1

# I. s-Zahlen kompakter Operatoren:

## 1. Minimax-Eigenschaften:

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A$ ein selbstadjungierter kompakter Operator, dann hat $A$ die Darstellung $(\nu(A) \le \infty)$

$$A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A)\,(\cdot\,,\phi_j)\,\phi_j$$

wobei $\phi_j$ ein in von $A$ vollständiges orthonormales System von Eigenvektoren $A\phi_j = \lambda_j(A)\phi_j$ ist. Die Reihe konvergiert in der Operatornorm.

Ein beschränkter Operator $A$ heißt nichtnegativ $, A \geq 0$, falls für $f \in \mathcal{H}$ stets $(Af, f) \geq 0$ gilt. Jeder nichtnegative Operator ist selbstadjungiert, ein selbstadjungierter kompakter Operator ist genau dann nichtnegativ, wenn alle seine Eigenwerte nichtnegativ sind.

**Satz I.1:** Sei $A$ $(\neq 0)$ ein nichtnegativer kompakter Operator und sei $\phi_j$ ein orthonormales System von Eigenwerten, daß in von $A$ vollständig ist. Die $\phi_j$ seien so angeordnet, daß $\lambda_j(A) \geq \lambda_{j+1}(A)$ ist. Dann gilt:

(i) $\lambda_1(A) = \max\limits_{\phi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \dfrac{(A\phi, \phi)}{(\phi,\phi)}$, und das Maximum wird genau für die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1(A)$ angenommen.

(ii) $\lambda_{j+1}(A) = \min\limits_{\mathcal{L}\in \mathfrak{M}_j} \max\limits_{\phi \in \mathcal{L}^\perp\setminus\{0\}} \dfrac{(A\phi,\phi)}{(\phi,\phi)}$, $j = 1, 2, \ldots$, wobei $\mathfrak{M}_j$ die Menge aller $j$-dimensionalen Teilräume von $\mathcal{H}$ bezeichnet. Das Minimum wird angenommen, wenn $\mathcal{L} = \mathcal{L}_j := \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_j\}$ ist, d.h. also $\lambda_{j+1}(A) = \max\limits_{\phi\in\mathcal{L}_j^\perp\setminus\{0\}} \dfrac{(A\phi,\phi)}{(\phi,\phi)}$.

Bemerkung: Das Minimum in (ii) kann, auch im Fall $\lambda_{j+1} < \lambda_j$, für Teilräume $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_j$ angenommen werden.

Beweis (von Satz I.1): Die Formel (i) ist wohlbekannt. Die Eindeutigkeitsaussage folgt unmittelbar, wenn man $\phi$ schreibt als

$$\phi = \phi_{ker} + \sum_{j=1}^{\nu(A)} a_j \phi_j , \quad \phi_{ker} \in \ker A, \; a_j \in \mathbb{C}.$$

Sei nun $M$ ein $j$-dimensionaler Teilraum von $\mathcal{H}$. Dann existiert $\phi_0 \in \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_{j+1}\}$ mit $\phi_0 \perp M$ und $\|\phi_0\| = 1$. Sei $\phi_0 = \sum_{k=1}^{j+1} a_k \phi_k$, dann gilt

$$\max_{\phi \in M^\perp \setminus 0} \frac{(A\phi, \phi)}{(\phi, \phi)} \geq (A\phi_0, \phi_0) = \Big( \sum_{k=1}^{j+1} \lambda_k(A) a_k \phi_k , \sum_{k=1}^{j+1} a_k \phi_k \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{j+1} \lambda_k(A) |a_k|^2 \geq \lambda_{j+1}(A) \|\phi_0\|^2 = \lambda_{j+1}(A).$$

Andererseits ist wegen $\phi_{j+1} \perp \mathcal{L}_j$

$$\lambda_{j+1}(A) = \max_{\phi \in \mathcal{L}_j^\perp \setminus \{0\}} \frac{(A\phi, \phi)}{(\phi, \phi)} .$$

$\square$

Wir bezeichnen im folgenden stets mit $\mathcal{Y}_\infty$ die Menge der kompakten Operatoren. Die Schreibweise $A \leq B$ bedeutet $B - A \geq 0$.

Korollar I.2: Seien $A, B \in \mathcal{Y}_\infty$, $0 \leq A \leq B$, dann gilt

$$\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B), \quad j = 1, 2, \dots$$

In allen diesen Beziehungen gilt Gleichheit genau dann, wenn $A = B$ ist. Klarerweise folgt $\nu(A) \leq \nu(B)$.

Beweis: Wegen $A \leq B$ ist stets $(A\phi, \phi) \leq (B\phi, \phi)$, und die Behauptung folgt aus dem Satz.

$\square$

Sei $A$ selbstadjungiert und kompakt, dann definieren wir

$$A_+ := \sum_{\lambda_j(A) > 0} \lambda_j(A) (\cdot, \phi_j) \phi_j , \quad A_- := -\sum_{\lambda_j(A) < 0} \lambda_j(A) (\cdot, \phi_j) \phi_j .$$

Offensichtlich gilt $A = A_+ - A_-$.

**Korollar I.3:** Es gilt ($\lambda_j(A_+)$, $\lambda_j(A_-)$ wieder absteigend geordnet):

$$\lambda_j(A_+) = \min_{\mathcal{L}\in \mathfrak{N}_{j-1}} \max_{\phi\in\mathcal{L}^\perp\setminus\{0\}} \frac{(A\phi,\phi)}{(\phi,\phi)}, \quad \lambda_j(A_-) = \min_{\mathcal{L}\in \mathfrak{N}_{j-1}} \max_{\phi\in\mathcal{L}^\perp\setminus\{0\}} \frac{(-A\phi,\phi)}{(\phi,\phi)},$$

für $j=1,2,\dots$.

**Beweis:** Der Beweis des Satzes zeigt sogar in diesem allgemeineren Fall die erste Beziehung. Die zweite folgt durch Anwendung auf $-A$. $\square$

**Korollar I.4:** Sei $A$ selbstadjungiert und kompakt, $A=H_1-H_2$, mit $H_1,H_2\in\mathfrak{S}_\infty$, $H_1,H_2\geq 0$. Dann gilt

$$\lambda_j(A_+)\leq\lambda_j(H_1), \quad \lambda_j(A_-)\leq\lambda_j(H_2), \quad j=1,2,\dots .$$

**Beweis:** Es gilt für $f\in\mathcal{H}$:

$$(H_1f,f) = (Af,f)+(H_2f,f)\geq(Af,f),$$
$$(H_2f,f) = (H_1f,f)-(Af,f)\geq(-Af,f).$$

Die Behauptung folgt aus dem letzten Korollar. $\square$

## 2. s-Zahlen:

⊗ **Lemma I.5:** (Polarzerlegung) Sei $A$ ein beschränkter Operator in $\mathcal{H}$, dann existiert eine partielle Isometrie $U$, so dass

$$A = UH$$

mit $H=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ist.

⊗ Ein Operator $U$ heißt partielle Isometrie, wenn $U$ eine Isometrie von $(\ker U)^\perp$ auf $\operatorname{ran} U$ ist.

**Beweis:** Sei $H=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, dann gilt

$$\|Hf\|^2=(Hf,Hf)=(A^*Af,f)=(Af,Af)=\|Af\|^2.$$

Also ist $U: Hf\mapsto Af$ eine Isometrie von $\operatorname{ran} H$ auf $\operatorname{ran} A$. Diese setzt sich zu einer partiellen Isometrie fort. $\square$

**Definition:** Sei $A \in \mathcal{T}_\infty$. Die Eigenwerte von $H = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ heißen die s-Zahlen von $A$.

Wir ordnen die s-Zahlen immer absteigend mit Vielfachheit und bezeichnen sie mit $s_j(A)$, d.h. $s_j(A) = \lambda_j(H)$, $j = 1, \dots, \dim \operatorname{ran} H$. Falls $\dim \operatorname{ran} H < \infty$ ist, setze $s_j(A) = 0$ für $j > \dim \operatorname{ran} H =: r(H)$

**Lemma I.6:** (Schmidt-Darstellung) Sei $A \in \mathcal{T}_\infty$, dann lässt sich $A$ schreiben als

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)\,(\cdot, \phi_j)\,\psi_j,$$

mit zwei Orthonormalsystemen $\{\phi_j\}$ und $\{\psi_j\}$. Die Reihe ist in der Operatornorm konvergent.

**Beweis:** Sei $A = UH$ die Polarzerlegung und sei

$$H = \sum_{j=1}^{r(H)} \lambda_j(H)\,(\cdot, \phi_j)\,\phi_j.$$

Dann folgt $A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)\,(\cdot, \phi_j)\,\psi_j$ mit $\psi_j = U\phi_j$. $\square$

**Bemerkung:** Da $\mathcal{T}_\infty$ bezüglich der Operatornorm abgeschlossen ist und alle endlichdimensionalen Operatoren enthält, ist jedes $A$ das durch eine Reihe vom obigen Typ dargestellt wird in $\mathcal{T}_\infty$ enthalten.

**Lemma I.7:** Es gilt für $A \in \mathcal{T}_\infty$ stets $s_1(A) = \|A\|$, $s_j(cA) = |c|\, s_j(A)$, für $c \in \mathbb{C}$. Ist $A$ normal, so folgt $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$.

Weiters ist für $A \in \mathcal{T}_\infty$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ stets $s_j(A) = s_j(A^*)$, $s_j(BA) \le \|B\|\, s_j(A)$, $s_j(AB) \le \|B\|\, s_j(A)$.

**Beweis:** Die ersten Aussagen sind trivial. Um $s_j(A) = s_j(A^*)$ zu zeigen, schreibe $A = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A)\,(\cdot, \phi_j)\,\psi_j$. Dann ist $A^* = \sum_{j=1}^{r(A)} s_j(A) \cdot (\cdot, \psi_j)\,\phi_j$, also ist

$$A^*A\,\phi_j = s_j^2(A)\,\phi_j, \quad AA^*\psi_j = s_j^2(A)\,\psi_j, \quad j = 1, \dots, r(A).$$

Es folgt $s_j(A) = s_j(A^*)$. Nun genügt es $s_j(BA) \leq \|B\| \, s_j(A)$ zu zeigen: Es gilt $s_j^2(BA) = \lambda_j(A^*B^*BA)$, $s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A)$. Weiters gilt

$$(A^*B^*BAf, f) = \|BAf\|^2 \leq \|B\|^2 \|Af\|^2 = \|B\|^2 (A^*Af, f),$$

und die Behauptung folgt aus Korollar I.2. $\square$

Im folgenden bezeichne $\mathcal{K}_n$ die Menge der endlichdimensionalen Operatoren mit Dimension $\leq n$. Wir erhalten eine Charakterisierung der s-Zahlen durch eine Approximationseigenschaft.

<u>Satz I.8:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$, dann gilt für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$s_{n+1}(A) = \min_{K \in \mathcal{K}_n} \|A - K\|.$$

<u>Beweis:</u> Sei $K \in \mathcal{K}_n$, dann gilt $\dim (\ker K)^\perp \leq n$, also wegen der Minimax-Eigenschaft für $A^*A$:

$$s_{n+1}^2(A) \leq \max_{\phi \in \ker K \setminus 0} \frac{(A^*A\phi, \phi)}{(\phi, \phi)} = \left[ \max_{\phi \in \ker K \setminus 0} \frac{\|A\phi\|}{\|\phi\|} \right]^2.$$

Da für $\phi \in \ker K$ gilt

$$\|A\phi\| = \|(A-K)\phi\| \leq \|A - K\| \, \|\phi\|,$$

folgt $\|A - K\| \geq s_{n+1}(A)$.

