Komplexe Analysis im Einheitskreis

WS 2004/05
(Vers. 31.8.2004)

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Harmonische Funktionen

1.1 Das Poisson Integral

DEI.1

1.1.1 Definition. Der Poisson Kern $P_r(t)$, $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, ist definiert als

$$P_r(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \, .$$

Ist $0 \leq r < 1$, $t, \theta \in \mathbb{R}$, so schreibt sich der Poisson Kern als ($z = re^{i\theta}$)

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-it})^n =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \, .$$

Fasst man den Poisson Kern $P_r(\theta - t)$ als Funktion in $z = re^{i\theta}$, $|z| < 1$, $\xi = e^{it}$, $|\xi| = 1$, auf, so schreibt man $P(z, \xi)$.

LEI.2

1.1.2 Lemma. *Der Poisson Kern hat die Eigenschaften*

(*i*) $P_r(t) > 0$

(*ii*) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) \, dt = 1$

(*iii*) *Für jedes offene Intervall I um 0 gilt*

$$\lim_{r \to 1} \sup_{t \in [-\pi, \pi] \setminus I} P_r(t) = 0 \, .$$

Weiters gilt $P_r(t) = P_r(-t)$, $P_r(t) < P_r(t')$ für $0 < t' < t \leq \pi$.

Beweis.

(*i*) klar, da gliedweise integriert werden darf,

(*ii*) und "weiters" folgt aus Umrechnung.

❑

REa

1.1.3 Bemerkung. Funktionen mit den Eigenschaften $(i) - (iii)$ nennt man manchmal “approximative identities“, denn die Maße $\frac{1}{2\pi}P_r(t)\,dt$ approximieren die δ-Distribution bei 0.

Im folgenden sei $\mathbb{D}$ der offene Einheitskreis, $D(a,r)$ der offene Kreis um a mit Radius r, $\mathbb{T}$ die Einheitskreislinie, und λ das normierte Lebesque-Maß auf $\mathbb{T}$.

DEI.3

1.1.4 Definition. Sei μ ein komplexes (endliches) Borel-Maß auf $\mathbb{T}$. Dann ist das Poisson Integral $\mathcal{P}[d\mu]$ definiert als

$$\mathcal{P}[d\mu](z) := \int\limits_{\mathbb{T}} P(z,\xi)\,d\mu, z \in \mathbb{D}\,.$$

Ist insbesondere μ absolut stetig (bezüglich λ), $d\mu = f d\lambda$, $f \in L^1(\lambda)$ so schreiben wir $\mathcal{P}[f]$ für $\mathcal{P}[f d\lambda]$. D.h. $\mathcal{P}[d\mu]$ ist Faltung von Poisson-Kern mit μ.

LEI.4

1.1.5 Lemma. *Ist μ reell, so ist $\mathcal{P}[d\mu]$ der Realteil der in $\mathbb{D}$ analytischen Funktion*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\mu, z \in \mathbb{D}\,.$$

Für beliebiges μ ist $\mathcal{P}[d\mu]$ harmonisch.

Beweis. Klar.

❑

THI.5

1.1.6 Satz. *Sei u stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$, dann ist u das Poisson Integral seiner Randwerte,*

$$u(z) = \mathcal{P}[u(e^{it})], z \in \mathcal{D}\,.$$

Ist umgekehrt $f \in C(\mathbb{T})$, so ist die Funktion

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & , \quad |z| = 1 \\ \mathcal{P}[f](z) & , \quad |z| < 1 \end{cases}$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$. Ist u stetig in $\overline{\mathbb{D}}$ und sogar analytisch in $\mathbb{D}$, dann gilt (Poisson-Jensen Formel)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\operatorname{Re} u(e^{it})\,dt + iC\,.$$

Beweis.
$\cdot$) Sei $f \in C(\mathbb{T})$ gegeben und betrachte F. Wegen der Eigenschaft (ii) von P_r gilt $(g \in C(\mathbb{T}))$

$$|\frac{1}{z\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(z)\ dt|$$

$$|\mathcal{P}[g](z)| \le \sup_{\pi} |g(\xi)]|\,,$$

also ist

$$\sup_{\overline{\mathbb{D}}} |F(z)| = \sup_{\mathbb{T}} |f(\xi)| \,.$$

Für trigonometrische Polynome $g(e^{\vartheta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$ ist

$$\mathcal{P}[g](re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \,,$$

denn Faltung entspricht Multiplikation der Fourier-Koeffizienten. Offensichtlich gilt die Behauptung für trigonometrische Polynome g.

Da $f \in C(\mathbb{T})$ gibt es eine Folge g_n trigonometrischer Polynome (nämlich die Cesaro Mittel), so daß

$$\begin{aligned} & \sup\nolimits_{\mathbb{T}} |f(\zeta) - g_n(\zeta)| \to 0 \cdot \\ \Rightarrow \quad & \sup\nolimits_{\overline{\mathbb{D}}} |F(z) - G_n(\zeta)| \to 0, \end{aligned}$$

da alle G_n stetig $\Rightarrow F$ stetig.

$\cdot$) Sei u stetig in $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch in $\mathbb{D}$ gegeben, und sei $U_1(z) := \mathcal{P}[u(e^{it})](z)$ oBdA sei u reell. Nach dem ersten Teil ist u_1 stetig in $\overline{\mathbb{D}}$, $u_1(e^{it}) = u(e^{it})$. Betrachte $h = u - u_1$: Angenommen $h(z_0) > 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$. Sei $0 < \epsilon < h(z_0)$ und $g(z) := h(z) + \epsilon |z|^2 \cdot \Rightarrow g$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, $g(e^{it}) = \epsilon$, $g(z_0) \geq h(z_0) > \epsilon$. Also hat g in $\mathbb{D}$ ein Maximum. Dort ist $g_{xx} \leq 0, g_{yy} \leq 0$, WS!, denn $\triangle g = 4\epsilon$. Es folgt $h(z) \leq 0$ und in analoger Weise folgt jetzt $4(z) = 0$.

$\operatorname{Re} u(z)$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$, hat also nach dem bereits bewiesenen die Darstellung $\operatorname{Re} u(z) = \mathcal{P}[\operatorname{Re} u(e^{i\theta})](z)$. Nach Lemma 1.1.5 ist also $\operatorname{Re} u(z)$ der Realteil der analytischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} z}{e^{it} - z} \operatorname{Re} u(e^{it}) dt \,.$$

Der Realteil bestimmt aber eine analytische Funktion eindeutig bis auf eine imaginäre Konstante.

❑ REb

1.1.7 Bemerkung. Der Poisson Kern für die Kreisscheibe $D(a,R)$ ist

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} \,,$$

d.h. für harmonische Funktionen u in $D(a,R)$, stetig auf $\overline{D(a,R)}$ gilt

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it}) dt \,.$$

THI.6

1.1.8 Satz. (*i*) *Sei u stetig auf einer offenen Menge Ω. Dann ist u harmonisch $\iff$ u hat die Mittelwerteigenschaft, d.h. $\forall\ \overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$ gilt*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt \,.$$

(*ii*) *Sei* (u_n) *eine Folge harmonischer Funktionen in einem Gebiet* Ω. *Konvergiert* $u_n \to u$ *gleichmäßig auf kompakten Mengen, so ist* u *harmonisch. Ist* $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$, *dann konvergiert* u_n *gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen eine gewisse Funktion* u, *oder* $u_n(z) \to \infty \forall z$.

Beweis.
`ad`(i): Ist u harmonisch, so hat u wegen der Poisson'schen Integralformel die Mittelwerteigenschaft. Habe also u die Mittelwerteigenschaft: oBdA sei u reell. Betrachte eine Kreisscheibe $\overline{D(a,R)} \leq$. Das Poisson Integral definiert auf $\overline{D(a,R)}$ eine stetige harmonische Funktion u_1 mit $u_1 = u$ am Rand. Sei $h(z) = u(z) - u_1(z)$. Angenommen $h(z_0) > 0$ für ein $z_0 \in \overline{D(a,R)}$, dann ist $m = \sup\{h(z) | z \in \overline{D(a,R)}\} > 0$. Sei $E = \{z \in \overline{D(a,R)} | h(z) = m\}$, dann ist $E \subseteq D(a,R)$, und kompakt. Sei $z_0 \in E$ und $|z_0 - a|$ maximal, dann ist für hinreichend kleine r der Kreis $\overline{D(z_0,r)} \subseteq D(a,R)$, daher gilt die Mittelwerteigenschaft. Es ist aber mehr als die Hälfte der Kreislinie $\partial D(z_0,r)$ nicht in E, und dort ist der Integrand echt kleiner als m. Ein WS!, also ist $h(z) \leq 0$ in $\overline{D(a,R)}$. Das analoge Argument zeigt $h(z) = 0$, d.h. $u = u_1$, also ist u harmonisch.

`ad`(ii): Konvergiert $u_n \to u$ gleichmäßig auf kompakten Mengen, so gilt die Mittelwerteigenschaft für u, also ist u harmonisch.

Sei $u_1 \leq u_2 \leq \dots$. oBdA sei $u_1 \geq 0$. Sei $u = \sup u_n$ und $A = \{z \in \Omega | u(z) < \infty\}$, $B = \Omega \setminus A$. Sei $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$, dann schreibt sich jedes u_n in $D(a,R)$ ab Poisson Integral. Der Poisson Kern erfüllt die Abschätzung $(0 \subseteq r < R)$

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}\,.$$

Es folgt

$$\frac{R-r}{R+r} u_n(a) \leq u_n(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u_n(a)\,,$$

also ist u entweder auf ganz $D(a,R)$ endlich oder auf ganz $D(a,R)$ unendlich. Da Ω zusammenhängend ist folgt $u_n(z) \to \infty \forall z \in \Omega$ oder $u(z) < \infty \forall z \in \Omega$. Wegen dem "Monotone convergence theorem" gilt die Mittelwerteigenschaft für u, also ist u harmonisch. Die Folge u ist eine Folge stetiger Funktionen die monoton gegen eine stetige Funktion konvergiert, nach [Ru2,rudin2, 7.13] ist die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Mengen.

❑

1.2 Randwerte von Poisson Integralen

Wir betrachten nichttangentiale Grenzwerte an Randpunkten. Sei, für $0 < \alpha < 1, \Omega_\alpha$ das Innere der konvexen Hülle von $D(0,\alpha)$ und 1:

———————— s k i z z e ————————

DEI.7

1.2.1 Definition. Sei f Funktion in $\mathbb{D}$. Wir sagen f hat einen nichttangentialen Grenzwert bei e^{it}, wenn der Limes

$$\lim_{\substack{z \to e^{it} \\ z \in e^{it}\Omega\alpha}}$$

unabhängig von α existiert.

Die Funktion

$$(N_\alpha f)(e^{it}) := \sup\{|f(z)| : z \in e^{it}\Omega_\alpha\}$$

heißt nichttangentiale Maximalfunktion,

$$(M_{rad} f)(e^{it}) := \sup\{|f(re^{it})| : o \leq r < 1\}$$

die radiale Maximalfunktion.
Offensichtlich gilt $(M_{rad}f)(e^{it}) \leq (N_\alpha f)(e^{it}) \leq (N_{\alpha'} f)(e^{it})$ für $0 \leq \alpha \leq \alpha' < 1$.

Ist μ ein komplexes (endliches) Maß auf $\mathbb{T}$, so definieren wir

$$(M_\mu)(e^{it}) := \sup \frac{|\mu|(I)}{\lambda(I)},$$

wo das Supremum über alle offenen Bögen (inklusive $\mathbb{T}$) mit e^{it} als Mittelpunkt genommen wird. Weiters ist

$$(D_\mu)(e^{it}) := \lim \frac{\mu(I)}{\lambda(I)},$$

wo der Limes über obigen Bögen genommen wird, wenn diese immer kleiner werden. Ist $f \in L^1(\lambda)$, so heißt e^{it} ein Lebesque-Punkt von f falls

$$\lim \frac{1}{\lambda(I)} \int_I |f - f(e^{it})| d\lambda = 0$$

gilt, wo der Limes gleich wie oben zu verstehen ist.

REC

1.2.2 Bemerkung. Wir benützen die folgenden nichttrivialen(!) Aussagen (siehe [Ru1,rudin1, *ch*.7]:

(i) Ist $f \in L^1(\lambda)$, so sind fast alle Punkte von $\mathbb{T}$ Lebesque-Punkte.

(ii) Ist μ singulär zu λ, so ist λ - fast überall $D\mu = 0$.

LEI.8

1.2.3 Lemma. *Sei $0 < \alpha < 1$ gegeben. Dann gibt es eine Konstante $c_\alpha > 0$, so daß für jedes positive endliche Borel Maß (mit $u = \mathcal{P}[d_\mu]$) die Beziehungen*

$$c_\alpha(N_\alpha u)(e^{it}) \leq (M_{rad}u)(e^{it}) \leq (M_\mu)(e^{it}), e^{it} \in \mathbb{T},$$

gelten.

Beweis. Wir betrachten oBdA den Randpunkt 1. Wegen $u(z) =_{\int_{\mathbb{T}}} P(z, e^{it})d\mu(e^{it})$ genügt es für die erste Ungleichung zu zeigen, daß

$$c_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z|, e^{it}), z \in \Omega_\alpha, e^{it} \in \mathbb{T}$$

gilt. Für $z \in \Omega_\alpha$ ist $\frac{|z-|z}{:}(1 - |z|)$ beschränkt, z.B. $\leq \gamma_\alpha$. Also gilt

$$|e^{it} - |z|\ | \leq |e^{it} - z| + |z - |z| \leq |e^{it} - z| +$$

$$+\gamma_\alpha(1 - |z|) \leq (1 + \gamma_\alpha)|e^{it} - z|.$$

$\Rightarrow$ mit $c_\alpha = (1+\gamma_\alpha)^{-2}$ gilt

$$c_\alpha |e^{it} - |z|\,|^2 \leq |e^{it} - z|^2$$
$$\Rightarrow c_\alpha P(z, e^{it}) \leq P(|z|, e^{it})\,.$$

Um die zweite Ungleichung zu zeigen approximieren wir $P_r(t)$ durch Treppenfunktionen:

——————————S k i z z e ——————————

Formal: Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots \subseteq I_{n-1}$, eine Folge von Bögen mit Zentrum $1, I_n = \mathbb{T}$. Sei χ_j die Indikatorfunktion von I_j und h_j die größte Zahl so daß $h_j\chi_j \leq P_r(h_{n+1}) = 0$. Es ist $h_j - h_{j+1} \geq 0$.
Setze $K := \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\chi_j$. Nach Definition von M_μ gilt

$$\mu(I_j) \leq (M_\mu)(1)\lambda(I_j)\,,$$

also folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} K d_\mu &= \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\mu(I_j) \leq \\ &\leq (M_\mu)(1) \sum_{j=1}^n (h_j - h_{j+1})\lambda(I_j) = \\ = (M_\mu)(1) \int_{\mathbb{T}} K d\lambda &\leq (M_\mu)(1) \int_{\mathbb{T}} P_r d\lambda = (M_\mu)(1)\,. \end{aligned}$$

Da die Bögen I_j beliebig fein gewählt werden können folgt

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(t) d\mu(e^{it}) \leq (M_\mu)(1)\,,$$

also auch $(M_{rad}u)(1) = \sup_{0 \leq r < 1} |\int_{\mathbb{T}} P_r(t) d\mu(e^{it})| \leq (M_\mu)(1)$.

❑

LEI.9

1.2.4 Lemma. *Sei μ ein positives Borel-Maß auf $\mathbb{T}$ und sei $(D_\mu)(e^{i\theta}) = 0$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$, dann hat das Poisson Integral $\mathcal{P}[d\mu]$ bei $e^{i\theta}$ den nichttangentialen Grenzwert* 0.

Beweis. Die Bedingung $(D_\mu)(e^{i\theta}) = 0$ besagt

$$\lim \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} = 0\,,$$

wenn I die genannten Bögen sind. Es gibt also zu gegebenem $\epsilon > 0$ einen Bogen I_0, so daßfür alle kleineren $I \supseteq I_0$ gilt

$$\mu(I) \leq \epsilon\lambda(I)\,.$$

Sei μ_0 die Einschränkung von μ auf $I_0, \mu_1 = \mu - \mu_0$, und sei $u_0 = \mathbb{P}[d\mu_0]$, $u_1 = \mathbb{P}[d\mu_1]$. Sei z_j eine Folge in $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ die gegen $e^{i\theta}$ konvergiert, dann ist der Abstand von $\{z_j\}$ zu $\mathbb{T} \setminus I_0$ echt positiv. Die Integranden in

$$u_1(z_j) = \int_{\mathbb{T}\setminus I_0} P(z_j, e^{it}) d\mu(e^{it})$$

konvergieren also gleichmäßig gegen 0 (vgl. (*iii*) in Lemma 1.1.2) $\Rightarrow$

$$\lim_{j\to\infty} u_1(z_j) = 0\,.$$

Nach Lemma 1.2.3 und der Wahl von I_0 gilt

$$e_\alpha(N_\alpha u_0)(e^{i\theta}) \leq (M\mu_0)(e^{i\theta}) \leq \epsilon\,.$$

Also ist für jedes $z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$

$$u_0(z) \leq \frac{\epsilon}{c_\alpha}, \text{also} \quad \limsup_{\substack{j\to\infty,\\ \limsup u(z_j)}} u_0(z_j) \leq \frac{\epsilon}{c_\alpha}\,.$$

Da ϵ beliebig war folgt

$$\lim_{j\to\infty} u(z_j) = 0\,.$$

❑

THI.10

1.2.5 Satz. *Sei das komplexe (endliche) Borelmaßμ auf $\mathbb{T}$ gegeben. Schreibe $d\mu = fd\lambda + d\mu_s$ mit $f \in L^1(\lambda)$, μ_s singulär bzgl. λ, dann hat für λ - fast alle Punkte $e^{i\theta}$ das Poisson Integral $\mathcal{P}[d\mu]$ den nichttangentialen Grenzwert $f(e^{i\theta})$.*

Beweis. Wendet man Lemma 1.2.4 auf $d\mu_s$ an, d.h. auf die positive und negative Variation des Real- und imaginärteiles von μ_s an (vgl.obige Bemerkung !), so findet man $\mathcal{P}[d_{\mu_s}] \to 0\lambda$ 0 - fast überall.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{P}[fd\lambda](e^\theta) \to f(e^{i\theta})$ fast überall gilt. Nach obiger Bemerkung genügt es dieses für die Lebesque-Punkte von f zu zeigen, oBdA sei $f(e^{i\theta}) = 0$ (sonst subtrahiere Konstante), dann heißt "Lebesque-Punkt"

$$\lim \frac{1}{\lambda(I)} \int\limits_I |f| d\lambda = 0\,.$$

Betrachte das Borel-Maß

$$\gamma(E) := \int_E |f| d\lambda\,,$$

dann ist $(D\gamma)(e^{i\theta}) = 0$ nach Lemma 1.2.4, also $\mathcal{P}[d\gamma](z) \to 0$

$$|\mathcal{P}[f]| \leq \mathcal{P}[|f|] = \mathcal{P}[d\gamma]$$

gilt das selbe für $\mathcal{P}[f]$.

❑

1.3 Darstellbarkeit durch Poisson Integrale

Ist f Funktion auf $\mathbb{T}$, so setze $(0 < p < \infty)$

$$||f||_p := \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p d\theta\Big)\frac{1}{p}\,,$$

$$||f||_\infty := \mathrm{esssup}_{\theta\in[-\pi,\pi} |f(\theta)|\,.$$

1.3.1 Bemerkung. Falls $p \geq 1$, ist das eine Norm. Für $0 < p < 1$ ist L^p nicht lokalkonvex. REd

THI.11

1.3.2 Satz. *Sei u eine harmonische Funktion in $\mathbb{D}$, und setze*

$$u_r(\theta) := u(re^{i\theta})\,.$$

Dann gilt

(i) *u ist das Poisson Inegral eines komplexen (endlichen) Borel-Maßes $d\mu \iff \sup_{0\leq r<1} ||u_r||_1 < \infty$.*

(ii) *u ist das Poisson Integral einer L^1-Funktion $f \iff u_r$ sind in der Norm $||\cdot||_1$ konvergent gegen f.*

(iii) *Sei $1 < p < \infty$. u ist das Poisson Integral einer L^p-Funktion $f \iff \sup_{0\leq r<1} ||u_r||_p < \infty \iff u_r$ sind in der Norm $||\cdot||_p$ konvergent gegen f.*

(iv) *u ist das Poisson Integral einer L^∞-Funktion $f \iff \sup_{0\leq r<1} ||u_r||_\infty < \infty$.*

(v) *u ist das Poisson Integral einer stetigen Funktion $f \iff u_r$ sind in der Norm $||\cdot||_\infty$ (d.h. gleichmäßig) konvergent gegen f.*

(vi) *u ist das Poisson Integral eines (endlichen) positiven Borel-Maßes $d\mu \iff u$ ist nicht-negativ.*

Die darstellenden Maße bzw. Funktionen sind eindeutig.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes erfolgt in mehreren Schritten.
$\cdot$) $\underline{(i) \Rightarrow}$: Es gilt $(u(z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it} d\mu(e^{it})$, also ist

$$||u_r||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_{\mathbb{T}} P(z,e^{it})d|\mu|(e^{it})\Big]d\theta = \text{Fubini}$$

$$= \int_{\mathbb{T}}\Big[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z,e^{it})d\theta}_{=1 \text{wegen Lemma 1.1.2}}\Big]d|\mu|(e^{it}) = |\mu|(\mathbb{T})\,.$$

$\cdot$) $\underline{(iv) \Rightarrow}$: Es gilt

$$|u_r(e^{i\theta})| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta-t)dt\Big| \leq ||f||_\infty \cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)dt = ||f||_\infty\,.$$

$\cdot)\ \underline{(v) \Rightarrow}$: Wie im Satz 1.1.6 wähle ein trigonometrisches Polynom $g = \sum_{-N}^{N} c_n e^{i\theta n}$, so daß $||g-f||_\infty < \epsilon$. Für g gilt $g_r = \sum_{-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{i\theta n}$, also ist

$$||g - g_r||_\infty = ||\sum_{-N}^{N} c_n e^{i\theta n}(1 - r^{|n|)})||_\infty \leq$$

$$\leq (1 - r^N) \sum_{-N}^{N} |c_n| \to 0 \,\text{für}\, r \to 1\,.$$

Weiters ist

$$||g_r - f_r||_\infty = ||\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(g(t) - f(t) - f(t))dt||_\infty \leq$$

$$\leq ||g - f||_\infty < \epsilon\,.$$

Insgesamt folgt für r hinreichend nahe bei 1:

$$||f - f_r||_\infty <\}\epsilon\,.$$

$\cdot)\ \underline{(ii),(iii) \Rightarrow}$: Die Jensen'sche Ungleichung angewandt auf das normierte Maß $\frac{1}{2\pi}P_r(\theta - t)dt$, die konvexe Funktion $|\cdot|^p$ und den Integranden $f(t)$ liefert

$$|u_r(e^{i\theta})|^p = \Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)dt\Big|^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p P_r(\theta - t)dt\,.$$

also ist

$$||u_r(e^{i\theta})||_p = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u_r(e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |(t)|^p P_r(\theta - t)dt\Big)d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

Fubini
$\downarrow$

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi}^{\pi} |f(u)|\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\theta\Big)dt\Big)^{\frac{1}{p}} = ||f||_p\,.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei $g \in C(\mathbb{T})$ (vgl. [Ru1,rudin1, 3.143]): $||f - g||P < \epsilon$. Setze $v = \mathcal{P}[g] \Rightarrow$ (nach "$(v) \Rightarrow$")

$$||g - v_r||_p \leq ||g - v_r||_\infty \to 0, r \to 1\,.$$

Weiters ist

$$||u_r - v_r||_p = ||(u - v)_r||_p \leq ||f - g||_p < \epsilon\,.$$

Also ist

$$||u_r - f||_p \leq ||u_r - v_r||_p + ||v_r - g||_p + ||g - f||_p \to 0\,.$$

·) $\underline{(vi) \Rightarrow}$: Klar.

·) $\underline{(i) \Leftarrow}$: Betrachte die linearen Funktionale $(0 \leq r < 1)$

$$\wedge_r : g \mapsto \int\limits_{\mathbb{T}} g\, u_r d\lambda$$

auf $C(\mathbb{T})$. Es gilt $|| \wedge_r || \leq \sup_{0 \leq r < 1} ||u_r||_1 < \infty$. $\Rightarrow$ (weah da $C(\mathbb{T})$ separabell $\exists$ Teilfolge 1_{r_j} und $1 \in C(\mathbb{T})$ compactness, siehe [Ru1,rudin1, 11.29] oder [Y,yoshida], sodaß

$$\forall g \in C(\mathbb{T}) : \lim_{\int \to \infty} \wedge_{r_j} g \to \wedge g \,.$$

Der Dualraum von $C(\mathbb{T})$ ist “komplexe Borel Maße“ vgl. ([Ru1,rudin1, 6.19]) d.h. $\exists \mu : \forall g \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_{\mathbb{T}} g\, u_{r_j} d\lambda = \int\limits_{\mathbb{T}} g\, d\mu \,.$$

Die Funktion $u(v_j z)$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$ und stetig am Rand, also gilt wenn man obige Gleichung auf $g = P(z, e^{it})$ anwendet:

$$u(z) = \lim_{j \to \infty} u(r_j z) = \lim_{j \to \infty} \int\limits_{\mathbb{T}} P(z, e^{it} u_{r_j}(e^{it}) d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} P(z, e^{it}) d\mu = \mathcal{P}[d\mu](z) \,.$$

·) $\underline{(iii), (iv) \Leftarrow}$: Betrachte die Funktionale $\wedge r$ auf $L^q(\mathbb{T})$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Die gleiche Argumentation zeigt $\exists f \in L^P(\lambda) : u = \mathcal{P}[f]$.

·) $\underline{(vi) \Leftarrow}$: Wegen der Mittelwerteigenschaft und $u \geq 0$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |u_r| d\lambda = \int\limits_{\mathbb{T}} u_r\, d\lambda = u(0) \,,$$

also ist $\sup ||u_r||_1 = u(0) < \infty$. Die Funktionale $\wedge_r$ sind positiv (d.h. $g \geq 0 \Rightarrow \wedge_r g \geq 0$), also hat auch $\wedge$ diese Eigenschaft, also ist μ ein positives Maß.

·) $\underline{(v) \Leftarrow}$: Ist u_r konvergent in $|| \cdot ||_\infty$, so auch in der $|| \cdot ||_p$ für jedes $1 < p < \infty$. Nach “$(iii) \Leftarrow$“ existiert $\tilde{f} \in L^p(\lambda)$: $u = \mathcal{P}[\tilde{f}]$ und nach “$(iii) \Leftarrow$“ gilt $u_r \to \tilde{f}$ in der Norm $|| \cdot ||_p$. Es folgt $\tilde{f} = f$ es ist also $u = \mathcal{P}[f]$ mit einer stetigen Funktion f.

·) $\underline{(ii) \Leftarrow}$: Verwenden die Fourier Reihe einer $L^1(\lambda)$-Funktion:

Die Abbildung $f \mapsto \hat{f} = (c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ mit $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\mathbb{T}}^{\pi} f(t) e^{-\int} dt$ ist ein bechränkter Operator von $L^1(\lambda)$ in ℓ^∞ und ist injektiv (vgl. [Ru1,rudin1, 5.15]).

Sei jetzt $u_r \to f$ in der Norm $|| \cdot ||_1 \Rightarrow \hat{u}_r \to \hat{f}$. Sei $r_0 < 1$ fix, $1 > r > r_0$, dann ist

$$u_{r_o}(e^{i\theta}) = u(v_o e^{i\theta}) = u(v \cdot \frac{v_o}{r} e^{i\theta}) = u_r(\frac{v_o}{r} e^{i\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P} \frac{r_o}{r} (\theta - t) u_r(e^{it}) dt \,.$$

Die Faltung entspricht der Multiplikation der Fourierkoeffizienten, also gilt

$$\hat{u}_{r_o}(n) = \hat{u}_r(n) \cdot (\frac{v_o}{r}^{|n|} \to \hat{f}(n) v_o^{|n|} \,.$$

Das zeigt

$$u(r_o e^{i\theta}) = u_{r_o}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{r_o}(\theta - t) dt = \mathcal{P}[f](r_o e^{ip}) \,,$$

da r_o beliebig $\Rightarrow u = \mathcal{P}[f]$.

❑

<u>*Eindeutigkeit*</u>: Anmerkung: "folgt aus (iv)". Es genügt zu zeigen: $\mathcal{P}[d\mu] = 0 \Rightarrow \mu = 0$. Sei $f \in C(\mathbb{T})$, $u = \mathcal{P}[f]$, $v = \mathcal{P}[d\mu]$. Wegen $P_r(\theta - t) = P_r(t - \theta)$ d.h. $P(re^{i\theta}, e^{it}) = P(re^{it}, e^{i\theta})$, gilt

$$\int_{\mathbb{T}} u_r d\mu = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P(re^{i\theta}, e^{it}) f(e^{it}) d\lambda_e(t) d\mu_e(\theta) =$$

Fubini
$\downarrow$

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P(re^{it}, e^{i\theta}) d\mu_e(i\theta) d\lambda_e(t) =$$

$$\int_{\mathbb{T}} v_r(e^{it}) f(e^{it}) d\lambda \,.$$

Ist nun $v = 0$, so auch alle v_r und da $u_r \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\mu = 0 \,.$$

Da f beliebig war $\Rightarrow \mu = 0$.
Alle Aussagen von Satz 1.3.2 sind beweisen.

