(t)} f(t)$ ist eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ auf sich.

Angenommen es ist F eine ganze Funktion mit der Eigenschaft das $E^{-1}F, E^{-1}F^\# \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Dann ist nach Korollar 3.3.6

$$\overline{\Big(\frac{F^\#(t)}{E(t)}\Big)} = \frac{F(t)}{E^\#(t)} \perp H^2(\mathbb{C}^+) ,$$

und daher

$$\frac{F(t)}{E(t)} = \frac{E^\#(t)}{E(t)} \frac{F(t)}{E^\#(t)} \perp \frac{E^\#(t)}{E(t)} H^2(\mathbb{C}^+) .$$

Es folgt wegen Satz 5.1.2 das $F \in \mathcal{H}(E)$.

Umgekehrt, sei $F \in \mathcal{H}(E)$. Dann ist nach Satz 5.1.2 $E^{-1}F \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Nach Korollar 5.1.4 ist auch $F^\# \in \mathcal{H}(E)$ und damit auch $E^{-1}F^\# \in H^2(\mathbb{C}^+)$.

❏

5.1.6 Proposition. *Ist $F \in \mathcal{H}(E)$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $F(z_0) = 0$, dann ist auch*

$$\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} F(z) \in \mathcal{H}(E) .$$

Ist zusätzlich $G \in \mathcal{H}(E)$ mit $G(z_0) = 0$, dann gilt

$$\Big(\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} F(z), \frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} G(z)\Big) = (F, G) .$$

Ist $t \in \mathbb{R}$ und $F \in \mathcal{H}(E)$ mit $F(t) = 0$, so ist auch

$$\frac{F(z)}{z - t} \in \mathcal{H}(E) .$$

Diese Aussage folgt aus

5.1.7 Lemma.

(i) *Ist* $\phi \in \mathfrak{H}^\infty(\mathbb{C}^+)$, *so ist*

$$\phi H^2(\mathbb{C}^+) \subseteq H^2(\mathbb{C}^+),\ \phi\mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+).$$

(ii) *Ist* $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$, *so ist* $zf(z) \in \mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+)$.

(iii) *Ist* $f \in \mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+)$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}^+$ *mit* $f(z_0) = 0$, *dann gehört die Funktion*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z-z_0} & , \ z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , \ z = z_0 \end{cases}$$

zu $H^2(\mathbb{C}^+)$. *Die gleiche Schlussfolgerung gilt, wenn* $z_0 \in \mathbb{R}$ *und* $(z-z_0)^{-1}f(z)$ *in einer Umgebung von* z_0 *beschränkt ist.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar wegen der Definition von $H^2(\mathbb{C}^+)$ bzw. der Charakterisierung Korollar 3.2.5. Die zweite Aussage folgt da $\frac{x+iy}{x^2+(y+1)^2}$ beschränkt ist, vgl. Lemma 3.3.3.

Sei $f \in \mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+)$ und $z_0 \in \mathbb{C}^+$ mit $f(z_0) = 0$ gegeben. Dann ist die Funktion $\tilde{f}$ analytisch in $\mathbb{C}^+$. Wähle $r > 0$ so daß $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \mathbb{C}^+$. Dann ist die Funktion $\tilde{f}$ auf $D(z_0, r)$ beschränkt, z.B. $\leq M_1$. Die Funktion

$$\frac{x^2 + (y+1)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

wobei $z_0 = x_0 + iy_0$, ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ stetig und strebt für $(x, y) \to \infty$ gegen 1. Also ist sie auf $\mathbb{R}^2 \setminus D(z_0, r)$ beschränkt, z.B. $\leq M_2$. Sei $y > 0$ gegeben, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(x+iy)}{x+iy-z_0}\right|^2 dx =$$

$$= \int_{\{x:(x,y)\in D(z_0,r)\}} \left|\frac{f(x+iy)}{x+iy-z_0}\right|^2 dx + \int_{\{x:(x,y)\notin D(z_0,r)\}} \left|\frac{f(x+iy)}{x+iy-z_0}\right|^2 dx.$$

Das erste Integral schätzen wir ab mit $2rM_1^2$, das zweite Integral durch

$$\int_{\{x:(x,y)\notin D(z_0,r)\}} \left|\frac{f(x+iy)}{x+iy-z_0}\right|^2 dx =$$

$$= \int_{\{x:(x,y)\notin D(z_0,r)\}} \frac{|f(x+iy)|^2}{x^2+(y+1)^2} \frac{x^2+(y+1)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} dx \leq$$

$$\leq M_2 \int_{\{x:(x,y)\notin D(z_0,r)\}} \frac{|f(x+iy)|^2}{x^2+(y+1)^2} dx \leq M_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+iy)|^2}{x^2+(y+1)^2} dx.$$

Insgesamt folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(x+iy)}{x+iy-z_0}\right|^2 dx \leq 2rM_1^2 + M_2 \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+iy)|^2}{x^2+(y+1)^2} dx < \infty$$

und wir sehen das $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Im Fall das $z_0 \in \mathbb{R}$ verwendet man die gleiche Abschätzung.

❑

Beweis. (von Proposition 5.1.6) Sei $F \in \mathcal{H}$ und $z_0 \in \mathbb{C}^+$ mit $F(z_0) = 0$ gegeben. Dann ist $E^{-1}(z)F(z) \in H^2(\mathbb{C}^+)$ und wegen Lemma 5.1.7, (ii), daher $(z - \overline{z_0})E^{-1}(z)F(z) \in \mathfrak{H}^2(\mathbb{C}^+)$. Wegen Lemma 5.1.7, (iii), folgt

$$\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} \frac{F(z)}{E(z)} \in H^2(\mathbb{C}^+) .$$

Es gilt auch $E^{-1}(z)F^{\#}(z) \in H^2(\mathbb{C}^+)$, und wegen Lemma 5.1.7, (i),

$$E^{-1}(z)\Big(\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} F(z)\Big)^{\#} = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \frac{F^{\#}(z)}{E(z)} \in H^2(\mathbb{C}^+) .$$

Der Fall das $z_0 \in \mathbb{C}^-$ liegt wird genauso behandelt. Die Isometriebedingung folgt wegen Bemerkung 5.1.3.

Ist $t \in \mathbb{R}$, so beachte man das für $F \in \mathcal{H}(E)$ mit $F(t) = 0$ die Funktion $E^{-1}F$ analytisch in einer offenen Umgebung von $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ und bei t eine Nullstelle hat. Daher ist die in diesem Fall nötige Voraussetzung in Lemma 5.1.7, (iii), erfüllt.