Setzt man $K_n := \sum_{j=1}^{n} s_j(A) (\cdot, \phi_j) \psi_j$, so gilt offenbar

$$\|A - K_n\| = s_{n+1}(A),$$

also folgt die Behauptung. $\square$

<u>Korollar I.9:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$ und $T \in \mathcal{K}_r$, dann gilt

$$s_{n+r}(A) \leq s_n(A+T) \leq s_{n-r}(A),$$

wobei für die zweite Ungleichung $n \geq r$ sein soll.

<u>Beweis:</u> Sei $K_n$ wie im Beweis vom Satz, dann gilt $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$s_{n+1}(A) = \|(A+T) - (T + K_n)\| \geq s_{n+r+1}(A+T),$$

also die rechte Ungleichung. Vertauscht man die Rollen von $A$ und $A+T$, so folgt die linke Ungleichung. $\square$

<u>Korollar I.10:</u> Seien $A, B \in \mathcal{K}_\infty$, dann gilt
$$s_{m+n-1}(A+B) \leq s_m(A) + s_n(B), \quad n,m = 1,2,\dots,$$
und
$$s_{m+n-1}(AB) \leq s_m(A)\, s_n(B), \quad n,m = 1,2,\dots .$$
<u>Beweis:</u> Sei $K_1$ ($K_2$) ein $(m-1)$-dimensionaler ($(n-1)$-dimensionaler) Operator mit $s_m(A) = \| A - K_1 \|$, $s_n(B) = \| B - K_2 \|$. Dann gilt
$$s_{m+n-1}(A+B) \leq \| (A+B) - (K_1+K_2) \| \leq \| A-K_1 \| + \| B-K_2 \| = s_m(A) + s_n(B).$$
Analog folgt, da die Dimension von $AK_2 + K_1(B-K_2)$ höchstens $n+m-2$ ist, daß
$$s_{m+n-1}(AB) \leq \| AB - (AK_2 + K_1(B-K_2)) \| = \| (A-K_1)(B-K_2) \| \leq$$
$$\leq \| A-K_1 \| \cdot \| B-K_2 \| = s_m(A) \cdot s_n(B).$$
$\square$

<u>Korollar I.11:</u> Seien $A, B \in \mathcal{K}_\infty$, dann gilt
$$| s_n(A) - s_n(B) | \leq \| A-B \|, \quad n = 1,2,\dots .$$
<u>Beweis:</u> Es gilt
$$s_{n+1}(A) = \min_{K \in \mathcal{K}_n} \| A-K \| = \min_{K \in \mathcal{K}_n} \| (B-K) + (A-B) \| \leq$$
$$\leq \| A-B \| + \min_{K \in \mathcal{K}_n} \| B-K \| = s_{n+1}(B) + \| A-B \|.$$
Vertauscht man noch die Rollen von $A$ und $B$, so folgt die Behauptung.
$\square$

Wir kommen nun zu einer geometrischen Interpretation der s-Zahlen. Bezeichne mit $\mathcal{P}_n$ die Menge der $n$-dimensionalen Orthogonalprojektoren und setze für eine Menge $E \subseteq \mathcal{H}$ mit $E = -E$
$$d_n(E) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \sup_{x \in E} \| x - Px \|,$$

$d_n$ heißt die $n$-te Weite von $E$. Sie mißt wie weit die Menge $E$ von einem $n$-dimensionalen Teilraum weg ist.

<u>Satz I.12:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$, dann ist $s_{n+1}(A)$ die $n$-te Weite des Bildes der Einheitskugel unter $A$:

$$s_{n+1}(A) = d_n(A\{\|x\| \leq 1\}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

<u>Beweis:</u> Sei $P \in \mathcal{P}_n$, dann ist $PA \in \mathfrak{K}_n$. Also gilt mit $E = A\{\|x\| \leq 1\}$

$$\sup_{x \in E} \|x - Px\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay - PAy\| = \|A - PA\| \geq s_{n+1}(A);$$

und es folgt $d_n(E) \geq s_{n+1}(A)$.

Umgekehrt sei $P := \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \psi_k)\psi_k$ mit den $\psi_k$'s aus der Schmidt-Darstellung von $A$. Dann ist

$$PA = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)(\cdot, \phi_k)\psi_k,$$

und es folgt $\|A - PA\| = s_{n+1}(A)$, also $d_n(E) = s_{n+1}(A)$. $\square$

Wir zeigen im folgenden Satz eine asymptotische Eigenschaft der $s$-Zahlen.

<u>Satz I.13:</u> Seien $A, B \in \gamma_\infty$, $r > 0$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A) = a, \quad \lim_{n\to\infty} n^r s_n(B) = 0$$

gilt. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} n^r s_n(A+B) = a.$$

<u>Beweis:</u> Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Es gilt $(m = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots, k)$

$$s_{(k+1)m+j}(A+B) \leq s_{km+j}(A) + s_{m+1}(B).$$

Da man jede Zahl $n$ als $(k+1)m+j$ mit $m = \left[\frac{n}{k+1}\right]$ schreiben kann, folgt

$$n^r s_n(A+B) \leq (km+j)^r s_{km+j}(A) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{km+j}\right)^r}_{\to \left(\frac{k+1}{k}\right)^r} + (m+1)^r s_{m+1}(B) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{m+1}\right)^r}_{\to (k+1)^r}$$

und es gilt daher $\limsup_{n\to\infty} n^r s_n(A+B) \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^r a$. Da $k$ beliebig war folgt $\limsup_{n\to\infty} n^r s_n(A+B) \leq a$.

Es gilt umgekehrt $A = (A+B) - B$ und daher

$$s_{(k+1)m+j}(A) \le s_{km+j}(A+B) + s_{m+1}(B),$$

oder

$$s_{km+j}(A+B) \geq s_{(k+1)m+j}(A) - s_{m+1}(B).$$

Es folgt, mit $n = km+j$ für $n \to \infty$,

$$\liminf_{n\to\infty} n^r s_n(A+B) \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^r a.$$

Da wieder $k$ beliebig war gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} n^r s_n(A+B) \geq a$ und es folgt die Behauptung.

$\square$

<u>Korollar I.14:</u> Im letzten Satz kann man $n^r$ durch jede Funktion der Gestalt $n^r L(n)$ ersetzen, wenn $L(n)$ derart ist, daß

$$\lim \frac{L(n_1)}{L(n_2)} = 1$$

gilt für $n_1, n_2 \to \infty$, $\frac{n_1}{n_2} \to b \in (0,\infty)$.

<u>Beweis:</u> klar ✓

$\square$

## <u>3. Ungleichungen zwischen s-Zahlen, Eigenwerten und Diagonalelementen:</u>

Zuerst zeigen wir ein Resultat über die Diagonalelemente $(A\phi, \phi)$.

<u>Lemma I.15:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$, $s_j = s_j(A)$, $j = 1,2,\dots$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$:

$$\det\left((Af_i, Af_j)\right)_{i,j=1}^{n} \le s_1^2 \cdots s_n^2 \cdot \det\left((f_i, f_j)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\phi_j$, $j = 1,2,\dots$, ein vollständiges Orthonormalsystem für $A^*A$, dann gilt

$$(Af_i, Af_j) = (A^*A f_i, f_j) = \sum_{l=1}^{\infty} s_l^2 (f_i, \phi_l)(\phi_l, f_j),$$

d.h. man hat die folgende Darstellung der Matrizen

$$\left((Af_i, Af_j)\right)_{i,j=1}^{n} = \left(s_l(f_i, \phi_l)\right)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ l = 1,\dots,n}} \cdot \left(s_l(f_i, \phi_l)\right)^*_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ l=1,\dots,n}}.$$

Also folgt

$$\det\left((Af_i, Af_j)\right)_{i,j=1}^{n} = \sum_{1 \le r_1 < r_2 < \dots < r_n < \infty} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}^{*},$$

wobei

$$B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

den Minor der Matrix $(s_l (f_i, \phi_l))_{i,l}$ bezeichnet, der aus den Zeilenindices $1, \dots, n$ und den Spaltenindices $r_1, \dots, r_n$ gebildet wird.

Sei nun $C$ die Matrix $C = \left((f_i, \phi_l)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ l \in \mathbb{N}}}$, dann gilt offensichtlich

$$B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} = s_{r_1} \cdot \dots \cdot s_{r_n} \, C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix},$$

und daher

$$\det\left((Af_i, Af_j)\right)_{i,j=1}^{n} \le s_1^2 \cdot \dots \cdot s_n^2 \sum_{1 \le r_1 < r_2 < \dots < r_n < \infty} C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}^{*} =$$

$$= s_1^2 \cdot \dots \cdot s_n^2 \det \Big( \underbrace{\left((f_i, \phi_l)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ l \in \mathbb{N}}} \cdot \left((f_i, \phi_l)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ l \in \mathbb{N}}}^{*}}_{= \left( \sum_{l=1}^{\infty} (f_i, \phi_l)(\phi_l, f_j) \right)_{i,j=1}^{n}} \Big) =$$

$$= s_1^2 \cdot \dots \cdot s_n^2 \det\left((f_i, f_j)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

$\square$

Lemma I.16: Sei $A \in \mathcal{V}_\infty$ und sei $\phi_j$, $j = 1, 2, \dots, r(A)$, irgend ein Orthonormalsystem. Gilt dann

$$|(A\phi_j, \phi_j)| = s_j(A), \quad j = 1, 2, \dots,$$

so ist $A$ normal und die $\phi_j$'s sind ein in $\overline{\operatorname{ran} A}$ vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren.

<u>Beweis:</u> Es gilt

$$s_1^2(A) = |(A\phi_1, \phi_1)|^2 \leq \|A\phi_1\|^2 = (A^*A\phi_1, \phi_1),$$

also folgt wegen $s_1^2(A) = \max_{\|\phi\|=1} (A^*A\phi, \phi)$, daß $s_1^2(A) = (A^*A\phi_1, \phi_1)$ ist und daher $A^*A\phi_1 = s_1^2(A)\phi_1$. Wir fahren induktive fort: Es gilt

$$s_2^2(A) = |(A\phi_2, \phi_2)|^2 \leq \|A\phi_2\|^2 = (A^*A\phi_2, \phi_2),$$

da wir bereits wissen, daß $\phi_1$ Eigenvektor zu $s_1^2(A)$ ist, folgt

$$s_2^2(A) = \max_{\substack{\|\phi\|=1,\\ \phi \perp \phi_1}} (A^*A\phi, \phi),$$

also folgt $s_2^2(A) = (A^*A\phi_2, \phi_2)$ und damit $A^*A\phi_2 = s_2^2(A)\phi_2$.
Wir erhalten also

$$A^*A\phi_j = s_j^2(A)\phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, r(A),$$

d.h. die $\phi_j$'s sind ein an $\overline{\operatorname{ran} A^*A}$ vollständiges System von Eigenvektoren. Insbesondere ist $\operatorname{span}\{\phi_j\}^\perp = \ker A^*A \subseteq \ker A$.