1.4 Subharmonische Funktionen

DEI.12

1.4.1 Definition. Sei u eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}\, u\{t\infty\}$ auf einer offenen Menge Ω. u heißt subharmonisch, wenn

(i) $-\infty \leq u(z) < \infty, z \in \Omega$.

(ii) u ist halbstetig von oben (d.h. $u^{-1}\{[\lambda, \infty)\}$ ist abgeschlossen).

(*iii*) Ist $D(a,r) \subseteq \Omega$, so gilt

$$u(a) \leq \frac{1}{-\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \,.$$

(*iv*) Keines der obigen Integrale ist $-\infty$.

RED

1.4.2 Bemerkung ((e)). ie Bedingung (*iv*) besagt "$u(a+re^{i\theta}) \in L^1(\lambda)$". Denn auf jeder kompakten Menge K ist u nach oben beschränkt: Sei $K_n = \{z \in K | u(z) \geq n\} \Rightarrow K \geq K_1 \geq K_2 \geq -$, und alle K_n sind kompakt. Wegen der Durchschnittseigenschaft gilt entweder $K_n = \phi$ für ein n oder $\bigcap_n K_n \neq \phi$. Die zweite Möglichkeit kann aber nicht eintreten, da $u(z) < \infty \forall z \in \Omega$ ist.

Offensichtlich ist jede harmonische Funktion subharmonisch.

THI.13

1.4.3 Satz. (*i*) *Sei u eine stetige subharmonische Funktion in Ω, K eine kompakte Teilmenge von Ω und h eine reelle stetige Funktion auf K die im inneren harmonisch ist . Gilt $u(z) \leq h(z)$ für alle Randpunkte $z \in \partial K$, so gilt $u(z) \leq h(z)$ für alle $z \in K$.*

(*ii*) *Sei u eine setige subharmonische Funktion in $\mathbb{D}$ und sei*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, o \leq r < 1 \,.$$

Dann gilt $m(r_2)$ für $r_1 \leq r_2$.

Beweis.

(*i*) Setze $u_1 = u - h$. Angenommen $u_1(z) > 0$ für ein $z \in K$, und sei $m := \max_{z \in K} u_1(z) > 0$. Die Menge

$$E := \{z \in K | u(z) = m\}$$

ist eine kompakte Teilmenge der Inneren K°. Sei z_o ein Randpunkt von E, und sei r so klein, daß $\overline{D(z_o,r)} \subseteq K^\circ$ und daß ein Bogen von $\partial D(z_o,r)$ nicht in E liegt. Dann gilt

$$u_1(z_o) = m > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_o + re^{i\theta}) d\theta \,,$$

ein WS!, denn mit u ist auch $u - h$ subharmonisch.

(*ii*) Sei h eine stetige Funktion auf $\overline{(0, r_2)}$, harmonisch in $D(0,r_2)$, so daß $h(r_2 e^{i\theta}) = u(r_2 e^{i\theta})$. Nach dem ersten Beweisteil gilt $u(r_1 e^{i\theta}) \leq h(r_1 e^{i\theta})$, also

$$m(r_1) \leq \frac{1}{2\theta} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta}) d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta}) d\theta = m(r_2) \,.$$

$\square$

REF

1.4.4 Bemerkung. Voraussetzung “u stetig“ ist in (i) und (ii) nicht nötig.

LEI.14

1.4.5 Lemma. *Sei u subharmonisch in Ω und sei φ eine monoton wachsende, konvexe Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist $\varphi \circ u$ subharmonisch.*

Beweis. Zunächst bemerke, daß φ stetig ist. Dann folgt,daß $\varphi \circ u$ halbstetig von oben ist. Weiters ist wegen der Monotonie von φ und der Jensen'schen Ungleichung für $\overline{D(a,r)} \leq \Omega$:

$$\varphi(u(a)) \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(u(a+re^{i\theta})\Big)d\theta\,.$$

$\square$

THI.15

1.4.6 Satz. *(Jensen'sche Formel) Sei f analytisch in $\mathbb{D}$, $f(0) \neq 0$, sei $0 < r < 1$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ die Nullstellen von f in $\overline{D(0,r)}$ (mit Vielfachheit). Dann gilt*

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{v}{|\alpha_n|} = e\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

Beweis. Die Punkte α_j seien so angeordnet, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D(0,a)$ und $|\alpha_{m+1}|F - F|\alpha_N| = v$ ist. Setze

$$g(z) = f(z)\prod_{n+1}^{m} \frac{v^2 - \overline{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z)}$$

dann ist $g(z)$ analytisch in $\mathbb{D}$ und hat in $\overline{D(0,r)}$ keine Nullstellen. Also ist $\log|g(z)|$ stetig auf $\overline{D(o,r)}$ und harmonisch im Inneren, daher ist

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta\,.$$

Nach Definition gilt $|g(o)| = |f(o)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|}$. Setzt man $\alpha_n = re^{i\theta_n}$, $n = m+1, \dots, N$, so gilt auf $|z| = r$:

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|\,.$$

Können wir zeigen, daß das Integral über die hintere Summe $= 0$ ist, sind wird fertig.

·) Es gilt $\int\limits_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta} = 0$: Die Funktion $\log(1-z)$ ist analytisch in der Halbebene $\mathcal{R}ez < 1$. Wähle einen solchen Zweig, daß $|\mathrm{Im}\log(1-z)| < \frac{\pi}{2}$. Integriere $\frac{1}{z}\log(1-z)$ längs dem Weg $\Gamma - \gamma$

————————S k i z z e ————————————————-

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz gilt

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\log(1-z)dz = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \log(1-z)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|d\theta\,.$$

Ist r Radius des Kreisbogens γ, so gilt

$$|\log(1-z)|^2 \leq (\log r)^2 + (\frac{\pi}{2})^2\,, \text{und}$$

$$|\frac{1}{z}| \leq \frac{1}{1-r}\text{längs}\,\gamma\,.$$

Die Länge des Integrationsweges ist höchstens πr, und da mit δ auch r gegen Null geht folgt die Behauptung.

❑

COI.16

1.4.7 Korollar. *Sei f analytisch im Gebiet Ω, f nicht identisch 0. Dann sind die Funktionen $\log|f|$, $\log^+|f|$, $|f|^P$ für $0 < p < \infty$, subharmonisch in Ω.*

Beweis.
·) Betrachte $\log|f|$. Sei $\overline{D(a,r)} \leq \Omega$, oBdA sei $a = 0$. Ist $f(0) = 0$, so ist $\log|f|(0)| = -\infty$, also die Bedingung (iii) klar. Ist $f(0) \neq 0$ so zeigt die Jensen'sche Formel

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta\,.$$

Die Bedingungen $(i), (ii)$ sind klar. Die Bedingung (iv) folgt bereits falls $f(0) \neq 0$. Ist $f(0) = 0$ mit der Ordnung k, so wende die Jensen'sche Ungleichung auf $\frac{f(z)}{z^k}$ an:

$$\log\Big|\frac{f}{z^k}(0)\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log\Big|\frac{f(re^{i\theta})}{r^k e^{ik\theta}}\Big|d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - k\log r\,.$$

·) Wende Lemma 1.4.5 an auf $u = \log|f|$ und $\varphi(x) = \max(0,x)$, bzw. $\varphi(x) = e^{px}$.

❑

REg

1.4.8 Bemerkung. Sei u in Ω zwei mal stetig differenzierbar nach x und y. Dann ist u subharmonisch $\mapsto \triangle u \geq 0$.

Kapitel 2

Die Räume H^p, N, N^+

2.1 Nullstellen

DEII.1

2.1.1 Definition. Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ und bezeichne f_r für $0 \leq r < 1$ wieder $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$. Sei $H^p(0 < \mathcal{P} \leq \infty)$ die Menge jener $f's$ für die

$$\sup_{0\leq r<1} ||f_r||_p < \infty\,.$$

N sei die Menge jener $f's$ für die

$$\sup_{o\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f_r(e^{i\theta})| d\theta < \infty\,.$$

Wir bezeichnen $||g||_0 := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log^+ |g(e^{i\theta})| d\theta$ für eine Funktion $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

REh

2.1.2 Bemerkung. (*i*) Wegen Korollar 1.4.7 bzw. dem Maximumprinzip ist $||f_r||_p$ mit r monoton wachsend $(0 \leq p \leq \infty)$. Ist also $f \in N$ bzw. $f \in H^p$, so gilt

$$\lim_{r\nearrow 1} ||f_r||_p = \sup_{0\leq r<1} ||f_r||_p\,.$$

(*ii*) Offensichtlich gilt $(p \leq p')$

$$N \geq H^p \geq H^{p'} \geq H^\infty\,.$$

Für $f \in N$ bzw. $f \in H^p$ bezeichnen wir $0 \leq p \leq \infty)$

$$||f||_p = \lim_{r\nearrow 1} ||f_r||_p\,.$$

LEII.2

2.1.3 Lemma. *(Blaschke Produkte) Sei $\alpha_n \in \mathbb{D}$ eine Folge, $\alpha_n \neq 0$, so daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty (\textit{oder equivalent} \prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| > 0)$$

gilt, und sei $k \in \mathbb{N}u\{0\}$. Dann stellt das Produkt

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, z \in \mathbb{D},$$

eine analytische Funktion in $\mathbb{D}$ dar $|(B(z)| \le 1$, die genau die Nullstellen α_n (und 0 mit Vielfachheit k) hat (kommt ein α_n mehrfach vor, so hat B eine Nullstelle der entsprechenden Ordnung).

$B(z)$ hat fast überall nichttangentiale Randwerte $B(e^{i\theta})$. Es gilt f.. $|B(e^{i\theta})| = 1$. Weiters ist

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta = 0 .$$

Beweis. Zum ersten Teil der Aussage vgl. [Ru1,rudin1, 15.21]. Zum zeiten Teil: B ist analytisch also harmonisch, und ≤ 1, also ist B nach Satz 1.2.5 und Satz 1.3.2 f.. nichttangentiale Randwerte $B^*(e^{i\theta})$. Klarerweise ist $|B^*(e^{i\theta})| \le 1$. Da $\log |B(z)|$ subharmonisch ist, ist nach Satz 1.4.3 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta$ nichtfallend, also existiert der obige Grenzwert. Setze

$$B_N(z) := \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \alpha_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n},$$

dann hat $\frac{B}{B_N}$ in einer offenen Umgebung von $\mathbb{T}$ keine Nullstellen und ist dort analytisch, und $|\frac{B}{B_N}| = 1$ längs $\mathbb{T}$. Der obige Grenzwert ändert sich also nicht, wenn man B durch B_N ersetzt. Da $\log |B_N(z)|$ subharmonisch ist folgt (oder direkt wegen der Jensen'schen Formel) (r hinreichend klein)

$$\log |B_N(0)| \overset{Mittelwerteigenschaft}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B_N(re^{i\theta})| d\theta \overset{Jensen'scheFormel(odersubharmonisch)}{\le}$$

$$\le \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B_N(re^{i\theta})| d\theta = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta \le$$

$$\overset{Fatou'schelemma}{\le} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(e^{i\theta})| d\theta \le 0$$

Für $N \to \infty$ geht $\log |B_N(0)| \to 0$. Insbesondere ist der betrachtete Grenzwert $= 0$ und $|B(e^{i\theta})| = 1$ f.. .

❑

REi

2.1.4 Bemerkung. Seien α_i die Nullstellen eines Blaschke Produktes $B(z)$. Dann ist $B(z)$ analytisch in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von

(*i*) $z = \frac{1}{\alpha_i} \ldots$ Pole

(*ii*) $K = \{$ Häufungspunkte von $\alpha_i{}'s\}$ als nichtisolierte Sa...itäten.

Längs $T \setminus K$ hat $B(z)$ Betrag 1.

THII.3

2.1.5 Satz. *Sei $f \in N, f \not\equiv 0$. Dann erfüllen die Nullstellen α_n von f die Blaschke Bedingung*

$$\sum (1 - |\alpha_n|) < \infty .$$

Sei $B(z)$ das Blaschke Produkt zu den Nullstellen von f, und setze $g(z) := \frac{f(z)}{B(z)}$. Dann ist $g \in N$ und $||g||_0 = ||f||_0$.

War sogar $f \in H^p(0 < \sqrt{\ } \leq \infty)$, so ist auch $g \in H^p$ und es gilt $||g||_p = ||f||_p$.

Beweis. Hat f bei 0 eine Nullstelle der Ordnung k, so betrachte $\tilde{f} = \frac{f(z)}{z^k}$. Wegen $\log^+(st) \leq \log^+ s + \log^+ t$ ist $\tilde{f} \in N$. Um die Blaschke Bedingung für f zu zeigen können wir also oBdA $f(0) \neq 0$ voraussetzen. Es gilt

$$|f(0)| \prod_{|\alpha_n|<r} \frac{r}{|\alpha_n|} = e\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \leq$$

$$\leq e\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq^{e||f||_0} .$$

Sei nun k gegeben und r so groß, daß $\#\{|\alpha_n| <\} \geq k$. Dann gilt

$$\frac{1}{rk}\prod_{n=1}^{k} \geq \prod_{|\alpha_n|<r} \frac{|\alpha_n|}{r} \geq \frac{|f(0)|}{e^{||f||_0}} .$$

Für $r \to 1$ folgt $\prod\limits_{n=1}^{k} < \alpha_n| \geq \frac{|f(0)|}{e^{||f||_0}}$ und da k beliebig war folgt $\prod |\alpha_n| > 0$.

·) Betrachte jetzt die Funktion $g = \frac{f}{B}$. Dann gilt weiters

$$\log^+|g(z)| \leq \log^f|(z)| + \log\frac{1}{|B(z)|} ,$$

also ist nach Lemma 2.1.3

$$||g||_0 \leq ||f||_0 ,$$

insbesondere ist $g \in N$. Wegen $|g(z)| \geq |f(z)|$ in $\mathbb{D}$ gilt sicher $||g||_0 \geq ||f||_0$, also folgt "=".

·) Sei nun $f \in H^p$, und sei $B^n(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)}$ das Blaschke Produkt der ersten n Nullstellen. Es gilt $|B^n(re^{i\theta})| \to 1$ für $r \to 1$ und zwar gleichmäßig. Mit $g_n = \frac{f}{B^n}$ folgt also $||g_n||_p = ||f||_p$. Für $n \to \infty$ geht $|g_n| \to |g|$ und zwar monoton wachsend. Der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt

$$||g_r||_p = \lim_{n\to\infty} ||(g_n)_r||p .$$

Wegen $||(g_n)_r||_p \leq ||g_n||_p$ und der obigen Überlegung folgt $||g||_p \leq ||f||_p$, insbesondere also $g \in H^p$. Wieder folgt wegen $|g(z)| \geq |f(z)|$ das sogar Gleichheit gilt.

❑

2.2 Randwerte

Nach Satz 1.2.5 und Satz 1.3.2 wissen wir das jede H^1-Funktion f.. nichttangentiale Randwerte hat.

THII.4

2.2.1 Satz. *R.Nevantinna Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $f \in N \iff f(t) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ für gewisse $\varphi, \psi \in H^\infty$.*

Beweis.
·) Sei $f = \frac{\varphi}{\psi}$, $||\varphi||_\infty \leq 1$, $||\psi||_\infty \leq 1$, $\psi(0) \neq 0$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq - \int_0^{2\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta \,.$$

Da $\log |\cdot|$ subharmonisch ist (oder direkt mit der Jensen'schen Formel), ist die rechte Seie mit r monoton fallend, also ist $f \in N$.

·) Sei umgekehrt $f \in N$, und seienα_n die Nullstellen von f, $\alpha_n \neq 0$, und sei 0 eine Nullstelle der Ordnung k. Sei r so, daß $f(z) \neq 0$ längs $|z| = r$ und betrachte

$$F_r(z) = \log \left[\frac{f(z)}{\frac{z^k}{r^k} \prod\limits_{|\alpha_n|<r} \frac{r(z-\alpha_n)}{r^2 - \overline{\alpha_n} z}} \right] .$$

("Blaschke Produkt für den Kreis mit Radius r"). Offenbar ist F_r analytisch in $|z| \leq r$ und ReF_r hat die Randwerte $\log |f(re^{i\theta})|$ (vgl. Lemma 2.1.3). Also hat F_r die Darstellung (vgl. Satz 1.1.6)

$$F_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \log |f(re^{it})| dt + iC \,.$$

Es folgt $f(z) = C^{F_r(z)} \cdot \frac{z^k}{r^k} \prod\limits_{|\alpha_n|<r} \frac{r(z-\alpha_n}{r^2 - \overline{\alpha}_n z} = \frac{\varphi_r(z)}{\psi_r(z)}$ mit

$$\varphi_r(z) = \frac{z^k}{r^k} \prod_{|\alpha_n|<r} \frac{r(z-\alpha_n)}{r^2 - \overline{\alpha_n} z} \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \log^- |f(re^{it})| dt + iC}$$

$$\psi_r(z) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \log^+ |f(re^{it})| dt} .$$

Offenbar gilt $|\varphi_r(z)|$, $|\psi_r(z)| \leq 1$ in $|z| \leq r$. Setze $\phi_r(z) = \varphi_r(rz)$, $\psi_r(z) = \psi_r(rz)$ für $< z| \leq 1$. Offensichtlich ist $f(rz) = \frac{\phi_r(z)}{\psi_r(z)}$, sind ϕ_r, ψ_r analytisch in $\mathbb{D}$ und beschränkt durch 1. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Folge $r_i \to 1$ so daß

$$\lim_{i\to\infty} phi_{r_i}(z) = \varphi(z), \lim_{i\to\infty} \psi_{r_i}(z) = \psi(z)$$

gleichmäßig auf kompakten Mengen existiert. Sei $z \in \mathbb{D}$ fest. Dann gilt

$$|\psi_r(z)| = |\psi_r(rz)| = e^{-\mathrm{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{re^{it}+rz}{re^{it}-rz}}_{\mathrm{Re}=P(z,e^{it})} \log^+ |f(re^{it})| dt \geq}$$

$$\geq e^{-||P(z,e^{it})||_\infty \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| \leq e^{-||P(z,e^{it})||_\infty ||f||_0}}$$

Also hat $\psi(z)$ in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen, und wir finden

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z))}, z \in \mathbb{D}.$$

❑

COII.5

2.2.2 Korollar. *Sei $f \in N$, $f \neq 0$, dann hat f $f \cdot f\overline{u} \cdot$ nichttangentiale Randwerte und $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1(\lambda)$. Ist sogar $f \in H^p$, $0 < \mathcal{P} < \infty$ dann ist $f(e^{i\theta}) \in L^P$ und $||f(e^{i\theta})||_p \leq ||f||_p$. Für $p = \infty$ gilt $||f(e^{i\theta})||_\infty = ||f||_\infty$.*

Beweis.
$\cdot$) Sei $\varphi \in H^\infty$, $|\varphi| \leq 1$, dann gilt (φ hat Randwerte !)

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big| \log|\varphi(e^{it})| \Big| dt = \int\limits_0^{2\pi} \Big(-\log|\varphi(e^{it})| \Big) dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \lim_{r\nearrow 1} (-\log|\varphi(re^{it})|) dt \overset{Lemma\, von\, Fatou}{\leq} \lim_{r\nearrow 1} \int\limits_0^{2\pi} (-\log|\varphi(re^{it})|) dt$$

Da $\log|\cdot|$ subharmonisch ist (oder mit Jensen'schen Formel) ist die rechte Seite monoton fallend, der $\liminf_{r\nearrow 1}$ also $< \infty$. Daher gilt $\log|\varphi(e^{it})| \in L^1(\lambda)$, insbesondere kann $\varphi(e^{it})$ auf keiner Mengen positivem Maßes $0 =$ sein.

$\cdot$) Schreibe $f \in N$ als $f = \frac{\varphi}{\psi}$ mit $|\varphi|, |\psi| \leq 1$. Dann ist $\psi(e^{it}) \neq 0$ f.., also hat f f.. nichttangentiale Randwerte. Dann $\log|f(e^{i\theta})| = \log|\varphi(e^{i\theta})| - \log|\psi(e^{i\theta})| \Rightarrow \log|f(e^{i\theta})| \in L^1(\lambda)$. Sei nun $f \in H^p$, dann gilt

$$||f(e^{i\theta})||_p = \Big[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^P dt\Big]^{\frac{1}{p}} = \Big[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi}^{\pi} \lim_{r\nearrow 1} |f(re^{it})|^P dt\Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \nearrow \text{ Fatou}\Big[\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^P dt\Big]^{\frac{1}{P}} = ||f||_P.$$

$$\overset{Fatou}{\leq} \Big[\liminf_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^P dt\Big]^{\frac{1}{P}} = ||f||_p.$$

Für $p = \infty$: Klar, denn $f(z) \leq M \Rightarrow |f(\frac{\lim z}{z \to e^{i\theta}} \in M$. Es gilt auch umgekehrt: Schreibe $f(z) = \mathcal{P}[f(e^{i\theta})](z)$ nach Satz 1.3.2.Dann gilt

$$|f(z)| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(z_i e^{it})\ dt}_{=1} \cdot ||f(e^{i\theta})||_\infty$$

❑ REj

2.2.3 Bemerkung. Ist $f \in N$ und $f(e^{i\theta}) \in L^P$, so folgt im allgemeinen nicht $f \in H^p$.

COII.6

2.2.4 Korollar. *Seien $f, g \in N$ und gelte $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ für eine Menge ($\subseteq \mathbb{T}$) positivem Maßes, dann ist $f = g$.*

Beweis. Es ist $f - g \in N$, denn

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f_{re^{it}} - g_{re^{it}}| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \Big(|f(re^{it})|f|g(re^{it})|\Big) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \Big(2\max(|f(re^{it})|)|g(re^{it})|\Big) dt \leq \log 2 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\pi} \log^+ |g(re^{it})| dt \leq \log 2 + ||f||_0 + ||g||_0 \ ,.$$

Verschwindet $f - g$ auf einer Menge positiven Maßes $\Rightarrow$ $f - g \equiv 0$ da $\log|f - g| \in L^1$.

❑

THII.7

2.2.5 Satz. *Sei $f \in H^p (0 < P < \infty)$, dann gilt*

$$\lim_{r\nearrow 1} ||f_r^{e^{i\theta}} - f(e^{i\theta})||_P = 0\,.$$

*Bevor wir Satz*2.2.5 *beweisen, benötigen wir ein maßtheoretisches Lemma:*

LEII.8

2.2.6 Lemma. *Sei $0 < P < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^P(\lambda)$, gelte $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(e^{i\theta}) = \varphi(e^{it})$ punktweise f.., und sei*

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_P = ||\varphi||_P\,.$$

Dann folgt $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \varphi||_P$.

Beweis. Setze $J_n(E) = \int_E |\varphi_n|^P d\lambda$, $J(E) = \int_E |\varphi|^P d\lambda$. Dann gilt

$$J(E) \overset{Fatou}{\leq} \liminf_{n\to\infty} J_n(E) \leq \limsup_{n\to\infty} J_n(E) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty}\Big[\underbrace{J_n(\mathbb{T})}_{=||\varphi_n||_P \to ||\varphi||_P = J(\mathbb{T})\text{nach VS!}} - J_n(E^c)\Big] = J(\mathbb{T}) - \liminf_{n\to\infty} J_n(E^c) \leq$$

$$\overset{Fatou}{\leq} J(\mathbb{T}) - J(E^c) = J(E) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} J_n(E) = J(E)\,.$$

Sei nun $\in < 0$ gegeben, wähle $\delta > 0$ sodaß $J(E) < \in$ für alle E mit $\lambda(E) < \delta$. Nach dem Satz von Egoroff gibt es eine Menge Q mit $\lambda(\mathbb{T} - Q) < \delta$, so daß $\varphi_n \to \varphi$ gleichmäßig auf Q ist. Es folgt wegen

$$|a - b|^P \leq 2^P(|a|^P + |b|^P)$$

das gilt

$$||\varphi_n - \varphi||_P = \int\limits_Q |\varphi_n - \varphi|^P d\lambda + \int\limits_{\mathbb{T}-Q} |\varphi_n - \varphi|^P d\lambda \leq$$

$$\int\limits_Q |\varphi_n - \varphi|^P d\lambda + 2^P (J_n(\mathbb{T} - Q) + J(T - Q)) \, .$$

Der erste Summand $\to 0$, $J(\mathbb{T} - Q) < \epsilon$ und $J_n(\mathbb{T} - Q) \to J(\mathbb{T} - Q)$. Für hinreichend großes n ist die Summe kleiner als z.B. ϵ.

❑

Beweis. (vonSatz 2.2.5)
·) "Anmerkung folgt aus I.11"
Sei zunächst $p = 2$. Sei $f \in H^2$, $f(z) = \sum a_n z^n$. Dann gilt

$$||f||_2^2 = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta =$$

$$= \lim_{r \nearrow 1} \sum |a_n|^2 r^{2n} = \sum |a_n|^2 \, ,$$

d.h. $\sum |a_n|^2 < \infty$. Es ist

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{itheta}) - f(e^{i\theta})|^2 d\theta \overset{Fatou}{\leq} \liminf_{g \to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(ge^{i\theta})|^R d\theta =$$

$$= \liminf_{g \to 1} \sum |a_n|^2 (r^n - g^n)^2 = \sum |a_n|^2 (1 - r^n)^2 \, .$$

Die rechte Seite geht für $r \to 1$ gegen 0.

·) Sei jetzt $0 < p < \infty$. Nach Satz 2.1.5 schreibe $f(z) = B(z)g(z)$, $g \in H^p$, $||g||_P = || + ||_P$, $g \neq 0$ in $\mathbb{D}$. Dann ist $[g(z)]^{\frac{P}{2}}$ analytisch in $\mathbb{D}$ und $\in H^2$. Also gilt (da $|f(z)| \leq |g(z)|$)

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^P d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})^P d\theta \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^P d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^P d\theta \leq$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^P d\theta \, .$$

Es folgt $\lim_{r \to 1} ||f_r(e^{i\theta})||_P = ||f(e^{i\theta})||_P$. Nach Lemma 2.2.6 folgt $\lim_{r \nearrow 1} ||f_r(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})||_P = 0$.

❑

REk

2.2.7 Bemerkung. Wir haben im Beweis benützt (und auch gezeigt) das

$H^2 = \left\{ \sum a_n z^n | \sum |a_n|^2 < \infty \right\}$, $||f||_2^2 = \{a_n\}$d.h. $\simeq \ell^2$in dieser schönen Weise

Die Aussage von Satz 2.2.5 ist weder für $p = 0$ d.h. $f \in N$, noch für $p = \infty$ im allgemeinen richtig. Bezüglich $p = \infty$ gilt: $= \lim_{r \nearrow 1} ||f_r||_\infty = ||f(e^{i\theta})||_\infty$. Bezüglich $p = 0$ folgt aus der (elementaren) Ungleichung

$$|\log^+ a - \log^+ b| \le \frac{1}{P}|a-b|^P,\ a \ge 0, b \ge 0, 0 < P \le 1\,,$$

folgt jedoch, daß für jedes $f \in H^p$ (für irgendein $\alpha p \le \infty$) die Beziehung

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \log^+ |f_r(e^{i\theta})| - \log^+ |f(e^{i\theta})| \Big| d\theta = 0$$

gilt. Wir bezeichnen mit N^+ die Menge jener $f \in N$, für die diese Beziehung richtig ist. Wegen Lemma 2.2.6 angewandt auf $P = 1$, $\varphi_n = \log^+ |f(re^{it})|$, ist das

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(e^{it}| dt\,.$$

Dann gilt nach dem oben gesagten

$$N \supsetneq N^+ \supsetneq H^p,\ 0 < P \le \infty\,.$$

Zusammenfassung:
$f \in H^p$, $0 < P < \infty$: $f_r \stackrel{||\cdot||_P}{\longrightarrow} ||\cdot||_P f(e^{i\theta})$ insbesondere $||f_r||_P \to ||f(e^{i\theta})||_P$
$f \in H^\infty$: $||f_r||_\infty \to ||f||_\infty$, $i \cdot a \cdot$ nicht $||f_r - f(e^{i\theta})||_\infty \to 0$
$f \in N$: $i \cdot a \cdot$ nicht $||f_r||_0 \to ||f(e^{i\theta})||_0$
$f \in N^+ \iff ||f_r||_0 \to ||f(e^{i\theta})||_0 \iff f_r \stackrel{||\cdot||_0}{\longrightarrow} f(e^{i\theta})$.

COII.9

2.2.8 Korollar. *Sei $f \in H^1$. Dann ist f sowohl das Poisson $-$ also auch das Cauchy-Integral seiner Randwerte.*

Beweis.
$\cdot$) Nach Satz 2.2.5 konvergieren die Funktionen $f_r(e^{i\theta})$ in der Norm $||\cdot||_1$ gegen $f(e^{i\theta})$. Nach Satz 1.3.2 ist$f(z)$ das Poisson Integral von $f(e^{i\theta})$.