❑

5.1.8 Korollar. *Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und seien $F, G \in \mathcal{H}(E)$, $F(w) = G(\overline{w}) = 0$. Dann gilt*

$$\big(F(z), \frac{G(z)}{z - \overline{w}}\big) = \big(\frac{F(z)}{z - w}, G(z)\big) .$$

Beweis. Es ist

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{w - \overline{w}}\big(\frac{z - \overline{w}}{z - w} - 1\big) .$$

Also folgt

$$\big(\frac{F(z)}{z - w}, G(z)\big) = \frac{1}{w - \overline{w}}\Big[\big(\frac{z - \overline{w}}{z - w} F(z), G(z)\big) - (F(z), G(z))\Big] ,$$

sowie

$$\big(F(z), \frac{G(z)}{z - \overline{w}}\big) = \frac{1}{w - \overline{w}}\Big[\big(F(z), \frac{z - w}{z - \overline{w}} G(z)\big) - (F(z), G(z))\Big] .$$

Setzt man $\tilde{F}(z) := \frac{z - \overline{w}}{z - w} F(z)$, so ist das erste innere Produkt auf der rechten Seite der ersten Relation gleich $(\tilde{F}(z), G(z))$ und das erste innere Produkt auf der rechten Seite der zweiten Relation gleich

$$\Big(\frac{z - w}{z - \overline{w}} \tilde{F}(z), \frac{z - w}{z - \overline{w}} G(z)\Big) .$$

Die Behauptung folgt nun aus Proposition 5.1.6.

❑

Wir erhalten eine axiomatische Charakterisierung von deBranges Räumen.

5.1.9 Satz. *Sei $E \in \mathcal{H}B$ und sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$ der von E erzeugte deBranges Raum. Dann gilt*

(dB1) *$\mathcal{H}$ ist ein rK-HR auf $\mathbb{C}$ dessen Elemente ganze Funktionen sind.*

(dB2) *Ist $F \in \mathcal{H}$, dann ist auch $F^{\#} \in \mathcal{H}$ und es gilt*

$$(F^{\#}, G^{\#}) = (G, F),\ \ F, G \in \mathcal{H}\,.$$

(dB3) *Ist $F \in \mathcal{H}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $F(z_0) = 0$, dann ist auch*

$$\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} F(z) \in \mathcal{H}\,.$$

Ist zusätzlich $G \in \mathcal{H}$ mit $G(z_0) = 0$, dann gilt

$$\Big(\frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} F(z), \frac{z - \overline{z_0}}{z - z_0} G(z)\Big) = (F, G)\,.$$

Weiters gilt

(Z) *Ist $t \in \mathbb{R}$ und $F \in \mathcal{H}$ mit $F(t) = 0$, so ist auch*

$$\frac{F(z)}{z - t} \in \mathcal{H}\,.$$

Hat umgekehrt ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ die Eigenschaften (dB1)-(dB3) *und* (Z)*, so existiert eine Funktion $E \in \mathcal{H}B$ sodaß $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$. Dann ist $\mathcal{H}$ nach Satz 5.1.2 ein rK-HR dessen Elemente ganze Funktionen sind. Die Gültigkeit von (dB2) haben wir in Korollar 5.1.4 bewiesen, die von (dB3) und (Z) in Proposition 5.1.6.

Sei also ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben, der die Eigenschaften (dB1)-(dB3) und (Z) hat. Bezeichne mit $K(w, z)$ seinen reproduzierenden Kern.

Zunächst bemerke das gilt

$$(F, K(w, .)^{\#}) = (K(w, .), F^{\#}) = F(\overline{w}),\ \ F \in \mathcal{H}\,.$$

Also folgt $K(w, .)^{\#} = K(\overline{w}, .)$, d.h. $K(\overline{w}, \overline{z}) = K(z, w)$.

Wegen der Eigenschaft (dB3) existiert zu jedem Punkt $w_0 \in \mathbb{C}^+$ eine Funktion $F \in \mathcal{H}$ mit $F(w_0) \neq 0$. Also ist $K(w_0, .) \neq 0$ und daher $K(w_0, w_0) > 0$. Wähle $w_0 \in \mathbb{C}^+$ und definiere

$$E(z) := \sqrt{\frac{\pi}{K(w_0, w_0)\operatorname{Im} w_0}}(\overline{w_0} - z)K(w_0, z)\,,$$

sowie

$$\tilde{K}(w, z) := i\frac{E(z)\overline{E(w)} - E^{\#}(z)E(\overline{w})}{2\pi(z - \overline{w})}\,.$$

Eine Rechnung zeigt das

$$\tilde{K}(w, z) = \frac{i}{2K(w_0, w_0)\operatorname{Im} w_0}\Big[\frac{|w_0|^2 - \overline{w}(w_0 + \overline{w_0}) + z\overline{w}}{z - \overline{w}}(K(w_0, z)\overline{K(w_0, w)} -$$

$$-K(\overline{w_0}, z)\overline{K(\overline{w_0}, w)}) - w_0 K(w_0, z)\overline{K(w_0, w)} + \overline{w_0} K(\overline{w_0}, z)\overline{K(\overline{w_0}, w)}\Big].$$

Sei $F \in \mathcal{H}$ und $w \in \mathbb{C}^+$ mit $F(w) = 0$. Dann gilt

$$2iK(w_0, w_0)\operatorname{Im} w_0\big(F, \tilde{K}(w, .)\big) =$$

$$= \Big(F(z), \frac{|w_0|^2 - \overline{w}(w_0 + \overline{w_0}) + z\overline{w}}{z - \overline{w}}\big(K(w_0, z)\overline{K(w_0, w)} - K(\overline{w_0}, z)\overline{K(\overline{w_0}, w)}\big)\Big) -$$
$$-\overline{w_0}K(w_0, w)F(w_0) + w_0 K(\overline{w_0}, w)F(\overline{w_0})\,.$$

Das innere Produkt ist wegen Korollar 5.1.8 gleich

$$= \Big(\frac{|w_0|^2 - w(w_0 + \overline{w_0}) + zw}{z - w}F(z), K(w_0, z)\overline{K(w_0, w)} - K(\overline{w_0}, z)\overline{K(\overline{w_0}, w)}\Big) =$$

$$= \frac{|w_0|^2 - w(w_0 + \overline{w_0}) + w_0 w}{w_0 - w}F(w_0)K(w_0, w) -$$
$$- \frac{|w_0|^2 - w(w_0 + \overline{w_0}) + \overline{w_0} w}{\overline{w_0} - w}F(\overline{w_0})K(\overline{w_0}, w)\,,$$

und wir sehen das $(F, \tilde{K}(w, .)) = 0$. Da $\{F \in \mathcal{H}(E) : F(w) = 0\} = \operatorname{span}\{K(w, .)\}^\perp$ ist, folgt $\tilde{K}(w, .) = c(w)K(w, .)$.