Benutzt man anstelle von $|(A\phi_j, \phi_j)|^2 \leq \|A\phi_j\|^2$ die Beziehung $|(A\phi_j, \phi_j)|^2 \leq \|A^*\phi_j\|^2$, so folgt mit den gleichen Argument ($s_j(A) = s_j(A^*)$)

$$AA^*\phi_j = s_j^2(A)\phi_j,$$

insbesondere also $\operatorname{span}\{\phi_j\}^\perp = \ker AA^* \subseteq \ker A^*$.

Man kann daher jeden Vektor $f \in \overline{\operatorname{ran} A}$ schreiben als

$$f = \sum_{j=1}^{r(A)} (f, \phi_j)\phi_j,$$

insbesondere gilt also $A\phi_k = \sum_{j=1}^{r(A)} (A\phi_k, \phi_j)\phi_j$, und daher

$$(A\phi_k, A\phi_k) = \sum_{j=1}^{r(A)} |(A\phi_k, \phi_j)|^2.$$

Da $(A\phi_k, A\phi_k) = s_k^2(A) = |(A\phi_k, \phi_k)|^2$ ist folgt $(A\phi_k, \phi_j) = 0$ für $j \neq k$, und wir sehen $A\phi_k = (A\phi_k, \phi_k)\phi_k$. Man kann also $A$ schreiben als

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} (A\phi_k, \phi_k)(\cdot, \phi_k)\phi_k,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. $\square$

Im folgenden betrachten wir Beziehungen zwischen den Eigenwerten und den s-Zahlen eines Operators. Dazu benötigen wir noch:

Lemma I.17: (Lemma von Schur) Sei $A \in \mathcal{J}_\infty$ und $\mathcal{E}$ die abgeschlossene lineare Hülle der verallgemeinerten Eigenräume zu von Null verschiedenen Eigenwerten. Dann gibt es eine orthonormal Basis $\{\omega_j\}$ von $\mathcal{E}$, so daß

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + \dots + a_{jj}\omega_j$$

gilt. Dabei ist $a_{jj} = (A\omega_j, \omega_j) = \lambda_j(A)$.

Der Beweis erfolgt durch orthonormalisieren einer Jordan-Basis der einzelnen verallgemeinerten Eigenräume.

Das nächste Lemma ist Ausgangspunkt für viele späteren Ungleichungen zwischen den $\lambda_j(A)$ und $s_j(A)$.

Lemma I.18: Sei $A \in \mathcal{J}_\infty$, dann gilt

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A), \quad n = 1, \dots, \nu(A).$$

Hier ist $\nu(A)$ die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte $\neq 0$ von $A$. Gilt $\nu(A) = r(A)$, ~~...~~ so ~~...~~ gilt in allen diesen Beziehungen Gleichheit genau dann, wenn $A$ normal ist.

Beweis: Sei $\{\omega_j\}_{j=1}^{\nu(A)}$ wie in Lemma I.17, dann gilt wegen Lemma I.15

$$\det\left((A\omega_j, A\omega_k)_{j,k=1}^{n}\right) \leq s_1^2(A) \cdot \ldots \cdot s_n^2(A), \quad n \leq \nu(A).$$

Es ist

$$(A\omega_j, A\omega_k) = \sum_{q=1}^{\min(j,k)} (A\omega_j, \omega_q)\overline{(A\omega_k, \omega_q)},$$

also

$$\det\left((A\omega_j, A\omega_k)_{j,k=1}^{n}\right) = \det\left((A\omega_j, \omega_k)_{j,k=1}^{n}\right) \cdot \det\left(\overline{(A\omega_j, \omega_k)}_{j,k=1}^{n}\right) =$$

$$= \left|\det\left((A\omega_j, \omega_k)\right)_{j,k=1}^{n}\right|^2 = \left|\lambda_1(A) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(A)\right|^2,$$

und die gewünschte Ungleichung folgt.

Betrachte nun den Fall $\nu(A) = r(A)$. Ist $A$ normal, so gilt wegen Lemma I.7 stets Gleichheit. Ist also umgekehrt der Fall, so folgt $|(Aw_j, w_j)| = |\lambda_j(A)| = s_j(A)$ und wegen Lemma I.16 ist $A$ normal.

$\square$

<u>Bemerkung:</u> Ist $A$ endlichdimensional, so gilt

$$\prod_{j=1}^{\nu(A)} |\lambda_j(A)|^2 = |\det A|^2 = \det(A^*A) = \prod_{j=1}^{\nu(A)} s_j^2(A),$$

d.h. in der letzten Ungleichung gilt "=". Man kann zeigen: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $s_1, \dots, s_n > 0$ und gilt

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n,$$
$$|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k| \leq s_1 s_2 \cdots s_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$
$$|\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n| = s_1 s_2 \cdots s_n,$$

so gibt es einen Operator $A$ an einem $n$-dimensionalen Raum, so daß $\lambda_j = \lambda_j(A)$ und $s_j = s_j(A)$ gilt.

Das folgende Lemma zeigt wie man aus der zitierten Ungleichung neue bekommt.

<u>Lemma I.18:</u> Sei $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\Omega$ eine konvexe Teilmenge von $D$, so daß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \geq \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t) \geq \dots \geq \frac{\partial \varphi}{\partial t_n} \geq 0, \quad t \in \Omega.$$

Sind $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \Omega$ und gilt

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad k = 1, \dots, n,$$

so ist auch $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Gilt für die Ableitungen überall ">", so ist $\varphi(a) = \varphi(b)$ genau dann, wenn für die $a_j$'s und $b_j$'s stets "=" gilt.

**Beweis:** Sei $E$ die Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 \; -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\Omega$ konvex ist, ist $\lambda b + (1-\lambda) a \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$. Sei $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert als $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda b + (1-\lambda) a)$, dann gilt

$$\psi'(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} (\lambda b + (1-\lambda) a)(b_j - a_j) = \underbrace{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_\lambda), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(t_\lambda) \right)}_{y_\lambda} (b-a)^T =$$

$$= \left( (E^{-1})^* y_\lambda, E(b-a) \right)_{\mathbb{R}^n}.$$

Nach Voraussetzung sind alle Komponenten von $E(b-a)$ und alle von $(E^{-1})^* y_\lambda$ nichtnegativ, also folgt $\psi(0) \leq \psi(1)$. □

**Bemerkung:** Ein ähnliches Lemma ist:

Sei $\phi(x)$, $-\infty \leq x < \infty$ eine konvexe Funktion, $\phi(-\infty) = 0$, und seien $\{a_j\}_{j=1}^{\omega}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\omega}$, $\omega \leq \infty$, nichtwachsende Folgen reeller Zahlen, so daß

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad k = 1, 2, \ldots, \omega$$

gilt. Dann gilt (speziell auch für $k = \omega$!)

$$\sum_{j=1}^{k} \phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \phi(b_j), \quad k = 1, 2, \ldots, \omega.$$

falls die rechte Seite $< \infty$ ist

Ist die Funktion $\phi$ streng konvex, so gilt hier "=" für $k = \omega$ genau dann, wenn $a_j = b_j$, $j = 1, \ldots, \omega$, gilt.

Diese Aussage folgt für differenzierbare $\phi$ und endliche Summen unmittelbar aus Lemma I.18.

Aus den Lemmata I.18, I.19 und obiger Bemerkung erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz.

<u>Satz I.20:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$ gegeben. Ist $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $0 < x_n \le x_{n-1} \le \dots \le x_1$, $n \le \nu(A)$, differenzierbar und gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$x_{k+1} \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}} \le x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

so gilt für $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $s_j = s_j(A)$

$$F(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \le F(s_1, \dots, s_n).$$

Gilt in der Voraussetzung stets "$>$" so gilt in der Folgerung "$=$" genau dann, wenn $|\lambda_j| = s_j$, $j = 1, \dots, n$.

Ist $f(x)$, $0 \le x < \infty$, $f(0) = 0$, und ist $f(e^t)$ konvex, so gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_j|) \le \sum_{j=1}^{k} f(s_j), \quad k = 1, \dots, \nu(A).$$

Ist $f(e^t)$ streng konvex, so gilt, falls die rechte Seite $< \infty$ ist, "$=$" für $k = \omega$ genau dann, wenn $|\lambda_j| = s_j$ ist für $j = 1, \dots, \nu(A)$.

<u>Beweis:</u> Sei $F$ gegeben, dann erfüllt $\varphi(t_1, \dots, t_n) := F(e^{t_1}, \dots, e^{t_n})$ die Voraussetzungen von Lemma I.18. Wegen Lemma I.18 kann man in Lemma I.18 $a_j = \ln|\lambda_j|$ und $b_j = \ln s_j$ wählen. Damit folgt die erste Behauptung.

Der zweite Teil folgt genauso, wenn man anstelle von Lemma I.18 die Bemerkung mit $\phi = f$ verwendet.

$\square$

<u>Korollar I.21:</u> Sei $A \in \gamma_\infty$, dann gilt

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^p \le \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A)$, $p > 0$, $n = 1, \dots, \nu(A)$.

(ii) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (1 + r|\lambda_j(A)|^p) \le \prod_{j=1}^{n} (1 + r s_j(A)^p)$, $r > 0$, $p > 0$, $n = 1, \dots, \nu(A)$.

(iii) Ist $\Sigma_{n,k}(x_1, \dots, x_k) = \displaystyle\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_n \le k} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_n}$ die elementarsymmetrische

Funktion, so gilt
$$\Sigma_{n,k}(|\lambda_1|,\dots,|\lambda_k|) \le \Sigma_{n,k}(s_1,\dots,s_k).$$
<u>Beweis:</u> <u>ad(i):</u> Satz I.20 mit $f(x)=x^p$, $a_j = \ln|\lambda_j|$, $b_j = \ln s_j$

<u>ad(ii):</u> Satz I.20 mit $f(x) = \log(1+rx)$, $a_j = \ln|\lambda_j|^p$, $b_j = \ln s_j^p$

<u>ad(iii):</u> Satz I.20 mit $D = \mathbb{R}^k$, $\Omega = \{t\in\mathbb{R}^k \mid t_1 \ge \dots \ge t_k\}$,
$$\varphi(t_1,\dots,t_k) = \sum_{1\le j_1<\dots<j_n\le k} e^{t_{j_1}+\dots+t_{j_n}}.$$
$\square$

Beachte, daß wir hier nur den Teil von Satz I.20 verwendet haben, der auch bewiesen wurde.

Unter Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel zeigt man das folgende:

<u>Korollar I.22:</u> Sei $A\in\mathcal{T}_\infty$ und habe $A$ unendlich viele Eigenwerte. Gilt für ein $\rho>0$
$$s_n(A) = O(n^{-\frac{1}{\rho}}), \quad n\to\infty,$$
bzw.
$$s_n(A) = o(n^{-\frac{1}{\rho}}), \quad n\to\infty,$$
so gilt auch
$$\lambda_n(A) = O(n^{-\frac{1}{\rho}}), \quad n\to\infty,$$
bzw.
$$\lambda_n(A) = o(n^{-\frac{1}{\rho}}), \quad n\to\infty.$$
<u>Beweis:</u> Nehmen wir zuerst an, daß $\rho<1$ ist. Dann stellt
$$f_s(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+s_n(A)z)$$
eine ganze Funktion dar. Diese hat Ordnung $\rho$ und Typ $<\infty$ ($=0$ im zweiten Fall). Wegen Korollar I.21 (ii) gilt das gleiche für die Funktion
$$f_\lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda_j(A)z),$$
denn $\left|\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda_j(A))z\right| \le \prod_{n=1}^{\infty}(1+|z|\,|\lambda_j(A)|) \le \prod_{n=1}^{\infty}(1+|z|s_j(A))$.