$\cdot$) Für die Funktionen $f_r(z)$ gilt die Cauchysche Integralformel:

$$f_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f_r(\xi)}{\xi - z} d\xi, z \in \mathbb{D}\,.$$

Für $z \in \mathbb{D}$ fest ist $\frac{1}{\xi - z}$ längs $\mathbb{T}$ beschränkt, also folgt aus der $||\cdot||_1-$ Konvergenz von $f_r(e^{i\theta})$ gegen $f(e^{i\theta})$

$$f(z) = \lim_{r \nearrow 1} f_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\,.$$

❑

COII.10

2.2.9 Korollar. *(Satz von F.und M.Riesz) Sei μ ein komplexes (endliches) Borel Maß auf $\mathbb{T}$ und seien die negativen Fourierkoeffizienten $= 0$:*

$$\int_{\mathbb{T}} e^{-\int} d\mu = 0,\ n = -1, -2, \dots .$$

Dann ist μ absolut stetig bzgl. λ.

Beweis. Betrachte $\mathcal{P}[d\mu]$. Mit $z = re^{i\theta}$ gilt (nach Definition) $\mathbb{P}(z, e^{it}) = \sum_{n=\dots\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} e^{-\mathrm{int}}$, also ist

$$P[d\mu](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\int_{\mathbb{T}} e^{-\int} d\mu \Big] z^n$$

analytisch in $\mathbb{D}$ und damit in H^1. Nach Korollar 2.2.8 ist $\mathcal{P}[d\mu]$ das Poisson Integral seiner Randwerte ($\mathcal{P}[d\mu](e^{i\theta}) =: f(e^{i\theta})$):

$$\mathcal{P}[d\mu](z) = \mathcal{P}[f(e^{i\theta})](z) .$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.3.2 folgt $d\mu = f d\lambda$.

❑

2.3 Kanonische Faktorisierung. Inner- und Outer-Functions

DEII.11

2.3.1 Definition. Eine Funktion $f \in H^\infty$ für die $|f(e^{i\theta})| = 1$ f.. gilt heißt "inner function". Hat f zusätzlich keine Nullstellen, so heißt f "singular inner function". Sei $\psi(e^{it}) \geq 0, \log \psi \in L^1(\lambda)$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion

$$e^{i\gamma} e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \psi(e^{it} dt}$$

eine "outer function für N". Ist zusätzlich $\psi \in L^P (0 < p \leq \infty)$, so heißt obige Funktion eine "outer function für H^p".

LEII.12

2.3.2 Lemma. *Jede inner function läßt sich schreiben als*

$$f(z) = cB(z) e^{-\in_T \frac{e^{it} tz}{e^{it}-z} d\mu} ,$$

wobei c Konstante von $|c| = 1$, B ein Blaschke Produkt und μ ein endliches positives Borelmaß singulär bzgl. λ ist. Umgekehrt ist jede durch obige Formel gegebene Funktion eine inner function.

Beweis.
·) Sei f eine inner function, wegen Satz 2.1.5 und Lemma 2.1.3 können wir $f \neq 0$ in $\mathbb{D}$ voraussetzen. Dann ist $-\log|f(z)|$ harmonisch und nicht negativ in $\mathbb{D}$, läßt sich nach Satz 1.3.2 also als Poisson Integral eines positiven endlichen Maßes schreiben. Da $-\log|f(e^{i\theta})| = 0$ f .. ist, zeigt Satz 1.2.5, daß μ singulär bzgl. λ ist.

$\cdot$) Umgekehrt mit dem gleichen Argumenten klar.

$\square$

REl

2.3.3 Bemerkung. Sei $\int = e - \int\limits_T \frac{e^{it}+z}{e^{i\theta b}-z}\, d\mu$ eine singulea einer Funktion. Dann ist $\int$ analytisch in $\mathbb{C}$ mit Aus.... von $\operatorname{supp}\mu$ (d.h. abg. Träger des Maßes μ).

LEII.13

2.3.4 Lemma. *Sei $f \in H^p(0 < \mathcal{P} \leq \infty)$, dann gilt* $\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log|f(e^{it})|dt$.

Beweis. oBdA sei $f \neq 0$ in $\mathbb{D}$, dann ist $\log|f(z)|$ harmonisch in $\mathbb{D}$ und es gilt

$$\log|f(gre^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log|f(ge^{it})|dt\,.$$

Die Überlegung nach dem Beweis von Satz 2.2.5 d.h. $H^p \leq N^+$ zeigt, daß

$$\lim_{g \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log^+|f(ge^{it})|dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log^+|f(e^{it})|dt\,.$$

Weiters gilt

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log^-|f(e^{it})|dt \overset{Fatou}{\leq} \liminf_{g \nearrow 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log^-|f(ge^{it})|dt\,.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log|f(e^{it})| \geq \limsup_{g \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log|f(ge^{it})|dt =$$

$$= \log|f(re^{it})|\,.$$

$\square$

THII.14

2.3.5 Satz. *Es gilt*

(i) *$f \in H^p \iff f(z) = B(z)F(z)$ mit einem Blaschke Produkt B, einer singular inner function S und einer outer function F für H^p.*

(ii) *$f \in N^+ \iff f = BSF$ mit B, S wie in (i) und einer outer function F für N.*

(iii) *$f \in N \iff f(z) = B(z)\frac{S_1(z)}{S_2(z)}F(z)$ mit singular inner function S_1, S_2 und B, F wie in (ii).*

Die Zerlegungen sind (hier auf Konstanten) eindeutig.

Beweis.

$(i) \Rightarrow$ Korollar 2.2.2 zeigt $f(e^{i\theta}) \in L^P$, $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1$. Daher ist

$$F(z) := e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{i}t}-z} \log|f(e^{it}|dt$$

eine outer function für H^p und es gilt $|F(e^{it})| = |f(e^{it})|$ f... Zerlege f als $f = Bg$ wie in Satz 2.1.5. Nach Lemma 2.3.4 ist

$$|g(z)| \leq |F(z)|, z \in \mathbb{D}.$$

Die Funktion $S(z) = \frac{g(z)}{F(z)}$ ist daher eine singular inner function.

$(iii) \Rightarrow$ Nach Satz 2.2.1 ist $f = \frac{\varphi}{\psi}$, $\psi \neq 0$ in $\mathbb{D}$, $|\varphi(z)|$, $|\psi(z)| \leq 1$. φ und ψ haben nach "(i)" eine Darstellung. Da der Quotient von outer functions wieder outer ist (für N), folgt die Darstellung $f = B\frac{S_1}{S_2}F$.

$(i) \Leftarrow$ Es genügt zu zeigen, daß eine outer function F für H^p tatsächlich in H^p liegt. Sei F definiert mit ψ. Die Jensen'sche Ungleichung angewendet mit dem normierten Maß $\frac{1}{2\pi}P(z, e^{it})dt$ zeigt

$$|F(z)|^P \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})^P dt.$$

Es folgt

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^P d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})\psi(e^{it})^P dt\, d\theta =$$

$$\overset{Fubini}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})d\theta}_{=1}\ \psi(e^{it})^p dt = ||\psi||_p^p.$$

$(iii) \Leftarrow$ Sei F outer function für N. Dann ist für $\log|F(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} p(z, e^{it})\log\psi(e^{it})dt$ nach Satz 1.3.2

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|\log|F(re^{i\theta})|\Big| d\theta < \infty,$$

insbesondere folgt $F \in N$.

$(ii) \Leftarrow$ Es gilt $\log|F| = \frac{1}{2\pi}(pr(\theta - t)\log|f(e^{i\theta})|dt)$

$$\log^+|f(re^{i\theta})| \leq \log^+|F(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta - t)\log +|f(e^{it})|dt,$$

also ist

$$\lim_{r\nearrow 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})d\theta| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(e^{it})|dt\,.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus dem Lemma von Faton.

$(ii) \Rightarrow$ Schreibe $f = Bg$ mit $g \in N$, $g \neq 0$. Es ist

$$\log|B(z)| + \log^+|g(z) \leq \log^+|f(z) \leq \log^+|g(z)|\,.$$

Aus $f \in N^+$ und Lemma 2.1.3 folgt

$$\lim_{r\nearrow 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log^+|g(re^{it})|dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\log^+|g(e^{it})|dt\,.$$

d.h. $g \in N^+$
Nun gilt $\Big|\log|g(z)|\Big| = 2\log^+|g(z)| - \log|g(z)|$, also ist

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\log|g(re^{it})|\Big|dt = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log^+|g(re^{it})|dt -$$

$$-\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{it})|dt}_{=2\pi\log|g(0)|}$$

konvergent, insbesondere beschränkt. Daher hat $\log|g(z)|$ eine Darstellung mit einem Maß $d\mu$. Nach der Konstruktion von μ im Beweis von Satz 1.3.2 "$(i) \Leftarrow$" gibt es eine Folge $r_j \nearrow 1$, so daß $d\mu = \int\limits_{j\to\infty}^{w*}\Big(\log|g(r_je^{it})|dt\Big)$. Nach dem Lemma von Faton gilt für jede Menge $E \subseteq \mathbb{T}$

$$\int_E \log^+|g(e^{it})|dt \leq \liminf_{j\to\infty}\int_E \log^+|g(r_je^{it})|dt\,.$$

In diesen Beziehungen muß immer "=" gelten, denn angenommen "<" für ein $E \Rightarrow$

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\log^+|g(e^{it})|dt = \Big(\int\limits_E + \int\limits_{E^c}\Big)\log^+|g(e^{it})|dt <$$

$$< \liminf_{j\to\infty}\Big(\int\limits_{E+}\int\limits_{E^c}\Big)\log^+|g(r_je^{it})|dt\,,$$

ein WS! zur obigen Limes-Beziehung.

Jetzt zerlege μ in $\mu^+ - \mu^-$ mit positiven Maßen. Durch zweimaliges Auswählen von Teilfolgenden von (r_j) aufgrund der schwach $*$ Kompaktheit folgt

$$d\mu^+ = \overset{w*}{\lim_{j\to\infty}} \log^+ |g(r_j e^{it})| dt\,,$$

$$d\mu^- = \overset{w*}{\lim_{j\to\infty}} \log^- |g(r_j e^{it})| dt\,,$$

Die Aussage, daß in obiger Beziehung stets "=" gilt zeigt also, daß μ^+ absolut stetig ist, $d\mu^+ = \log^+ |g(e^{it})|dt$. Zerlege μ^- als $d\mu^- = h^- d\lambda + d\mu_s^-$. Da μ^- positiv ist, ist $h^- \geq 0$ und $d\mu_s$ positiv. Mit

$$\psi = e^{[\log^+ |g(e^{it})| - h]}\,,$$

der zugehörigen outer function und der zu $d\mu_s$ gehörenden singular inner function folgt die Behauptung.

❑

COII.15

2.3.6 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Ist $f(e^{i\theta}) \in L^p(0 < p \leq \infty)$, so ist $f \in H^p$.*

Beweis. Klar.

❑

COII.16

2.3.7 Korollar. *Sei $f \in N^+$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist eine outer function.

(ii) $\forall g \in N^+$, $g \neq f$ mit $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ gilt

$$|g(z)| < |f(z)|, z \in \mathbb{D}\,.$$

(iii) $\forall g \in N^+$, $g \neq f$ mit $|g(e^{i\theta})| \leq |f(e^{i\theta})|$ gilt

$$|g(z)| < |f(z)|, z \in \mathbb{D}\,.$$

(iv) Es gilt

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{it})| dt\,.$$

Beweis.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Klar.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Wegen Definition von "outer" folgt |outer part of $g| \leq |f|$ *in* $\mathbb{D}$. Rest wie bei (ii).

❑

Weiters gilt: Hat h nicht negativen Realteil, so ist f outer. Ist h eine inner function, so ist $f = 1 + h$ outer.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, dann ist $f_\epsilon = (1+\epsilon) + h$ beschränkt und $|f_\epsilon| \geq \epsilon$ in $\mathbb{D}$. Die Funktion $\log|f_\epsilon(z)|$ ist also harmonisch in $\mathbb{D}$ und beschränkt, ist also das Poisson-Integral ihrer Randwerte. Für $z = 0$ folgt mit $(iv) \Rightarrow (i)$ daß f_ϵ outer ist. Es gilt

$$f_c(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f_c(e^{it})|dt + i \arg f<(0)}$$

Da $f_\epsilon \to f$ monoton folgt die gleiche Formel für f, d.h. f ist outer.

❑

Sei $\operatorname{Re} f \geq \epsilon > 0 \Rightarrow \log|f| \geq -M$. Setze $g = -i(M + \log|f|) + (\operatorname{Arg} f + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ $\operatorname{Re} g$, in $g \geq 0 \Rightarrow$ sind Poisson Integrale von positivem Maß $\Rightarrow$ insbesondere $\sup||(\operatorname{Re} g)_r||$, $\sup||(\operatorname{Im} g)_r|| < \infty g \in H^1 \Rightarrow (iv)$. Betrachte $f + \epsilon \to f$ monoton. Wegen monotone Konvergene und dominante Konvergene $\Rightarrow (iv)$.

Ist $f \in H^1$ und $\frac{1}{f} \in H^1$, so ist f outer.

Beweis. Es gilt $\log^+|f_r| \overset{||\cdot||_1}{\to} \log^+|f|$. Für $\frac{1}{f}$: $\log^+|\frac{1}{f}| = \log^-|f| \Rightarrow \log|f_r| \overset{||\cdot||_1}{\to}$ $\log|f| \Rightarrow \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f f_r(e^{it})|dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(e^{it})|dt$. Nach (iv) $\Rightarrow f$ outer.

❑

Beweis.

- $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $g \in N^+ \Rightarrow g = BSf \Rightarrow$ falls B, S nichttrivial: $|g(z)| < |f(z)|$.

- $(i) \Rightarrow (iv)$ $\log|f(z)|$ ist das Poisson Integral der L^1-Funktion $\log|f(e^{i\theta})|$. Da $P_0(t) \equiv 1$ folgt die Beziehung (iv).

- $(ii) \Rightarrow (i)$ Angenommen f ist nicht outer, dann betrachte die zu den Randwerten von f gehörende outer function $\Rightarrow$ WS!.

- $(iv) \Rightarrow (i)$ Genauso wie vorher, denn $|B(=)S(=)| < 1$.

❑

2.4 Konjugierte Funktionen

Ist u eine reelle harmonische Funktion, so gibt es eine (bis auf eine additive reelle Konstante) eindeutige harmonische Funktion ν so daß $u + iv$ analytisch ist. ν heißt die zu u konjugierte harmonische Funktion. Setzt man voraus, das $\nu(0) = 0$ ist, so ist ν eindeutig, und wir tun dies stets. Es entsteht die Frage: Ist z.B. $\sup||u_r||_p < \infty$, ist dann $\nu + iv \in H^p$? Äquivalent: folgt schon $\sup||\nu_r||p < \infty$?

REm

2.4.1 Bemerkung. Sei u harmonisch und sei $\sup||u_r||_1 < \infty$, dann ist

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(z, e^{it})d\mu'$$

für ein gewisses μ. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu$$

ist analytisch in $\mathbb{D}$. Falls u reell ist, so ist wegen

$$kn \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{2r \sin(\theta - t)}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} =: Q_r(\theta - t)$$

$$\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi}^{\pi} Q(z, e^{it}) d\mu \,.$$

Ist u nicht reell nennen wir trotzdem dieses $\nu(\nu(0) = 0!)$ wie oben die konjungierte harmonische Funktion.

Man nennt $Q_r(t)$ den konjugierten Poisson Kern. Beachte das $Q_r(t)$keine "approximate identity" im Sinne von I.1. ist.

REn

2.4.2 Bemerkung. Der Fall $p = 2$: Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $a_n = \operatorname{Re} c_n$, $b_n = kn\, c_n$ und sei oBdA $f(0) \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$u(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \,.$$

Es folgt mit den Orthogonalitätsrelationen für $\sin, \cos$:

$$||u_r||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum r^{2n} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$||\nu_r||_2^2 = \frac{1}{2} \sum r^{2n} (a_n^2 + b_n^2) \,.$$

Man sieht $||\nu_r||_2 \leq ||u_r||_2$.

THII.17

2.4.3 Satz. *Durchlaufe u die in $\mathbb{D}$ reellen harmonischen Funktionen ν ihre konjugierten, $f = u + i\nu$.*

(i) *(M.Riesz) Sei $1 < p < \infty$, dann gibt es eine Konstante Ap, so daß*

$$||f_r||_p \leq Ap||u_r||p, 0 \leq r < 1 \,,$$

d.h. ist $\sup ||u_r||_p < \infty \Rightarrow f \in H^p$.

(ii) *(Kolmogorov) Sei $0 < p < 1$, dann gibt es eine Konstante Bp, so daß*

$$||f_r||_p \leq Bp||u_r||_1, 0 \leq r < 1 \,,$$

d.h. ist $\sup ||u_r||_1 < \infty \Rightarrow f \in H^p$.

(iii) (Zygmund) Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$(!), so daß

$$||f_r||_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\pi} |u_r(e^{it})| \log^+ |u_r(e^{it})| dt + \gamma \,,$$

d.h. ist $\sup \int |u(rer^{it})| \log^+ |u(re^{it})| dt < \infty \Rightarrow f \in H^1$. *Ist* $f \in H^1$ *und gilt* $u(z) > c$ *für eine Konstante* c, *so ist*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u_r(e^{it}) \log^+ |u_r(e^{it})| dt < \infty \,.$$

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Der Satz ist eigentlich eine Aussage über die in $\overline{\mathbb{D}}$ stetigen Funktionen f_r und u_r. Sei also im folgend en u reell, harmonisch und in $\overline{\mathbb{D}}$ stetig. Wir betrachten daher, außer in Schritt 8) stets Funktionen stetig in $\overline{\mathbb{D}}$.

`ad1`: Sei $1 < p \leq 2, \delta = \frac{\pi}{1+p}, \alpha_p = \frac{1}{\cos \delta}, \beta_p = \alpha^p(1+\alpha)$, dann gilt für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

$$1 \leq \beta(\cos \varphi)^p - \alpha \cos p\varphi \,.$$

denn: Für $|\varphi| \geq \delta$ ist die rechte Seite $\geq -\alpha \cos p\varphi \geq -\alpha \cos p\delta = \alpha \cos \delta = 1$. Für $|\varphi| \leq \delta$ ist die rechte Seite $\geq \beta(\cos \delta)^p - \alpha = 1$.

`ad2`: Sei $1 < p \leq 2$, $u(z) > 0$ in $\mathbb{D}$. Schreibe f in Polarkoordinaten: $f(z) = |f(z)| e^{i\varphi(z)}$ wobei $|\varphi(z)| < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt wegen Schritt ad1 und $u(z) = |f(z)| \cos \varphi(z)$

$$|H||_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(e^{it})|^p d\lambda \leq \beta_p \int_{\mathbb{T}} u(e^{it})^p d\lambda - \alpha_p \int_{\mathbb{T}}$$

$$\underbrace{|f(e^{it})|^p \cos(p\varphi(e^{it}))}_{=\operatorname{Re} f^p(e^{it})} dt = \beta_p ||u||_p^p - \alpha_p \underbrace{\operatorname{Re}(f(0)^p)}_{>0} \leq \beta_p ||u||_p^p \,.$$

`ad3`: Sei $1 < p \leq 2$, u beliebig. Es gilt $u(z) = P[u(e^{i\theta})](z)$. Zerlege u als $u = u_+ - u_-$ mit

$$u_+(z) = P[\max(u(e^{i\theta}), 0)](z) \,,$$
$$u_-(z) = P[\max(u(e^{i\theta}), 0)](z) \,.$$

Da u_{pm} stetig in $\overline{\mathbb{D}}$, $u_\pm(z) > 0$ in $\mathbb{D}$ folgt mit Schritt ad2 und da $|u(e^{i\theta})| = u_+(e^{i\theta}) + u_(e^{i\theta})$ und $|u| \geq |u_{pm}$:

$$||f||_p \leq ||f_+||_p + ||f_-||_p \leq \beta_p^{\frac{1}{p}} \Big(||u_+||_p + ||u_|\,|_p \Big) \leq 2\beta_p^{\frac{1}{p}} ||u||_p \,.$$

Damit ist die Behauptung (i) im Falle $1 < p \leq 2$ gezeigt.

`ad4`: Sei $2 < p < \infty$. Wir fassen L^p als $(L^a)*$ auf mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist $1 < q \leq 2$. Sei u gegeben und durchlaufe g die Einheitskugel $||g||_q \leq 1$. Dann gilt $(r < 1, f_r = \int \frac{e^{it}+rz}{e^{it}-rz} u(e^{it}d)$

$$\int_{\mathbb{T}} f_r(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{-it} - re^{i\theta}} u(e^{it}) d\lambda g(e^{i\theta}) d\lambda \text{ Fubini} =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{-i\theta} + re^{-it}}{e^{-i\theta} - re^{-it}} g(e^{i\theta}) d\lambda u(e^{it}) d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\underbrace{\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta} + re^{it}}{e^{i\theta} - re^{it}} g(e^{-i\theta}) d\lambda}_{||.||_q \le A_q ||g||_q \le A_q} \; u(e^{it}) d\lambda}_{|.| \le A_q ||u||_p},$$

da $f_r \to f$gleichmäßig folgt

$$||f||_p \le A_p ||u||_p \,.$$

Damit ist (i) vollständig gezeigt.

`ad5`: Sei $0 < p < 1$, $u(z) > 0$ in $\mathbb{D}$. Schreibe f in Polarkoordinaten $f(z) = |f(z)|e^{i\varphi(z)})$, $u(z) = |f(z) \cos \varphi(z)$. Dann gilt wegen $0 < \cos p\frac{\pi}{2} < \cos(p\varphi(z)$

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\lambda \le \frac{1}{\cos p\frac{\pi}{2}} \int \underbrace{|f|^p \cos p\varphi}_{=\mathrm{Re}(f^p)} \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\cos p\frac{\pi}{2}} \underbrace{\mathrm{Re}[f(0)^p]}_{=u(0)^p} = \frac{1}{\cos p\frac{\pi}{2}} \Big[\int_{\mathbb{T}} u \, d\lambda \Big]^p ,$$

d.h.

$$||f||_p \le \frac{1}{\cos p\frac{\pi}{2}} ||u||_1 \,.$$

Wie in Schritt ad3 findet man für beliebiges u:

$$||f||_p \le B_p ||u||_1 \,,$$

mit einer Konstanten die sich aus Verwendung der Ungleichung $(a + b)^q \le 2^{q-1}(a^q + b^q), q > 1$, ergibt. Damit ist (ii) gezeigt. Sei zuerst $u(i\theta) \ge e\theta \inf \mathbb{T}$, dann ist $u > \theta$ in $\mathbb{D}$ und $u(0) \ge e$.

`ad`: Man berechnet $\triangle|f| = \frac{|f'|^2}{|f|}$, $\triangle(u \log u) = \frac{|f'|^2}{u}$. Man sieht $\triangle(u \log u)$. Der Green'sche Satz

$$r \int_{\circ}^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, d\theta = \iint_{|z| \le r} \triangle\varphi \, dx \, dy$$

zeigt

$$\frac{d}{dr} \int^{\pi} -\pi |f(re^{i\theta})| d\theta \le \frac{d}{dr} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) \log u(re^{i\theta}) d\theta \,,$$

Integration liefert $(\int_{\circ}^{1} \cdots dr)$.

$$\int_{\circ}^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \le \int_{\circ}^{2\pi} \log u(e^{i\theta}) d\theta +$$

$$+2\pi u(0)\underbrace{(1-\log u(0))}_{\leq 0}.$$

Es folgt

$$||f||_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(e^{i\theta})|\log^+|u(e^{i\theta})|d\theta\,.$$

`ad7`: Sei u beliebig. Setze $U_+ = \max(u(e^{i\theta}), e)$, $U_- = \max(-u(e^{i\theta}), e)$, $U_\infty = u - (u_+ - u_-)$. Dann ist (mit $u_+, -, \infty = P[U, -, \infty]$) nach Schritt ad6).

$$||f_r||_1 \leq ||f_+, r||_1 + ||f_-, r||_1 + ||f_{\infty,r}||_1 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_+(re^{i\theta})|\log^+|u(re^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_-(re^{i\theta})|\log^f|u_-(re^{i\theta})|d\theta +$$

$$+||f_{\infty,r}||_1\,.$$

Da $|U_\infty(e^{i\theta})| \leq e \Rightarrow ||U_\infty(e^{i\theta})||_2 \leq e$. Es gilt wegen der Schware'schen Ungleichung und der Bemerkung vor dem Satz:

$$||f_{\infty,r}||_1 \leq ||f_{\infty,r}||_2 \leq 2||u_{\infty,r}||_2\,.$$

Für $r \to 1$ erhält man

$$||f||_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_+(e^{i\theta})|\log^+|u(e^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_-(e^{i\theta})|\log^+|\log^+|u_-(e^{i\theta})|d\theta + 2e\,.$$

Sei $E_+ = \{\theta | u(e^{i\theta}) \geq e\}$, $E_- = \{\theta | u(e^{i\theta}) \leq -e\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u_+(e^{i\theta})|\log^+|u_+(e^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_+} |u_+|\log^+|u^+|d\theta + e$ und analog für "-" . Da $E_+ \wedge E_- - = \theta$ und $u_+|_{E_+} = u$, $u_-|_{E_-} = u$, folgt

$$||f||_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u|\log^+|u|d\theta + 4e\,.$$

Damit ist die Ungleichung in (iii) gezeigt.

`ad8`: Sei $u > C$ sodaß $f \in H^1$. oBdA sei $u > 1$. Sei $f = |f|e^{i\varphi}$, dann gilt da $f(z)\log f(z)$ analytisch ist

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\underbrace{|f_r|\cos\varphi_r \cdot \log|_r|d\theta - |f_r|\sin\varphi_r \cdot \varphi_r}\Big]_{=\mathrm{Re}(f_r \log f_r)} d\theta = 2\pi f(0)\log f(0)$$

Mit $u = |f|\cos\varphi$, $|u| < |f|$, $v = |f|\sin\varphi$, $|\nu| < |f|$ folgt, da $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u_r \log u_r d\theta \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|\cos\varphi_r \log|f_r|d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_r|f_r|\sin\varphi_r d\theta +$$

$$+2\pi f(0)\log f(0) \leq \frac{\pi}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_r|d\theta + 2\pi f(0)\log f(0)\,.$$

❑ REO

2.4.4 Bemerkung. (*i*) Für $p = \infty$ wäre die Aussage des Satzes falsch, wie das Beispiel einer konformen Abbildung auf einen vertikalen Streifen zeigt.

(*ii*) "Mehr strukturell" formuliert sagt der Satz das die Abbildung

$$\Psi : u \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt$$

ein beschränkter Operator von L^p in H^p für alle $1 < p <\in fty$ ist, von $L^1 \to H^p$ für alle $0 < p < 1$, und das

$$\Psi^-(H^1) \supseteq \{u \in L^1 \Big| \int_{-\pi}^{\pi} |u| \log |u| d\theta < \infty\} .$$

Um diese Aussage zu sehen zerlege man u in Real- und Imaginärteil. Die Abbildung von f auf die konjungierte (d.h. $\psi - id$) nennt man auch die Hilbert-Transformation.

Nach der obigen Bewertung hat für $u \in L^1$, die Funktion ψu f.ü. Randwerte. Ist wieder $Q_r(t)$ der konjugierte Poisson Kern, so gilt (u reell, $u \in L^1(\lambda)$)

$$\nu(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\pi} u(\theta - t) Q_r(t) dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta + t) Q_r(t) dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\pi} \frac{u(\theta + t) - u(\theta - t)}{2} Q_r(t) dt .$$

Es gilt

$$\lim_{r \to 1} Q_r(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} .$$

THII.18

2.4.5 Satz. *Sei $u \in L^1(\lambda)$, u reel, und sei*

$$\nu(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta - t) Q_r(t) dt .$$

Existiert für ein gewisses θ das Integral

$$\nu(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(\theta + t) - u(\theta - t)}{2 \tan \frac{t}{2}} dt ,$$

so gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} \nu(re^{i\theta}) = \nu(\theta) .$$

Beweis. Setze
$$\varphi_\theta(t) = \frac{u(\theta+t) - u(\theta-t)}{2\tan\frac{t}{2}}\,.$$
Nach VS! ist $\varphi_\theta \in L^1$. Es gilt
$$\nu(re^{i\theta}) - \nu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\theta(t)\Big[1 - \frac{2r\sin t\tan\frac{t}{2}}{1-2r\cos t + r^2}\Big]dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\theta(t)\underbrace{\frac{(1-r)^2}{1-2r\cos t+r^2}}_{=:g_r(t)}dt\,,$$
und es ist $0 < g_r(t) < 1$, $\lim_{r\to1} g_r(t) = 0$ glm. auf jeder Menge $[-\pi,-\delta]u[\delta,\pi]$. Da $\varphi_\theta \in L^1$ ist folgt
$$\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\theta(t)g_r(t)dt = 0\,.$$
❑

REp

2.4.6 Bemerkung. Es gilt sogar: Das Integral in der VS! von Satz 2.4.5 existiert fast überall.

COII.19

2.4.7 Korollar. *Ist u in einem Punkt θ differenzierbar, so ist die VS! von Satz 2.4.5 erfüllt. Ist u auf einem abg. Intervall stetig differenzierbar, so konvergiert $\nu(re^{i\theta})$ gegen $\nu(\theta)$ gleichmäßig auf diesem Intervall.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da $\tan\frac{t}{2}$ bei 0 eine einfache Nullstelle hat. Die zweite Aussage folgt da die Ableitung dann auf dem betrachteten Intervall beschränkt ist.

❑

Kapitel 3

H^p als linearer Raum

3.1 H^p als Teilmenge von L^p

Nach Satz 2.2.5 (+Zusammenfassung) ist die Abbildung $f(z) \mapsto f(e^{i\theta})$ eine Isometrie von H^p in L^p für $0 > p \leq \infty$.