Es gilt

$$c(w)K(w, w_0) = \tilde{K}(w, w_0) = \overline{\tilde{K}(w_0, w)} = \overline{c(w_0)}K(w, w_0)\,,$$

also hängt $c(w)$ nicht von w ab. Vergleicht man $\tilde{K}(w_0, w_0)$ und $K(w_0, w_0)$, so erhält man $c(w) = 1$. Es gilt also $K(w, z) = \tilde{K}(w, z)$ für $(w, z) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}$. Wegen der Symmetrie von K bzw. $\tilde{K}$ folgt $K(w, z) = \tilde{K}(w, z)$ für $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^+$ und wegen dem Identitätssatz daher für $(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Die Tatsache das $\tilde{K}$ ein positiv definiter Kern insbesondere auf $\mathbb{C}^+$ ist impliziert wegen Proposition 4.3.3 das $|E^{-1}(z)E^\#(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}^+$. Wegen dem Axiom (Z) und Bemerkung 5.1.3 kann E keine reellen Nullstellen haben. Also haben wir $E \in \mathcal{H}B$.

❑

5.2 Struktur der Klasse $\mathcal{H}B$

****

5.3 Der Multiplikationsoperator in $\mathcal{H}(E)$

5.3.1 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum. Wir bezeichnen mit S den Multiplikationsoperator auf $\mathcal{H}$

$$(SF)(z) := zF(z)\,,$$
$$\operatorname{dom} S := \{F \in \mathcal{H} : zF(z) \in \mathcal{H}\}\,.$$

5.3.2 Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum. Dann ist der Multiplikationsoperator S ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit $r(S) = \mathbb{C}$. Genauer gilt*

$$\operatorname{ran}(S - w) = \{G \in \mathcal{H} : G(w) = 0\}, w \in \mathbb{C}\,,$$

$$\operatorname{ran}(S - w)^\perp = \operatorname{span}\{K(w, .)\}, w \in \mathbb{C}\,,$$

insbesondere ist $\dim \operatorname{ran}(S - w) = 1$, $w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Da $\mathcal{H}$ ein rK-HR ist, ist S abgeschlossen, denn ist $F_n \to F$ und $SF_n \to G$, so folgt das für jedes feste $w \in \mathbb{C}$ gilt $F_n(w) \to F(w)$, $wF_n(w) \to G(w)$, also $G = zF$. Daher ist $F \in \operatorname{dom} S$ und $SF = G$.

Um zu sehen das S symmetrisch ist, schreibe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$. Ist $F, G \in \operatorname{dom} S$, so gilt

$$(F, SG) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\overline{(tG(t))}}{|E(t)|^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tF(t))\overline{G(t)}}{|E(t)|^2} dt =$$

$$= (SF, G) .$$

Ist $w \in \mathbb{C}$, so gilt $(S - w)F(z) = zF(z) - wF(z) = (z - w)F(z)$. Wir sehen das $S - w$ injektiv ist und das $\operatorname{ran}(S - w) \subseteq \{G \in \mathcal{H} : G(w) = 0\}$. Ist umgekehrt $G \in \mathcal{H}$, $G(w) = 0$, so ist nach Proposition 5.1.6 auch

$$F(z) := \frac{G(z)}{z - w} \in \mathcal{H} .$$

Offenbar gilt $(S-w)F = G$. Da $G \perp K(w, .)$ genau dann gilt, wenn $G(w) = 0$ ist, folgt $\operatorname{ran}(S - w) = \operatorname{span}\{K(w, .)\}^{\perp}$. Insbesondere ist $\operatorname{ran}(S - w)$ abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $(S - w)^{-1} : \operatorname{ran}(S - w) \to \mathcal{H}$ beschränkt, d.h. $w \in r(S)$.

❑

Von Interesse ist das Studium der verallgemeinerten Resolventen von S, das sind die Resolventen $(T - w)^{-1}$ von Erweiterungen von S. Insbesondere jene von selbstadjungierten Erweiterungen.

5.3.3 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum. Eine ganze Funktion C heißt assoziert zu $\mathcal{H}$, wenn $C(z) = F(z) + zG(z)$ für gewisse $F, G \in \mathcal{H}$. Die Menge aller assozierten Funktionen bezeichnen wir mit

$$\operatorname{Assoc} \mathcal{H} = \mathcal{H} + z\mathcal{H} .$$

Offenbar ist $\operatorname{Assoc} \mathcal{H}$ ein linearer Raum der $\mathcal{H}$ enthält und bezüglich $F \mapsto F^{\#}$ abgeschlossen ist.

5.3.4 Lemma. *Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$ ein dB-Raum. Es sind äquivalent:*

(i) $C \in \operatorname{Assoc} \mathcal{H}$

(ii)

$$\frac{C(z)}{E(z)}, \frac{C^{\#}(z)}{E(z)} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{C}^+) .$$

(iii) Für alle $D \in \operatorname{Assoc} \mathcal{H}$, $w \in \mathbb{C}$, *gilt*

$$\frac{C(z)D(w) - D(z)C(w)}{z - w} \in \mathcal{H} . \tag{5.2}$$

(iv) Es existiert $D \in \operatorname{Assoc} \mathcal{H}$, $w \in \mathbb{C}$, *mit* $D(w) \neq 0$ *sodaß* (5.2) *gilt.*

Beweis. Wie wir im Beweis von Lemma 3.3.3 gesehen haben, ist die Abbildung $f(z) \mapsto f(z)(z+i)$ eine Bijektion von $H^2(\mathbb{C}^+)$ auf $\mathbb{H}^2(\mathcal{C}^+)$. Ist also $C \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$, dann ist $C = F + zG = (F - iG) + (z+i)G$ mit gewissen $F, G \in \mathcal{H}$. Es folgt

$$\frac{C}{E} = \frac{F - iG}{E} + (z+i)\frac{G}{E} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{C}^+)\,.$$

Genauso erhält man

$$\frac{C^\#}{E} = \frac{F^\# - iG^\#}{E} + (z+i)\frac{G^\#}{E} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{C}^+)\,.$$

Also gilt $(i) \Rightarrow (ii)$.

Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sei $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$ und $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist $\frac{C(z)D(w)-D(z)C(w)}{E(z)}$ nach der bereits bewiesenen Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ein Element von $\mathbb{H}^2(\mathbb{C}^+)$. Mit Lemma 5.1.7, (iii), folgt das

$$\frac{C(z)D(w) - D(z)C(w)}{(z-w)E(z)} \in H^2(\mathbb{C}^+)\,.$$

Genauso erhält man

$$\frac{C^\#(z)\overline{D(w)} - D^\#(z)\overline{C(w)}}{(z-\overline{w})E(z)} \in H^2(\mathbb{C}^+)\,.$$

Die Implikation $(iii) \Rightarrow (iv)$ ist trivial. Wir zeigen $(iv) \Rightarrow (i)$. Setze

$$\frac{C(z)D(w) - D(z)C(w)}{z-w} =: H(z) \in \mathcal{H}\,.$$

Dann ist $(z-w)H(z) \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$ und daher auch

$$C(z) = \frac{1}{D(w)}\Big(C(w)D(z) + (z-w)H(z)\Big) \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}\,.$$

❏

5.3.5 Korollar. *Es gilt* $E \in (\operatorname{Assoc}\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}$.

Beweis. Wegen (ii) des obigen Lemmas ist $E \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$. Wegen $1 \notin H^2(\mathbb{C}^+)$ ist $E\mathcal{H}$.

❏

5.3.6 Korollar. *Sei* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum der den Axiomen* $(dB1)-(dB3)$ *genügt. Dann gilt* (Z) *genau dann, wenn*

$$(Z')\ \textit{Für jedes } t \in \mathbb{R} \textit{ existiert } F \in \mathcal{H} \textit{ mit } F(t) \neq 0\,.$$

Beweis. Hilt (Z), so klarerweise auch (Z'). Es gelte umgekehrt (Z'). Sei $t \in \mathbb{R}$ und $F \in \mathcal{H}$ mit $F(t) = 0$ gegeben. Wähle $G \in \mathcal{H}$, $G(t) \neq 0$, dann gilt

$$G(t)\frac{F(z)}{z-t} = \frac{F(z)G(t) - G(z)F(t)}{z-t} \in \mathcal{H}\,.$$

❏

5.3.7 Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum. Ist $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$, $D \neq 0$ so existiert eine Lineare Relation $T_D \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit $S \subseteq T_D, \rho(T_D) = \{w \in \mathbb{C} : D(w) \neq 0\}$, und*

$$(T_D - w)^{-1}F(z) = \frac{F(z) - \frac{D(z)}{D(w)}F(w)}{z-w}, w \in \rho(T_D)\,.$$

Dabei gilt $T_{D_1} = T_{D_2}$ genau dann, wenn D_1 und D_2 linear abhänigig sind. Ist umgekehrt $T \subseteq \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ eine lineare Relation mit $S \subseteq T$ und $\rho(T) \neq \emptyset$, so existiert $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$, $D + 0$, sodaß $T = T_D$.

Es gilt $T_D(0) \neq \{0\}$ genau dann, wenn $D \in \mathcal{H}$. In diesem Fall ist $T_D(0) = \operatorname{span}\{D\}$.

Beweis. Sei $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}, D \neq 0$. Dann ist für jedes $e \in \mathbb{C}$ mit $D(w) \neq 0$ die Abbildung

$$R(w) : F \mapsto \frac{F(z) - \frac{D(z)}{D(w))}F(w)}{z-w}$$

eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ in sich. Da punktauswerten stetig ist, ist ihr graph abgeschlossen. Also ist $R(w)$ beschränkt.

Wir zeigen das $R(w)$ der Resolventengleichung genügt. Seien $w, w_o \in \mathbb{C}$, $w \neq w_0$, sodaß $D(w), D(w_0) \neq 0$, und sei $G \in \mathcal{H}$. Es gilt

$$\Big(I + (w-w_0)R(w)\Big)G(z) = G(z) + \underbrace{(w-w:0)}_{=-(z-w)+(z-w_0)} \frac{G(z) - \frac{D(z)}{D(w)}G(w)}{z-w} =$$

$$= G(z) - \Big(G(z) - \frac{D(z)}{D(w)}G(w)\Big) + \frac{z-w_0}{z-w}\Big(G(z) - \frac{D(z)}{D(w)}G(w)\Big) =$$

$$= \frac{z-w_0}{z-w}G(z) + \frac{D(z)}{D(w)}G(w)\underbrace{\Big(1 - \frac{z-w_0}{z-w}\Big)}_{=-\frac{w-w_0}{z-w}}$$

Ist nun $G = R(w_0)F$, so erhält man

$$(I + (w-w_0)R(w))R(w_0)F(z) = \frac{z-w_0}{z-w}\,\frac{F(z) - \frac{D(z)}{D(w_0}F(w_0)}{z-w_0} -$$

$$-\frac{D(z)}{D(w)}\,\frac{F(w) - \frac{D(w)}{D(w_0)}F(w_0)}{w-w_0}\,\frac{w-w_0}{z-w} = \frac{F(z) - \frac{D(z)}{d(w}F(w)}{z-w} = R(w)F(z)\,.$$

Also existiert eine lineare Relation $T_D \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit $\rho(T_D) \supseteq \{w \in \mathbb{C} : D(w) \neq 0\}$ und $R(w) = (T_D^{-w})^{-1}$.

Ist $F \in \operatorname{ran}(S - w)$, d.h. $F(w) = 0$, so gilt

$$R(w)F(z) = \frac{F(z)}{z-w} = (S-w)^{-1}F(z)\,.$$

Also ist $/T_D - w)^{-1} \supseteq (S-w)^{-1}$ und daher $T_D \supseteq S$. Sei nun $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $D(w_0) = 0$. Für jedes feste $F \in \mathcal{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $(T_D - w)^{-1}F(z)$ analytisch für $w \in \rho(T_D)$. Wähle F sodaß $F(w_0) \neq 0$, und $z \neq w_0 D(z) \neq 0$, dann hat

$$(T_D - w)^{-1}F(z) = \frac{F(z)\frac{D(z)}{D(w)}F(w)}{z-w}$$

einen Pol an der Stelle w_0. Also ist $w_0 \notin \rho(T_D)$.