Die Nullstellen von $f_\lambda$ sind genau die $-\lambda_j(A)^{-1}$, also haben die $\lambda_j$ das gewünschte Verhalten.

Ist nun $\delta > 1$, so wähle $p > 0$ so daß $\frac{\delta}{p} < 1$ und wende das gleiche Argument auf $s_j^p$ an. □

Wir deuten noch einen anderen Beweis von Lemma I.18 an, der zu Ungleichungen von anderem Typ führt.

<u>Bemerkung:</u> Sei $k \in \mathbb{N}$, dann forme alle möglichen Produkte

$$\Lambda^{(k)}(A) = \lambda_{j_1}(A) \cdots \lambda_{j_k}(A), \quad j_1 < j_2 < \dots < j_k,$$

und nummeriere sie nach absteigenden Beträgen $\Lambda_1^{(k)}, \Lambda_2^{(k)}, \dots$. Verfahre genauso mit den $s_j$'s. Klarerweise gilt $\Lambda_1^{(k)} = \lambda_1(A) \cdots \lambda_k(A)$ und $S_1^{(k)} = s_1(A) \cdots s_k(A)$.

Man kann zeigen, daß ein Operator $A^{(k)}$ an einem Hilbertraum $\mathcal{H}^{(k)}$ existiert, so daß $\Lambda_j^{(k)}$ und $S_j^{(k)}$ die Eigenwerte bzw. s-Zahlen von $A^{(k)}$ sind.

Nun gilt die erste Ungleichung aus Lemma I.18 unmittelbar, denn ist $A\phi_1 = \lambda_1(A)\phi_1$, so folgt

$$|\lambda_1(A)| = \frac{\|A\phi_1\|}{\|\phi_1\|} \le \max_{\phi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|A\phi\|}{\|\phi\|} = s_1(A).$$

Wendet man diese Beziehung auf $A^{(k)}$ an, so folgt die Behauptung von Lemma I.18.

Jetzt kann man Satz I.20 auf $A^{(k)}$ anwenden und erhält Ungleichungen für $\lambda_j$'s und $s_j$'s, z.B. gilt stets

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} |\Lambda_j^{(k)}| \le \sum_{j=1}^{\varkappa} S_j^{(k)}, \quad \varkappa = 1, 2, \dots .$$

Für gewisse Werte von $\varkappa, k$ kann man diese Ungleichungen auch aus Satz I.20 erhalten, im allgemeinen sind sie von anderem Typ.

## 4. s-Zahlen von Summen und Produkten:

**Lemma I.23:** Sei $A \in \mathcal{S}_\infty$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ stets
$$\max \left| \sum_{j=1}^{n} (UA\phi_j, \phi_j) \right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A),$$
wobei das Maximum über alle unitären Operatoren $U$ und Orthonormalsysteme $\{\phi_j\}_{j=1}^{n}$ genommen wird. Speziell gilt ~~dann~~
$$\sum_{j=1}^{n} |(A\phi_j, \phi_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

**Beweis:** Sei $P$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\operatorname{span}\{\phi_j\}$, dann gilt
$$\sum_{j=1}^{n} (UA\phi_j, \phi_j) = \sum_{j=1}^{n} (A_1\phi_j, \phi_j)$$
mit $A_1 = PUAP$. Es gilt
$$\operatorname{tr}(A_1) = \sum_{j=1}^{n} (A_1\phi_j, \phi_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A),$$
und nach Korollar I.21, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_1)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1)$. Wegen Lemma I.7 ist $s_j(A_1) = s_j(PUAP) \leq s_j(A)$. Es folgt
$$\left| \sum_{j=1}^{n} (UA\phi_j, \phi_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Schreibe $A$ als $A = VH$ in der Polarzerlegung, und sei $\{\psi_j\}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren von $H$ $(= A^*A)$. Da $V$ und damit $V^*$ eine partielle Isometrie ist, gibt es einen unitären Operator $U$ mit
$$UA\psi_j = V^*A\psi_j \quad (= H\psi_j).$$
Für dieses $U$ gilt
$$\sum_{j=1}^{n} (UA\psi_j, \psi_j) = \sum_{j=1}^{n} (H\psi_j, \psi_j) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Um die letzte Beziehung zu zeigen, betrachte einen unitären Operator $U_0$ mit $U_0\phi_j = e^{-i\theta_j}\phi_j$, $\theta_j = \arg(A\phi_j, \phi_j)$. Dann gilt
$$\sum_{j=1}^{n} |(A\phi_j, \phi_j)| = \sum_{j=1}^{n} (U_0A\phi_j, \phi_j) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$
$\square$

**Lemma I.24:** Seien $A, B \in \gamma_\infty$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ stets

$$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A) \cdot \prod_{j=1}^{n} s_j(B),$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B).$$

**Beweis:** Sei $\psi_j$ ein vollständiges Orthogonalsystem, dann gilt mit Lemma I.15,

$$\det\left((AB\psi_j, AB\psi_k)\right)_{j,k=1}^{n} \leq \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \cdot \det\left((B\psi_j, B\psi_k)\right)_{j,k=1}^{n} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \cdot \prod_{j=1}^{n} s_j^2(B).$$

Wählt man speziell für $\psi_j$ ein vollständiges ~~Ex~~ Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $B^*A^*AB$, so ist

$$\det\left((AB\psi_j, AB\psi_k)\right)_{j,k=1}^{n} = \prod_{j=1}^{n} s_j^2(AB).$$

Nach Lemma I.23 gibt es ein Orthonormalsystem $\{\phi_j\}_{j=1}^{n}$ und einen unitären Operator $U$, so daß

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \left(U(A+B)\phi_j, \phi_j\right) \right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A+B).$$

Es folgt, ebenfalls nach Lemma I.23

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leq \left|\sum_{j=1}^{n} (UA\phi_j, \phi_j)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} (UB\phi_j, \phi_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B).$$

$\square$

Wir benutzen nun wieder Lemma I.18 und die anschließende Bemerkung, um ein allgemeineres Resultat zu erhalten.

**Satz I.25:** Seien $A, B \in \gamma_\infty$. Dann gilt:

(i) Ist $f(x)$ $(0 \leq x < \infty)$ eine nichtfallende konvexe Funktion mit $f(0) = 0$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(A+B)) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A) + s_j(B)), \quad k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

(ii) Ist $f(x)$ definiert auf $[0,\infty)$, $f(0)=0$, und ist $f(e^t)$ konvex, so gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(AB)) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)\, s_j(B)), \quad k=1,2,\dots,\infty.$$

Beweis: ad (i): Wende Lemma I.24 und Lemma I.18, Bemerkung, an auf

$$a_j = s_j(A+B), \quad b_j = s_j(A)+s_j(B), \quad \phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

ad (ii): Anwenden auf

$$a_j = \ln s_j(AB), \quad b_j = \ln(s_j(A)\, s_j(B)), \quad \phi(x) = f(x).$$

□

Korollar I.26: Seien $A, B \in \mathcal{S}_\infty$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(AB) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(A)\, s_j(B).$$

Lemma I.24 und daher alle daraus resultierenden Ungleichungen gelten nicht nur für zwei Operatoren $A, B$, sondern auch für je endlich viele $A_1, \dots, A_n$. Weiters ist für $A \in \mathcal{S}_\infty$, $n \in \mathbb{N}$ und $p > 0$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^{p/n}(A^n) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j^{p}(A), \quad k=1,2,\dots$$

Beweis: Die erste Beziehung folgt aus (ii) vom Satz mit $f(x)=x$. Die folgende Bemerkung ist klar aus dem Beweis von Lemma I.24. Die letzte Beziehung folgt aus (ii) vom Satz geschrieben für die $n$ Operatoren $A, A, \dots, A$ und $f(x) = x^{\frac{p}{n}}$.

□

Korollar I.27: Sei $A \in \mathcal{S}_\infty$, sei $\{\phi_j\}$ ein Orthonormalsystem, und sei $f(x)$ $(0 \leq x < \infty)$ eine nichtfallende konvexe Funktion mit $f(0)=0$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f(|(A\phi_j, \phi_j)|) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)), \quad k=1,2,\dots,\infty.$$

Ist $f$ streng konvex und die rechte Seite endlich für $k=\infty$, so gilt für $k=\infty$ "=" genau dann, wenn $A = \sum_{j=1}^{\infty} (A\phi_j, \phi_j)(\cdot, \phi_j)\phi_j$ ist.

Beweis: Die Ungleichung folgt aus Lemma I.23 und Lemma I.18, Bemerkung. Auch gilt "=" genau dann, wenn für alle $j$

$$|(A\phi_j, \phi_j)| = s_j(A)$$

gilt. Nach Lemma I.16 ist $A$ normal, ~~und~~ $\{\phi_j\}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren und es folgt die angegebene Darstellung. $\square$

## 5. Diagonal-Zellen Operatoren:

Im Korollar I.27 haben wir Ungleichungen zwischen den Diagonalelementen und s-Zahlen erhalten. Jetzt wollen wir den Begriff "Diagonalelemente" verallgemeinern.

Sei im folgenden $\{P_j\}_{j=1}^{\omega}$ ~~ein~~ $(\omega \le \infty)$ ein System paarweise orthogonaler Orthogonalprojektoren, d.h.

$$P_i P_j = 0, \quad i \neq j.$$

Dann definieren für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ einen anderen Operator

$$\hat{A} := \sum_{j=1}^{\omega} P_j A P_j .$$

Im Fall $\omega = \infty$ wird diese Definition durch das folgende Lemma gerechtfertigt:

Lemma I.28: Die Reihe $\sum_{j=1}^{\omega} P_j A P_j$ konvergiert stark. Ist $A \in \gamma_\infty$, so konvergiert sie in der Operatornorm und daher ist ~~A~~ in diesem Fall auch $\hat{A} \in \gamma_\infty$.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{H}$, dann bilden die Elemente $g_k = P_k A P_k f$ ein Orthogonalsystem und es gilt $\|g_k\| \le \|A\| \cdot \|P_k f\|$, also folgt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} g_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|^2 \le \|A\|^2 \sum_{j=1}^{m} \|P_k f\|^2 \le \|A\|^2 \cdot \|f\|^2 .$$

Betrachte nun den Fall $A \in \gamma_\infty$. Da die $P_j$'s paarweise orthogonal sind, existiert der ~~[illegible]~~ Limes $Q := I - \sum_{j=1}^{\omega} P_j$ im starken Sinne.

Wir zeigen zunächst, dass

$$(I - Q - \sum_{j=1}^{n} P_j) A \xrightarrow{\|.\|} 0 .$$

Dazu schreibe $A$ in der Schmidt-Darstellung als

$$A = \sum_{i=1}^{N} s_i(A)(\cdot,\phi_i)\psi_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} s_i(A)(\cdot,\phi_i)\psi_i ,$$

wobei $N$ so groß ist, dass der zweite Summand in der Operatornorm $< \varepsilon$ ist. Dann gilt

$$(I-Q-\sum_{j=1}^{n}P_j)A = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} s_i(A)(\cdot,\phi_i)(I-Q-\sum_{j=1}^{n}P_j)\psi_j}_{\|.\| < s_1(A)\cdot\varepsilon,} + \underbrace{(I-Q-\sum_{j=1}^{n}P_j)\sum_{i=N+1}^{\infty} s_i(A)(\cdot,\phi_i)\psi_i}_{\|.\| < \varepsilon}$$

wenn man $n$ so groß wählt, dass $\|(I-Q-\sum_{j=1}^{n}P_j)\psi_j\| < \frac{\varepsilon}{N}$.