THIII.1

3.1.1 Satz. *Es gilt*

(*i*) *Für jedes $p, 0 < p \leq \infty$, ist H^p ein abgeschlossener Teilraum von L^p. Insbesondere ist für $1 \leq p \leq \infty$ der Raum H^p ein Banachraum, für $0 < p < 1$ ein vollständiger metrischer Raum.*

(*ii*) *Für $0 < p < \infty$ ist H^p der Ab schluß der Polynome in $e^{i\theta}$.*

Für den Beweis von (i), $p < \infty$, benötigen wir noch ein Lemma:

LEIII.2

3.1.2 Lemma. *Sei $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, dann gilt*

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} ||f||_p \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{1}{p}}}, z \in \mathbb{D}.$$

Beweis.
·) Sei zunächst $p = 1$. Dann hat f die Darstellung $f(z) = P[f(e^{i\theta})](z)$. Wegen $p_r(\theta - t) \leq \frac{1+r}{1-r}$ folgt

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(z, e^{it}) |f(e^{it})| dt \leq \frac{2}{1-|z|} ||f(e^{i\theta})||_1 .$$

·) Sei jetzt p beliebig. oBdA sei $f \neq 0$ in $\mathbb{D}$, dann ist $f(z)^p| \leq \frac{2}{1-r} ||f(e^{i\theta})^p||_1$.

❑

Beweis. von Satz 3.1.1
`ad`(i): Die Folge $f_n \theta H^p$ konvergiere im L^p-Sinne $f_n \overset{||.||_p}{\to} f$. Wegen Lemma 3.1.2 (bzw. für $p > \infty$ unmittelbar) ist $\{f_n\}$ lokal glm. beschräkt ist, also eine normale Familie. Nach dem Satz von Moutel gibt es eine kompakt konvergente Teilfolge $f_n \to f$. Wegen $||f_n, r||_p \leq ||f_n||_p \leq C$ folgt $\sup \tilde{f}_r||_p \leq C$, also $\tilde{f} \in H^p$.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle N so, daß $||f_n - f_m||_p \leq \epsilon$ für alle $u, m > N$. Dann gilt

$$||\tilde{f}_r - f_{m,r}||_p = \lim_{n\to\infty} ||f_{n,r} - f_{m,r}||_p \leq \lim \sup_{n\to\infty} ||f_n - f_m||_p \leq \epsilon$$

Für $r \to 1$ folgt da $f \in H^p ||\tilde{f} - f_m||_p \leq \epsilon$. Es gilt also

$$\lim_{m\to\infty} f_m = \tilde{f} \in H^p \, .$$

`ad`(ii): Sei $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, und schreibe $f = \sum c_n z^k$. Sei r so daß $||f_r - f||_p \leq \epsilon$ und sei n_r so, daß $|| \sum^{n_r} c_k r^k e^{i\theta k} - f_r||_p \leq \epsilon$. Für $p \geq 1$ folgt aus der Minkowski'schen Ungleichung, für $p < 1$ aus der Beziehung $(a+b)^p \leq (a^p + b^p)$, daß

$$||f - \sum^{n_r} c_k r^k e^{i\theta k}||_p \leq C\epsilon \, .$$

❑

LEIII.3

3.1.3 Lemma. *Es gilt:*

(*i*) *Sei $f \in H^1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, dann sind die Fourier Koeffizienten der Randfunktion $f(e^{i\theta})$ genau die Zahlen a_n (für $u \geq 0$ und $= 0$ für $u < 0$).*

(*ii*) *Sei $1 \leq p \leq \infty$, dann besteht H^p aus genau den L^p-Funktionen für die die negativen Fourier Koeffizienten $= 0$ sind.*

Beweis.
`ad`(i): Für $r < 1$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{\int}} \, dt, n \geq 0 \, .$$

Also ist ($c_n =$ der $n - te$ Fourierkoeffizient von $f(e^{i\theta})$):

$$|r^n a_n - c_n| \leq ||f_r - f||_1 \to 0, r \to 1 \, .$$

Analog findet man $c_n = 0$ für $n < 0$.

`ad`(ii): Ist $f \in H^1 p$, so müßen nach (i) die negativen FK $= 0$ sein und die Randfunktion ist nach Korollar 2.2.2 in L^p. Sei also $\varphi \in L^p$ und sei $c_n = 0$ für $n < 0$. Setze $f(z) = P[\varphi](z)$, dann gilt (da die FK vor $p_r(t)$ gleich $r^{|n|}$ sind)

$$f(re^{i\theta}) = f_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}) \, ,$$

d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ und ist daher analytisch in $\mathbb{D}$. Die Randfunktion von f ist φ, und f ist - als Poisson Integral - in H^p.

❑

COIII.4

3.1.4 Korollar. *Sei $f \in H^1$, $f = \sum a_n z^n$. Dann gilt $a_n \to 0$.*

Beweis. Riemann-Lebesque Lemma (vgl.[Ru1,rudin1, 7.1.])

❑

THIII.5

3.1.5 Satz. *(Hardy) Sei $f \in H^1$, $f(z) = \sum a_n z^n$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|a_n| \leq \pi ||f||_1 .$$

Beweis.
·) Sei zunächst $a_n \geq 0$. Dann gilt

$$hnf(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta$$

Es ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{n} ,$$

also folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - \theta) hnf(re^{i\theta}) d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \pi ||f||_1 .$$

Für $r \to 1$ folgt die Behauptung.

·) Sei $f \in H^1$ beliebig. Schreibe $f = g \cdot h$ wobei

$$g = B\Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}}, h = \Big(\frac{f}{B}\Big)^{\frac{1}{2}} \in H^2$$

($B \ldots$ Blaschke Produkt mit Nullstellen von f). Ist

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^4, h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^4 ,$$

so ist auch ($g \in H^2 \iff \sum (b_n| < \infty$)

$$G(z) = \sum_{n=o}^{\infty} |b_n| z^4, H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| z^4 \in H^2 ,$$

und es gilt $||G||_2 = ||g||_2, ||H||_2 = ||h||_2$. Die Funktion $F = GH \in H^1$ und $F = \sum \tilde{a_n} z^4$ mit $\tilde{a_n} \geq 0$. Offenbar ist $|a_n| \leq \tilde{a_n}$, also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\tilde{a_n} \leq \pi ||F||_1 \leq \pi ||G||_2 ||H||_2 = \pi ||g||_2 ||h||_2 ,$$

denn $= \pi ||f||_1 |B(e^{i\theta})| = 1$.

❑

COIII.6

3.1.6 Korollar. *(Hardy-Littlewood) Sei $f \in H^1$ und sei f von beschränkter Variation. Dann ist f absolut stetig und die Fourier Reihe für f ist absolut konvergent.*

Beweis. Die Fourierkoeffizienten von f berechnen sich als $(n+0)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}df(\theta)\,.$$

Nach Korollar 2.2.9 ist df absolut stetig, $df = gd\theta$ mit $g \in H^1$. Es ist $a_n = \frac{i}{n}b_n$ wobei b_n die Fourierkoeffizienten von g sind. Es folgt nach Satz 3.1.5

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|b_n| < \infty\,.$$

❑

Untersuchen Projektionen von L^p auf H^p. Z.B. $L^2\ldots$ Hilbertraum, $H^2 = \{\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}\}$, $(H^2)^{\perp} = \{\sum_{n=0} c_n e^{in\theta}\}\ldots$ arthogonale Projektion ist also

$$\sum_{n=-n}^{\infty} c_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n\geq 0} c_n e^{in\theta}\,.$$

Die Abbildung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty<} c_n e^{in\theta}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} \in L^p\,,$$

ist nach Lemma 3.1.3 ein Projektion von L^p(von Domain $\subseteq L^p$) auf H^p, $1 \leq p \leq \infty$. Wir bezeichnen sie als die "natürliche Projektion".

THIII.7

3.1.7 Satz. *Für $1 < p < \infty$ ist die natürliche Projektion ein beschränkter Operator von L^p auf H^p. Für $p = 1$ und $p = \infty$ gibt es keine beschränkte Projektion von L^p auf H^p.*

Beweis.
·) Sei $1 < p < \infty$. Nach "Satz 2.4.3(i)" ist die Abbildung "falten mit $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z=H_r(\theta-t)}$ Operator von L^p in H^p. Es gilt

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 2\frac{e^{it}}{e^{it}-z} - 1\,,$$

also ist, da "falten mit 1" offensichtlich stetig ist, auch "falten mit $\frac{e^{it}}{e^{it}-z=c(\theta-t]}$. C_r ist genau der Kern aus der Chauchy'schen Integralformel und hat die Fourierkoeffizienten $\begin{cases} r^n & , \ n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$. Falten mit C_r ist also gerade die natürliche Projektion für die Randfunktion.

·) Sei $p = 1$, und sei P eine beschränkte Projektion von L^1 auf H^1. Für $f(t) \in L^1$ bezeichne mit $f_\theta(t)$ die Rotation $f_\theta(t) = f(t+\theta)$. Setze

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (P(f_\theta))_\theta d\theta \,.$$

Die Rotation $f \mapsto f_\theta$ ist isometrisch, also beschränkt, die Abbildung $\ominus \mapsto f_\theta$ ist für festes f ebenfalls stetig, insgesamt ist also der obige Integrand eine stetige Funktion von $\ominus$. Die Abbildung $\tilde{P}$ ist also ein stetiger Operator von L^1 in H^1.

Für $n \geq 0$ ist $e^{int} \in H^1$, also ist

$$\tilde{P}(e^{int}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(Pe^{in(t+\theta)})}_{=e^{in(t+\theta)}} - \theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\theta = e^{int} \,.$$

Für $n < 0$ gilt

$$\tilde{P}(e^{int}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \underbrace{(P(e^{int}) - \theta)}_{\in H^1} d\theta =_{\text{Faltung}} 0 \,.$$

Wir sehen also -$dn\tilde{P}$- stetig ist, daß $\tilde{P}$ die natürliche Projektion ist.

Es zeigt zu zeigen, daß die natürliche Projektion nicht eine beschränkte Abbildung von L^1 und H^1 ist. Wir zeigen, daß sie nicht überall definiert: Nach [Z,zygmund, 98, p.253] ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n}$ die Fourierreihe einer L^1-Funktion. Die Reihe $\sum_{n=z}^{\infty} \frac{e^{int}}{\log n}$ ist aber nicht die Fourierreihe einer H^1-Funktion, denn $\sum \frac{1}{n \log n} = \infty$ (vgl.Satz 3.1.5).

·) Sei P eine beschränkte Projektion von L^∞ auf H^∞. Schreibe $[f, g] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}$, $f \in L^\infty$, $g \in L^1$. Da P beschränkt ist und $f \mapsto f_\theta$ eine Isometrie, ist das Funktional $g \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Pf_\theta, g_\theta] d\theta$, $g \in L^1$, beschränkt. Es existiert also ($(L^1)^* = L^\infty$) ein Element $\tilde{P}f \in L^\infty$, so daß

$$[\tilde{P}f, g] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Pf_\theta, g_\theta] d\theta, g \in L^1 \,.$$

Mit einer analogen Überlegung wie oben findet man, daß $\tilde{P}$ die natürliche Projektion ist.

Wir zeigen wieder das die natürliche Projektion nicht überall definiert: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ ist FR einer beschränktern Funktion ($\frac{1}{2}(\pi - \theta)$). Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ ist FR der Randfunktion von $-\log(1-z)$, diese ist offenbar nicht beschränkt.

$\square$

THIII.8

3.1.8 Satz. *Sei q der zu p konjugierte Index ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

(*i*) *Für $1 \leq p < \infty$ ist $(H^p)*$ isometrisch isomorph zu L^q/H^q. Sei $1 < p < \infty$: Jedes Funktional ϕ läßt sich in eindeutiger Weise mit einem $g \in H^q$ als*

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \underbrace{g(e^{i\theta})} d\theta, \; f \in H^p$$

schreiben.

(*ii*) *Sei $1 < p \leq \infty$, dann ist $H^p \cong (L^q/H^q)^*$. Es ist $H^1 \cong (C/A_0)^*$ ($C \ldots$ stetige Funktionen mit gleichmäßiger Konvergenz, $A_0 \ldots$ Abschluß der Polynome mit $f(0) = 0$).*

REq

3.1.9 Bemerkung. `ad`(i): Die Zuordnung $\phi \to g$ ist i.a. keine Isometrie. Es gilt i.a. nur (kommt von Satz 2.4.3)

$$||\phi|| \leq ||g|| \leq A_p ||\phi||, 1 < p < \infty \,.$$

Im Fall $p = 2$ gilt "=".

`ad`(ii): Wesentlicher Unterschied zum L^1 ! der ist kein Dualraum.

Beweis. (von Satz 3.1.8)

(*i*) Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist $(L^p)^* \cong L^q$.

$$S \subseteq X >,$$

$$X^*/S \perp \cong S^*$$

$$(X/S)^* \cong S^+$$

Es gilt $H^p = \{f \in L^p | \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{\int} dt = 0, \; n = +1, +z, \ldots\}$, d.h. der Annulator von H^p in L^q ist $\mathrm{cls}_{L^q}\{e^{\int}, \, n = +1, +z, \ldots\}$, also ist

$$(H^p)^* \cong L^q / \mathrm{cls}_{L^q}\{e^{\int}, n = +1, +z, \ldots\} \,.$$

Wendet man jetzt die Isomorphismen $g|e^{it}| \mapsto e^{it} g(e^{it})$ des L^q auf sich an, so ergibt sich $(H^p)^* \cong L^q/H^q$ (und diese Isomorphismen sind isometrisch).

Sei nun $1 < p < \infty$. Da die natürliche Projektion von L^q auf H^q stetig ist (und damit auch $I - p$), ist ($\ker P = (H^p)^\perp$)

$$H^p \cong L^q / \mathrm{cls}_{L^q}\{e^{\int}, n = -1, -z \ldots\} \cong H^q \,,$$

wobei dieser Isomorphismus als invertierbare in beiden Richtungen stetige Abbildung, nicht aber als Isometrie zu verstehen ist.

Für $p = 2$ ist L^2 Hilbertraum und

$$\mathrm{cls}_{L^2}\{e^{\int}, n = -1, -2, \ldots\} = (H^2)^\perp \,.$$

(*ii*) Wegen $(L^q)^* = L^p$ und der selben Überlegung wie bei (i) ist

$$\Big(L^q/H^a\Big)^* \cong \text{Annihilator von} H^q (\text{in} L^p) \cong H^p\,.$$

Es gilt: $C^* \cong \{$ endliche Borelmaße $\}$, also ist

$$\Big(C/A_0\Big)^* \Big(C/\operatorname{cls}_c\{e^{\int}, n = +1, +2, \ldots\}\Big)^* \cong \text{Annihilator von}\operatorname{cls}\text{in}\{\text{Maße}\}\,.$$

Nach Korollar 2.2.9 ist jedes Maß mit $\int e^{\int} d\mu = 0$ für $n = +1, +2, \ldots$ absolut stetig, also von der Form $d\mu = f d\lambda$ mit $f \in H^1$. Also ist obiger Annihilator $\cong H^1$.

❑

3.2 Extremalpunkte

Nach Satz 3.1.8 ist $H^p(1 \leq p \leq \infty)$ der Dualraum eines Banachraumes. Nach dem Satz von Krein-Milman ist die Einheitskugel der weak $-*$ Abschluß der konvexen Hülle ihrer Extrempunkte.

THIII.9

3.2.1 Satz. *Es gilt*

(*i*) $1 < p < \infty$: *Die Extrempunkte der Einheitskugel sind genau* $\{||f|| = 1\}$ *(wie im L^p).*

(*ii*) $p = \infty$: *f ist Extrempunkt* $\iff$ $|f(z)| \leq 1$ *und*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - |f|e^{it})|)dt = -\infty\,.$$

(hnL^∞: alle mit $|f(e^{it})| = 1$ f.ü)

(*iii*) *(Rudin-de Leemo) $p = 1$: f ist Extrempunkt* $\iff$ $||f|| = 1$ *und f ist outer function. (L^1 $\nexists$)*

Beweis.
`ad`(i): ist klar, da die entsprechende Aussage für L^p gilt

`ad`(ii): Sei $f \in H^\infty$, $||f|| = 1$, $\int = -\infty$. Wir zeigen, daß f ein Extrempunkt ist. Angenommen $g \in H^\infty$: $||f + g|| = ||f - g|| - 1$. Dann ist für jedes z:

$$|f(z) + g(z)|, |f(z) - g(z)| \leq 1\,.$$

wachsend Abb. f e h l t

$$\Rightarrow |f(z)|^2 + |g(z)|^2 \leq 1\,,$$

$$| - | = \sqrt{|f(z)|^2 + |g(z)|^2}$$

also $|g(z)|^2 \leq 1 - |f(z)|^2 \leq 2(1 - |f(z)|)$. Diese Beziehung gilt insbesondere für $z = e^{i\theta}$, also folgt

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(e^{it})|dt \leq 2\pi\log 2 + \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - |f(e^{it})|dt = -\infty$$

d.h. nach Korollar 2.2.2 folgt $g = 0$.

Sei umgekehrt $\log(1 - |f(e^{i\theta})|) \in L^1$. Setze

$$g(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log(1-|f(e^{it})|)dt},$$

dann gilt $|g(z)| \leq 1$ für alle z, und

$$|g(e^{i\theta})| = 1 - |f(e^{i\theta})| \text{f.ü.}\,.$$

Also ist $||f + g||_\infty, ||f - g||_\infty \leq 1$, und f ist kein Extrempunkt.

`ad`(iii): Sei f outer und $||f||_1 = 1$. Angenommen $g \in H^1$ sodaß $||f + g||_1 = ||f - g||_1 = 1$. Setze $h = \frac{g}{f}$, dann gilt

$$0 = ||f+g||_1 + ||f-g||_1 - 2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[|1 + h(e^{i\theta})| + 1 - h(e1i\theta)| - 2\Big]|f(e^{i\theta})d\theta\,.$$

Beachte, daß $h(e^{i\theta})$ f.ü. existiert, da die Nullstellen von $f(e^{i\theta})$ eine Nullmenge sind. Da der Integrand nicht negativ ist (Dreiecks..) ist folgt

$$|1 + h(e^{i\theta})| + |1 - h(e^{i\theta})| = 2\,,$$

d.h. $-1 \leq h(e^{i\theta}) \leq 1$ („=" in Dreiecksungleichng $\iff$ beide Zahlen gleiches Argument). Es gilt also $|g(e^{i\theta})| \leq |f(e^{i\theta})|$ und nach Korollar 2.3.7 gilt $|g(z)| \leq |f(z)|$ in $\mathbb{D}$. Die Funktion h ist also in H^∞ und da h am Rand reell ist folgt mit der Poisson Integraldarstellung überall reell $\Rightarrow h =$ konstant. Es folgt

$$|1 + h| = \frac{1}{||f||_1}||f + g||_1 = 1 = \frac{1}{||f||_1}||f - g||_1 = |1 - h)\,,$$

also ist $h = 0$. Daher ist f ein Extrempunkt.

Sei nun $f = IF, ||f|| = 1$, mit einem nicht trivialen inner factor I und dem outer part F. Setze $J(z) = e^{i\alpha}I(z)$ und

$$g(z) = f\frac{1}{2}(J + \frac{1}{J}\,.$$

Dann ist $g \in H^1$ und da die Joukowski Abbildung den Einheitskreis auf $[-1, 1]$ abbildet ist $-1 \leq \underbrace{\frac{g(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})}}_{h(e^{i\theta})} \leq 1$.

Das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}[e^{i\alpha}I(e^{it})]|f(e^{it})|dt$$

ist eine stetige reelle Funktion und ist entweder $\equiv 0$ oder wechselt das Vorzeichen in $\alpha \in [0, 2\pi]$ (wo $> 0 \Rightarrow$ bei $\alpha + \pi$ ist < 0). Wir Wählen α so, daß $\int = 0$, d.h. aber genau $\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\theta})|f(e^{i\theta})|d\theta = 0$ denn $|I(e^{i\theta})| = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}[e^{i\alpha}I(e^{it})] = \frac{1}{2}(J + \frac{1}{J})$. Es folgt

$$||f + g||_1 = ||f - g||_1 = ||f|| = 1\,,$$

und daher ist f kein Extrempunkt.

❑

COIII.10

3.2.2 Korollar. *Sei $f \in H^1$, $||f||, \leq 1$. Dann gilt:*

(i) Ist $||f||_1 = 1$ und ist f kein Extrempunkt, so ist $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ mit zwei Extrempunkten f_1, f_2.

(ii) Ist $||f||_1 < 1$, dann ist f eine konvexe Linearkombination von zwei Extrempunkten.

Weiters gilt: Dr $||.||_1$-Abschluß der Menge der Extrempunkte der Einheitskugel im H^1 besteht aus allen $f \in H^1$ mit $||f||_1 = 1$ die in $\mathbb{D}$ keine Nullstellen haben.

Beweis.
`ad`(i): Konstruiere g wie im Beweis von Satz 3.2.1. Wir müssen zeigen daß $f \pm g$ outer sind, dann fertig. Sei $|t| \geq 1$, $t \in \mathrm{Re}$ und betrachte $f + tg$:

$$f + tg = f + t\frac{1}{2}(J + \frac{1}{J})f = \frac{f}{2J}[2J + t(J^2 + 1)] =$$

$$= \frac{t}{2}e^{-i\alpha}F(1 + e^{i\beta}J)(1 + e^{-i\beta}J)$$

für $t\cos\beta = 1$. Nach Korollar 2.3.7 sind die letzten beiden Faktoren outer functions. Da das Produkt von outert functions wieder outer ist $\Rightarrow$ fertig.

`ad`(ii): Ist f outer, so ist $\pm\frac{f}{||f||}$ ein Extrempunkt. Ist f nicht outer sei g wie oben, dann ist $||f - g|| = ||f + g|| = ||f|| < 1$. Wähle $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, so daß $||f + \lambda_1 g|| = ||f - \lambda_2 g|| = 1$. Wegen dem Beweis von (i) sind diese Funktionnen outer, also Extrempunkte.

`ad`“weiters“: Sei $f_n \overset{||.||_1}{\to} f$, f_n Extrempunkte, d.h. outer und $||f_n|| = 1$. Klarerweise ist $||f|| = 1$. Die L^1-Konvergenz von $f_n(e^{i\theta})$ impliziert wegen der Poissonschen Integraldarstellung die kompakte Konvergenz von $f_n(z) \to f(z)$ in $\mathbb{D}$. Da $f \not\equiv 0$ ist und f_n keine Nullstellen haben, folgt aus dem Satz von Vitali $f(z) \neq 0$ in $\mathbb{D}$.

Da f keine Nullstellen hat ist $|f_r(z)| \geq \delta_r > 0$ für $z \in \mathbb{D}$. Also ist f_r, $\frac{1}{f_r} \in H^\infty$ und nach Korollar 2.3.7 folgt daß f_r outer ist. Nun gilt $||f_r - f||_1 \to 0$, $||f_r||_1 \to ||f||_1 = 1$ und daher $||\frac{f_r}{||f_r||} - f||_1 \to 0$. Die Funktionen $\frac{f_r}{||f_r||}$ sind Extremalpunkte $\Rightarrow$ fertig.

❑

3.3 Der shift-Operator

Der shift-Operator am ℓ^2 ist definiert als

$$(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)\,,$$

und ist klarerweise eine Isometrie von ℓ^2 in sich. Wegen

$$H^2 = \{f = \sum a_n z^n | \sum |a_n|^2 < \infty\}, ||f||_2^2 = \sum |a_n|^2\,,$$

ist H^2 unitär äquivalent zu ℓ^2. Offenbar entspricht der shift-Operator am ℓ^2 dem Operator der Multiplikation mit z am H^2. Jede Isometrie von einem sep. Hilbertraum in sich die nicht unitär und completely irredusible ist (d.h. $\nexists$ Teilraum so daß dieser und sein orthogonales Komplement invariant sind) ist unitär äquivalent zum shift-Operator an ℓ^2. Wir bestimmen im folgenden die invarianten Teilräume des Multiplikationsoperator am H^2.

THIII.11

3.3.1 Satz. *(Beurling) Die invarianten Teilräume von $z\cdot$ sind genau die Teilräume von der Gestalt φH^2 wobei φ eine inner function ist. Es ist $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2 \iff \frac{\varphi_1}{\varphi_2} =$ konstant.*

Beweis.
$\cdot$) Sei φ inner. Die Abbildung $f \mapsto \varphi f$ ist eine Isometrie, also ist insbesonder φH^2 abgeschlossen. Klarerweise ist φH^2 invariant unter $z\cdot$.

$\cdot$) Sei $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 f$ mit $f \in H^2$. Es ist $|f| = 1$ f.ü. längs $\mathbb{T}$, also ist $|f(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$ (1 ist outer function), d.h. $|\frac{\varphi_1}{\varphi_2}| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Die selbe Argumentation umgekehrt zeigt $|\frac{\varphi_2}{\varphi_1}| \leq 1 \Rightarrow |\frac{\varphi_1}{\varphi_2}| = 1 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ konstant.

$\cdot$) Sei $Y \neq 0$ ein invarianter Teilraum. Sei k die kleinste Zahl, so daß Y ein Element

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$$

enthält. Dann ist $f \notin zY$, d.h. zY ist ein echter Teilraum von Y, es gibt daher ein Element $\varphi \in Y, ||\varphi||_2 = 1$, so daß $\varphi \perp zY$. Dann ist $\varphi \perp z^n\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it}) \cdot e^{-\int} \underbrace{\varphi(e^{it})}_{}\, dt = 0, n = 1, 2, \ldots\,.$$

Durch konjugieren sieht man, daß diese Beziehung auch für $n = 1, -2, \ldots$ gilt. Die Fourierkoeffizienten der Funktion $|\varphi(e^{it})|^2 \in L^1$ sind alle $= 0$ bis auf den $0 - ten$. Das zeigt $|\varphi(e^{it})| = 1$ f.ü. . Da $\varphi \in H^2$ ist, ist φ das Poisson Integral seiner Randwerte, also ist $|\varphi(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$ d.h. φ ist inner. Da Y invariant und abgeschlossen ist, und die Polynome dicht in H^2 sind, folgt $\varphi H^2 \leq Y$.

Angenommen $h \in Y$, $h \perp \varphi H^2$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) e^{-\int} \underbrace{\varphi(e^{it})}_{}\, dt = 0, n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Weiters ist $\varphi \perp z^n h \in zY, n = 1, 2, \ldots$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\int} h(e^{it})\,\underbrace{\varphi(e^{it})}\,dt = 0, n = 1, 2, \ldots\,.$$

Es sind also alle Fourierkoeffizienten der L^1-Funktion $h(e^{it})\,\underbrace{\varphi(e^{it})}$ gleich Null. Da $|\varphi| = 1$ f.ü. folgt $|h| = 0$ f.ü., d.h. $h(z) \equiv 0$. Wir schließen $Y = \varphi H^2$.

❑

COIII.12

3.3.2 Korollar. *Sei $f \in H^2$, $f = IF$ mit inner part I und outer part F. Der kleinste invariante Teilraum, der f enthält $= \operatorname{cls}\{z^n f(n = 0, 1, 2, \ldots\})$ ist IH^2.*

Beweis. IH^2 ist ein invarianter Teilraum der f enthält. Sei φH^2 da kleinste $(\Rightarrow \varphi H^2 \leq IH^2) \Rightarrow \exists h \in H^2, h = J\xi, f = \varphi h$. Da die outer parts von f und h durch den Betrag am Rand bestimmt sind und $|\varphi| = 1$ f.ü. ist, folgt $F = \xi$, und daher ist $I = \varphi J \Rightarrow$

$$\varphi H^2 \geq IH^2\,.$$

Insgesamt sieht man $IH^2 = \varphi H^2$.

❑

Seien I und J inner Funktions. Wir sagen I teilt J wenn J/I eine beschränkte analytische Funktion in $\mathbb{D}$ ist (oder äquivalent: wenn J/I wieder inner ist).

COIII.13

3.3.3 Korollar. *Es gilt I teilt $J \iff IH^2 \leq JH^2$. Identifiziert man zwei inner functions die sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, so ist die Menge der inner functions mit der Teilbarkeitsrelation ein vollständiger Verband.*

Beweis. Ist $J/I \in H^\infty \Rightarrow J \in IH^2 \Rightarrow JH^2 \subseteq IH^2$. Sei $JH^2 \subseteq IH^2 \Rightarrow J = Ih$ mit $h \in H^2$. Da $|h| = 1$ längs $\mathbb{T}$ folgt h inner ($|h(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$), d.h. I teilt J. Die restliche Behauptung folgt da die invarianten Teilräume der Isometrie $z\cdot$ einen vollständigen Verband bilden.

❑

Wir betrachten für $1 \leq p < \infty$ die Räume fH^P für $f \in H^P$.

COIII.14

3.3.4 Korollar. *Sei $1 \leq p < \infty$, $f, g \in H^P$, $f = IF, g = J\xi$. Dann gilt* $\operatorname{cls}\{z^n I\} = IH^P$, *und*

$$IH^P \leq JH^P \iff J\,\mathit{teilt}\,I, \operatorname{cls}\{z^n f,\ wo, n \ldots\} = IH^P\,.$$

Beweis.
·) Die Beziehung $\operatorname{cls}\{z^n I\} = IH^P$ folgt da I eine Isometrie ist und die Polynome in H^P dicht sind.