Sind $D_1, D_2 \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}, D_2 = \lambda D_1$, so ist klarerweise $T_{D_1} = T_{D_2}$ da von D_1 und D_2 die gleichen Resolventen erzeugt werden. Sei umgekehrt $T_{D_1} = T_{D_2}$. Für $e \in \mathbb{C}$ mit $F(w) \neq 0$ gilt

$$\frac{D_1(z)}{D_1(w)} = \Big[F(z) - (z-w)(T_{D_1} - w)^{-1}F(z)\Big]\frac{1}{F(w)}\,,$$

und genauso für $\frac{D_2(z)}{D_2(w)}$. Also folgt

$$\frac{D_1(z)}{D_2(z)} = \frac{D_1 w}{D_2(w)}, z, w \in \mathbb{C}\,,$$

also D_1 und D_2 linear abhängig.

Sei nun $T \supseteq S, \rho(T) \neq \emptyset$. Wähle $w_0 \in \rho(T)$ und $F \in \mathcal{H}$ mit $F(w_0) \neq 0$, und definiere

$$D(z) := \frac{1}{F(w_0)}\Big[F(z) - (z-w_0)(T-w_0)^{-1}F(z)\Big]\,.$$

Dann ist $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}, D(w_0) = 1$ und es gilt für alle $G \in \mathcal{H}$

$$(T-w_0)^{-1}G(z) = (T-w_0)^{-1}\underbrace{\Big(G(z) - \frac{G(w_0)}{F(w_0)}F(z)\Big)}_{E\,\operatorname{ran}(S-w_0)} + \frac{G(w_0}{F(w_0)}(T-w_0)^{-1}F(z) =$$

$$= \frac{G(z) - \frac{G(w_0)}{F(w_0)}F(z)}{z-w_0} + \frac{G(w_0}{F(w_0)}\frac{F(z) - D(z)F(w_0)}{z-w_0} =$$

$$= \frac{G(z) - D(z)G(w_0)}{z-w_0}$$

Wegen $D(w_0) = 1$ ist das gerade $(T_D - w_0)^{-1}G(z)$. Wir sehen das $(T-w_0)^{-1} = (T_D - w_0)^{-1}$ und daher $T = T_D$.

Wir kommen zum Beweis der letzten Aussage. Sei $D \in \mathcal{H}$, dann gilt für $e \in \rho(T_D)$ offenbar $(T_D - w)^{-1}D(z) = 0$, also ist $D \in T_D(0)$. Ist umgekehrt $T_D(0) \neq \{0\}$, $F \in T_D(0)$, so wähle $e \in \rho(T_D)$ mit $F(w) \neq 0$. Wegen $(T_D - w)^{-1}F(z) = 0$ erhält man

$$F(z) = \frac{F(w)}{D(w)}D(z)\,,$$

also ist $F \in \operatorname{span}\{D\}$ und $D \in \mathcal{H}$.

❑

5.3.8 Definition. Sei $E \in \mathcal{H}B$. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ setze

$$S_\varphi(z) := -\frac{1}{2i}\Big(e^{i\varphi}E(z) - e^{-i\varphi}E^{\#}(z)\Big)\,.$$

Offenbar gilt $S_\varphi{}^{\#} = S_\varphi$.

5.3.9 Lemma. *Sei $E \in \mathcal{H}B$ und sei $E \neq E^{\#}$.*

(*i*) $S_\varphi \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

(*ii*) *S_φ und S_ψ sind linear abhängig genau dann, wenn $\varphi \equiv \psi$ und π.*

(*iii*) *Es gibt höchstens ein $\varphi \in [0, \pi)$ mit $S_\varphi \in \mathcal{H}$.*

(*iv*) *Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ läßt sich der reproduzierende Kern K von $\mathcal{H}$ schreiben als*

$$K(w,z) = \frac{S_{\varphi+\frac{\pi}{2}}(z)S_\varphi(\overline{w}) - S_\varphi(z)S_{\varphi+\frac{\pi}{2}}(\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt da $E \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$.

Sei $\varphi \equiv \psi \mod \pi$, dann gilt entweder $e^{i\varphi} = e^{i\psi}, e^{-i\varphi} = e^{-i\psi}$, und daher $S_\varphi = S_\psi$ oder es gibt $e^{i\varphi} = -e^{i\psi}$, $e^{-i\varphi} = -e^{-i\psi}$, und daher $S_\varphi = -S_{psi}$. Sei umgekehrt angenommen ds $S_\varphi = \lambda S_\psi$. Da E und $E^\#$ linear unabhängig sind, folgt $e^{i\varphi} = \lambda e^{i\psi}$, $e^{-i\varphi} = \lambda e^{i\psi}$, und daher

$$0 = \det\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & e^{-i\varphi}\end{pmatrix} = 2i\ \sin(\varphi-\psi)\,.$$

Also ist $\varphi - \pi \in \mathbb{Z}\pi$. Wir sehen das (*ii*) gilt.

Zum Beweis (*iii*) sei angenommen das $\varphi, \pi \in [0, \pi)$ mit $S_\varphi, S_\psi \in \mathcal{H}$.

Wäre $\varphi \neq \psi$, so wäre das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi}e^{-i\varphi} \\ e^{i\psi}e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(z) \\ E^\#(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi S_\varphi(z) \\ -2\pi S_\psi(z)\end{pmatrix}$$

nach $E, E^\#$ auflösbar und daher $E, E^\# \in \mathcal{H}$. Ein Widerspruch.