Es gilt also für $k$ hinreichend groß stets (da obige Folge insbesondere C-Folge ist)

$$\|P_k A P_k f\| \leq \varepsilon \|P_k f\|, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Damit folgt

$$\Big\|\sum_{j=m}^{n} P_j A P_j f\Big\|^2 = \sum_{j=m}^{m} \|P_j A P_j f\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{j=m}^{m} \|P_j f\|^2 \leq \varepsilon^2 \|f\|^2.$$

$\square$

Man bemerke, dass die Dimensionen $r(A)$ und $r(\hat{A})$ voneinander völlig unabhängig sind.

<u>Satz I.28:</u> Sei $A \in \mathcal{S}_\infty$, $\{P_j\}_{j=1}^{\omega}$ ein System von paarweise orthogonalen Orthogonalprojektoren und $\hat{A}$ der assoziierte Diagonalzellen Operator. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(\hat{A}) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A), \quad n = 1,2,\dots .$$

Es gilt "=" in allen diesen Relationen genau dann, wenn $A = \hat{A}$ ist.

Beweis: Setze $A_k = P_k A P_k$, $r_k = r(A_k)$. Wegen Lemma I.23 gibt es für $k=1,2,\dots$ und $n_k \le r_k$, $n_k < \infty$ einen in ran $P_k$ unitären Operator $U_k$ und ein Orthonormalsystem $\{\phi_j^k\}_{j=1}^{n_k}$, so daß

$$\sum_{j=1}^{n_k} (U_k A_k \phi_j^k, \phi_j^k) = \sum_{j=1}^{n_k} s_j(A_k).$$

Sei nun $U$ der unitäre Operator

$$U = \sum_{k=1}^{\omega} U_k P_k + Q,$$

dann gilt offensichtlich $(UA\phi_j^k, \phi_j^k) = (U_k A_k \phi_j^k, \phi_j^k)$, und daher

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} s_j(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} (UA\phi_j^k, \phi_j^k) \le \sum_{i=1}^{N} s_i(A)$$

mit $N = \sum_{k=1}^{m} n_k$. Diese Relation gilt für jedes $m=1,2,\dots$ und jede zugehörige Folge $n_k$ von ganzen Zahlen $0 \le n_k \le r_k$.

Da der Operator $\hat A$ blockweise operiert und daher auch $\hat A^* \hat A$ dieses tut, ist die Folge $\{s_j(\hat A)\}_{j=1}^{\infty}$ genau die Folge die man erhält wenn man die Zahlen $\{s_j(A_k) \mid k=1,2,\dots;\ j=1,2,\dots\}$ unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten absteigend anordnet. Die Behauptung folgt also aus obiger Ungleichung.

Um zu zeigen, daß $s_j(\hat A) = s_j(A)\ \forall j$ impliziert daß $\hat A = A$ gilt, betrachten wir zuerst den Fall daß $A$ positiv ist. Dann ist jedes $A_k$ und daher $\hat A$ positiv und wir finden daher ein in ran $\hat A$ vollständiges orthonormales System von Eigenvektoren $\phi_j$

$$\hat A \phi_j = s_j(\hat A)\phi_j, \quad j = 1,2,\dots,$$

so daß jeder Vektor $\phi_j$ in einem ran $P_k$ liegt. Nun gilt

$$s_1(\hat A) = (\hat A \phi_1, \phi_1) = \sum_{k=1}^{\omega} (P_k A P_k \phi_1, \phi_1) = (A\phi_1, \phi_1),$$

also da nach VS: $s_1(\hat A) = s_1(A)$ ist $s_1(A) = (A\phi_1, \phi_1)$. Daher ist $\phi_1$ Eigenvektor von $A$ zu $s_1(A)$. Wenden wir das gleiche Argument auf $A_1 = A - s_1(A)(\cdot,\phi_1)\phi_1$, und

$$\hat{A}_1 = \sum_{k=1}^{\omega} P_k A_1 P_k = \hat{A} - s_1(A)(\cdot,\phi_1)\phi_1 = \hat{A} - s_1(\hat{A})(\cdot,\phi_1)\phi_1$$

an, so finden wir, daß $\phi_2$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $s_2(A)$ ist. Verfährt man induktiv weiter, so folgt daß $\phi_k$ ein Eigenvektor von $A$ zu $s_k(A)$ ist und wir erhalten schließlich

$$A = \sum_{k=1}^{\omega} s_k(A)(\cdot,\phi_j)\phi_j = \hat{A}.$$

Sei nun $A$ allgemein, dann setze $C = A^*A$, $\hat{C} = \sum_{j=1}^{\omega} P_k C P_k$.

Wegen $P_k A^* P_k A P_k \leq P_k A^* A P_k$, gilt

$$\hat{A}^*\hat{A} = \sum_{k=1}^{\omega} P_k A^* P_k A P_k \leq \sum_{k=1}^{\omega} P_k A^* A P_k = \hat{C},$$

also

$$s_j^2(\hat{A}) = \lambda_j(\hat{A}^*\hat{A}) \leq \lambda_j(\hat{C}), \quad j = 1,2,3,\ldots.$$

Andererseits ist nach dem bereits bewiesenen Ungleichungen angewandt auf $\hat{C}\ (\geq 0)$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\hat{C}) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(C) = \sum_{j=1}^{n} s_j^2(A), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Da nach Voraussetzung $s_j^2(A) = s_j^2(\hat{A})$, folgt

$$\lambda_j(\hat{C}) = s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A) = \lambda_j(C)$$

und daher nach dem bereits gezeigten Teil $\hat{C} = C$, und nach Lemma I.2 $\hat{A}^*\hat{A} = \hat{C}$. Es folgt also auch $P_k A^* P_k A P_k =$
$= P_k A^* A P_k$ d.h. $P_k A^*(I - P_k) A P_k = 0$, oder

$$(I - P_k) A P_k = 0.$$

Wir erhalten für $j \neq k$: $P_j A P_k = P_j (I - P_k) A P_k = 0$, und damit auch $(Q = I - \sum_{j=1}^{\omega} P_j)$ $Q A P_k = 0$. Es gilt auch $\hat{C} Q = 0$ und daher $0 = QCQ = (AQ)^*(AQ)$ also $AQ = 0$. Insgesamt erhält man

$$A = \left(\sum_{k=1}^{\omega} P_k + Q\right) A \left(\sum_{k=1}^{\omega} P_k + Q\right) = \sum_{k=1}^{\omega} P_k A P_k = \hat{A}. \qquad \square$$

Aus Lemma I.18 + Bemerkung erhält man unmittelbar:

Korollar I.30: Sei $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, $f(0)=0$) eine nichtfallende konvexe Funktion, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} f(s_j(\hat{A})) \le \sum_{j=1}^{n} f(s_j(A)), \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Ist $f$ streng konvex und ist die rechte Seite für $n=\infty$ endlich, so gilt "=" für $n=\infty$ genau dann, wenn $A = \hat{A}$. Ist $f$ streng wachsend und gilt "=" für $n=\infty$ (und ist die rechte Seite endlich), so folgt $AQ = 0$.

Beweis: Es ist nur die letzte Aussage zu beweisen: Setze $B = A(I-Q)$, dann gilt

$$\hat{B} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k A(I-Q) P_k = \hat{A},$$

also folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(\hat{A})) \le \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(B)).$$

Andererseits ist $B B^* \le A A^*$, also $s_j(B^*) = s_j(B) \le s_j(A) = s_j(A^*)$, d.h. es folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(B)) \le \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)).$$

Gilt nun "=" und ist $f$ streng monoton, so folgt $s_j(B^*) = s_j(A^*)$, d.h. $\lambda_j(B B^*) = \lambda_j(A A^*)$ und daher wegen Lemma I.2 $B B^* = A A^*$. Es gilt also $A(I-Q)A^* = AA^*$ oder $(AQ)(AQ)^* = 0$. Daraus folgt aber $(AQ)^* = 0$, also $AQ = 0$.

$\square$

Bemerkung: Ist $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem und bezeichnet $P_j$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{span}\{\phi_j\}$, so gilt für $A_j = P_j A P_j$ stets $s_1(A_j) = |(A\phi_j, \phi_j)|$. Wir haben also tatsächlich Verallgemeinerungen von Sätzen über Diagonalelemente gefunden.

## 6. Operatoren mit kompaktem Imaginärteil:

Wir schreiben wieder $A = A_{Re} + i A_{Im}$ mit

$$A_{Re} = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_{Im} = \frac{A - A^*}{2i}.$$

In diesem Abschnitt betrachten wir $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $A_{Im} \in \mathcal{J}_\infty$. Wegen ??? ([GK], I.5.2) besteht das nichtreelle Spektrum von $A$ aus einer höchstens abzählbaren Menge von normalen Eigenwerten.

Sei $\nu_{Im}(A)$ die Summe der algebraischen Vielfachheiten von den nichtreellen Eigenwerten $\lambda_j(A)$, $j = 1, \dots, \nu_{Im}(A)$, von $A$. Die $\lambda_j$'s seien nach absteigenden ~~Beträgen~~ Betrag vom Imaginärteil geordnet.

<u>Lemma I.31:</u> Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A_{Im} \in \mathcal{J}_\infty$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Im}\, \lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{Im}), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Es gilt $|\mathrm{Im}\, \lambda_j(A)| = s_j(A_{Im})$ für alle $j$ genau dann, wenn entweder

(i) $\nu_{Im}(A) = \nu(A_{Im})$ und $A$ ist normal,

oder

(ii) $\nu_{Im}(A) < \nu(A_{Im})$ insbesondere also $\nu_{Im}(A) < \infty$, $A$ induziert im span $E_{Im}$ aller verallgemeinerten Eigenräume zu nichtreellen Eigenwerten einen normalen Operator, der Teilraum $\mathcal{H} \ominus E_{Im}$ ist unter $A$ invariant und für den dort induzierten Operator $\tilde{A}$ gilt $s_1(\tilde{A}_{Im}) = s_{\nu_{Im}(A)+1}(A_{Im})$.