·) Die $\iff$ Beziehung zeigt man genauso wie für $p = 2$.

·) Für die letzte Behauptung genügt es zu zeigen, $\operatorname{cls}\{z^n F\} = H^P$ gilt: Angenommen nicht, dann gibt es ein stetiges lineares Funktional ϕ am H^P, daß cls$\{z^n F | n = o, 1, \ldots\}$ annuliert, aber nicht trivial ist. Nach Satz 3.1.8 gibt es eine Funktion $g \in H^q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, so daß

$$\phi f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})} dt, f \in H^P .$$

Es gilt also

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\int} F(e^{it})\overline{g(e^{it})} dt = 0, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

D.h. Funktion $k(e^{it})\overline{g(e^{it})} \in L^1$ ist sogar in H_0^1. Da F outer ist, ist $\frac{1}{F}$ outer für N. Also ist

$$\frac{k(z)}{F(z)} \in N^+ ,$$

und Korollar 2.2.2 zeigt $\overline{g(e^{it})} \in H_0^q$ ein WS!

❑

3.4 Isometrien

Wir beschreiben die (linearen) Isometrien von H^1 auf sich und von H^∞ auf sich.

THIII.15

3.4.1 Satz. *Es gilt*

(*i*) *Jede Isometrie T von H^∞ auf sich ist von der Form*

$$(Tf)(z) = \alpha f(\tau(z)), f \in H^\infty ,$$

wobei $|\alpha| = 1$ und τ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf sich ist. Umgekehrt ist jede solche Abbildung eine Isometrie von H^∞ auf sich.

(*ii*) *Jede Isometrie T von H^1 auf sich ist von der Form*

$$(Tf)(z) = \alpha\tau'(z)f(\tau(z)), f \in H^1 ,$$

wobei α und τ wie in (i) sind. Umgekehrt ist jede solche Abbildung eine Isometrie von H^1 auf sich. Man beachte, daß die konformen Abbildungen von $\mathbb{D}$ auf sich die Mkinstransformationen von der Gestalt

$$\tau(z) = \lambda\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, \ mit(\alpha| = 1, \alpha \in \mathbb{D} ,$$

sind.

Um diesen Satz beweisen zu können benötigen wir einige andere Resultate.

Die Menge H^∞ ist mit den Operationen “skalare Multiplikationen“, und “+,. von Funktionen (punktweise)“ eine Algebra.

THIII.16

3.4.2 Satz. *(Kakutami) Sei ϕ ein Automorphismus der Algebra H^∞. Dann existiert eine konforme Abbildung τ von $\mathbb{D}$ auf sich, so daß*

$$(\phi f)(\lambda) = f(\tau(\lambda)), f \in H^\infty .$$

Umgekehrt ist jede solche Abbildung ein Automorphismus.

Beweis. Die Aussage "Umgekehrt" ist klar. Sei also ein Antomorphismus ϕ gegeben. Ist $f \in H^\infty$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\lambda \in \overline{\mathrm{RG}f} \iff (f-\lambda)^{-1} \notin H^\infty$. Es folgt das $\overline{\mathrm{RG}(\phi f)} = \overline{\mathrm{RG}f}$ (beachte$\phi(1) = 1$). Setze $\tau = \phi z$, dann ist τ nicht konstant, da z nicht konstant ist, und $\overline{RG\tau} = \overline{\mathbb{D}}$. Daher bildet τ, $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D}$ ab (Gebietstreue). Sei $|\lambda| < 1$, $f \in H^\infty$, dann ist $|\tau(\lambda)| < 1 \Rightarrow f|\tau(\lambda)|$ definiert und in H^∞, und es gilt

$$f(z)f(\tau(\lambda)) = (z - \tau(\lambda))g(z) ,$$

mit einem $g \in H^\infty$. Daher folgt

$$(\phi f)(z) - f(\tau(\lambda)) = (\tau(z) - \tau(\lambda))(\phi g)(z) ,$$

und setzt man $z = \lambda$ ein, so folgt

$$(\phi f)(\lambda) = f(\tau(\lambda)) .$$

Die gleiche Überlegung angewandt auf ϕ^{-1} zeigt

$$(\phi^{-1} f)(\lambda) = f(\sigma = \phi^{-1} z .$$

Da $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}$ folgt (setzt man speziell $f = z$)

$$\sigma(\tau(\lambda)) = \tau(\sigma(\lambda)) = \lambda, \lambda \in \mathbb{D} ,$$

d.h. $\tau = \tau^{(-1)}$ und τ ist also konform.

❑

Der folgende Satz ist ein allgemeineres Resultat, das wir zur Beschreibung der Isometrie von H^∞ benützen werden. THIII.17

3.4.3 Satz. *Sei X ein kompakter T_2-Raum und sei A eine Teilalgebra von $C(X)$ welche 1 enthält. Sei T eine Isometrie (bzgl. $||\cdot||_\infty$) von A auf sich. Dann ist*

$$Tf = \alpha \cdot \phi f, f \in A ,$$

mit $\alpha \in A, |\alpha(x)| = 1, \frac{1}{\alpha} \in A$ und einem Antomorphismus ϕ der Algebra A.

Ist zusätzlich $T(1) = 1$, so ist T multiplikative. Zum Beweis dieses Satzes benützen wir den Satz von Krein-Milman in der folgenden Formulierung (siehe ....):

*Satz (Krein-Milman): Sei Y ein Banach-Raum und sei K eine nichtleere convexe und weak-*kompakte Teilmenge von Y^*. Dann ist K der Abschluß der konvexen Hülle ihrer Extrempunkte.*

Beweis. von Satz 3.4.3
·) Zunächst bemerken wir, daß man oBdA voraussetzen kann das A abgeschlossen ist und die Punte von X trennt. Denn die Isometrie T setzt sich auf den Abschluss fort und Punktetrennung kann man durch Faktorisierung erreichen.

·) Es ist also A mit $||\cdot||_\infty$ ein Banachraum. Betrachte

$$A \subseteq C(X)$$

$$A^* \leftrightarrow C(X)^* \setminus AmA$$

.?.

$$\Sigma \supseteq E \ni L \leftrightarrow \hat{N} \supseteq S = \{F|F|h = L, ||F|| = 1\} \subseteq C(X)^*$$

.?. M_f die Einheitskugel Σ in A^*. Wir betimmen die Form ihrer Extrempunkte. Bezeichne L_x die Punktauswertung bei x:

$$L_x f = f(x), x \in X, f \in A\,.$$

Sei $L \in \Sigma$ ein Extrempunkt, dann ist $||L|| = 1$ und nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein $F \in C(X)^*$, so daß $F|_A = L$ und $||F|| = 1$. Die Menge S aller solcher Erweiterungen ist konvex. Weiters ist sie $w - *$ abgechlossen, also weak-*kompakt.

Sei F ein Extrempunkt von S. Wir zeigen, daß F sogar Extrempunkt der Einheitskugel von $C(X)^*$ ist: Angenommen $F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$, $||F_j|| \leq 1$, dann ist sogar $||F_j|| = 1$, und mit $L_j = F_j|_A$ gilt $L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$. Da L Extrempunkt ist folgt $L_1 = L_2 = L$, d.h. $F_1, F_2 \in S$. Da F Extrempunkt von S ist folgt $F_1 = F_2 = F$.

Da $C(X)^*$ die Menge der (endlichen) komplexeren Borelmaße (Darstellung von Riesz, vgl.[Rudin 1]), also sind die Extrempunkte der Einheitskugel von $C(X)^*$ genau die Maße $\mu = \lambda\delta_\alpha = 1$ und δ_x ist die Punktmasse 1 bei $x(x \in X$ [Ru1,rudin1, 251]. Dann zeigt $F(f) = \lambda f(x)$ und insbesondere

$$L = \lambda L_x \,\text{mit}\, |\lambda| = 1, x \in X\,.$$

Da A Punktetrennend ist, ist in dieser Darstellung X und damit auch λ eindeutig bestimmt.

·) Sei E die Menge der Extrempunkte von Σ. Wir zeigen

$$||f||_\infty = \sup_{L \in E} |L(f)|, f \in A\,.$$

Da jedes $L \subseteq E$ Norm 1 hat folgt $||f||_\infty \geq \sup_{L\in E} |L(f)|$. Da X kompakt ist gibt es einen Punkt $x_0 \in X$, so daß $|f(x_0)| = ||f||$ gilt. Sei

$$M_+ = \{L \in \Sigma | L(f) = ||f||\}\,,$$

dann ist $M_+ \neq \emptyset$, denn $\frac{||f||}{f(x_0)} L_{x_0} \in M_f$, M_f ist konvex, und M_f ist weak-* abgeschlossen also kompakt. Sei L ein Extrempunkt von M_f. Wir zeigen das L sogar ein Extrempunkt von Σ ist: Angenommen $L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$, $L_j \in \Sigma$. Da $||L_j|| \leq 1$ und $L(f) = ||f||$ ist folgt $L_j(f) = ||f||$ (da $||f||$ ein Extrempunkt von $(z) \subseteq ||f||$ ist). Also ist $L_j \in M_f$ und da L Extrempunkt ist folgt $L_1 = L_2 = L$. Es ist also $L \in E$ und wir finden

$$\sup_{\tilde{L}\in E} |\tilde{L}(f)| \geq L(f) = ||f||_\infty\,.$$

·) Sei nun T eine Isometrie von A auf sich, dann ist die Adjungierte T^* (definiert durch $(T^*L)(f) = L(Tf)$) eine Isometrie von A^* auf sich. Insbesondere gehen bei T^* die Mengen Σ und E jeweis auf sich über. Sei

$$B = \{x \in X | L_x \,\text{ist Extrempunkt von}\, \Sigma\}, ... \text{ist Rand für } \ A\,.$$

dann ist $E = \{\lambda L_x | x \in B, |\lambda| = 1\}$. Ist $x \in B$, so ist $T * L_x \in E$, also von der Form $\alpha(x)L_{\tau(x)}$ für (eindeutig bestimmte) $\tau(x) \in X$ und $\alpha(x)$ mit $|\alpha(x)| = 1$. Es gilt also für $f \in A$, $x \in B$,

$$(Tf)(x) = \alpha(x)f(\tau(x))\,.$$

Nimmt man insbesondere für f die Funktion $f = 1$, so folgt $\alpha(x) = (T1)(x), x \in B$, d.h. α ist die Einschränkung einer Funktion $\alpha \in A$ auf B.

·) Seien $f, g \in A$ und $x \in B$. Dann gilt

$$(T(fg))(x) = \alpha(x)(fg)(\tau(x))$$

also ist

$$\alpha(x)(T(fg))(x) = (Tf)(x)(Tg)(x), x \in B\,.$$

Da für jedes $h \in A : ||h||_\infty = \sup_{x \in B} |h(x)|$, folgt

$$\alpha T(fg) = (Tf)(Tg)\,.$$

Wählt man speziell $f = g = T^{-1}(1)$, so folgt $\frac{1}{\alpha} \in A$. Da $|\alpha| = 1$ auf B folgt $|\frac{1}{\alpha}| = 1$ auf B. Eine Funktion aus A nimmt aber ihr $|\cdot|$-Maximum auf B an, also ist $|\alpha| = 1$ überall. Setzt man

$$\phi(f) = \alpha^{-1}Tf\,,$$

so gilt

$$\phi(fg) = \alpha^{-2}\alpha T(fg) = (\alpha^{-1}Tf)(\alpha^{-1}Tg) = (\phi f)(\phi g)\,,$$

also ist ϕ ein Algebra-Antomorphismus von A (bzgl. Addition klar, Inverse: $\phi^{-1}f = T^{-1}(\alpha f)$)

·) Ist zusätzlich $(T1) = 1$, so gilt

$$\alpha(x) = (T1)(x) = 1\,,$$

also ist T multiplikativ.

❑

Beweis. von Satz 3.4.1
`ad`: Wir zeigen, daß H^∞ isometrisch isomorph zu einer Algebra wie in Satz 3.4.3 ist. Allgemeines Prinzip "Gelford-Darstellung" ⇒ später. Beachte den weak-*Abschluss X der Menge $\{L_\lambda | \lambda| < 1\}$ im Raum $(H^\infty)*$. Dann ist X ein kompakter T_2-Raum in der weak-*Topologie. Einem $f \in H^\infty$ ordne die Funktion $\hat{f} \in C(X)$

$$\hat{f}(L) = L(f), L \in X\,,$$

zu. Nach Definition der weak-*Topologie ist $\hat{f}$ stetig. Da L_λ auf H^∞ multiplikativ ist, folgt das $f \mapsto \hat{f}$ ein Algebra-Homomorphismus ist. Klarerweise ist $f \mapsto \hat{f}$ eine Isometrie bzgl. sup-Norm, insbesondere injektiv.

Nach Satz 3.4.3 ist eine gegebene Isometrie T von der Gestalt $Tf = \alpha\phi f$ und nach Satz 3.4.2 ist ϕ von der Gestalt $(\phi f) = f(\tau(\lambda))$.

`ad:` Die "Umgekehrt"-Aussage folgt aus der Substitutionsregel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau(e^{it}))| \cdot |\tau'(e^{it})|dt\,.$$

Sei also eine Isometrie T von H^1 auf sich gegeben. T bildet die Menge der Extrempunkte der Einheitskugel auf sich ab, also auch deren Abschluß. Nach Korollar 3.2.2 hat also f eine Nullstelle $\iff$ Tf hat eine Nullstelle.

Setze $F = T(1)$, dann ist $F(\lambda) \neq 0$ in $\mathbb{D}$. Weiters hat für $\lambda \in \mathbb{D}$, $f - \lambda$ eine Nullstelle $\iff$ $Tf - \lambda F$ hat eine Nullstelle. Die Funktionen f und $\frac{Tf}{F}$ haben daher den gleichen Range. Betrachte die Abbildung $Uf = \frac{Tf}{F}$. Dann bildet U den Raum H^∞ isometrisch in sich ab. Ist $g \in H^\infty$, so ist $Fg \in H^1$, also $f = T^{-1}(Fg) \in H^1$. Es gilt $Uf = g$, also ist sogar $f \in H^\infty$. D.h. U ist eine Isometrie von H^∞ auf sich. Weiters gilt $U(1) = 1$. Nach den bereits gezeigten "(i)" ist also $(Uf)(\lambda) = f|\tau(\lambda))$ für eine gewisse konforme Abbildung τ. Es folgt

$$(Tf)(\lambda) = F(\lambda)f(\tau(\lambda)), f \in H^\infty\,.$$

Da T isometrisch ist, folgt für $f \in H^\infty$

$$||f||_1 = ||Tf||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau(e^{it})| \cdot |F(e^{it})|dt\,.$$

Nach der Substitutionsregel gilt

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|\tau(e^{it}))| \cdot |\tau'(e^{it})|dt\,,$$

also folgt $|F(e^{it})| = |\tau'(e^{it})|$ f.ü. .

Die Funktion 1 ist Extremalpunkt der Einheitskugel von H^1, denn 1 ist outer und $||1||_1 = 1$, also ist auch F ein Extremalpunkt insbesondere outer. Die Funktion τ ist von der Form

$$\tau(z) = \beta\frac{z-\gamma}{1-\overline{\gamma}z}$$

mit $|\beta| = 1$, $\gamma \in \mathbb{D}$. Ihre Ableitung ist

$$\tau'(z) = \frac{\beta(1-|\gamma|^2)}{(1-\overline{\gamma}z)^2}\,,$$

also ist $\tau', \frac{1}{\tau'} \in H^\infty$ und nach Korollar 2.3.7 ist τ' outer. Es folgt $F(\lambda) = \alpha'(\lambda)$, also ist Tf von der gewünschten Gestalt für $f \in H^\infty$. H^∞ ist dicht in H^1 (z.B. $f_r \to f$ in $||\cdot||_1$), also gilt die Behauptung $\forall f \in H^1$.

❑

Kapitel 4

Analytische Funktionen mit stetigen Randwerten

4.1 Der Raum A

DES

4.1.1 Definition. ei A die Menge der in $\overline{\mathbb{D}}$ stetigen und in $\mathbb{D}$ analytischen Funktionen.

Versieht man A mit der sup-Norm $||\cdot||_\infty$ dann bildet A mit den Operationen "punktweise $+, \cdot$" eine Banachalgebra. Wegen dem Maximummprinzip gilt

$$||f||_\infty = \sup |f|e^{it})| \,,$$

also können wir $f \in A$ mit der Randfunktion $f(e^{it})$ identifizieren, und so wird A zu einer Teilalgebra von $C(T)$. Nämlich besteht A aus genau jener Funktion von $C(T)$, deren negative Fourierkoeffizienten verschwinden. Wegen Lemma 3.1.3 und Korollar 3.1.6 sind die Polynome $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ bzw. die trigonometrischen Polynome $\sum_{k=\theta}^n a_k e^{ikt}$ dicht in A, und die Randwerte $f(e^{i\theta})$ für $f \in A$ sind absolut stetig.

Aus der Theorie der Fourierreihen folgt

THIV.1

4.1.2 Satz. *Die Menge $\{\operatorname{Re} f | f \in A\}$ ist dicht (bzgl. $||\cdot||_\infty$) in den reellwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{T}$.*

Beweis. Jeder trigonometrische Polynom der Gestalt

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k e^{ikt}, c_{-k} = \overline{c_k} \,,$$

ist Realteil einer Funktion in A. Die Cesaro-Mittel einer reellen Funktion f auf $\mathbb{T}$ haben gerade diese Form und approximieren f gleichmäßig (Satz von Fejer). ❑

COIV.2

4.1.3 Korollar. *Sei μ ein endliches reelles Maß auf $\mathbb{T}$. Ist $Sfd_\mu = 0$ für alle $f \in A$, so ist $\mu = 0$. Ist $Sfd\mu = 0$ für alle $f \in A$ mit $f(0) = 0$, so ist ein konstantes Vielfaches des Lebesque Maßes λ.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Zum Beweis der zweiten Aussage setze

$$\ell = \int\limits_T d\mu, d\mu_1 = d\mu - \ell d\lambda\,.$$

Dann ist für $f \in A$

$$\int\limits_T f d_{\mu_1} = \int\limits_T [f - f(0)] d\mu_1 + f(0) \int\limits_T d\mu_1 = 0\,,$$

den $\int\limits_T d\mu_1 = 0, \int\limits_T [f - f(0)] d\mu = 0$ und $\int\limits_T [f - f(0)] d\lambda = f(0) - f(0) = 0$ wegen der Mittelwertseigenschaft. Es folgt $\mu_1 = 0$, d.h. $\mu = \ell\lambda$.

❑

Beweis.
ad (i): Sei ω eine Funktion auf T mit Werten in $[-\infty, -1]$ mit den Eigenschaften
1.) $\omega = -\infty$ auf K und strebt gegen $-\infty$ wenn e^{it} gegen K strebt.
2.) $\omega \neq -\infty$ auf $T \setminus K$ und dort stetig differenzierbar.
3.) $\omega \in L^1$.
So eine Funktion ω kann z.B. konstruiert werden wie folgt: K ist abgeschlossen, also ist $T \setminus K$ die abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen I_n. Sei ϵ_n die Länge von I_n und sei y_n eine positive, stetig differenzierbare Funktion auf I_n, so daß $y_n \leq \frac{1}{e}$, $y_n \to 0$ an den Randpunkten von I_n und daß

$$\int_{I_n} \log y_n \geq -2\epsilon_n\,.$$

Sei $y = 0$ auf K und $= y_n$ auf I_n, dann ist $0 \leq y \subseteq \frac{1}{e}$, die Nullstellenmenge von y ist K, y ist stetig auf T und stetig differenzierbar auf $T \setminus K$, und $\log y \in L^1$. Setze $\omega = \log y$, dann hat w alle geforderten Eigenschaften.

Sei nun

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \omega(t) dt\,,$$

dann ist h analytisch in $\mathbb{D}$ und $\mathrm{Re}\, h \leq -1$. Nach Korollar 2.4.7 ist h stetig in $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$. Da w stetig gegen $-\infty$ geht wenn $e^{it} \to K$, ist für $\theta \in K$ (P_r ist approx.identity)

$$\lim_{r \to 1} \mathrm{Re}\, h(re^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \omega(t) dt = -\infty\,.$$

Setze nun $g = \frac{1}{h}$, dann ist $g \in A$, $\mathrm{Re}\, g \leq 0$ und die Nullstellenmenge von g ist genau K.

ad (ii): Es gibt eine Funktion $f \in A$, so daß
1, $f(z) = 1$, $z \in K$,
2, $|f(z)| < 1$, $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus K$.
Zum Beispiel setze $f = e^g$, mit dem in (i) konstruierten g.

Wir zeigen, daß die Algebra $\tilde{A} = \{f|_K | f \in A\}$ abgeschlossen bzgl. $||\cdot||_\infty$ ist. Sei $h \in A$, dann gilt wegen 1, und 2, daß

$$\sup_K |h| = \lim_{n\to\infty} ||f^n h||_\infty \, (||\cdot|| = \sup_{\mathbb{D}} |\cdot|) \,.$$

Da $(f^n h)|_K = h|_K$ gilt $f^n H = h + g$ mit $g \in A$, $g|_K = 0$. Es folgt

$$\sup_K |h| = \inf_g ||h+g||, g \in A, g|_K = 0 \,.$$

Der Teilraum $S \subseteq A$ von allen Funktion die auf K verschwinden ist abgeschlossen, also zeigt obige Beziehung, daß $\tilde{A} \cong A|_S$, daher insbesondere vollständig also abgeschlossen als Teil von $C(K)$.

❑

Wir zeigen, daß $\tilde{A}$ dicht in $C(K)$ ist $\Rightarrow$ fertig. OBdA sei K so gedreht, daß für ein gewisses α gilt $K \cup \{e^\theta || \theta| < \alpha\} = \emptyset$. Ist $x < 1$, dann ist $\frac{1}{z-x} \in A$, also auch in $\tilde{A}$. Sei

$$x_0 = \inf\{x > -1 | \frac{1}{z-x} \in \tilde{A}\} \,,$$

siehe auch anderer Beweis dieses Teiles:
Sei K echte abg. Teilmenge von T und sei A_K der $||\cdot||_\infty$ -Abschluß der Polynome in $C(K)$. Angenommen $A_K \neq C(K)$, dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional das A_K annuliert aber $\not\equiv 0$ ist. Es existiert also ein Maß $\mu(C(K)^+ = \{$ Maße $\})$, so daß $\int_K p d\mu = 0$ ist für jedes Polynom. Nach dem Satz von F.und M.Riesz ist μ absolut stetig, $d\mu = f dt$, $f \in H^1$. Da $\operatorname{supp} \mu \subseteq K$, folgt $f(e^{it}) = 0$, $e^{it} \notin K$, d.h. f verschwindet auf einem offenen Intervall. Es folgt $f = 0$, also $\mu \equiv 0$ ein WS!

wir zeigen $X_0 = -1$: Angenommen $x_0 > -1$, dann gibt es ein $x > x_0$, $\epsilon > 0$ so daß $x - x_0 < \epsilon$, $\frac{1}{z-x} \sigma \tilde{A}$ aber $\{|z-x| < \epsilon\} \cup K = \emptyset$. Sei $\omega = \frac{1}{z-x}$, dann gilt $|\omega_{(z)}| \leq \frac{1}{\epsilon}$ für $z \in K$. Die Funktion $\frac{1}{z-t}$ ist für $|t-x| < \epsilon$ analytisch dort wo $|\omega| \leq \frac{1}{\epsilon}$, läßt sich also nach Ptenzen von ω entwickeln. Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig (abg.Kreisscheibe), also ist $\frac{1}{z-t}$ in $\tilde{A}$ (da $\frac{1}{z-x} = \omega \in \tilde{A})j$ ein WS! da $x_0 = \inf$.

Es ist nach obigen Argument (ϵ entsprechend Abstand von x zu K) die Menge $\{x_{-1} | \frac{1}{z-x} \in \tilde{A}\} = (-1, \infty)$, insbesondere ist $\frac{1}{z} \in \tilde{A}$. D.h. aufgefasst als Funktion auf $Te^{it} \in \tilde{A}$, und damit sind alle trigonometrischen Polynome in $\tilde{A}$. Es ist daher (Satz von Fejer) $\tilde{A}$ dicht in $C(K)$.

THIV.3

4.1.4 Satz. *(Wermer) A ist eine maximale abgeschlossene Teilalgebra von $C(T)$.*

Beweis. Sei B eine abg. Teilalgebra von $C(T)$ die A echt umfasst. Dann gibt es eine Funktion $f \in B$, deren (-1)-ter Fourierkoeffizient $= 1$ ist. Da die Polynome dicht in A sind gibt es Polynome p, q, so daß

$$zf = 1 + zp + \overline{z}\,\overline{q} + h$$

mit $||h||_\infty < \frac{1}{2}$. Offenbar ist h stetig. Sei $M = ||zq - \overline{z}\,\overline{q}||_\infty$ dann gilt für $\delta > 0$

$$||1 + \delta(zq - \overline{z}\,\overline{q})||_\infty \leq \sqrt{1 + \delta^2 ||zq - \overline{z}\,\overline{q}||_\infty^2} \leq 1 + \delta^2 M^2 \,,$$

denn $zq - \overline{z}\,\overline{q}$ ist rein imaginär. Es ist

$$\delta\overline{z}\,\overline{q} = \delta(zf - 1 - zp - h) = Zg - \delta h - \delta$$

mit $g = \delta(f-p) \in B$. Wegen $|h| < \frac{1}{2}$ folgt

$$||1 + \delta + z(-g + \delta q)||_\infty = ||1 + \delta - \delta\overline{z}\,\overline{q} \mp \delta h - \delta + z\delta q||_\infty =$$

$$= ||(1 + \delta(zq - \overline{z}\,\overline{q})) - \delta h||_\infty \leq 1 + \delta^2 M^2 + \frac{\delta}{2}\,.$$

Wählt man δ so klein, daß $\delta < \frac{1}{2M^2,}$ so erhält man

$$||1 + z\frac{-g+\delta q}{1+\delta}||_\infty < 1\,.$$

Das Element $z\frac{-g+\delta q}{1+\delta} \in B$ ist daher invertierbar in B (geometrische Reihe konvergiert), also ist auch z in B invertierbar, d.h. $\overline{z} \in B$. Nach dem Satz von Fejer ist $B = C(T)$.

❑

COIV.4

4.1.5 Korollar. *(i) Sei f eine stetige Funktion auf T, $f \notin A$. Dann sind die Polynome in z und f dichtin $C(T)$.*

(ii) Sei K eine echte abgeschlossene Teilmenge von T. Dann sind die Polynome dicht in $C(K)$.

Beweis.
`ad`(i): Umformulierung von Satz.

`ad`(ii): Sei B die Algebra jener Funktionen aus $C(T)$, deren Einschränkung auf K durch Polynome approximierbar sind. Es gilt $B \supseteq A$ und diese Inklusion ist sogar echt, denn B enthält alle Funktionen die (mindestens) auf K verschwinden. Es folgt $B = C(T)$ (man beachte den Fortsetzungssatz von Tietze).

❑

Da $A \subseteq H^\infty$, ist $\log|f(e^{it})| \in L^1$, insbesondere ist also $f(e^{it}) = 0$ nur auf einer Nullmenge. Wir zeigen in folgenden, daß man auf einer Nullmenge beliebige Werte vergeben kann.

THIV.5

4.1.6 Satz. *Sei K eine abgeschlossene Teilmenge von T mit Lebesque-Maß 0. Dann gilt*

(i) (Fatou) Es gibt eine Funktion in A, die genau auf K verschwindet.

(ii) (Rudin) Sei F eine stetige komplexwertige Funktion auf K. Dann gibt es eine Funktion in A, die auf K mit F übereinstimmt.

Beweis.
`ad`(i): Sei ω eine Funktion auf T mit Werten in $[-\infty, -1]$ mit den Eigenschaften 1.) $\omega = -\infty$ auf K und strebt gegen ∞ wenn e^{it} gegen K strebt. 2.) $\omega \neq -\infty$ auf $T \setminus K$ und dort stetig differenzierbar.

❑

THIV.6

4.1.7 Satz. *Sei f analytisch in $\mathbb{D}$. Dann ist $f \in A$ und $f(e^{i\theta})$ abs. stetig $\iff f' \in H^1$. In diesem Fall gilt*

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) \lim f'(re^{i\theta}) .$$

Beweis.
·) Sei f stetig in $\overline{\mathbb{D}}$ und abs. stetig längs T. Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt ,$$

also folgt ($\frac{\delta}{\delta\theta}$:)

$$izf'(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\delta}{\delta\theta} P_r(\theta - t)}_{= -\frac{\delta}{\delta t} P_r(\theta - t)} f(e^{it}) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \pi_{-\pi} P_r(\theta - t) ie^{it} f'(e^{it}) dt ,$$

durch partielle Integration. Es folgt $zf'(z) \in H^1$ und daher auch $f'(z) \in H^1$.

·) Sei $f' \in H^1$, dann gilt

$$izf'(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) ie^{it} f'(e^{it}) dt ,$$

wobei $f'(e^{it})$ als $\lim_{r \to 1} f'(re^{it})$ zu verstehen ist. Die Funktion

$$g(\theta) = \int\limits_{-\pi}^{\theta} ie^{it} f'(e^{it}) dt, \theta \in [-\pi, \pi]$$

ist absolut stetig und $g(-\pi) = g(\pi) = 0$, also folgt durch partielle Integration

$$\frac{\delta}{\delta\theta} f(z) = \frac{\delta}{\delta\theta} \Big[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt \Big] ,$$

also gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt + C(r) .$$

Die Funktion $C(r)$ ist harmonisch in $\mathbb{D}$, also gilt

$$C'' + \frac{1}{r} C' = 0$$

und es folgt $C = a\log r + b$. Da C stetig bei Null ist folgt $a = 0$. Also ist $f = P[g(\theta) + b]$ und daher stetig in $\mathbb{D}$. Die Randwerte sind $g(\theta) + b$ und nach Definition absolut stetig. Die Formel für die Ableitungen ergibt sich ebenfalls nach Definition.