Die Formel (*iv*) folgt durch nachrechnen: Es ist

$$\Big(e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}E(z) - e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{2})}E^\#(z)\Big)\cdot\Big(e^{i\varphi}E(\overline{w}) - e^{-i\varphi}E^\#(\overline{w})\Big) -$$

$$-(e^{i\varphi}E(z) - e^{-\varphi}E^\#(z)\Big)\cdot\Big(e^{i(\varphi)+\frac{\pi}{2})}E(\overline{w}) - e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{2})}E^\#(\overline{w})\Big) =$$

$$= -2i(E(z)E^\#(\overline{w}) - E^\#(z)E(\overline{w})\Big)\,,$$

also folgt

$$\frac{S_\varphi + \frac{pi}{2}(z)S_\varphi(\overline{w}) - S_\varphi(z)S_\varphi + \frac{\pi}{2}(\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})} = \frac{E(z)E^\#(\overline{w}) - E^\#(z)E(\overline{w})}{(-zi)\pi(z-\overline{w})} = K(w,z)\,.$$

❑

Setze

$$A := -S_{\frac{\pi}{2}} = \frac{E+E^\#}{2}, B := S_0 = i\frac{E-E^\#}{2}\,,$$

dann gilt also insbesondere $E = A - iB$ und

$$K(w,z) = \frac{B(z)A(\overline{w}) - A(z)B(\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})}\,. \tag{5.3}$$

Weiters ist

$$S_\varphi = -\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}E - e^{-i\varphi}E^\#) = -\frac{1}{2\pi}\Big(e^{1\varphi}(A-iB) - e^{-i\varphi}(A+iB)\Big) =$$

$$= -\sin\varphi A + \cos\varphi B$$

5.3.10 Lemma. *Seien $u, v \in \mathbb{C}$ und $D = uA + vB$. Dann sind äquivalent*

(i) $u\overline{v} \in \mathbb{R}$

(ii) Es gibt $\varphi \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sodaß $D = \lambda S\varphi$.

Beweis. Sei angenommen $D = uA + vB$ mit $u\overline{v} \in \mathbb{R}$. Definiere $\lambda \in \mathbb{C}$ durch $|\lambda|^2 := |u|^2 + |v|^2$, $\arg \lambda u + \pi$. Dann sind $x := \frac{u}{\lambda}$, $y := \frac{va}{\lambda}$ zwei Zahlen x, y mit $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Wegen der Wahl von $\arg \lambda$ ist $x \in \mathbb{R}$. Wegen $u\overline{v} \in \mathbb{R}$, ist $\arg\, u - \arg\, v \in \mathbb{Z}\pi$, also ist auch $y \in \mathbb{R}$. Daher gibt es $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $x = -\sin\varphi$, $y = \cos\varphi$. Da $x < 0$ kann $\varphi \in [0, \pi)$ gewählt werden. Wir erhalten $u = \lambda(-\sin\varphi)$, $v = \lambda\cos\varphi$ und daher $D = \lambda S\varphi$.

Ist umgekehrt $D = \lambda S\varphi$, so folgt $u = \lambda(-\sin\varphi)$, $v = \lambda\cos\varphi$ und daher $u\overline{v} = |\lambda|^2(-\sin\varphi\cos\varphi) \in \mathbb{R}$.

❑

5.3.11 Satz. *Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E)$ ein dB-Raum, $\mathcal{H} \neq \{0\}$, und sei $D \in \operatorname{Assoc}\mathcal{H}$, $D \neq 0$. Dann ist T_D selbstadjungiert genau dann, wenn es $\varphi \in [0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit $D = \lambda S\varphi$.*

Beweis. Sei T eine lineare Relation in $\mathcal{H}$ mit $T \subseteq S$ und $\rho(T) \neq \emptyset$. Da $\mathcal{H} = \operatorname{cls}\{K((a, z) : a \in \mathbb{C}\}$, ist T selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\Big(T - w)^{-1}K(a, z), K(b, z)\Big) - \Big(K(a, z), (T - \overline{w})^{-1}K(b, z)\Big) = 0\,, \qquad (5.4)$$

für alle $a, b, \in \mathbb{C}$ und $w \in \rho(T)$.

Sei $T = T_D$ und sei angenommen das T selbstadjungiert ist. Es gilt

$$\Big(T - w)^{-1}K(a, z), K(b, z)\Big) = \frac{K(a, b) - \frac{D(b)}{D(w)}K(a, w)}{b - w}\,,$$

$$\overline{\Big((T - \overline{w})^{-1}K(b, z), K(a, z)\Big)} = \overline{\Big(\frac{K(b, a) - \frac{D(a)}{D(\overline{w})}K(b, \overline{w})}{a - \overline{w}}\Big)} =$$

$$= \frac{K(a, b) - \frac{\overline{D(a)}}{D^{\#}(w)}K(\overline{w}, b)}{\overline{a} - w}$$

Die Beziehung (5.4), multipliziert mit $\pi(b - w)(\overline{a} - w)D(w)D^{\#}(w)$ zeigt mit Hilfe von (5.3)

$$0 = \pi(\overline{a} - w)D(w)D^{\#}(w)K(a, b) - \pi(\overline{a} - w)D^{\#}(w)D(b)K(a, w) -$$

$$-\pi(b - w)D(w)D^{\#}(w)K(a, b) + \pi(b - w)D(w)\overline{D(a)}K(\overline{w}, b) =$$

$$= -D(w)D^{\#}(w)\Big(B(b)A(\overline{a}) - A(b)B(\overline{a})\Big) + D^{\#}(w)D(b) \cdot (\overline{a} - w)K(a, w) +$$

$$+(/w)\overline{D(a)}\Big(B(b)A(w) - A(b)B(w)\Big)\,.$$

Wählt man $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fest, und setzt $a = w$, so ist $w \in \rho(T)$ und daher $D(w), D^{\#}(w)_{\circ} \neq 0$ sowie $\overline{a} - w \neq 0$ und $K(w, w) = ||K(w, .)||^2 \neq 0$. Die obige Identität zeigt also $D(b) = uA(b) + vB(b)$ mit gewissen $u, v \in \mathbb{C}$.

Sei nun $D(z) = uA(z) + vB(z)$ mit $u, v \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$D(x) \cdot D^{\#}(y) = \Big(uA(x) + vB(x)\Big)\Big(\overline{u}A(y) + \overline{v}B(y)\Big) =$$

$$= |u|^2 A(x)A(y) + |v|^2 B(x)B(y) + u\overline{v}A(x)B(y) + \overline{u}vB(x)A(y)\,.$$

Die linke Seite von (5.4), multipliziert mit $\pi(b-w)(\overline{a}-w)D(w)D^{\#}(w)$, schreibt sich also weiter als

$$-\Big(|u|^2 A/w)A(w) + |v|^2 B(w)B(w) + u\overline{v}A(w)B(w) + \overline{u}vB(w)A(w)\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(B(b)A(\overline{a}) - A(b)B(\overline{a})\Big) + \Big(B(w)A(\overline{a}) - A(w)B(\overline{a})\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(|u|^2 A(b)A(w) + |v|^2 B(b)B(w) + u\overline{v}A(b)B(w) + \overline{u}vB(b)A(w)\Big) +$$

$$+\Big(|u|^2 A(w)A(\overline{a}) + |v|^2 B(w)B(\overline{a}) + u\overline{v}A(w)B(\overline{a}) + \overline{u}vB(w)A(\overline{a})\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(B(b)A(w) - A(b)B(w)\Big) =$$

$$= (u\overline{v} - \overline{u}v)\Big(- A(w)B(w)B(b)A(\overline{a}) + A(b)B(w)B(w)A(\overline{a}) -$$

$$-A(b)B(w)A(w)B(\overline{a}) + A(w)B(\overline{a})B(b)A(w)\Big) =$$

$$= (u\overline{v} - \overline{u}v)\Big(B(w)A(b) - A(w)B(b)\Big)\Big(B(w)A(\overline{a}) - B(\overline{a})A(w)\Big) =$$

$$= (u\overline{v} - \overline{u}v)\pi(w-b)K(\overline{b}, w)\pi(w-\overline{a})K(a, w)$$