<u>Beweis:</u> Sei $\omega_j$, $j = 1, \dots, \nu_{Im}(A)$, eine Schur-Basis in $E_{Im}$ (vgl. Lemma I.17), dann ist

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + \dots + a_{j,j-1}\omega_{j-1} + \lambda_j \omega_j .$$

Wegen $\lambda_j = (A\omega_j, \omega_j) = (A_{Re}\omega_j, \omega_j) + i(A_{Im}\omega_j, \omega_j)$ gilt $\mathrm{Im}\, \lambda_j = (A_{Im}\omega_j, \omega_j)$. Sei nun $U$ ~~der~~ ein unitärer Operator mit

$$U w_j = \varepsilon_j w_j, \quad \varepsilon_j = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\lambda_j),$$

dann ist $|\operatorname{Im}\lambda_j| = (U^* A_{\mathfrak{Im}} w_j, w_j)$ und mit Lemma I.23 erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im}\lambda_j| = \sum_{j=1}^{n} (U^* A_{\mathfrak{Im}} w_j, w_j) \le \sum_{j=1}^{n} s_j(A_{\mathfrak{Im}}).$$

Ist $A$ normal, oder erfüllt $A$ die Bedingungen (ii), so gilt klarerweise $s_j(A_{\mathfrak{Im}}) = |\operatorname{Im}\lambda_j(A)|$. Umgekehrt: Sei $s_j(A_{\mathfrak{Im}}) = |\operatorname{Im}\lambda_j(A)|$, dann gilt

$$|(A_{\mathfrak{Im}} w_j, w_j)| = s_j(A_{\mathfrak{Im}}), \quad j = 1, \dots, \nu_{\mathfrak{Im}}(A)$$

wie in ~~Nach~~ Lemma I.16 ist $\{w_j\}$ ein in $E_{\mathfrak{Im}}$ vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $A_{\mathfrak{Im}}$. Insbesondere ist $E_{\mathfrak{Im}}$ unter $A_{\mathfrak{Im}}$ invariant. Es gilt $(A w_j, w_k) = \overline{(A^* w_k, w_j)} = 0$, $j < k$, also

$$a_{jk} = (A w_j, w_k) = (A w_j, w_k) - (A^* w_j, w_k) = 2i (A_{\mathfrak{Im}} w_j, w_k) = 0$$

für $j > k$, also induziert $A$ ~~dann~~ in $E_{\mathfrak{Im}}$ einen normalen Operator. Der Teilraum $E_{\mathfrak{Im}}$ ist invariant unter ~~unter~~ $A_{\mathfrak{Im}}$, $A$, $A_{\mathfrak{Re}}$, also hat auch $\mathcal{H} \ominus E_{\mathfrak{Im}}$ diese Eigenschaft. Die Aussagen in (ii) folgen nun offensichtlich. Ist $\nu_{\mathfrak{Im}}(A) = r_{\mathfrak{Im}}(A)$, so folgt aus Lemma I.16 bereits, daß $A_{\mathfrak{Im}}(\mathcal{H} \ominus E_{\mathfrak{Im}}) = 0$ ist und daher $A$ in $\mathcal{H} \ominus E_{\mathfrak{Im}}$ einen selbstadjungierten Operator erzeugt.

$\square$

<u>Satz I.32:</u> Sei $f(x)$, $0 \le x < \infty$, $f(0) = 0$, nichtfallend und konvex. Dann gilt für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A_{\mathfrak{Im}} \in \mathcal{V}_\infty$ stets

$$\sum_{j=1}^{n} f(|\operatorname{Im}\lambda_j(A)|) \le \sum_{j=1}^{n} f(s_j(A_{\mathfrak{Im}})), \quad n = 1, 2, \dots, \nu_{\mathfrak{Im}}(A).$$

Ist $f$ streng konvex, so gilt die Gleichheit $\displaystyle\sum_{j=1}^{\nu_{\mathfrak{Im}}(A)} f(|\operatorname{Im}\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j)$ genau dann, wenn $A$ normal ist.

<u>Beweis:</u> Diese Aussage folgt sofort aus dem letzten Lemma und Lemma I.18 + Bemerkung.

$\square$

## 7. s-Zahlen für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

Sei $H \geq 0$, $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, gegeben. Wir definieren die folgenden Zahlen $\lambda_j(H)$, $j = 1, 2, \ldots$. Die Menge $\sigma_{ess}(H) := \{\lambda \in \sigma(H) \mid \lambda$ ist nicht normaler Eigenwert$\}$ heisst das essentielle Spektrum von $H$. Sei nun $\mu$ der größte Spektralpunkt von $H$. Ist $\mu \in \sigma_{ess}(H)$, so setzen wir $\lambda_1(H) = \lambda_2(H) = \ldots = \mu$. Ist $\mu$ ein normaler Eigenwert der Vielfachheit $p$, so setze $\lambda_1(H) = \ldots = \lambda_p(H) = \mu$, und verfahre mit dem nächstkleineren Spektralpunkt genauso weiter.

Die Zahl $\lambda_\infty(H) := \lim_{j \to \infty} \lambda_j(H)$ ist offensichtlich gleich $\sup \sigma_{ess}$. Wir bemerken ohne Beweis (welcher jedoch ganz analog zum Beweis von Satz I.1 geht), dass die Minimax-Eigenschaften auch hier gelten:

**Satz I.33.** (Minimax-Eigenschaften) Sei $H \in \mathcal{L}(H)$, $H \geq 0$, dann gilt

$$\lambda_j(H) = \inf_{\mathcal{L} \in \mathcal{M}_{j-1}} \sup_{\phi \in \mathcal{L}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(H\phi, \phi)}{(\phi, \phi)}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Aus diesem Satz erhält man wieder die Beziehung $\lambda_j(H_1) \leq \lambda_j(H_2)$, falls $0 \leq H_1 \leq H_2$ gilt.

Bemerkung: Sei $E_\lambda$ (linksstetig normiert) die Spektralschar von $H$, setze $\mathcal{H}_s := (I - E_{\lambda_\infty(H)+0})\mathcal{H}$ und definiere

$$\hat{H}(\phi + \psi) := H\phi + \lambda_\infty(H)\psi, \quad \phi \in \mathcal{H}_s, \ \psi \in \mathcal{H}_s^\perp .$$

Dann ist (Spektralsatz) der Operator $\hat{H} - \lambda_\infty I$ kompakt und es gilt unmittelbar

$$\lambda_j(H) = \lambda_j(\hat{H} - \lambda_\infty I) + \lambda_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Weiters besitzt $\hat{H}$ die Darstellung

$$\hat{H} = \sum_j \lambda_j(H)\,(\cdot,\phi_j)\,\phi_j + \lambda_\infty(H)\,P_{\mathcal{H}_s^\perp},$$

wobei $P_{\mathcal{H}_s^\perp}$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_s^\perp$ ist und $\{\phi_j\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_s$ von Eigenvektoren von $H$.

Wir setzen im folgenden für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$s_j(A) := \lambda_j\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Die Aussagen von Lemma I.7 gelten auch hier.

Ist $A = UH$ die Polar-Zerlegung, so setze $\hat{A} := U\hat{H}$. Dann gilt mit $\psi_j := U\phi_j$

$$\hat{A} = \sum_j s_j(A)\,(\cdot,\phi_j)\,\psi_j + s_\infty(A)\,U P_{\mathcal{H}_s^\perp},$$

die Schmidt-Darstellung für $\hat{A}$. Beachte, daß $\hat{A} - s_\infty U$ kompakt ist.

# II. Norm-Ideale beschränkter Operatoren

## 1. Norm-Ideale:

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Ring der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$. Eine Teilmenge $\mathcal{J}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ein (echtes) Ideal, wenn

(i) $A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow A + B \in \mathcal{J}$; $A \in \mathcal{J}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda A \in \mathcal{J}$

(ii) $A \in \mathcal{J}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow AB, BA \in \mathcal{J}$,

(iii) $\mathcal{J} \neq \{0\}$, $\mathcal{J} \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Beispiel: Die Mengen $\mathcal{J}_\infty$ aller kompakten und $\mathcal{K}$ aller endlichdimensionalen Operatoren sind Ideale von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

II.1. Satz: Sei $\mathcal{J}$ ein Ideal, dann gilt

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_\infty .$$

Beweis:

•) Wir zeigen zunächst $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_\infty$. Angenommen $A \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_\infty$, und sei $A = UH$ die Polarzerlegung von $A$. Wegen $H = U^{-1}A$ gilt $H \in \mathcal{J}$ aber wegen $A \notin \mathcal{J}_\infty$ gilt $H \notin \mathcal{J}_\infty$. Sei $E(\lambda)$ die Spektralfunktion von $H$. Da $H$ nicht kompakt ist existiert $\varepsilon > 0$, so daß $I - E(\varepsilon)$ unendlichdimensional ist. Der Teilraum $\tilde{\mathcal{H}} := (I - E(\varepsilon))\mathcal{H}$ ist unter $H$ invariant und $H$ induziert in $\tilde{\mathcal{H}}$ einen invertierbaren Operator $\tilde{H}$. Sei $V$ eine Isometrie von $\mathcal{H}$ auf $\tilde{\mathcal{H}}$, dann bildet $V^*$ den Raum $\tilde{\mathcal{H}}$ isometrisch auf $\mathcal{H}$ ab und es gilt $V^*V = I$, $VV^* = I - E(\varepsilon)$. Offenbar ist $V^*\tilde{H}V$ invertierbar und wegen $V^*\tilde{H}V = V^*HV$ in $\mathcal{J}$, ein WS!

•) Wir zeigen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$. Es genügt zu zeigen, daß jeder eindimensionale Operator in $\mathcal{J}$ liegt. Sei $A \in \mathcal{J}$, $A \neq 0$. Für einen beliebigen eindimensionalen Operator $K$ gibt es offensichtlich Operatoren $B, C$ (sogar eindimensionale), so daß $K = BAC$ gilt, also ist $K \in \mathcal{J}$.

$\square$

<u>II. 2. Korollar:</u> Das einzige bzgl. der Operatornorm abgeschlossene Ideal ist $\mathcal{J}_\infty$.

Im folgenden bezeichne $A(\lambda)$ die Fredholm-Resolvente von $A$. $A(\lambda)$ ist durch die Beziehung

$$I + \lambda A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1}, \ \lambda \neq 0, \lambda^{-1} \in \varrho(A),$$

definiert.

<u>II. 3. Lemma:</u> Sei $A \in \mathcal{J}$, dann gilt auch $A^* \in \mathcal{J}$ und $A(\lambda) \in \mathcal{J}$, $\lambda \neq 0, \lambda^{-1} \in \varrho(A)$.

<u>Beweis:</u>

·) Sei $A = UH$, $H = U^{-1}A \in \mathcal{J}$. Dann gilt $A^* = HU^* \in \mathcal{J}$.

·) Es gilt $I = (I + \lambda A(\lambda))(I - \lambda A) = I + \lambda A(\lambda) - \lambda A - \lambda^2 A(\lambda) A$,

also $A(\lambda) = A + \lambda A(\lambda) A \in \mathcal{J}$.

$\square$

<u>~~II.4.~~ Definition:</u> Sei $\mathcal{J}$ ein Ideal. Eine Funktion $\|\cdot\|_s : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ heißt symmetrische Norm auf $\mathcal{J}$, falls gilt $(A, B \in \mathcal{J}, \lambda \in \mathbb{C})$

(i) $\|A\|_s > 0$, $A \neq 0$,

(ii) $\|\lambda A\|_s = |\lambda| \, \|A\|_s$,

(iii) $\|A + B\|_s \leq \|A\|_s + \|B\|_s$

(iv) $\|XAY\|_s \leq \|X\| \, \|A\|_s \cdot \|Y\|$, $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

(v) ist $A$ eindimensional, so gilt $\|A\|_s = \|A\|$.

Die Funktion $\|\cdot\|_s$ heißt unvariante Norm auf $\mathcal{J}$ falls statt (iv) die Bedingung (iv') $\|UA\|_s = \|AU\|_s = \|A\|_s$, $U$ unitär,

gilt.

Beispiel: Die Operatornorm ist eine symmetrische Norm für jedes Ideal $\mathfrak{J}$.

II.4. Lemma: Jede symmetrische Norm ist invariant. Sei $\|\cdot\|_s$ eine Funktion die (i)-(iii) und (iv) bzw. (iv') erfüllt. Dann gilt für jeden eindimensionalen Operator $A$

$$\|A\|_s = c\|A\|$$

mit einer nicht von $A$ abhängigen Konstanten $c$. Die Bedingung (v) ist also nur eine Normierung.