❑

4.2 Der Satz von Szegö

Sei μ ein endliches positives Maß auf T, und bezeichne A_0 die Menge jener Funktionen $f \in A$, für die $f(0) = 0$ gilt. Aufgefaßt als Funktionen auf T ist $f \in A_0 \iff f \in A$ und $\int_T f d\lambda = 0$. Wir betrachten den Raum $L^2(\mu)$ und wollen den Abstand der Funktion $\equiv 1$ von $A_0 \subseteq L^2(\mu)$ berechnen.

THIV.7

4.2.1 Satz. *(Szegö, Kolmogoroff-Krein) Sei μ ein endliches positives Maß auf T und sei $h = \frac{d\mu}{d\lambda}$. Dann gilt*

$$\inf_{f\in A_0} \int_T \overset{|-f|^2 d\mu}{\underset{||1-orthog.Proj||^2}{||}} = e^{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \log h(t)dt\,.$$

Bevor wir den Satz beweisen benötigen wir noch einige andere Resultate.

THIV.8

4.2.2 Satz. *Sei $1 \notin \overline{A_0}$, und bezeichne F die orthogonale Projektion von 1 von $\overline{A_0}$. Dann gilt*

(i) Das Maß $|1-F|^2 d\mu$ ist ein (nicht verschwindendes) konstantes Vielfaches von λ. Insbesondere ist λ absolut stetig bzgl. μ.

(ii) Die Funktion $\frac{1}{1-F}$ ist Element von H^2.

(iii) Sei $h = \frac{d\mu}{d\lambda}$, dann ist

$$(1-F)h \in L^2(\lambda)\,.$$

Beweis.

(i) F ist die orthogonale Projektion von 1 in $\overline{A_0}$, also ist $(1-F) \perp \overline{A_0}$. Insbesondere folgt $(1-F) + (1-F)f$ für jedes $f \in A_0$, d.h.

$$\int_T f(1-F|^2 d\mu = 0, f \in A_0\,.$$

Nach Korollar 4.1.3 ist $|1-F|^2 d\mu$ ein konstantes Vielfaches von λ. Da $1 \notin \overline{A_0}$ vorausgesetzt ist, ist $|1-F|^2 d\mu \not\equiv 0$.
`ad`(ii): Sei μ_a der (bzgl.λ) absolut stetige Teil von μ. Wegen $|1-F|^2 d\mu = kd\lambda$, $k \neq 0$, folgt

$$d\mu_a = \frac{k}{|1-F|^2} d\lambda\,,$$

also ist $\frac{1}{1-F} \in L^2(\lambda)$. Sei nun $f \in A_0$, dann gilt

$$k \int_T (1-F)^{-1} f d\mu = k \int_T (1-\overline{F}) f |1-F|^{-2} d\lambda =$$

$$= \int_T (1-\overline{F}) f d\mu_{\underset{(1-F)\perp A_0}{\overset{=0}{\nearrow}}} .$$

Setzt man speziell $f = z^n, n = 1, 2, \ldots$, so sieht man daß die negativen Fourierkoeffizienten von $\frac{1}{1-F}$ verschwinden, d.h. $\frac{1}{1-F} \in H^2$.

`ad`(iii): Sei $d\mu = hd\lambda + d\mu_s$, dann ist $(1-F) = 0$ f.ü. bzgl. μ_s, da $|1-F|^2 d\mu = kd\lambda$. Es folgt

$$|1-F|^2 hd\lambda = kd\lambda ,$$

also

$$|1-F|h = \frac{k}{|1-F|} \in L^2(\lambda) .$$

❑

COIV.9

4.2.3 Korollar. *Es gilt:*
Sei μ ein endliches positives Maß auf T mit absolut stetigen Teil (bzgl.λ) μ_a. Dann gilt

$$\inf_{f \in A_0} \int_T |1-f|^2 d\mu = \inf_{f \in A_0} \int |1-f|^2 d\mu_a ,$$

insbesondere ist für ein singuläres Maß $\mu : 1 \in \overline{A_0}$.

Beweis. Es gilt $\inf_{f\in A_0} \int_T |1-F|^2 d\mu = \int_T |1-F|^2 d\mu_a$. Betrachte F als Element von $L^2(\mu_a)$, dann ist $F \in \overline{A_0}$, denn $|| - f||_{L^2(\mu_a)} \leq ||F - f||_{L^2(\mu)}$. Weiters ist $(1-F) = 0$ f.ü. bzgl. μ_s, also ist $(1-F) \perp A_0$ auch im Raum $L^2(\mu_a)$. Es folgt

$$|1-F|^2 d\mu_a \int_T = \inf_{f \in A_0} \int_T |1-f|^2 d\mu_a .$$

❑

THIV.10

4.2.4 Satz. *Sei $h \in L^1, d \geq 0$. Dann gilt*

$$e^{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log f(t) dt} = \inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h e^{\mathrm{Re}\, f} dt = \inf_{f \in L_1}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h e^f dt f reell \int_{-\pi}^{\pi} f dt = 0$$

Beweis. Nach der Jensen'schen Ungleichung gilt

$$e^{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log h dt} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h dt .$$

Sei $g \in L^1$, g reellwertig, und $\int\limits_{-\pi}^{\pi} gdt = 0$ dann zeigt die Jensen'sche Ungleichung

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log hdt} = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log[he^g]dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt\,.$$

Insbesondere folgt

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log hdt} \leq \inf_g \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt \leq \inf_{f\in A_0} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^{\mathrm{Re}\, f} dt\,.$$

das zweite "$\leq$" ist "$=$": Nach Satz 4.1.2 ist die Menge

$$\{\mathrm{Re}\, f | f \in A, \int f dt = 0\}$$

dicht bzgl. $||.||_1 \{g \in L^\infty | g = \overline{g},\ \int g d\lambda = 0\}$ in der Menge.

Es gibt sogar zu jeder Funktion $g \in L^\infty$ eine Folge $g_k \overset{||.||_1}{\to} g$ mit $g_n \in \mathrm{Re}\, \mathbb{A}$, die glm. beschränkt ist. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz ist

$$\inf_{f\in A_0} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi}^{\pi} he^{\mathrm{Re}\, f} dt = \inf_{\substack{g\in L^\infty \\ g=\overline{g}, \int g d\lambda = 0}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt\,.$$

Nun gilt es zu jeder L^1-Funktion g eine Folge L^∞-Funktionen, die in $||\cdot||_1$-Norm gegen g streben und zwar monoton wachsend wo $g \geq=$ und fallend wo $g \leq 0$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\inf_{\substack{g\in L^\infty \\ g=\overline{g}, \int g d\lambda = 0}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt = \inf_{\substack{g\in L^\infty \\ g=\overline{g}, \int g d\lambda = 0}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt\,.$$

Wir zeigen daß auch das erste "$\leq$" ein "$=$" ist: Sei zuerst $logh \in L^1$, und setze $\ell = \int_T hd\lambda$, $g = \ell - \log h$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^g dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^\ell dt = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log hdt}\,,$$

also wird das Infinum bei g angenommen und hat den gewünschten Wert. Sei nun $\log h \notin L^1$, dann gilt für $\epsilon > 0$ nach dem bereits bewiesenen

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log(h+\epsilon)dt} = \inf_{f\in A_0} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (h+\epsilon)e^{\mathrm{Re}\, f} dt \geq$$

$$\geq \inf_{f\in A_0} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^{\mathrm{Re}\, f} dt\,.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz geht für $\epsilon \to 0$ die linke Seite gegen 0.

❑

Beweis. (Satz 4.2.1) Satz 4.2.4 zeigt, daß

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h dt} = \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^{2\operatorname{Re} g}dt\,.$$

Es gilt $e^{2\operatorname{Re} g} = |e^g|^2$. Ist $g \in A_0$, so ist $e^g = 1 - f$ mit $f \in A_0$, also ist

$$\inf_{g\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} he^{2\operatorname{Re}} \geq \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h|1-f|^2 dt\,.$$

Wir verwenden diese Ungleichung nun mit einem anderen h, nämlich mit $|1-\tilde{g}|^2$, $\tilde{g} \in A_0$. Dann folgt

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log|1-\tilde{g}|^2 dt} \geq \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |-f-\tilde{g}+f\tilde{g}+f\tilde{g}+f\tilde{g}|^2 dt \geq ,$$

wobei das letzte "$\geq$" gilt da $|\cdot|^2$ subharmonisch ist. Es folgt $\log|1-\tilde{g}|^2 \in L^1$, $\ell = \int_T \log|1-\tilde{g}|^2 dt \geq 0$. Man erhält $|1-\tilde{g}|^2 = e^\ell e^P$ mit $p = \log|1-\tilde{g}|^2 - \ell$, also ist $\int p d\lambda = 0$.

Wir finden mit dem ursprünglichen h:

$$\frac{1}{2\pi}\int|1-\tilde{g}|^2 h dt = \underbrace{e^\ell}_{\geq 1}\frac{1}{2\pi}\int he^P dt \geq \inf_{\substack{p\in L^1, p=p\\ intpd\lambda=0}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^P dt$$

Satz 4.2.4
$\downarrow$

$$= \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^{2\operatorname{Re} f}\,.$$

Es folgt

$$\inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} he^{2\operatorname{Re} f}dt = \inf_{f\in A_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h|1-f|^2 dt\,.$$

Nach Satz 4.2.4 und Korollar 4.2.3 folgt die Behauptung.

❑

COIV.11

4.2.5 Korollar. *Sei μ ein endliches positives Maß auf T. Dann ist*

$$\operatorname{cls}\{e^{int} | n = 1, 2, 3, \ldots\} = L^2(\mu)$$

genau dann, wenn

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\log\frac{d\mu}{d\lambda}\right]dt = -\infty\,.$$

Beweis. Nach Satz 4.2.1 ist $\int_{-\pi}^{\pi}[\log \frac{d\mu}{d\lambda}]dt = -\infty \iff 1 \in \text{cls}\{e^{int}|n = 1,2,3,\ldots\}$. Sei nun $f \in L^2(\mu)$, $f \perp A_0$, dann ist sogar $f \perp 1$. Es folgt

$$\int (fe^{it}) \cdot \underbrace{e^{it}dt} = 0, n = 1,2,3,\ldots$$

d.h. $fe^{it} \perp A_0$, als $\perp A$ und damit ist $f \perp e^{it}$ Induktiv findet man $f \perp e^{int}$, $n = -1,-2,-3,\ldots$ auf e^{int} für $n \geq 0$ sowieso, also folgt $f = 0$.

❑

COIV.12

4.2.6 Korollar. *Sei $f \in L^2(\lambda)$, dann ist*

$$\text{cls}\{e^{int}f(t)|n = 1,2,3,\ldots\} = L^2(\lambda)$$

dann gilt, wenn

(i) *Die Nullstellung von f hat Maß* 0.

(ii) $\log|f| \notin L^1$.

Beweis.
·) Sei cls $= L^2(\lambda)$. Angenommen $f(t) = 0$ auf einer Menge E mit $\lambda(E) > 0$. Dann gilt für $g \in L^2(\mu)$, $g_n \to g$, $g_n \in span\{e^{int}f\}$

$$||g||^2 = \int\limits_T |g(t)|^2dt = \lim \int\limits_T |g_n(t)|^2dt =$$

$$= \lim \int\limits_{T\setminus E} |g_n(t)|^2dt$$

ein WS!.

·) Sei $f \in L^2(\lambda)$, $\lambda\{f(x) = 0\} = 0$, dann ist die Abbildung $g \mapsto \frac{g}{f}$ eine Isometrie von $L^2(\lambda)$ auf $L^2(|f|^2d\lambda)$. Daher ist $\{e^{int}f(t)\}$ dicht im $L^2(\lambda) \iff \{e^{int}\}$ dicht in $L^2(|f|^2d\lambda)$. Der Satz von Szegö zeigt die Behauptung.

❑

4.3 Idealtheorie in A

Der Raum A ist eine Banachalgebra mit den "punktweisen" Operationen. Wir wollen die abgeschlossenen Ideale von A bestimmen. Beachte im folgenden, daß die Menge der inner functions nach Korollar 3.3.3 ein vollständiger Verband ist.

THIV.13

4.3.1 Satz. *Sei K eine abgeschlossene Teilmenge von T mit Lebesque-Maß =, und sei F eine inner function, so daß*

(i) *Alle Häufungspunkte von Nullstellen von F liegen in K.*

(ii) *Der Träger des Maßes, das den singulären Teil von F bestimmt liget in K.*

Dann ist die Menge

$$J = \{Fg | g \in A, g(K) = 0\}$$

ein abgeschlossenes von = verschiedenes Ideal von A.

Umgekehrt ist jedes abgeschlossene von 0 verschiedene Ideal J von A von dieser Gestalt. Die Funktion F ist dabei gegeben als der größte gemeinsame Teiler der inner parts der Funktionen von J:

Beweis.
·) Sei zunächst F gegeben, $F = BS$ mit einem Blaschke Produkt B und einer singulären inner function S. Wegen (i) ist B analytisch in $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$ (d.h. in einer offenen Menge die $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$ umfasst. Wegen (ii) ist S analytisch in $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$.

·) Sei nun $g \in A$, $g(K) = 0$, dann ist Fg analytisch in $\mathbb{D}$ und stetig am Rand, denn auf K ist $Fg = 0$ da $|F| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. D.h. $J \leq A$ und damit offenbar ein Ideal von A. Da $\lambda(K) = 0$ ist folgt aus Satz 4.1.6, daß $J \neq> 0\}$ ist. Sei nun Fg_n eine Folge in J, $Fg_n \to f \in A$ bzgl. $|| \cdot ||_\infty$. Da $|F| = 1$ längs T ist folgt

$$||g_n - \overline{F} f||_\infty \to 0\,.$$

Die Funktion $g = \overline{F} f (= \frac{f}{F})$ ist also in A und $g(k) = 0$. Klarerweise gilt $Fg = f$, also ist $f \in J$.

·) Sei nun J ein gegebenes Ideal, K die Menge der gemeinsamen Nullstellen auf T. Ist $f \in J$, so ist die Menge der Häufungspunkte der Nullstellen von f in K, und auch der Träger des Maßes der singulären Funktion von f liegt in K, denn f ist stetig auf $\overline{D}$. Ist also F wie im Satz, so folgt daẍs der Träger des singulären Teils von F ebenfalls in K liegt, daher ist $\frac{f}{F} \in A$ d.h. ist $f = BSg$ mit $f \in A$, so ist auch $g \in A$. Klarerweise gilt $\frac{f}{F}(K) = 0$, denn der outer part von f ist Null auf K.

Sei $\tilde{J} = \{\frac{f}{F} | f \in J\}$, dann ist $\tilde{J}$ ein Ideal von A und $\tilde{J} \leq |(K)| = \{g \in A | g(K) = 0\}$. Wir müssen zeigen, daß hier "=" gilt. Beachte das der gcd der inner parts von Funktionen aus $\tilde{J}$ gleich 1 ist.

·) Sei μ ein endliches komplexes Maß so daß

$$\int f d\mu = 0, f \in \tilde{J}\,.$$

Wir zeigen "gilt sogar für $f \in |(K)$" dann sind wir fertig. Sei $f \in J$, dann ist auch $z^n f \in J$, also gilt

$$\int z^n f d\mu = 0, n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

nach dem Satz von F. und M.Riesz ist

$$f d\mu = H_f d\lambda \,\text{mit}\; H_f \in H^1\,.$$

Es gilt sogar $H_f(o) = 0$. Sei

$$d\mu = \phi d\lambda + d\mu_s,\ \text{mit}\ \phi \in L^1\,,$$

dann folgt $f d\mu_s = 0$ für jedes $f \in \tilde{J}$. Da diese $f's$ keine gemeinsamen Nullstellen außerhalb von K haben, folgt $\operatorname{supp} \mu_s \subseteq K$. Weiters gilt $f\phi = H_f$ f.ü., d.h. ϕ ist der Randwert der meromorphen Funktion $\frac{H_f}{f}$.

·) Die Funktion $\frac{H_f}{f}$ hängt nicht von f ab, denn es gilt auf T : $\frac{H_f}{f} = \phi = \frac{H_g}{g}$, daher ist

$$gH_f - fHg = 0, \text{ f.ü. auf } T.$$

Da $g, f \in H^\infty, H_f, H_g \in H^1$ sind folgt $gH_f - fH_g \in H^1$ und daher ist $gH_f - fH_g = 0$ identisch in $\mathbb{D}$. die meromorphe Funktion $M = \frac{H_f}{f}(f \in \tilde{J})$ ist damit insbesondere analytisch, denn die $f \in \tilde{J}$ haben in $\mathbb{D}$ keine gemeinsamen Nullstellen. Als Quotient von zwei Funktionen der Klasse N liegt sie ebenfalls in $\mathbb{N}$. Sie liegt jedoch sogar in $\mathbb{N}^+$, denn: Sei$M = B_M \frac{S_{M^1}}{S_{M^2}} 0_M$, $f = B_f S_f 0_f$, dann gilt, da $fM \in H^1$ ist.

$$B_f B_M \frac{S_{M^1}}{S_{M^2}} S_f 0_M 0_f = (B_f B_M) S(0_M 0_f)$$

mit einer singulanz inner function S. D.h. S_{M^2} teilt $S_{M^1} S_f$ für alle S_f, damit teilt S_{M^2} auch $ggt\{S_{M^1} S_f | f \in \tilde{J}\} = S_{M^1}$.

Die Randwerte von M sind $\phi \in L^1$, nach Korollar 2.3.6 folgt $M \in H^1$. Offensichtlich gilt $M(0) = 0$. Es folgt $\phi \in H^1$ und $\phi(0) = 0$.

·) Sei nun $h \in A$, $h(K) = 0$, dann gilt

$$\int h d\mu = \int h\phi d\lambda + \int h d\mu_s .$$

Das zweite Integral $= 0$ da $\operatorname{supp} \mu_s \subseteq K$, das erste Integral ist Null, denn $h\phi \in H^1$ und $h\phi(0) = 0$.

❑

COIV.14

4.3.2 Korollar. *Es gilt in A:*

(i) Jedes maximale Ideal ist von der Form

$$M_\lambda = \{f \in A | f(\lambda) = 0\}$$

für ein $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$.

(ii) Sind $f_f, \ldots, f_n \in A$ und haben sie in $\overline{\mathbb{D}}$ keine gemeinsame Nullstelle, so gibt es $g_1, \ldots, g_n \in A$, so daß

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$$

ist.

(iii) Jedes abgeschlossene Ideal ist ein Hauptideal. Jedes abg.Primideal ist maximal.

(iv) Die abgeschlossenen Primärideale von A (d.h. die in genau einem maximalen Ideal enthaltenen) sind jene von den beiden Typen

ad1.: $J = (z - \alpha)^k A, \alpha \in \mathbb{D}, k \in \mathbb{N}$.

ad2.: $J = (z - \lambda) e^{g \frac{z+\lambda}{z-\lambda}} I(\lambda), |\lambda| = 1, g \geq 0$.

Beweis.
·) Wir zeigen zuerst, daß für ein echtes Ideal J auch $\overline{J}$ echtes Ideal ist. Ist $f \in J$, so gilt $||1-f|| \geq 1$, denn anderenfalls wäre f in A invertierbar. Es folgt also $||1-f|| \geq 1$ für alle $f \in \overline{J}$, also ist $1 \notin \overline{J}$.

`ad`(i): Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen und daher ein M_λ.

`ad`(ii): Betrachte das von $f_1, \dots, F_n$ erzeugte Ideal J. Ist dieser echt, so auch $\overline{J}$ und daher enthalten in einem M_λ, WS!.

`ad`(iii): Sei J abg. Ideal, K und F wie im Satz. Sei $g \in A$ so, daß die Nullstellen von g genau K sind (vgl.Satz 4.1.6), und sei f der oter part von g. Dann ist $Ff \in A$. Betrachtedas von Ff erzeugte abgeschlossene Ideal $\tilde{J} = \underbrace{FfA}$. Es gilt $\tilde{J} \leq J$ also $K_{\tilde{J}} \geq K$ aber auch $K \geq K_{\tilde{J}}$ nach der Wahl von g. Offenbar ist der ggt der inner parts von Funktionen von $tildeJ$ ein Teiler von F, nach dem Satz ist $\tilde{J} = ggt \cdot I(K)$, $J = F \cdot (K)$, also folgt $\tilde{J} \geq J$, also ist $\tilde{J} = J$.

`ad`(iv): Sei J primär und sei $J \leq M_\alpha$, $|\alpha| < 1$. Dann ist die Menge $K = \emptyset$ und die inner Function F ist gegeben als

$$F = \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)^k.$$

Ist $J \leq M_\lambda$, $|J| = 1$, so ist $K = \{\lambda\}$ und F gegeben als

$$F = e^{-\int \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu},$$

mit $\operatorname{supp} \mu = \{\lambda\}$. Mit $g = \mu(\{\lambda\})$ folgt die Behauptung.

❑ REO

4.3.3 Bemerkung. ffensichtlich ist A nicht Nötherseh. Es ist nicht jedes (abg.) Ideal Durchschnitt von Primäridealen. Es gilt: $J = \cap$ Primär $\iff$ das Maß vom singulären Teil von F ist diskret.

4.4 A als linearer Raum

Einige Sätze über H^∞, die in Kap.III bewiesen wurden lassen sich auf A übertragen.

THIV.15

4.4.1 Satz. *Es gibt keine beschränkte Projektion von $C(T)$ auf A.*

Beweis. Die Rotation $\theta \mapsto f_\theta$ ist stetig in der $||\cdot||_\infty$-Norm wenn $f \in C(T)$. Wie im Beweis von Satz 3.1.7 ($P = 1$), finden wir das die natürliche Projektion beschränkt sein müßte. Wie das Beispiel ([Z,zygmund, p.253])

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n \log n} \in C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} e^{in\theta} \notin A\,.$$

zeigt, ist diese nicht überall definiert.

❑

THIV.16

4.4.2 Satz. *Die Funktion $f \in A$ ist ein Extrempunkt der Einheitskugel* $\iff$ $|f(z)| \leq$ *in* $\mathbb{D}$ *und*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - |f(e^{it})|dt = -\infty\,.$$

Beweis. Erfüllt f die Bedingungen, so ist f Extremalpunkt in H^∞, also erst recht in A.

Ist umgekehrt die Bedingung verletzt, so konstruieren wir wie im Beweis von Satz 3.2.1(ii) eine Funktion g, die zeigt, daß f nicht extremal ist. Dann wählen wir eine Funktion u mit $\log u \in L^1$, $0 \leq u \leq 1 - |f|$, so daß auf jedem Bogen wo $|f| \neq 1$ ist u stetig differenzierbar ist. Nimmt man dann g genauso wie in Satz 3.2.1(ii) nur mit $\log u$ anstelle von $\log(1-|f|)$, so folgt die Behauptung.

❑

THIV.17

4.4.3 Satz. *Sei ϕ ein Antomorphismus der Algebra A.Dann existiert eine konforme Abbildung τ von $\mathbb{D}$ auf sich, so daß*

$$(\phi f)(\lambda) = f(\tau(\lambda)), f \in A\,.$$

Umgekehrt ist jede solche Abbildung ein Antomorphismus von A.

Beweis. Zu "Umgekehrt" bemerke man, daß τ eine Mökinstransform ist und daher analytisch auf $\overline{\mathbb{D}}$ ist. Für $f \in A$, ist also sicher $f(\tau(\lambda)) \in A$.

Die restliche Behauptung folgt genauso wie in Satz 3.4.2

❑

COIV.18

4.4.4 Korollar. *Jede Isometrie T von A auf sich ist von der Form*

$$(Tf)(z) = \alpha f(\tau(z)), f \in A\,,$$

wobei $|\alpha| = 1$ und τ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf sich ist. Umgekehrt ist jede solche Abbildung eine Isometrie von A auf sich.

Beweis. Nach Satz 3.4.3 ist $Tf = \alpha \cdot \phi f$ mit $|\alpha| = 1$ und einem Antomorphismus ϕ. Daher muß α konstant sein und Satz 4.4.3 zeigt die Behauptung.

❑

Kapitel 5

H^∞ als Banach Algebra

5.1 Der Raum der maximalen Ideale

DEV.1

5.1.1 Definition. Eine kommutative Banach Algebra (mit Einselement) ust ein Banachraum B wo zusätzlich eine Multiplikation gegeben ist, so daß $(B, \lambda\cdot, +, \cdot)$ eine lineare Algebra ist und daß

$$||xy|| \leq ||x||\,||y||, x, y \in B\,,$$

gilt. Für das Einzelelement 1 gelte $||1|| = 1$.

LEV.2

5.1.2 Lemma. *Sei B eine kommuntative Banach Algebra (mit Einselement). Dann gilt:*

(*i*) *Ist $||1-x|| < 1$, so ist x invertierbar.*

(*ii*) *Ist $|y| > ||x||$, so ist $x - \lambda$ invertierbar.*

(*iii*) *Die Menge der Einheiten von B ist offen, und die Abbildung $x\ mapstox^{-1}$ ist auf dieser Menge stetig.*

(*iv*) *Die Menge*

$$g(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} | (x-\lambda) \ \textit{ist inventierbar}\}$$

ist offen. Ihr Komplement $\sigma(x)$ ist kompakt und nicht leer.

(*v*) *Ist b ein Körper, so ist $B \cong \mathbb{C}$.*

Beweis.
`ad`(i): Wegen $||y^n|| \leq ||y||^n$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty (1-x)^n = x^{-1}$ konvergent.

`ad`(II): Es ist $(x-\lambda) = -\lambda(-\frac{1}{\lambda}x + 1)$ und $||\frac{1}{\lambda}x|| < 1$.

`ad`(iii): Sei x Einheit, $y \in B$ mit $||x-y|| < ||x^{-1}||^{-1}$. Dann gilt

$$||1 - x^{-1}y|| = ||x^{-1}(x-y)|| \leq ||x^{-1}||\,||x-y|| < 1\,,$$

also ist $x^{-1}y$ und damit auch y Einheit.

Sei x invertierbar und sei $y \in B$ mit $||x-y|| < \epsilon$. Dann gilt

$$||1 - x^{-1}y|| \leq ||x-y||\,||x^{-1}|| < \epsilon||x^{-1}||\,,$$

es folgt

$$||1-(x^{-1}y)^{-1}|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||1-x^{-1}y||^n < \frac{\epsilon||x^{-1}||}{1-\epsilon||x^{-1}||}\,.$$

Wegen

$$||y^{-1} - x^{-1}|| \leq ||1 - xy^{-1}|| \cdot ||x^{-1}||$$

folgt, daß die Inversenbildung stetig ist.

`ad`(iv): Wegen (iii) ist $\delta(x)$ offen, also $\sigma(x)$ abgeschlossen. Wegen (ii) ist $\sigma(x) \leq \{\lambda|\lambda| \leq ||x||\}$, also ist $\sigma(x)$ kompakt.

Sei $F \in B*$, dann ist $f(\lambda) = F((x-y)^{-1})$ analytisch auf $\delta(x)$. Für $|\lambda| \to \infty$ gilt $f(\lambda) \to 0$, denn

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} F\Big[(\frac{1}{\lambda}x - 1)^{-1}\Big]\,.$$

Angenommen $\sigma(x) = \phi$, dann ist nach dem Satz von Lionville $f(\lambda) \equiv 0$. Insbesondere würde $(\lambda = 0)$, $F(x^{-1} = 0$ gelten $\forall F \in B*$, ein WS!.

`ad`(v): Sei B ein Körper, $x \in B$. Wegen (iv) gilt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $x - \lambda$ nicht invertierbar ist. Es folgt $x = \lambda$.

❑

THV.3

5.1.3 Satz. *Sei B eine kommutative Banachalgebra (mit 1), und sei M ein maximales Ideal von B. Dann ist M abgeschlossen, $B/M \cong \mathbb{C}$, und M der Kern eines stetigen Algebrahomorphismus von B auf $\mathbb{C}$. Ist umgekehrt ϕ ein Algebrahomorphismus von B auf $\mathbb{C}$, so ist $\ker\phi$ ein maximales Ideal. Insbesondere ist ϕ stetig.*

Beweis. Es gilt $||1-x|| \geq 1\ \forall x \in M$, also auch für $x \in \overline{M}$. Es folgt, daß $\overline{M}$ ein echtes Ideal ist, also gilt $M = \overline{M}$.

Der Faktorraum B/M ist ein Körper und nach Lemma 5.1.2, (v), $\cong \mathbb{C}$. Die kanonische Projektion $B \to B/M$ kann man also als Algebrahomorphismus von B auf $\mathbb{C}$ auffassen.

Ist umgekehrt ϕ gegeben, so ist $B/\ker\phi \cong \mathbb{C}$, also ist $\ker\phi$ ein maximales Ideal von B. Die restlichen Behaptungen folgen aus den obigen Überlegungen.

❑

REs

5.1.4 Bemerkung. Sei ϕ Algebrahomorphismus von B auf $\mathbb{C}$. Dann gilt $||\phi|| = 1$. D.h. wir können die Menge aller $\phi|| = 1$ mit einer Teilmenge der Einheitssphäre von $B*$ identifizieren.