Die linke Seite von (5.4) ist also genau dann identisch Null, wenn $u\overline{v} - \overline{u}v = 0$, d.h. wenn $u\overline{v} \in \mathbb{R}$. Dieser ist äquivalent dazu, daß $D = \lambda S_\varphi$ mit gewissen λ, φ.

❑

5.3.12 Korollar. *Es gilt*

$$\dim(\operatorname{dom} S)^\perp = 0 \textit{ oder } 1\,.$$

Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn es ein $\varphi \in [0, \pi)$ *gibt mit* $S_\varphi \in \mathcal{H}$. *Dann ist* $(\operatorname{dom} S)^\perp = \operatorname{span}\{S_\varphi\}$.

Beweis. Ist $S_\varphi \in \mathcal{H}$ für ein $\varphi \in [0, \pi)$, so ist $T_{S_\varphi}(0) \neq \{0\}$. Wir erhalten

$$(\operatorname{dom} S)^\perp \supseteq (\operatorname{dom} T_{S_\varphi})^\perp = T(0) \neq \{0\}\,,$$

und damit $\dim(\operatorname{dom} S)^\perp > 0$.

Sei umgekehrt $\dim(\operatorname{dom} S)^\perp > 0$. Setze $T := S \oplus (\{0\} \times (\operatorname{dom} S)^\perp)$, dann ist T eine selbstadjungierte Erweiterung von S und daher ist auch $\rho(T) \neq \emptyset$. Sei $\varphi \in [0, \pi)$ sodaß $T = T_{S_\varphi}$. Wegen $T(0) \neq \{0\}$ ist $S_\varphi \in \mathcal{H}$ und es gilt $T(0) = \operatorname{span}\{S_\varphi\}$. Nach der Definition von T erhalten wir $(\operatorname{dom} S)^\perp = \operatorname{span}\{S_\varphi\}$, insbesondere ist $\dim(\operatorname{dom} S)^\perp = 1$.

❑

5.3.13 Korollar. *Sei $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ein dB-Raum und seien $E_1, E_2 \in \mathcal{H}B$ sodaß $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E_1) = \mathcal{H}(E_2)$. Schreibe $E_j = A_j - iB_j, j = 1, 2$, mit*

$$A_j = \frac{E_j + E_j^\#}{2}, B_j = i\frac{E_j - E_j^\#}{2}.$$

Dann existiert $U \in \mathbb{R}^{2x2}$, $\det U = 1$, sodaß

$$(A_2, B_2) = U(A_1, B_1). \tag{5.5}$$

Ist umgekehrt $E \in \mathcal{H}B$ und $U \in \mathbb{R}^{2x2}$, $\det U = 1$, gegeben, so gilt für E_1 definiert durch $(A_1, B_1) = U(A, B)$ das $\mathcal{H}(E_1) = \mathcal{H}(E)$.

Beweis. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E_1) = \mathcal{H}(E_2)$. Dann ist T_{A_2} sowie T_{B_2} eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $\mathcal{H}$. Also existiert $\varphi, \psi \in [0, \pi)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$A_2 = \lambda S_\varphi^1 = \lambda(-\sin\varphi A_1 + \cos\varphi B_1)$$

$$B_2 = \mu S_\psi^1 = \mu(-\sin\psi A_1 + \cos\psi B_1)$$

Da $A_j^\# = A_j, B_j^\# = B_j$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten, d.h. wir haben die Darstellung (5.5) mit einem $U \in \mathbb{R}^{2x2}$. Da $\mathcal{H} \neq \{0\}$ gilt $\varphi \neq \psi$ und daher $\det U \neq 0$.

Wir zeigen nun: Sind E_1, E_2 über (5.5) verbunden mit $U \in \mathbb{R}^{2x2}$, $\det U \neq 0$, dann gilt $F \in \mathcal{H}(E_1)$ genau dann, wenn $F \in \mathcal{H}(E_2)$. Dabei ist zusätzlich stets $||F||_{\mathcal{H}(E_1)} = ||F||_{\mathcal{H}(E_2)}$ genau dann, wenn $\det U = 1$.

Dazu bemerke das sich die Formel (5.3) für $K(w, z)$ umschreiben läßt als

$$K(w, z) = \frac{-1}{\pi(z - \overline{w})} \begin{pmatrix} A(w) \\ B(w) \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sind E_1 und E_2 über (5.5) verbunden so folgt also

$$K_2(w, z) = \frac{-1}{\pi(z - \overline{w})} \begin{pmatrix} A_1(w) \\ B_1(w) \end{pmatrix}^* U^* J U \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}$$

Nun rechnet man aus das

$$U^* J U = \det U \cdot J,$$

also gilt $K_2(w, z) = \det U K_1(w, z)$. Die identische Abbildung $id : F \mapsto F$ bildet also $\operatorname{span}\{K_2(w, z) : w \in \mathbb{C}\}$ auf $\operatorname{span}\{K_1(w, z) : w \in \mathbb{C}\}$ ab und es gilt dabei $||F||^2_{\mathcal{H}(E_2)} = (\det U|^2 ||F||^2 \mathcal{H}(E_1)$. Also besitzt sie eine stetige Fortsetzung zu einer Abbildung von $\mathcal{H}(E_2)$ auf $\mathcal{H}(E_1)$ die ebenfalls $||F||^2_{\mathcal{H}(E_2)} = (\det U)^2 ||F||_{\mathcal{H}(E_1)}$ erfüllt. Da punktauswerten stetig ist, ist diese Fortsetzung gleich id.