Beweis:

•) Seien $U, V$ unitär, dann gilt wegen (iv)

$$\|UAV\|_s \le \|A\|_s, \quad \|A\|_s = \|U^{-1}(UAV)V^{-1}\|_s \le \|UAV\|_s,$$

also folgt (iv').

•) Sei $c$ definiert durch $\|A_0\|_s = c\|A_0\|$ für einen gewissen eindimensionalen Operator $A_0$. Jeder andere eindimensionale Operator $A$ lässt sich schreiben als $A = \lambda U A_0 V$ mit $U, V$ unitär, $\lambda = \frac{\|A\|}{\|A_0\|}$, also folgt wegen (iv')

$$\|A\|_s = \lambda \|A_0\|_s = \lambda c \|A_0\| = c\|A\|. \quad \square$$

Einige Eigenschaften von symmetrischen Normen sind:

II.5. Lemma: Sei $A \in \mathfrak{J}$, $\|\cdot\|_s$ eine symmetrische Norm auf $\mathfrak{J}$. Dann gilt:
(i) Es gilt $\|A^*\|_s = \|A\|_s = \|(AA^*)^{\frac{1}{2}}\|_s = \|(A^*A)^{\frac{1}{2}}\|_s$.

(ii) Ist $B \in \mathfrak{J}_\infty$ und gilt $s_j(B) \le c\, s_j(A)$, $j = 1, 2, \ldots$, so ist $B \in \mathfrak{J}$ und $\|B\|_s \le c\|A\|_s$. Insbesondere hängt die Norm $\|\cdot\|_s$ nur von den s-Zahlen des Argumentes ab.

(iii) Es gilt $\|A\| \le \|A\|_s$. Ist $A$ endlichdimensional, so gilt $\|A\|_s \le \sum_j s_j(A)$. Bemerke hier $\|A\| \equiv s_1(A)$.

Beweis:

(i) Sei $A = UH$, $H = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, dann folgt wegen (iv') und $A^* = HU^*$ die Behauptung.

(ii) Sei $H_A = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $H_B = (B^*B)^{\frac{1}{2}}$, wegen der VS gibt es einen unitären Operator $V$ und einen Operator $X \geq 0$, $\|X\| \le 1$, mit

$$H_B = c\, XVH_AV^{-1}.$$

Es folgt $B \in \mathcal{J}$ und mit (iv) auch $\|B\|_s \le c\|A\|_s$.

(iii) Sei $B := s_1(A)\,(\cdot,\varphi)\varphi$ mit einem Einheitsvektor $\varphi$. Wegen der Behauptung (ii) mit $c = 1$ folgt $\|B\|_s \le \|A\|_s$. Es ist offenbar $\|B\|_s \overset{\text{mit (v)}}{=} \|B\| = s_1(A) = \|A\|$.

Ist $A$ endlichdimensional und $A = \sum_j s_j(A)\,(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$ die Schmidt Darstellung, so folgt mit (iii) und (v) daß

$$\|A\|_s = \Big\|\sum_j s_j(A)\,(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big\|_s \le \sum_j s_j(A).$$

□

Definition: Ein Ideal $\mathcal{J}$ heißt ein Norm-Ideal, falls es eine symmetrische Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ auf $\mathcal{J}$ gibt, so daß $\mathcal{J}$ mit $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ ein Banachraum ist.

Beispiel: Das Ideal $\mathcal{J}_\infty$ mit der Operatornorm ist ein Norm-Ideal.

II.6. Lemma: Seien $\mathcal{J}_\alpha$ und $\mathcal{J}_\beta$ Norm-Ideale mit gewissen Normen $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$. Gilt $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{J}_\beta$ als Mengen, so sind $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ äquivalent.

Beweis: Betrachte $\|\cdot\|_m := \max(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta)$. Wegen

$$\|\cdot\| \le \|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta \le \max(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta)$$

ist die Menge $\mathcal{J} := \mathcal{J}_\alpha \; (= \mathcal{J}_\beta)$ mit der Norm $\|\cdot\|_m$ ein

Banachraum. Die Behauptung folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung. □

## 2. Symmetrische normierende Funktionen:

Sei $\hat{c}$ die Menge aller Folgen $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen wo nur endlich viele $\neq 0$ sind.

Definition: Eine Funktion $\phi : \hat{c} \to \mathbb{R}$ heißt normierende Funktion, falls

(i) $\phi(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$,

(ii) $\phi(\alpha \xi) = |\alpha| \phi(\xi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iii) $\phi(\xi + \eta) \leq \phi(\xi) + \phi(\eta)$,

(iv) $\phi(1, 0, 0, \dots) = 1$.

Gilt zusätzlich

(v) $\phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) = \phi(|\xi_{\sigma(1)}|, \dots, |\xi_{\sigma(n)}|, 0, 0, \dots)$, für jede Permutation $\sigma$,

so heißt $\phi$ symmetrische normierende Funktion (s.n.-Funktion).

Sei $\hat{k}$ die Menge aller Folgen nichtnegativer, nichtwachsender reeller Zahlen wo nur endlich viele $\neq 0$ sind. Mit $\xi \in \hat{c}$ assoziiert man eine Folge $\xi^* \in \hat{k}$:

$$\xi^* := (|\xi_{\sigma(1)}|, |\xi_{\sigma(2)}|, \dots)$$

mit einer geeigneten Permutation $\sigma$. Wegen $\phi(\xi) = \phi(\xi^*)$ ist offenbar eine s.n.-Funktion durch ihre Werte auf $\hat{k}$ festgelegt.

RS → Bevor wir zum Zusammenhang zwischen s.n.-Funktionen und symmetrischen Normen bzw. Norm-Idealen kommen, benötigen wir einige Eigenschaften von s.n.-Funktionen und eine Charakterisierung über ihre Werte auf $\hat{k}$.

II.7. Lemma: Sei $\Phi$ eine s.n.-Funktion. Seien $\xi, \eta \in \hat{C}$.

(i) Gilt $|\xi_j| \leq |\eta_j|$, $j = 1, 2, \dots$, so ist $\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta)$.

(ii) Sei $\xi, \eta \in \hat{k}$. Gilt $\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j$, $\ell = 1, 2, \dots$, so ist $\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta)$.

(iii) Es gilt $\Phi_\infty(\xi) \leq \Phi(\xi) \leq \Phi_1(\xi)$, $\xi \in \hat{C}$.

(iv) Sei $\xi, \eta \in \hat{C}$. Dann gilt

$$|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)| \leq \Phi(\xi - \eta) \leq \sum_j |\xi_j - \eta_j| .$$

Beweis:

(i) Es genügt den Fall $\xi_j = \eta_j \geq 0$, $j \neq j_0$, $\eta_{j_0} > \xi_{j_0} \geq 0$, zu betrachten. Sei $\alpha = \frac{\xi_{j_0}}{\eta_{j_0}}$, und $\xi', \xi''$ definiert durch

$$\xi'_j = \frac{1+\alpha}{2}\xi_j, \quad \xi''_j = \frac{1-\alpha}{2}\xi_j, \quad j \neq j_0,$$

$$\xi'_{j_0} = \frac{1+\alpha}{2}\eta_{j_0}, \quad \xi''_{j_0} = \frac{-1+\alpha}{2}\eta_{j_0}.$$

Dann ist $\xi = \xi' + \xi''$ und es gilt (mit (v))

28.10.

$$\Phi(\xi') = \frac{1+\alpha}{2}\Phi(\eta), \quad \Phi(\xi'') = \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\eta).$$

Man erhält daher $\Phi(\xi) \leq \Phi(\xi') + \Phi(\xi'') = \Phi(\eta)$.

•) Wir zeigen zuerst ein Hilfsmittel für (ii): Seien $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_n \geq 0$, $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j$, $\ell = 1, \dots, n$. Dann ist der Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ in der konvexen Hülle der Vektoren $\eta^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, 2^n n!$, die aus $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ durch permutieren und Vorzeichenwechseln der Komponenten entstehen.

Denn: Angenommen $\xi$ ist nicht in der konvexen Hülle. Dann gibt es eine Hyperebene, so daß $\xi$ auf der einen, die konvexe Hülle auf der anderen Seite liegt. D.h. es gibt Zahlen $a_1, \dots, a_n, b$ mit

$$\sum_j a_j \xi_j > b, \quad \sum_j a_j x_j \leq b, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \text{konvexen Hülle}.$$

Sei $a^*$ der Vektor der entsteht wenn man die $|a_j|$ nichtwachsend

anordnet. Dann gibt es ein $\nu$, so daß
$$\sum_j a_j \eta_j^{(\nu)} = \sum_j a_j^* \eta_j .$$
Es folgt $\sum_j a_j^* \eta_j \leq b$. Nun gilt wegen der VS!
$$b \geq \sum_{j=1}^n a_j^* \eta_j = (\sum_{j=1}^n \eta_j)\, a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} \left[ (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{i=1}^j \eta_i \right] \geq$$
$$\geq (\sum_{j=1}^n \xi_j)\, a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} \left[ (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{i=1}^j \xi_i \right] = \sum_{j=1}^n a_j^* \xi_j .$$
Andererseits ist wegen $\sum_{i=1}^\ell a_i \leq \sum_{i=1}^\ell a_i^*$
$$\sum_{j=1}^n a_j^* \xi_j = (\sum_{j=1}^n a_j^*)\, \xi_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left[ (\xi_j - \xi_{j+1}) \sum_{i=1}^j a_i^* \right] \geq \sum_{j=1}^n a_j \xi_j > b,$$
ein WS!

(ii) Wähle $n$ so groß, daß bei $\xi$ und $\eta$ alle größeren Komponenten $=0$ sind und schreibe nach dem Hilfssatz von oben
$$\xi = \sum_{\nu=1}^{2^n n!} t_\nu \eta^{(\nu)}, \quad \sum t_\nu = 1,\ t_\nu \geq 0.$$
Wegen $\phi(\eta^{(\nu)}) = \phi(\eta)$ folgt $\phi(\xi) \leq \sum_\nu t_\nu \phi(\eta^{(\nu)}) = \phi(\eta)$.

(iii) Die linke Ungleichung folgt aus (i), die rechte aus (ii) wegen $\phi(\xi_1,0,0,\dots) \leq \phi(\xi) \leq \phi(\sum \xi_i,0,0,\dots)$, $\xi \in \hat{k}$.

(iv) Die linke Ungleichung ist die Dreiecksungleichung nach unten, die rechte ist die rechte aus (iii). $\square$

<u>II.8. Lemma:</u> Sei $\phi : \hat{k} \to \mathbb{R}$. Die durch
$$\tilde{\phi}(\xi) := \phi(\xi^*), \quad \xi \in \hat{c},$$
definierte Fortsetzung von $\phi$ ist genau dann eine s.n.-Funktion, falls $\phi$ den folgenden Bedingungen genügt:

(i') $\phi(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$,

(ii') $\phi(\alpha \xi) = \alpha \phi(\xi)$, $\alpha \geq 0$,

(iii') $\phi(\xi + \eta) \leq \phi(\xi) + \phi(\eta)$,

(iv') $\phi(1,0,0,\dots) = 1$

(v') Ist $\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j$, so folgt $\phi(\xi) \leq \phi(\eta)$.