Beweis. Es gilt $\phi(1) = 1$, also ist $||\phi|| \geq 1$. Angenommen es gäbe $x \in B$ mit $\phi(x) = 1$, $||x|| < 1$. Dann folgt: .(1_x) ist inventierbar und $\phi(1-x) = 0$ ein WS!.

❑

DEV.4

5.1.5 Definition. Der Raum der maximalen Ideale $\mathfrak{M}(B)$ ist die Menge

$$\mathfrak{M}(B) = \{\phi \in B*\,|\phi \text{ ist multiplikativ }\}\,,$$

versehen mit der schwach $-*$ Topologie.

Nach den bisher gesagten ist $\mathfrak{M}(B)$ ein kompakter Hausdorff Raum, denn $\mathfrak{M}(B)$ ist abgeschlossen: Sei $\phi_n \in \mathfrak{M}(B)$, $\phi_n \to \phi \Rightarrow \forall x,y : \phi(xy) = \lim \phi_n(xy) = \lim \phi_n(x) \cdot \lim \phi_n(y) = \phi(x)\phi(y)$, also $\phi \in \mathfrak{M}(B)$.
Betrachte die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ wobei $\hat{x}$ als

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x)$$

definiert ist. Da wir $\mathfrak{M}(B)$ mit der schwach -*Topologie versehen haben, sind die $\hat{x}$ stetige Funktion auf $\mathfrak{M}(B)$. Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ heißt die Gelfaud-Darstellung von B.

Vermöge der Gelfaud-Darstellung können wir jede kommutaive Banachalgebra (mit 1) "definieren" mit einem Teil von $C(X)$ wobei X der kompakte Hausdorff-Raum $\mathfrak{M}(B)$ ist. Im allgemeinen ist diese Darstellung jedoch nicht treu, d.h. nicht injektiv. Es gilt stets:

LEV.5

5.1.6 Lemma. *Die Gelfaud-Darstellung ist kontraktiv, d.h. es gilt*

$$||\hat{x}||_\infty \leq ||x|| \,.$$

Das Element $x \in B$ ist inventierbar genau dann, wenn $\hat{x}$ keine Nullstellen hat.

Beweis. Es ist

$$||\hat{x}||_\infty = \sup_{\phi \in \mathfrak{M}(B)} ||\hat{x}(\phi)|| = \sup_{\phi \in \mathfrak{M}(B)} ||\phi(x)|| \leq ||x|| \,.$$

Es gilt $\hat{x}(\phi) = 0 \iff x \in \ker \phi$. Da x genau dann inventierbar, wenn x in keinem maximalen Ideal liegt, folgt die Behauptung.

❑

5.2 Der Raum $\mathfrak{M}(H^\infty)$

Offensichtlich ist H^∞ eine kommutative Banachalgebra (mit 1). Es gibt "triviale" Algebrahomorphismen, nämlich die Punktauswertungen: Ist $|\lambda| < 1$, so ist

$$\phi_\lambda : \begin{cases} H^\infty & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(\lambda) \end{cases}$$

offensichtlich multiplikativ.

REE

5.2.1 Bemerkung. s gibt noch andere: Sei z.B.

$$I = \{f \in H^\infty | f|z| \to 0, z \to 1, z \in \mathbb{R}^+\} \,.$$

I ist ein Ideal von H^∞, also in einem maximalen Ideal enthalten, d.h. es gibt $\phi \in \mathfrak{M}(H^\infty)$ mit $\phi \not\equiv 0$, $\phi(I) = 0$. Dieses ϕ kann keine Punktauswertung sein.

LEV.6

5.2.2 Lemma. *Die Gelfaud-Darstellung von H^∞ in $C(\mathfrak{M}(H^\infty))$ ist isometrisch, insbesondere also injektiv.*

Beweis. Es gilt

$$||\hat{f}||_\infty = \sup_{\phi \in \mathfrak{M}(H^\infty)} |\hat{f}(\phi)| \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |\hat{f}(\phi_\lambda)| = \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |\underbrace{\phi_\lambda(f)}_{=f(\lambda)}| = ||f||_\infty \,.$$

❑

Im folgenden bezeichne Π die Abbildung

$$\Pi : \begin{cases} \mathfrak{M}(H^\infty) & \to & \overline{\mathbb{D}} \\ \phi & \mapsto & \phi|z| \end{cases} ,$$

d.h. π ist die Gelfaud-Transformation von der Funktion z. Wir haben das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{M} \arrow[dl, "\lambda\mapsto\phi_\lambda"'] \arrow[d, phantom, "\ddagger"] & (H^\infty) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{D} \arrow[rr, "id"] & & \overline{\mathbb{D}} \end{tikzcd}$$

Der Raum $\mathfrak{M}(H^\infty)$ zerfällt als

$$\mathfrak{M}(H^\infty) = \pi^{-1}(\mathbb{D}) \cup \bigcup_{|\alpha|=1} \pi^{-1}(\{\alpha\})\,.$$

Wir schreiben $\pi^{-1}(\{\alpha\}) = \mathfrak{M}_\alpha$ und bezeichnen $\mathfrak{M}_\alpha$ als die zu $\alpha(|\alpha| = 1)$ gehörige Faser.

THV.7

5.2.3 Satz. *Die Abbildung π ist eine stetige Abbildung von $\mathfrak{M}(H^\infty)$ auf $\overline{\mathbb{D}}$. Es gilt*

$$\pi^{-1}(\mathbb{D}) = \{\phi_\lambda | (\lambda) < 1\} = \triangle\,,$$

und $\pi|\triangle$ ist die Inverse Abbildung zu $\lambda \mapsto \phi_\lambda$. $\pi^{-1}|_{\mathbb{D}}$ ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{D}$ auf die offene Menge $\triangle$.

Beweis. Nach Definition als $\hat{z}$ ist π stetig. Da $||z||_\infty = 1$, gilt $Rg\,\pi \leq \overline{\mathbb{D}}$. Nun gilt $\mathbb{D} \leq Rg\,\pi$, denn $\pi(\phi_\lambda) = \phi_\lambda|z| = \lambda$. Da $\mathfrak{M}(H^\infty)$ kompakt ist, folgt $Rg\,\pi = \overline{\mathbb{D}}$.

Sei $|\lambda| < 1$, $\pi(\phi) = \lambda$. Ist $f \in H^\infty$ mit $f(\lambda) = 0$, so folgt $f = (z - \lambda)g$, $g \in H^\infty$, also

$$\phi(f) = \underbrace{\phi(z - \lambda)}_{=\pi(\phi)-\lambda=0}\ \phi(g) = 0\,,$$

d.h. $\ker\phi_\lambda \leq \ker\phi$. Da $\ker\phi_\lambda$ ein maximales Ideal ist folgt $\ker\phi_\lambda = \ker\phi$, also $\phi = \phi_\lambda$.

Um zu sehen, daß π ein Homöomorphismus von $\triangle$ auf $\mathbb{D}$ ist, bemerke daß $\lambda_n \to \lambda$ klarerweise $\phi_{\lambda_n} \overset{w-x}{\to} \phi_\lambda$impliziert da alle $f\lambda H^\infty$ stetig sind.

❑

THV.8

5.2.4 Satz. *Sei $f \in H^\infty$ und $|\alpha| = 1$. Dann gilt*

$$\hat{f}(\mathfrak{M}_\alpha) = \{\tau \in \mathbb{C} \Big| \exists(\lambda_n) \in \mathbb{D}, \lambda_n \to \alpha : f(\lambda_n) \to \tau\}\,.$$

Die Funktion f ist stetig fortsetzbar auf $\mathbb{D}u\{\alpha\}$, genau dann, wenn $\hat{f}$ auf $\mathfrak{M}_\alpha$ konstant ist.

Beweis.
·) "$\supseteq$": Sei $J = \{g \in H^\infty | g(\lambda_n) \to 0\}$, dann ist J ein Ideal, also es $\phi \in \mathfrak{M}(H^\infty)$ mit $J \subseteq$ ker
phi. Es ist $(z - \alpha) \in J$ und $(f|z| - \tau) \in J$, also folgt $\phi|z| = \alpha$ und $\phi(f) = \tau$, d.h. $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ und $\hat{f}(\phi) = \tau$.

·) Sei f stetig auf $\mathbb{D}u\{\alpha\}$ fortsetzbar. Dann gibt es $\tau \in \mathbb{C}$ mit $f(\lambda_n) \to \tau$ für jede Folge $\lambda_n \in \mathbb{D}$, $\lambda_n \to \alpha$. Sei o.B.d.A. $\tau = 0$, wir müssen zeigen $\hat{f}(\mathfrak{M}_\alpha) = 0$.

Sei $h(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \overline{\alpha}\lambda)$, dann ist $h \in H^\infty$, $h(\alpha) = 1$ und $|h| < 1$ in $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\alpha\}$. Da f stetig in α ist und dort den Wert 0 hat ist die Folge $(1 - h^n)f$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei nun $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$, dann ist $\phi(h) = 1$, also ist $\phi[(1 - h^n)f] = 0$, also folgt $\phi(f) = 0$.

·) "$\subseteq$": Sei $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$, $\hat{f}(\phi) = \tau$. Wir müssen zeigen, daß es eine Folge $\lambda_n \in \mathbb{D}$, $\lambda_n \to \alpha$ mit $f(\lambda_n) \to \tau$ gibt. O.B.d.A. sei $\tau = 0$.

Angenommen es gibt keine solche Folge, dann gibt es einen Kreis N mit Mittelpunkt α und ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(\lambda)| \geq \delta > 0, \lambda \in N \cap \mathbb{D}.$$

Schreibe $f = BSF$ mit einem Blaschke Produkt B, einer singular inner function S und einer outer function F. Da $|f| \geq \delta$ in N gilt liegen keine Nullstellen von B in $N \cap \mathbb{D}$. Weiters kann das Maß von S in $N \cap \Pi$ keinen Träger haben. Also sind sowohl B als auch S in $N \cap \overline{\mathbb{D}}$ analytisch. Betrachte nun

$$F(\lambda) = \ell^{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda}} \log|f(e^{i\theta}| d\theta .$$

Da $|f| \geq \delta$ in N, ist $\log|f(e^{i\theta}|$ in $N \cap \Pi$ nach unten beschränkt, also ist die Funktion

$$h(\lambda) = \ell^{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{N\cap\Pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda} [-\log|f(e^{i\theta})|] d\theta}$$

in H^∞. Es gilt weiters

$$f(\lambda)h(\lambda) = B(\lambda)S(\lambda)\ell^{\frac{1}{frm-e\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+\lambda}{e^{i\theta}-\lambda}} k(\theta) d\theta ,$$

mit einer Funktion $k(\theta) \in L^1$ und $k(\theta) = 0$ längs $N \cap \Pi$. Es folgt, daß fh eine analytische Fortsetzung über $N \cap \Pi$ erlaubt und daß $|fh| = 1$ längs $N \cap \Pi$ ist. Nach dem vorigen .) ist $\widehat{(fh)}$ konstant auf $\mathfrak{M}_\alpha$ und $|\widehat{(fh)}(\mathfrak{M}_\alpha)| = 1$.

Sei nun $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$, dann gilt also

$$|\phi(f)|\,|\phi(h)| = 1 ,$$

also ist $\phi(f) \neq 0$, ein WS! zur Annahme daß $0 \in \hat{f}(\mathfrak{M}_\alpha)$.

·) Sei $\hat{f}$ konstant auf $\mathfrak{M}_\alpha$, $\hat{f}(\mathfrak{M}_\alpha = \tau$. Nach dem vorigen Punkt gilt $f(\lambda_n) \to \tau$ für jede Folge $\lambda_n \to \alpha$.

❑

5.3 Das Corona-Theorem

Wie wir in Satz 5.2.3 gesehen haben ist $\mathbb{D}$ mittels der Punktauswertungen $\phi\lambda$ homöomorph in $\mathfrak{M}(H^\infty)$ eingebettet, $\mathbb{D} \cong \triangle \subseteq \mathfrak{M}(H^\infty)$.

THV.9

5.3.1 Satz. *(Corona-Theorem, L.Carleson 1960) Es gilt $\overline{\triangle} = \mathfrak{M}(H^\infty)$.*

Zunächst wollen wir die Aussage $\overline{\triangle} = \mathfrak{M}(H^\infty)$ in eine etwas konkretere Aussage umformulieren.

LEV.10

5.3.2 Lemma. *Es gilt $\overline{\triangle} = \mathfrak{M}(H^\infty)$ genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:*

Seien $n \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ und $\delta > 0$, so daß

$$|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| \geq \delta > 0, \lambda \in \mathbb{D}\,.$$

Dann existieren Funktionen $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ mit

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1\,.$$

REu

5.3.3 Bemerkung. Das Problem bei Lemma 5.3.2 ist die Forderung, daß $g_1, \dots, g_n$ beschränkt sind. Verlangt man nur "holomorph" in $\mathbb{D}$, so wird die Aussage trivial, da klarerweise die f_i keine gemeinsamen Nullstellen haben (vgl. Idealtheorie in $\theta(G)_n$ [Remmert] ist sogar $f_i \in A$,, so folgt die Aussage aus der Idealtheorie von A.

Beweis. Angenommen es ist $\phi_\circ \in \mathfrak{M}(H^\infty) \setminus \overline{\triangle}$, $\phi_\circ \neq 0$, dann gibt es - nach Dedinition der schwach $-*$ Topologie - Funktionen $f_1, \dots, F_n \in H^\infty$, $\delta > 0$, so daß $\phi_\circ(f_j) = 0$, abder die offene Menge

$$\{\phi \in \mathfrak{M}(H^\infty) \Big| \, |\phi(f_j)| > \delta\} \cap \triangle = \phi\,.$$

Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{D}$

$$|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| = |\phi_\lambda(f_1)| + \ldots + |\phi_\lambda/f_n)| \geq n\delta \geq \delta > \emptyset\,.$$

Es gibt jedoch keine $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ mit $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$, denn $f_1, \dots, f_n \in \ker \phi_\circ$ und $\ker \phi_\circ$ ist ein echtes Ideal.

Angenommen $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$, es gelte $|f_1| + \ldots + |f_n| \geq \delta > 0$ und es existieren keine $g_1, \dots, g_n \in H^\infty : f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$. Betrachte das von $f_1, \dots, f_n$ erzeugte Ideal J von H^∞. Dann ist $J \neq H^\infty$, also liegt J in einem maximalen Ideal: $J \subseteq \ker \phi_\circ$. Es gilt

$$\{\phi \in \mathfrak{M}(H^\infty) \Big| \, |\phi(f_j)| < \frac{\delta}{n}\} \cap \triangle = \emptyset\,,$$

diese Menge ist aber offen und nicht leer, denn sie enthält $\phi_\circ$. Es folgt $\overline{\triangle} \neq \mathfrak{M}(H^\infty)$.

❑

Wir werden die folgende genauere Version der Aussage aus Lemma 5.3.2 beweisen:

THV.11

5.3.4 Satz. *Es gibt (nur von n und δ abhängige) Konstanten $C(n, \delta)$, so daß gilt:*

Sind $f_1, \dots, f_n$ holomorph in $\mathbb{D}$ mit *(i)* $||f_i||_\infty \geq 1, i = 1, \ldots, n,$

(ii) $|f_1|z||^2 + \ldots + |f_n|z||^2 \leq \delta > 0, z \in \mathbb{D}$, *so gibt es holomorphe Funktionen* $g_1, \ldots, g_n$ *auf* $\mathbb{D}$ *mit*

(iii) $||g_1||_\infty \geq C(n, \delta), i = 1, \ldots, n,$

(iv) $f_1|z|g_1|z| + \ldots + f_n|z|g_n|z| = 1.$

Der restliche Teil dieses Abschnitts dient dem Beweis von Satz 5.3.4

Schritt 1: “Reduktion auf in $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktionen “
Satz 5.3.4 gelte falls die “F_i“ holomorph auf $\overline{\mathbb{D}}$ (d.h. auf einer offenen Menge $\leq \overline{\mathbb{D}}$), wir zeigen daß der Satz auch ohne diese Einschränkung gilt.

Seien $f_i \in H^\infty$ mit $(i), (ii)$ gegeben und sei $s < 1$, dann erfüllen auch $f_{i,s}|z| = f_i(sz)$ die VS $(i), (ii)$ und sind auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph. Also existieren $g_{i,s} \in H^\infty$ mit $(iii), (iv)$ für $f_{i,s}$. Die Familie $\{g_{i,s}|s < 1\}$, i fest, ist glm. beschränkt, also normal. Nach dem Satz von Moutel gibt es eine konvergente Teilfolge $g_{i,s} \to g_i$. Es gilt offensichtlich $(iii), (iv)$ für g_i und f_i.

Wir können also im folgenden stets annehmen, daß f_i sogar auf $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph sind.

Schritt 2: “Lösung durch C^∞-Funktionen“
Setze für $i = 1, \ldots, n$

$$H_i|z| = \frac{\overline{f_i|z|}}{\sum_{j=1}^n |f_j|z||^2}, z \in \overline{\mathbb{D}}\,.$$

Dann ist $h_i \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$, es gilt $||h_i||_\infty \leq \frac{1}{\delta}$ und $f_1 h_1 + \ldots + f_n h_n = 1$.

Wir müssen die h_i so abändern, daß sie zu holomorphen Lösungen werden, ohne dabei die Kontrolle über $||h_i||_\infty$ zu verlieren.

Schritt 3:“Der Koszul-Komplex“
Wir betrachten die folgenden Räume: $C_0^0 = C_1^0 = C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$, $C_0^1 = C_1^1 = C^\infty(\overline{\mathbb{D}}^n = \{(a_1, \ldots, a_n)|a_i \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}\}$,

$$C_0^2 = C_1^2 = \{(a_{ij})_{i,j=1}^n | a_{ij} \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}), a_{ij} = -a_{ji}\}\,.$$

Durch (komponenten weise) Anwendung von $\frac{d}{d\bar{z}}$ erhalten wir Abbildungen

$$\overline{\partial}_\mu : C_0^\mu \to C_1^\mu\,.$$

Mit Hilfe der Funktion f_i definieren wir weitere Abbildungen

$$P_\chi^{10} : C_\chi^1 \to C_\chi^0, P_\chi^{21} : C_\chi^2 \to C_\chi^1, \chi = 0, 1\,,$$

durch

$$P_\chi^{10}\Big[(g_1, \ldots, g_n)\Big] = \sum_{i=1}^n g_i f_i(\chi = 0, 1)$$

$$P_\chi^{21}\Big[(a_{ij})_{ij=1}^n\Big] = \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j\Big)_{i=1,\ldots,n}(\chi = 0, 1)$$

d.h. mit $f=(f_1,\dots,f_n)$ ist $P_\chi^{10}g = g\cdot f^T$, $g\in C_\chi^1$, und $P_\chi^{21}A=(f\cdot A^T)$, $A\in C_\chi^2$. Wir erhalten das Diagramm (sog.Koszul-Komplex)

$$\begin{tikzcd}
C_0^2 \arrow[r, "P_0^{21}"] \arrow[d, "\overline{\delta_2}"'] & C_0^1 \arrow[r, "P_0^{10}"] \arrow[d, "\overline{\delta_1}"'] & C_0^0 \arrow[d, "\overline{\delta_0}"] \\
C_1^2 \arrow[r, "P_1^{21}"] & C_1^1 \arrow[r, "P_1^{10}"] & C_1^0
\end{tikzcd}$$

Einige Eigenschaften des Koszul-Komplexes gibt das folgende:

LEV.12

5.3.5 Lemma. *Der Koszul-Komplex ist kommutativ, die waagrechten Sequenzen sind exakt und die senkrechten Homomorphismen sind surjektiv.*

Beweis.
·) kommutativ: Es gilt:

$$\overline{\delta_0}P_0^{10}g=\overline{\delta_0}(g\cdot f^T)=(\overline{\delta_1}g)\cdot f^T +$$
$$+g\cdot \underbrace{(\overline{\delta_1}f)^T}_{=0,\ \text{da } f \text{ analytisch}} = (\overline{\delta_1}g)\cdot f^T = P_1^{10}\overline{\delta_1}g\,.$$

und analog:

$$\overline{\delta_1}P_0^{21}A=\overline{\delta_1}(f\cdot A^T)=\underbrace{(\overline{\delta_1}f)}_{=0}\cdot A^T + f\cdot(\overline{\delta_2}A^T)=P_1^{21}\overline{\delta_2}\,.$$

·) Es gilt
$$P_\mu^{10}P_\mu^{21}A=f\cdot A^T\cdot f^T=0$$
da A schiefsymmetrisch ist, also ist $RgP_\mu^{21}\subseteq\ker P_\mu^{10}$.

Sei umgekehrt $g\in\ker P_\mu^{10}$. Definiere A durch

$$a_{ij}=\frac{1}{\sum_{k=1}^n|f_k|^2}\left[g_i\overline{f_i}\right],$$

offensichtlich ist $A\in C_\mu^2$. Es gilt

$$P_\mu^{21}A=\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j\Big)_{i=1}^n=g\,,$$

denn
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j=\frac{1}{\sum_{k=1}^n|f_k|^2}\sum_j\left[g_i|f_j|^2-g_j\overline{f_i}f_j\right]=$$
$$=g_i-\frac{\overline{f_i}}{\sum_k|f_k|^2}\underbrace{\sum_j g_jf_j}_{=P_\mu^{10}g=0}$$

D.h. $\ker P_\mu^{10}=rgP_\mu^{21}$, d.h. die Sequenz ist exakt.

$\cdot$) Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt das man die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v$$

für $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ durch ein $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ lösen kann. Da $\overline{\partial_\mu}$ stets komponentenweise $\frac{d}{dz}$ ist, folgt, daß $\overline{\partial_\mu}$ surjektiv ist.

❑

Schritt 4: "Anwenden auf $h = (h_1, \ldots, h_n) \in C_0^1$"
Es gilt $P_0^{10} h = 1$, also folgt

$$P_0^{10} \overline{\partial_0} P_0^{10} h = 0 \,.$$

Daher existiert $B \in C_1^2$ mit $P_1^{21} B = \overline{\partial_1} h$ und $A \in C_0^2$ mit $\overline{\partial_2} A = B$.

Betrachte das Element $g = h - P_0^{21} A \in C_0^1$. Dann gilt

$$P_0^{10} g = P_0^{10} h = 1 \,,$$

$$\overline{\partial_1} g = \overline{\partial_1} h - \overline{\partial_1} P_0^{21} A = \overline{\partial_1} h - P_1^{21} h - P_1^{21} \overline{\partial_2} A = 0 \,,$$

d.h. g ist analytisch in $\overline{\mathbb{D}}$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ und ist eine Lösung von $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$.

Wir geben g explizit an:

$$g_i = h_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$$

wobei a_{ij} eine Lösung von dem folgenden System sind:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2} \Big(\frac{\partial h_i}{\partial \bar{z}} \overline{f_j} - \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} \overline{f_i} \Big) \,.$$

Gelingt es die a_{ij} so zu wählen, daß

$$||a_{ij}||_\infty \leq \tilde{C}(n, \delta)$$

mit gewissen Konstanten $\tilde{C}(n, \delta)$ gilt, so folgt der Satz, denn es gilt dann

$$||g_i||_\infty \leq ||h_i||_\infty + \tilde{C}(n, \delta) \leq \frac{1}{\delta} + \tilde{C}(n, \delta) \,.$$

Die Freiheit in der Wahl der a_{ij} besteht in einer Funktion $P_{ij} \in H^\infty$, denn mit a_{ij} ist auch a_{ij} ist auch $a_{ij} + P_{ij}$ eine Lösung.

Schritt 5: "Dualisieren"
Wir betrachten einen festen Index $\{ij\}$. Sei die rechte Seite der Gleichung für a_{ij} gleich u, a_{ij} gleich v, dann müssen wir bestimmen:

$$\inf\{||v + p||_\infty | p \in H^\infty\} \,,$$

d.h. die Norm von v im Raum L^∞ / H_∞. Nach Satz 3.1.8 ist $L^\infty / H^\infty \cong (H_0^1)*$ und zwar vermöge

$$h \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bullet h(\theta) d\theta, \text{ (Funktional auf } H_0^1) \,.$$

Es folgt, da wir wieder von $f|z|$ zu $f(sz)$ üb ergehen können:

$$\inf\{||v+p||_\infty | p \in H^\infty\} =$$

$$= \sup\Big\{ | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) d\theta \Big| F \in H_0^1, ||F||_1 \in 1 \Big\} =$$

$$= \sup\Big\{ \Big| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) F(\theta) d\theta \Big| \Big|_{\substack{F \text{ analytisch auf } \overline{\mathbb{D}} \\ ||F||_1 \leq 1}}, F(0) = 0, \Big\}$$

Schritt 6: "Umformen des Integrals"
Nach der Green'schen Formel (wie in [FL,fischer.lieb, $III.5$]) gilt

$$0 = v(0)F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} vF d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \triangle(vF) \log \frac{1}{|z|} dxdy\,,$$

Es ist

$$\triangle(VF) = 4(vF)_{z\bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial z}(uF) =$$

$$= 4(u_z F + uF')\,.$$

Setze

$$I_1 = \int_{\mathbb{D}} u_z F \log \frac{1}{|z|} dxdy\,,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{D}} uF' \log \frac{1}{|z|} dxdy\,.$$

Zur Abkürzung sei $\varphi = \frac{1}{\sum_{k=1}^n |f_k|^2}$. Setzt man die Definitionen von $u, h_i, \ldots$ ein, so ergibt sich

$$u = \varphi\Big[(\varphi\overline{f_i})_{\bar{z}}\overline{f_j} - (\varphi\overline{f_j})_{\bar{z}}\overline{f_i}\Big] =$$

$$= \varphi^2\Big(\overline{f_i'}\,\overline{f_j} - \overline{f_j'}\,\overline{f_i}\Big)\,,$$

$$u_z = -2\varphi^3\Big(\sum_{k=1}^n \overline{f_k} f_k'\Big)\Big(\overline{f_i'}\,\overline{f_j} - \overline{f_j'}\,\overline{f_i}\Big)\,.$$

Setzt man diese Ausdrücke in I_1, I_2 ein, so erhält man

$$|I_1| \leq \frac{2}{\delta^3}\Big[\sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{D}} |F f_k' f_i'| \log \frac{1}{|z|} dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{D}} |F f_k' f_j'| \log \frac{1}{|z|} dxdy\Big]\,,$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{\delta^2}\Big[\int_{\mathbb{D}} |F' f_i'| \log \frac{1}{|z|} dxdy + \int_{\mathbb{D}} |F' f_j'| \log \frac{1}{|z|} dxdy\Big]\,.$$

Wir haben hier keine Information über die Größe der Ableitungen, jedoch ist

$$||F||_1 \le 1, ||f_i||_\infty \le 1\,.$$

Schritt 7: "Integralabschätzungen"
Um die in $|I_1|$ und $|I_2|$ auftretenden Integrale abzuschätzen beweisen wir das folgende Lemma.

LEV.13

5.3.6 Lemma. *Es gilt: Seien $g, g_1, g_2, f_1, f_2, f, F$ holomorph auf $\overline{bbD}$, dann ist*

(i) $\int\limits_{\mathbb{D}} |g'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy \le \frac{\pi}{2} ||g||_2^2$.

(ii) $\int\limits_{\mathbb{D}} |gf'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy \le 2\pi ||g||_2^2 ||f||_\infty^2$.

(iii) $\int\limits_{\mathbb{D}} |g_1 g_2 f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|} dxdy \le 2\pi ||g_1||_2 ||g_2||_2 ||f_1||_\infty ||f_2||_\infty$.

(iv) $\int\limits_{\mathbb{D}} |F f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|} dxdy \le 2\pi ||F||_1 ||f_1||_\infty ||f_2|| f_\infty$.

(v) $\int\limits_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \log \frac{1}{|z|} dxdy \le \pi ||g_1||_2 ||g_2||_2 ||f||_\infty$.

(vi) $\int\limits_{\mathbb{D}} |F' f'| \log \frac{1}{|z|} dxdy \le 2\pi ||F_1|| |f||_\infty$.

Beweis.
`ad`(i): Die Greensche Formel angewendet auf $g\overline{g}$ zeigt

$$0 \le |g(0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \triangle(g\overline{g}) \log \frac{1}{|z|} dxdy\,.$$

Nun gibt $\triangle(g\overline{g}) = 4(g\overline{g})_{z\overline{z}} = 4|g'|^2$.

`ad`(ii): Es gibt $gf' = (gf)' - g'f$, also ist

$$|gf'^2 \le (|(gf)'| + |g'f|)^2 \le 2(|(gf)'|^2 + |g'f|^2)\,,$$

$$|gf'|^2 \le 2(|(gf)'|^2 + ||f||_\infty^2 |g'|^2)\,.$$

Wir integrieren diese Beziehung und wenden (i) an.