❑

5.3.14 Satz. *Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(E) \neq \{0\}$ ein dB-Raum und sei $\varphi \in [0, \pi)$ mit $S_\varphi \notin \mathcal{H}$ gegeben. Dann gilt*

$$\sigma(T_{S_\varphi}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : S_\varphi(\lambda) = 0\}, \operatorname{ran}(T_{S_\varphi}) - \lambda) \text{ abgeschlossen }, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\ker(T_{S_\varphi}) - \lambda) = \operatorname{span}\{K(\lambda, \cdot)\}, \lambda \in \sigma(T_{S_\varphi})$$

$$T_{S_\varphi} = \sum_{\lambda \in \sigma(T_{S_\varphi})} \lambda\Big(\cdot, K(\lambda, \cdot)\Big)\frac{K(\lambda, \cdot)}{K(\lambda, \lambda)}$$

Beweis. Da $r(S) = \mathbb{C}$ und $\operatorname{codim} \operatorname{ran}(S - w) = 1, w \in \mathbb{C}$, ist das Spektrum einer selbstadjungierten Erweiterung von S diskret und besteht aus Eigenwerten. Wir haben schon gesehen das $\sigma(T_{S_\varphi}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : S_\varphi(\lambda) = 0\}$. Da T_{S_φ} selbstadjungiert ist, ist $\sigma(T_{S_\varphi}) \subseteq \mathbb{R}$ und daher hat S_φ keine nichtreellen Nullstellen.

Es gilt

$$\ker(T_{S_\varphi}) - \lambda) = \operatorname{ran}(T_{S_\varphi})^\perp \subseteq \operatorname{ran}(S - \lambda)^\perp = \operatorname{span}\{K(\lambda, \cdot)\}.$$

Ist $\lambda \in \sigma(T_{S_\varphi})$, so folgt also $\ker(T_{S_\varphi}) - \lambda) = \operatorname{span}\{K(\lambda, \cdot)\}$. Die letzte Formel ist der Spektralsatz.

❏

5.3.15 Korollar.

(*i*) *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3.14 gilt*

$$||F||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{\lambda : S_\varphi(\lambda) = 0} \frac{|F(\lambda)|^2}{K(\lambda, \lambda)}, F \in \mathcal{H}.$$

(*ii*) *Sei $T \supseteq S, \rho(T) \neq \emptyset$, dann ist für jedes $w \in \rho(T)$ die Resolvente $(T - w)^{-1}$ kompakt.*

Beweis. Nach dem Spektralsatz bilden die Eigenvektoren von T_{S_φ} ein vollständiges Orthogonalsystem. Die erste Behauptung folgt dann

$$||F||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{\lambda \in \sigma(T_{S_\varphi})} \left|\left(F, \frac{K(\lambda, \cdot)}{\sqrt{K(\lambda, \lambda)}}\right)\right|^2 = \sum_{\lambda : S_\varphi(\lambda) = 0} \frac{|F(\lambda)|^2}{K(\lambda, \lambda)}.$$

Wir kommen zur zweiten Behauptung. Wähle $S_\varphi \notin \mathcal{H}$ und $w \in \rho(S_\varphi) \cap \rho(S_\varphi) \cap \rho(T) \cap \mathbb{R}$. Dann ist $(T_{S_\varphi} - w)^{-1}$ ein selbstjungierter beschränkter Operator und $\sigma\Big((T_{S_\varphi} - w)^{-1}\Big) = (\sigma(T_{S_\varphi}) - w)^{-1}$ ist diskret und häuft sich nur bei Null. Also ist $(T_{S_\varphi} - w)^{-1}$ kompakt. Da $(T - w)^{-1}$ eine eindimensionale Störung von $(T_{S_\varphi} - w)^{-1}$ ist, ist auch $(T - w)^{-1}$ kompakt. Wegen der Resolventengleichung sind alle Resolventen $(T - w')^{-1}, w' \in \rho(T)$, kompakt.

❏

5.4 Teilräume von dB-Räumen

5.4.1 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum. Ein abgeschlossener linearer Teilraum $\mathcal{L}$ von $\mathcal{H}$ heißt dB-Teilraum von $\mathcal{H}$, wenn er mit dem von $\mathcal{H}$ vererbten inneren Produkt selbst wieder ein dB-Raum ist.

5.4.2 Lemma. *Sei $\mathcal{L}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{L}$ ein dB-Teilraum genau dann, wenn*

(*i*) *Ist $F \in \mathcal{L}$, so folgt $F^{\#} \in \mathcal{L}$.*

(*ii*) *Ist $F \in \mathcal{L}, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, F(w) = 0$, so folgt $\frac{z-\overline{w}}{z-w}F(z) \in \mathcal{L}$.*

(*iii*) *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert $F \in \mathcal{L}$ mit $F(t) \neq 0$.*

Beweis. Die Bedingungen für die inneren Produkte folgen, denn sie gelten sogar für $\mathcal{H}$.

❑

Ein Satz der als Hauptsatz der Theorie der dB-Raum gesehen kann ist der folgende. Wir können seinen Beweis hier nicht geben.

5.4.3 Satz (Ordering Theorem). *(ohne Beweis)*
Sei $\mathcal{H}$ ein dB-Raum und seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ dB-Teilräume von $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \text{ oder } \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \,.$$

Literaturverzeichnis

[dB] L. deBranges: *Hilbert spaces of entire functions,* Prentice-Hall, London 1968.

[D] W.Duren: *Theory of H^p-spaces,* Academic Press 1970.

[FL] W.Fischer, I.Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus Funktionentheorie,* Vieweg Verlag 1988.

[G] J.Garnett: *Bounded analytic functions,* Academic Press 1981.

[He] H.Helson: *Lectures on invariant subspaces,* Academic Press 1964.

[Ho] K.Hoffman: *Banach spaces of analytic functions,* Prentice-Hall 2-te Auflage 1965.

[L] L.Loomis: *An introduction to abstract harmonic analysis,* Van Nostrand 1953.

[P] I.Privalov: *Randeigenschaften analytischer Funktionen,* Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

[Re] R.Remmert: *Funktionentheorie II,* Springer Verlag.

[RR] M.Rosenblum, J.Rovnjak: *Topics in Hardy classes and univalent functions,* Birhäuser Verlag 1994.

[Ru1] W.Rudin: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill 3-te Auflage 1987.

[Ru2] W.Rudin: *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill 3-te Auflage 1976.

[Y] K.Yoshida: *Functional Analysis,* Springer Verlag 1974.

[Z] A.Zygmund: *Trigonometric series,* Cambridge University Press 1959.

Index