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |gf'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy \le 2 \int\limits_{\mathbb{D}} |(gf)'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy +$$

$$+2||f||_\infty^2 \int\limits_{\mathbb{D}} |g'|^2 \log \frac{1}{|z|} dxdy \le$$

$$\le \pi(||gf||_2^2 + ||f||_\infty^2 ||g||_2^2) \le 2\pi ||g||_2^2 ||f||_\infty^2\,.$$

`ad`(iii): Betrachte das positive Maß $\log\frac{1}{|z|}dxdy$ auf $\mathbb{D}$ und wende die Schwarzsche Ungleichung im $L^2(\log\frac{1}{|z|}dxdy)$ und (i) an.

$$\int_{\mathbb{D}} |g_1g_2f_1'f_2'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq ,$$

$$\leq \Big[\int_{\mathbb{D}} |g_1f_1'|^2\log\frac{1}{|z|}dxdy\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_{\mathbb{D}} |g_2f_2'|^2\log\frac{1}{|z|}dxdy\Big]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\sqrt{2\pi}||g_1||_2||f_1||_\infty\cdot\sqrt{2\pi}||g_2||_2||f_2||_\infty\,.$$

`ad`(iv): Schreibe $F=g_1g_2$ mit g_i holomorph in $\mathbb{D}$ und $||g_1||_2^2=||F||_1$ (Blaschke Produkt) herannehmen und Wurzelziehen. Mit (iii) folgt:

$$\int_{\mathbb{D}} |Ff_1'f_2'|\log\frac{1}{|z|}dxdy = \int_{\mathbb{D}} |g_1g_2f_1'f_2'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq$$

$$\leq 2\pi||g_1||_2||g_2||_2||f_1||_\infty||f_2||_\infty = 2\pi||F||_1||f_1||_\infty||f_2||\infty\,.$$

`ad`(v): Mit der Schwarzschen Ungleichung in $L^2(\log\frac{1}{|z|}dxdy)$ und (i), (ii) folgt:

$$\int_{\mathbb{D}} |g_1f'g_2'|\frac{1}{|z|}dxdy \leq \Big[\int_{\mathbb{D}} |g_1f'|^2\log\frac{1}{|z|}dxdy\Big]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\Big[\int_{\mathbb{D}} |g_2'|^2\log\frac{1}{|z|}dxdy\Big]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\pi}||g_1||_2||f||_\infty\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}||g_2||_2 = \pi||g_1||_2||g_2||_2||f||_\infty\,.$$

`ad`(vi): Wir faktorisieren $F=g_1g_2$ mit $||g_1||_2^2=||g_2||_2^2=||F||_1$ und verwenden (v).

$$\int_{\mathbb{D}} |'f'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq \int_{\mathbb{D}} |g_1'g_2f'|\log\frac{1}{|z|}dxdy +$$

$$+\int_{\mathbb{D}} |g_1g_2'f'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq 2\pi||g_1||_2||g_2||_2||f||_\infty = 2\pi||F||_1||f||_\infty\,.$$

❑

Die Abschätzungen (iv) und (vi) von LerefV.13 zeigen, daß für die Integrale in $|I_1|$ bzw. $|I_2|$ gilt (wegen $||F||_1\leq 1$):

$$\int_{\mathbb{D}} |Ff_1'f_2'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq 2\pi, |I_1| \leq \frac{8n\pi}{\delta^3}$$

$$\int_{\mathbb{D}} |F'f'|\log\frac{1}{|z|}dxdy \leq 2\pi, |I_2| \leq \frac{4\pi}{\delta^2}$$

Die Integrale I_1, I_2 sind also durch eine nur von n und δ anhängige Konstante abgeschätzt, also sind wir fertig. D.h.Satz 5.3.4 ist bewiesen und damit auch das Corona-Theorem Satz 5.3.1.

Kapitel 6

H^∞ als logmodulare Algebra

6.1 Arens Singer Maße

DEVI.1

6.1.1 Definition. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und betrachte den Raum $C(X)$ der stetigen Funktion auf X mit derNorm $||\cdot||_\infty$. Eine komplexe lineare Teilalgebra A von $C(X)$ heißt logmodular Algebra, falls

(*i*) A ist abgeschlossen bzgl. der Norm $||\cdot||_\infty$.

(*ii*) $1 \in A$

(*iii*) A trennt die Punkte von X, d.h. $\forall x, y \in X$, $x \neq y \exists f \in A$: $f(x) \neq f(y)$.

(*iv*) Die Menge $\log|A^{-1}|$ ist dicht in $C_\mathbb{R}(X)$. Hier bezeichnet $C_\mathbb{R}(X)$ die reellwertigen stetigen Funktionen auf X und $\log|A^{-1}| = \{f = \log|g| \Big| g \in A, g^{-1} \in A\}$.

Sei $\phi \in \mathfrak{M}(A)$, d.h. ϕ ist ein Algebrahomomorphismus von A auf $\mathbb{C}$. Wir nennen ein positives Maß m auf X ein darstellendes Maß (bzw. Arens-Singer Maß) für ϕ wenn

$$\phi(f) = \int_X f dm, f \in A\,,$$

bzw.

$$\log|\phi|(f)| = \int_X \log|f| dm, f \in A^{-1}\,,$$

gilt. Beachte, daß für ein solches Maß wegen $\phi(1) = 1$ (bzw. $\phi(e) = e$) stets

$$\int_X dm = 1$$

gilt.

THVI.2

6.1.2 Satz. *Sei A eine logmodulare Algebra auf dem kompakten Hausdorffraum X, und sei $\phi \in \mathfrak{M}(A)$. Dann existiert ein eindeutiges Arens-Singer Maß für ϕ. Dieses ist auch ein eindeutiges darstellenden Maß für ϕ.*

Beweis.
·) Es gilt für $f \in A^{-1}$ (da $||\phi|| = 1$):

$$\log |hi|(f)| \leq \log ||f||_\infty = \log {}^{max}_{x} |f| =$$

$${}^{max}_{x} \log |f| \leq \log |f|||_\infty ,$$

und (die obuige Ungleichung angewandt auf f^{-1}):

$$-\log |\phi(f)| = \log |\phi(f^{-1})| \leq \log |f^{-1}| \, ||_\infty =$$

$$= || \log |f| \, ||_\infty ,$$

d.h. insgesamt folgt

$$|\log |\phi(f)|\Big| \leq || \log |f||_\infty$$

·) Wir definieren eine Funktion L auf $\log |A^{-1}|$. Sei $u \in \log |A^{-1}|$, $u = \log |f|$, dann setze

$$L(u) = \log |\phi(f)| \, .$$

Zunächst ist L wohldefiniert, denn gilt $u = \log |f_1| = \log |f_2|$, d.h. $f_1, f_2 \in A^{-1}$, $|f_1| = |f_2|$, so folgt

$$\log |\phi(f_1)| - \log |\phi(f_2)| = \log |\phi(f_1 f_2^{-1})| \, ,$$

wobei $|f_1 f_2^{-1}| = 1$ ist.

Da obige Ergebnis zeigt, daß L wohldefiniert ist, und durch 1 beschränkt. Weiters ist L additiv und $L(-u) = -L(u)$, also ist L stetig.

·) Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein stetiges lineares Funktional $\tilde{L}$ auf $C_{\mathbb{R}}(X)$, welches L fortsetzt und durch 1 beschränkt ist. Nach dem Riesz'schen Dartellungssatz gibt es ein reelles Maß m auf X mit

$$\tilde{L}(f) = \int_X f dm, f \in C_{\mathbb{R}}(X) \, ,$$

mit Totalvariation ≤ 1. Wegen $1 \in \log |A^{-1}|$ und $L(1) = 1$, folgt

$$\int_X dm = 1 \, ,$$

also muß m ein positives Maß sein. Nach der Definition von L ist m ein Arens-Singer Maß.

·) Die Eindeutigkeit des Arens-Singer Maß es ist klar, da $\overline{\log |A^{-1}|} = C_{\mathbb{R}}(X)$ ist.

$\cdot$) Wir zeigen, daß m auch ein darstellendes Maß ist: Sei $f \in A$, dann ist $e^f \in A^{-1}$. Also gilt

$$\int_X Ref dm = \int_X \log|e^f|dm = \log|\phi(e^f)| =_{\nearrow,\phi\text{stetiger,Algebrahomomorphismus}} \log|e^{\phi(f)}| =$$

$$= Re\phi(f)\,.$$

Wendet man die gleiche Überlegung auf if an, so folgt obige Beziehung auch für $\mathrm{Im}\, f$. Insgesamt ist

$$\int_X f dm = \phi(f)\,.$$

$\cdot$) Sei g ein weiteres darstellendes Maß. Es gilt für $f \in A^{-1}, u = \log|f|$,

$$\phi(f) = \int_X f dm, \phi(f^{-1} = \int_X f^{-1} dg\,.$$

Also folgt mit $\phi(f)\phi(f^{-1}) = \phi(1) = 1$ und

$$|\phi(f)| \leq \int_X |f| dm = \int_X e^u dm\,,$$

$$|\phi(f^{-1}| \leq \int_X \frac{1}{|f|} dg = \int_X e^{-u} dg\,,$$

die Beziehung

$$\Big[\int_X e^u dm\Big] \cdot \Big[\int_X e^{-u} dg\Big] \geq 1\,.$$

Da $\overline{\log|A^{-1}|} = C_{\mathbb{R}}(X)$ ist, folgt obige Beziehung für jedes $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$, also insbesondere für $tu, t \in \mathbb{R}$. Setze

$$g(t) = \int_X e^{tu} dm \cdot \int_X e^{-tu} dg, t \in \mathbb{R}\,,$$

dann gilt $g(0) = 1$, $g(t) \geq 1 \forall t$, und da $g(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ folgt $g'(0) = 0$. Nun ist

$$0 = g'(0) = \Big[\int_X u e^{tu} dm \cdot \int_X e^{-tu} dg\Big]_{t=0} +$$

$$+\Big[\int_X e^{tu} dm \cdot \int_X (-u) e^{tu} dg\Big]_{t=0} =$$

$$= \int_X u dm - \int_X u dg\,.$$

Da $u \in C_{\mathbb{R}}(X)$ beliebig war folgt $m = g$.

❑

THVI.3

6.1.3 Satz. *Sei A eine logmodulare Algebra, $\phi \in \mathfrak{M}(A)$, und sei m daß Arens-Singer Maß für ϕ. Dann gilt*

$$\log|\phi(f)| \le \int_X \log|f|dm, f \in A\,.$$

Beweis. Ist $f \in A^{-1}$, so gilt sogar Gleichheit nach Definition von m. Sei $f \in A$ beliebig und sei $\epsilon > 0$, dann ist $\log(|f|+\epsilon) \in C_{bbR}(X)$, also existiert $u \in \log|A^{-1}|$ mit

$$u - \epsilon \le \log(|f| + \epsilon) \le u + \epsilon\,.$$

Schreibe $u = \log|g|$ mit $g \in A{-}1$ und setze $h = fg^{-1}$. Dann ist $h \in A$ und es gilt

$$|f| < |f| + \epsilon \le e^u e^\epsilon = |g|e^\epsilon\,,$$

d.h. $|h| < e^\epsilon$. Da $||\phi|| = 1$ folg t $|\phi(h)| \le e^\epsilon$, d.h.

$$\log|\phi(f)| - \log|\phi(g)| = \log|\phi(h)| \le \epsilon\,.$$

Es folgt

$$\log|\phi(f)| \le \epsilon + \log|\phi(g)| = \epsilon + \int_X \log|g|dm \le$$

$$\le \epsilon + \int_X \Big[\epsilon + \log(|f| + \epsilon)\Big]dm = 2\epsilon + \int_X \log(|f| + \epsilon)dm\,.$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt mit dem Lemma von Faton angewandt auf $\{|f| < \frac{1}{2}\}$ die Behauptung.

❏

6.2 Der Raum $\mathfrak{M}(L^\infty$

Zuerst bemerken wir, daß die Gelfaud-Darstellung von L^∞ isometrisch ist:

LEVI.4

6.2.1 Lemma. *Für $f \in L^\infty$ gilt stets*

$$\sup_{\mathfrak{M}(L^\infty} |\hat{f}(\phi| = ||f||_\infty\,.$$

Beweis. Nach der Definition der Norm $||\cdot||_\infty$ als ess.sup gibt es eine Zahl λ mit $|\lambda| = ||f||_\infty$, so daß für jedes $\epsilon > 0$ für die Menge $\{|f - \lambda| < \epsilon\}$:

$$\wedge\{|f - \lambda| < \epsilon\} > 0 (\wedge \ldots \text{ LebesqueMaß})$$

gilt. Daher ist $f - \lambda \notin (L^\infty)^{-1}$, denn eine Inverse Hätte Betrag $> \frac{1}{2}$ auf Mengen pos. Maßes $\forall\epsilon$. Also ist $(f - \lambda)L^\infty$ ein echtes Ideal, und daher in einem maximalen enthalten. $(f - \lambda)L^\infty \subseteq \ker\phi$ mit $\phi \in \mathfrak{M}(L^\infty)$. Nun gilt $\phi(f) = \lambda$, also insbesondere

$$||\hat{f}||_\infty \ge |\phi(f)| = |\lambda| = ||f||_\infty\,.$$

❏

Der Raum $\mathfrak{M}(L^\infty$ ist total unzusammenhängend. Er ist sogar extrem unzusammenhängend (d.h. der Abschluß einer offenen Menge ist abgeschlossen)...... werden wir nicht benötigen.

LEVI.5

6.2.2 Lemma. *Die Mengen*

$$\{\phi \in \mathfrak{M}(L^\infty) | \hat{\chi}_E(\phi) = 0\}$$

wobei χ_E die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge $E \subseteq \mathbb{T}$ ist und E jene durchläuft, bilden eine Basis für die Topologie in $\mathfrak{M}(L^\infty)$. Sie sind offen-abgeschlossen, also ist $\mathfrak{M}(L^\infty)$ total unzusammenhängend.

Ist U offen, $\sum = \{S$ meßbar $|\{\hat{\chi}_S = 1\} \subseteq u\}$, und E das kgV von $\sum$ (im Verband der meßbaren Mengen). Dann ist

$$\overline{U} = \{\hat{\chi}_E = 1\},$$

also offen-abgeschlossen. D.h. $\mathfrak{M}(L^\infty)$ ist extrem unzusammenhängend.

Beweis. Nach Definition der schwach-*Topologie sind die Mengen

$$\{|\hat{f}_j| < \epsilon, i = 1, \dots, n\},$$

wobei $f_1, \dots, f_n \in L^\infty$ und $\epsilon > 0$ sind, eine Basis. Die Treppenfunktionen $\sum \lambda_j \chi_{E_J}$ sind dicht in L^∞, also können wir uns bei den f_j auf charakteristische FU beschränken. Nun gilt $\chi_E^2 = \chi_E$, also auch $\hat{\chi}_E^2 = \hat{\chi}_E$, d.h.$\hat{\chi}_E$ nimmt nur die Werte $0, 1$ an. Für $\epsilon < 1$ ist also

$$\{|\hat{\chi}_{E_j}| < \epsilon, j = 1, \dots, n\} = \{\hat{\chi}_{E_j} = 0, \dots, n\} =$$

$$\{\hat{\chi}_E 0\} E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

ad Beweis

·) Es gilt

$$\{hat\chi_{E_1} = 1\} \cup \{\hat{\chi}_{E_2} = 1\} = \{\hat{\chi}_{E_1 \cap E_2} = 1\}.$$

Denn $\phi(\chi_{E_1}) = 1 \wedge \phi(\chi_{E_2}) = 1 \iff \phi(\chi_{E_1})\phi(\chi_{E_2} = 1\phi(\chi_{E_1})\phi(\chi_{E_2)=\phi(\chi_{E_1}\cdot\chi_{E_2})=\phi(\chi_{E_1}\cap E_2)}$.

·) Sei $\phi_0 \in U$, dann gibt es Basismenge $\phi_0 \in \{\hat{\chi}_s = 1\} \geq U$. Nun ist $E \geq S$, also $E \cap S = S$, d.h.

$$\{\hat{\chi}_E = 1\} \cap \{\hat{\chi}_S = 1\} = \{\hat{\chi}_S = 1\},$$

also ist $\phi_0 \in \{\hat{\chi}_S = 1\} \geq \{\hat{\chi}_E = 1\}$.

·) Sei S_0 gegeben, so daß $\{\hat{\chi}_{S_0} = 1\} \cap \{\hat{\chi}_E = 1 \neq \emptyset, \{\hat{\chi}_{S_0 \cap E} = 1\}$, d.h. $S_0 \cap E \neq \emptyset$. Die Menge $E \setminus S_0 \subsetneq E$, also keine obere Schranke von $\sum$, d.h. $\exists S \in \sum : S \not\subseteq E \setminus S_0$. Da $S \subseteq E$, solgt $S \cap S_0 \neq \emptyset$. Da $\hat{}$ isometrisch ist, ist $\{\hat{\chi}_{S \cap S_0} = 1\} \neq \emptyset$ und es gilt $\emptyset \neq \{\hat{\chi}_S = 1\} \cap \{\hat{\chi}_{S_0} = 1\} \subseteq U \cap \{\hat{\chi}_{S_0} = 1\}$.

❑

THVI.6

6.2.3 Satz. *Die Gelfaud-Darstellung bildet L^∞ isometrisch isomorph auf (!) $C(\mathfrak{M}(L^\infty)$ ab. Sie vertauscht mit Konjugation.*

Beweis.
·) Wir müssen zeigen, daß L^∞ ganz $C(\mathfrak{M}(L^\infty))$ ist. Sei also $F \in C(\mathfrak{M}(L^\infty))$. Da die Mengen $\{\hat{\chi}_E = 0\}$ eine Basis für die Topologie in $\mathfrak{M}(L^\infty)$ bilden, können wir F gleichmäßig durch "Treppenfunktionen" $\sum \lambda_j \hat{\chi}_{E_j}$ approximieren:
Denn: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. $\forall \phi \in \mathfrak{M}(L^\infty) \exists S_\phi : |F(\{\chi_{S_\phi} = 1\})_F(\phi)| < \epsilon$, da F stetig. Da $\mathfrak{M}(L^\infty)$ kompakt $\exists$ Überdeckung $\mathfrak{M}(L^\infty) = \{\chi_{S_{\phi_1}} = 1\} u \dots u \chi_{S_{\phi_n}} = 1\}$. Wegen "Durchschnittseigenschaft" können wir diese Zerlegung als disjunkt annehmen. Dann ist

$$|\sum F(\phi_j)\hat{\chi}_{S_{\phi_j}} - F| < \epsilon \text{ glm}.$$

Da $\hat{}$ isometrisch ist, sind die $\sum \lambda_j \chi_{E_j}$ in L^∞ gegen ein f konvergent. Offenbar ist $\hat{f} = F$.

·) Approximiert man ein f mit Treppenfunktionen, so sieht man unmittelbar $\overline{(\hat{f})} = (\hat{\overline{f}})$.

·) Da $\hat{}$ sowieso ein Homomorphismus ist $\Rightarrow$ ist Isomorphismus.

❑

COVI.7

6.2.4 Korollar. *Die Teilmenge $K \subseteq \mathfrak{M}(L^\infty)$ ist offen und abgeschlossen genau dann, wenn $K = \{\hat{\chi}_E = 0\}$ ist.*

Beweis. K ist offen und abgeschlossen genau dann, wenn die charakteristische Funktion χ_K von K stetig ist, also $\iff$ wenn $\exists f \in L^\infty$: $\hat{f} = \chi_K$. Wegen $\chi_K^2 = \chi : K$ ist $f^2 = f$, also $f = \chi_E$ für eine meßbare Menge, d.h. $K = \{\chi_K = 1\} = \{\hat{\chi}_E = 1\}$.

❑

Genau wie wir eine Projektion ϕ von $\mathfrak{M}(H^\infty$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ definiert haben, definieren wir hier

$$\sigma(\phi) = \phi(z), \phi \in \mathfrak{M}(L^\infty).$$

Wegen $z\overline{z} = 1$, folgt $\hat{z} \cdot \hat{\overline{z}} = 1$, d.h. $\sigma : \mathfrak{M}(L^\infty) \to \mathbb{T}$. Es gilt sogar $Rg(\sigma) = \mathbb{T}$, denn angenommen $\alpha \in \mathbb{T} \setminus RG(\sigma)$, d.h. $\alpha \notin RG\hat{z}$. Dann ist $\hat{z} - \alpha \in C(X)^{-1}$ und da $\hat{}$ ein Isomorphismus ist folgt $z - \alpha \in (L^\infty)^{-1}$, ein WS!. Wir betrachten wieder die Fasern ($|\alpha| = 1$

$$\mathfrak{M}(L^\infty)_\alpha = \{\phi | \sigma(\phi) = \alpha\}.$$

THVI.8

6.2.5 Satz. *Sei $f \in L^\infty$, $|\alpha| = 1$, dann ist $\hat{f}(\mathfrak{M}(L^\infty_\alpha)$ die Menge aller ζ mit der folgenden Eigenschaft:*
Für jede Umgebung α und $\epsilon < 0$ und die Menge $\{|f - \zeta| < \epsilon\} \cap N$ positives Maß.

Beweis. Es ist $\zeta \notin \hat{f}(\mathfrak{M}(L^\infty)_\alpha) \iff \not\exists$ lokal von L^∞, welcher $(z-\alpha)$ und $(f-\zeta)$ enthält. D.h. $\iff \exists g, h \in L^\infty : (z-\alpha)g + (f-\zeta)h = 1$. D.h. wenn es eine beschränkte meßbare Funktion gibt, so daß

$$\frac{1-(f_\zeta)h}{z-\alpha}$$

(ess.) beschränkt ist. So ein h existiert offenbar $\iff$ wenn $f-\zeta$ in einer Umgebung von α ess. von 0 weg beschränkt ist.

❑

6.3 Der Silov-Rand von H^∞

Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $A \subseteq C(X)$ eine Algebra die 1 enthält und Punkte trennt. Eine Teilmenge S von X heißt Rand für A, wenn

$$\sup_X |f| = \max_S |f|, f \in A\,.$$

THVI.9

6.3.1 Satz. *Es gibt einen kleinsten abgeschlossenen Rand (dieser heißt "Silov-Rand").*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller abgeschlossenen Ränder, dann ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$, denn $X \in \mathcal{F}$. Sei $\mathcal{F}_0$ eine maximale Kette in $\mathcal{F}$, und setze

$$F_0 = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_0} F\,.$$

Sei $F' = F \cap \{|f| = ||f||_\infty\}$, dann ist $F_0 \cap \{|f| = ||f||_\infty\} = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}_0} F'$. Da F Ränder sind ist $F' \neq \emptyset$, da X kompakt ist, ist $F_0 \cap \{|F| = ||f||_\infty\} \neq \emptyset$, d.h. $F_0 \in \mathcal{F}$ und da F_0 untee Schranke einer maximalen Kette ist, ist F_0 minimal in $\mathcal{F}$.

Angenommen es gibt ein anderes minimales Element F_1 Dann existiert $P_1 \in F_1 \setminus F_0$ und eine Umgebung N von P_1 mit $N \cap F_0 = \emptyset$. N kann als

$$N = 2P|(f_i(P) - f_i(P_1)| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

vorausgesetzt werden (vgl.[L,loomis, 5G]). Hier sei oBdA $||f_i - f_i(e_1)|| \leq 1$. Da F_1 minimal ist $\exists f_0 \in A : |f_0|$ ist nicht maximal auf $F_1 \setminus N$. oBdA können wir $||f_0|| = 1$, $|f_0| \leq 1$, voraussetzen. Nimmt man eine hinreichende große Potenz als f_0, so folgt $|f_0| < \epsilon$ auf $F_1 \setminus N$.

Es gilt also $|f_i f_0 - f_i(P_1) f_0| < \epsilon$ auf ganz F_1, da F_1 ein Rand ist also überall.

Ist $P_0 \in F_0$, so daß $|f_0(P_0)| = 1$, so folgt $|f_i(P_0) - f_i(P_1)| < \epsilon$, d.h. $P_0 \in N$ ein WS!.

❑

LEVI.10

6.3.2 Lemma. *Sei A gegeben und sei $S \subseteq X$ der Silov-Rand für A. Dann ist die Einschränkung*

$$\zeta : f \mapsto f|_S$$

eine isometrische Einbettung von A in $C(S)$. Ist A logmodular, so ist auch $i(A)$ logmodular, d.h. jedes $\phi \in \mathfrak{M}(A)$ besitzt ein darstellendes Maß mit Träger in S.

Beweis.
·) Die Einschränkung i ist nach Definition von S eine Isometrie, also insbesondere injektiv und homöomorph am Bild.

·) Sei $f \in C_R(S)$. Da X kompakt (also normal) ist und S abgeschlossen, gibt es nach dem Satz von Tietze eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C_R(X)$. Da A logmodular ist, gibt es $u \in \log|A^{-1}|$ mit $||u-\tilde{f}||_\infty < \epsilon$. Insbesondere ist auch $||u|_S - f||_\infty < \epsilon$. Da i ein Algebrahomomorphismus it, ist $u|_S \in \log|(A)^{-1}|$.

❑

Sei τ die harmonische Abbildung von $\mathfrak{M}(L^\infty)$ in $\mathfrak{M}(H^\infty)$. D.h. da $H^\infty \subseteq L^\infty$ erhält man zu jedem $\phi \in \mathfrak{M}(L^\infty)$ die Einschränkung $\tau\phi$ auf H^∞.

THVI.11

6.3.3 Satz. *Die Abbildung τ ist ein Homöomorphismus von $\mathfrak{M}(L^\infty)$ in $\mathfrak{M}(H^\infty)$. Das Bild $\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))$ ist der Silov-Rand für $\hat{H}^\infty$.*

Beweis. Wir haben die Räume und Abbildungen

$$\begin{tikzcd} L^\infty \arrow[r, leftrightarrow, "\widehat{\ }"] & C(\mathfrak{M}(L^\infty)) \\ H^\infty \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\widehat{\ }"] & C(\mathfrak{M}(L^\infty)) \end{tikzcd}$$

und es gilt für $\phi \in \mathfrak{M}(L^\infty), f \in H^\infty$:

$$\phi(if) = (\tau\phi)(f)\,.$$

Es gilt für $\hat{f} \in \hat{H}^\infty (f \in H^\infty)$ stets

$$||\hat{f}||_\infty = ||f||_{H^\infty} = ||if||_{L^\infty} = ||\widehat{(if)}||_\infty = \sup_{\phi\in\mathfrak{M}(L^\infty)} |\widehat{(if)}(\phi)| =$$

$$= \sup_{\phi\in\mathfrak{M}(L^\infty)} |\phi(if)| = \sup_{\phi\in\mathfrak{M}(L^\infty)} |(\tau\phi)(f)| = \sup_{\psi\in\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))} |\psi(f)| = \sup_{\psi\in\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))} |\hat{f}(\psi)|\,.$$

Da τ stetig ist, ist $\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))$ kompakt, also nimmt jedes $\hat{f} \in \widehat{H^\infty}$ sein Betragsmaximum auf $\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))$ an, d.h. $\tau(\mathfrak{M}(L^\infty))$ ist ein abgeschlossener Rand für $\widehat{H^\infty}$.

Angenommen $S_0 \subsetneq \tau(\mathfrak{M}(L^\infty))$ ist ein abgeschlossener Rand für $\widehat{H^\infty}$. Dann ist $\tau^{-1}(S_0) \subsetneq \mathfrak{M}(L^\infty$ und abgeschlossen, es gibt wegen Lemma 6.2.2 eine meßbare Menge E mit

$$\tau^{-1}(S_0) \cap \{\hat{\chi}_E = 1\} = \emptyset\,.$$

Sei nun u das Poisson-Integral von χ_E, v eine konjugiert harmonische und $f = e^{u+iv}$. Wegen $|f| = e^u$ und $\sup ||u||_\infty < \infty$ ist $f \in H^\infty$. Die Randwerte von $|f|$ sind f.ü. e^{χ_E}. Es folgt $(if)\overline{(if)} = e^{2\chi_E}$ also $(\widehat{if})\widehat{\overline{(if)}} = e^{2\hat{\chi}_E}$, d.h.

$$|\widehat{if}| = \begin{cases} e & , \quad \phi \in \quad \{\hat{\chi}_E = 1\} \\ 1 & , \quad \phi \notin \quad \{\hat{\chi}_E = 1\} \end{cases}$$

d.h. $\phi(if) < ||\widehat{if}||_\infty \forall \phi \in \tau^{-1}(S_0)$, also

$$\sup_{\psi\in S_0} |\hat{f}(\psi)| < (\widehat{(if)}(\phi_0) = (\tau\phi_0)(f)$$

für jedes $\phi_0 \in \{\hat{\chi}_E = 1\}$. D.h. S_0 ist kein Rand für $\widehat{H^\infty}$.

❑

Literaturverzeichnis

[D,duren] W.Duren: *Theory of H^p-spaces,* Academic Press 1970.

[FL,fischer.lieb] W.Fischer, I.Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus Funktionentheorie,* Vieweg Verlag 1988.

[G,garnett] J.Garnett: *Bounded analytic functions,* Academic Press 1981.

[He,helson] H.Helson: *Lectures on invariant subspaces,* Academic Press 1964.

[Ho,hoffman] K.Hoffman: *Banach spaces of analytic functions,* Prentice-Hall 2-te Auflage 1965.

[L,loomis] L.Loomis: *An introduction to abstract harmonic analysis,* Van Nostrand 1953.

[P,privalov] I.Privalov: *Randeigenschaften analytischer Funktionen,* Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

[Re,remmert] R.Remmert: *Funktionentheorie II,* Springer Verlag.

[Ru1,rudin1] W.Rudin: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill 3-te Auflage 1987.

[Ru2,rudin2] W.Rudin: *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill 3-te Auflage 1976.

[Y,yoshida] K.Yoshida: *Functional Analysis,* Springer Verlag 1974.

[Z,zygmund] A.Zygmund: *Trigonometric series,* Cambridge University Press 1959.