Beweis:

•) Ist $\tilde{\phi}$ eine s.n.-Funktion, so gilt (i') – (v') wegen der Definition und II.7.(ii).

•) Erfülle umgekehrt $\phi$ (i') – (v'). Sei $\zeta = \xi + \eta$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j^* \leq \sum_{j=1}^{\ell} (\xi_j^* + \eta_j^*), \quad \ell = 1,2,\ldots,$$

also ist $\tilde{\phi}(\xi+\eta) = \phi(\zeta^*) \leq \phi(\xi^* + \eta^*) \leq \phi(\xi^*) + \phi(\eta^*) = \tilde{\phi}(\xi) + \tilde{\phi}(\eta)$. Die anderen Eigenschaften von $\tilde{\phi}$ sind klar.

$\square$

II.8. Satz: Sei $\|.\|_s$ eine invariante Norm auf $\mathcal{K}$. Für $\xi \in \hat{l}$ sei $A_\xi \in \mathcal{K}$, so daß $s(A_\xi) = (s_1(A_\xi), s_2(A_\xi), \ldots) = \xi$ gilt, und sei $\phi(\xi)$ definiert durch

$$\phi_s(\xi) := \| A_\xi \|_s .$$

Dann ist $\phi_s$ eine s.n.-Funktion (bzw. setzt sich zu einer fort).

Ist umgekehrt $\phi$ eine s.n.-Funktion, so definiert

$$\| A \|_\phi := \phi(s(A)), \quad A \in \mathcal{K},$$

eine symmetrische Norm auf $\mathcal{K}$.

Insbesondere ist jede invariante Norm auf $\mathcal{K}$ dort sogar symmetrisch.

Beweis:

•) Sei $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem von $\mathcal{H}$. Dann kann man die Definition von $\phi_s$ auch als

$$\phi_s(\xi) = \| \sum_j \xi_j (\cdot, \varphi_j) \varphi_j \|_s, \quad \xi \in \hat{l},$$

formulieren. Die Fortsetzung von $\phi_s$ (wieder $\phi_s$ genannt) erfüllt offensichtlich (i), (ii) und (iv). Es gilt auch (v) wegen der Eigenschaft (iv') der invarianten Norm: denn permutieren eines ONS bzw. ±1 anhängen ist sicher unitär. Das gleiche Argument zeigt (iii):

$$\Phi_s(\xi+\eta) = \Big\| \sum_j |\xi_{\sigma(j)}+\eta_{\sigma(j)}| \, (\cdot,\varphi_j)\varphi_j \Big\|_s =$$

$$= \Big\| \sum_j (\xi_{\sigma(j)}+\eta_{\sigma(j)}) (\cdot,\varphi_j)\varphi_j \Big\|_s \le \Big\| \sum_j \xi_{\sigma(j)} (\cdot,\varphi_j)\varphi_j \Big\|_s +$$

$$+ \Big\| \sum_j \eta_{\sigma(j)} (\cdot,\varphi_j)\varphi_j \Big\|_s = \Phi_s(\xi) + \Phi_s(\eta).$$

·) Ist umgekehrt $\Phi$ eine s.n.-Funktion, so erfüllt $\|\cdot\|_\Phi$ klarerweise (i) und (ii) der Definition der symmetrischen Norm. Nun gilt für die s-Zahlen von Operatoren $A, B \in \mathcal{K}$ stets

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j(A+B) \le \sum_{j=1}^{\ell} s_j(A) + \sum_{j=1}^{\ell} s_j(B),$$

und daher

$$\|A+B\|_\Phi = \Phi(s(A+B)) \le \Phi(s(A)+s(B)) \le \Phi(s(A)) + \Phi(s(B)) =$$
$$= \|A\|_\Phi + \|B\|_\Phi,$$

also gilt (iii). Die Bedingung (iv) folgt ~~dies~~ aus $s_j(BAC) \le \|B\|\cdot\|C\|\, s_j(A)$, denn

$$\|BAC\|_\Phi = \Phi(s(BAC)) \le \Phi(\|B\|\,\|C\|\, s(A)) = \|B\|\cdot\|C\|\cdot\|A\|_\Phi.$$

Für einen eindimensionalen Operator $A$ gilt nun $s_1(A) = \|A\|$, $s_2(A) = \ldots = 0$, also ist $\|A\|_\Phi = \Phi(\|A\|, 0, 0, \ldots) = \|A\|$.

$\square$

Sei $\mathcal{J}$ mit der ~~Ex~~ symmetrischen Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ ein Norm-Ideal. Dann induziert $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$ insbesondere eine s.n.-Funktion nach II.8, denn $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$. Umgekehrt induziert auch eine s.n.-Funktion gewisse Norm-Ideale.

Im folgenden bezeichne mit $c_0$ die Menge aller reellen Nullfolgen. Für $\xi \in c_0$ setze $\xi^{(n)} := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$. Ist $\Phi$ eine s.n.-Funktion und $\xi \in c_0$, so ist die Folge $\Phi(\xi^{(n)})$ nichtfallend.

<u>Definition</u>: Sei $\Phi$ eine s.n.-Funktion. Bezeichne mit $c_\Phi$ die Menge aller $\xi \in c_0$, für die

$$\phi(\xi) := \sup_n \phi(\xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \phi(\xi^{(n)}) < \infty .$$

Weiters sei $\mathfrak{S}_\phi$ die Menge aller $A \in \mathfrak{S}_\infty$, für die

$$\|A\|_\phi := \phi(s(A)) < \infty, \text{ d.h. } s(A) \in c_\phi .$$

<u>II.10. Lemma:</u> Es gilt:

(i) $\xi, \eta \in c_\phi \Rightarrow \xi + \eta \in c_\phi$,

(ii) $\xi \in c_\phi,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\xi \in c_\phi$,

(iii) $\xi \in c_\phi$, $\eta \in c_0$ und gilt $\sum_{j=1}^{l} \eta_j^* \le \sum_{j=1}^{l} \xi_j^*$, $l = 1,2,\dots$, so ist $\eta \in c_\phi$,

(iv) $\xi \in c_\phi \Leftrightarrow \xi^* \in c_\phi$,

(v) Bezeichnet $A_n$ die $n$-te Partialsumme der Schmidt-Darstellung von $A \in \mathfrak{S}_\infty$, so ist

$A \in \mathfrak{S}_\phi \Leftrightarrow \sup_n \|A_n\|_\phi < \infty$. In diesem Fall ist $\|A\|_\phi = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|_\phi$.

RS → ⊗

<u>Beweis:</u>

(i), (ii) klar. (iii): Unter den angegebenen VS. gilt für jedes $n$

$$\phi(\eta^{(n)}) = \phi(\eta^{(n)*}) \le \phi(\eta^{*(n)}) \le \phi(\xi^{*(n)})$$

Für geeignetes $m(n)$ gilt $\phi(\xi^{*(n)}) \le \phi(\xi^{(m)*}) = \phi(\xi^{(m)}) \le \phi(\xi)$,

also folgt $\eta \in c_\phi$. Dieses Argument zeigt auch (iv).

(v): Folgt aus $s(A_n) = s(A)^{(n)}$. (vi): folgt aus Eigenschaft (v') von $\phi$. □

<u>II.11. Satz:</u> Sei $\phi$ eine s.n.-Funktion. Dann ist $\mathfrak{S}_\phi$ ein Norm-Ideal bzgl. der symmetrischen Norm $\|.\|_\phi$.
Der Abschluß $\mathfrak{S}_\phi^{(0)}$ von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{S}_\phi$ ist auch ein Norm-Ideal.

<u>Beweis:</u>

• Sei $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_\phi$, d.h. $s(A_1), s(A_2) \in c_\phi$. Dann ist auch $s(A_1) + s(A_2) \in c_\phi$. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{l} s_j(A_1 + A_2) \le \sum_{j=1}^{l} s_j(A_1) + \sum_{j=1}^{l} s(A_2), \quad j = 1,2,\dots$$

also ist wegen der Eigenschaft (v') von $\phi$ auch $A_1 + A_2 \in \mathfrak{S}_\phi$ und

$$|A_1+A_2|_\phi \le |A_1|_\phi + |A_2|_\phi .$$

Klar ist $\lambda A \in \mathcal{J}_\phi$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{J}_\phi$, und $\|\lambda A\|_\phi = |\lambda|\,\|A\|_\phi$. Die Eigenschaften (i) und (v) einer symmetrischen Norm sind klar. (iv) folgt wegen $s_j(BAC) \le \|B\|\cdot\|C\|\, s_j(A)$ und daher ist $\mathcal{J}_\phi$ auch ein Ideal.

·) Wir zeigen, daß $\mathcal{J}_\phi$ vollständig ist. Sei $(A_n)$ eine C-Folge in der Norm $\|\cdot\|_\phi$. Dann gilt wegen II.7,(iii),

$$\|A_n - A_m\| = s_1(A_n - A_m) \le \|A_n - A_m\|_\phi .$$

Sei $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ bzgl. $\|\cdot\|$. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} s_j(A_n - A_m) = s_j(\cancel{A}\ A_n - A)$

5.11.98 für jedes $n, j = 1,2,\dots$, und wegen II.7, (iv), gilt für $k, n$ fest

$$\phi\left(s(A_n-A)^{(k)}\right) = \lim_{m\to\infty} \phi\left(s(A_n - A_m)^{(k)}\right) \le \sup_m \|A_n - A_m\|_\phi < \infty,$$

d.h. $A \in \mathcal{J}_\phi$ und $\lim A_n = A$ bzgl. $\|\cdot\|_\phi$. □

RS → ⊗

<u>Beispiel:</u> Betrachte die s.n.-Funktionen $\phi_\infty$ und $\phi_1$. Dann gilt offensichtlich, daß $\mathcal{J}_{\phi_\infty} = \mathcal{J}_\infty = \mathcal{J}^{(0)}_{\phi_\infty}$ und

$$\mathcal{J}_{\phi_1} =: \mathcal{J}_1 = \left\{ A \in \mathcal{J}_\infty \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty \right\} = \mathcal{J}^{(0)}_{\phi_1} .$$

$\mathcal{J}_1$ heißt auch ~~[illegible]~~ trace class.

Zwei s.n.-Funktionen $\phi_1, \phi_2$ heißen äquivalent, falls

$$\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\phi_1(\xi)}{\phi_2(\xi)} < \infty, \quad \sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\phi_2(\xi)}{\phi_1(\xi)} < \infty,$$

gilt. Wegen II.6 gilt $\mathcal{J}_{\phi_1} = \mathcal{J}_{\phi_2}$ als Mengen genau dann wenn $\phi_1$ und $\phi_2$ äquivalent sind.

<u>II. 12. Lemma:</u> Die s.n.-Funktion $\phi$ ist genau dann äquivalent zu $\phi_\infty$, wenn

$$\sup_n \phi(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,0,\dots) < \infty,$$

genau dann zu $\Phi_1$, wenn

$$\sup_n \frac{n}{\phi(\underbrace{1,1,\dots,1}_n,0,0,\dots)} < \infty .$$

Beweis:

•) Offenbar gilt

$$\phi(\underbrace{1,\dots,1}_n,0,\dots) \leq \sup_{\xi \in \hat{l}_1} \frac{\phi(\xi)}{\xi_1},$$

andererseits aber auch für $\xi \in \hat{l}_1$

$$\frac{\phi(\xi)}{\xi_1} = \phi\left(1, \frac{\xi_2}{\xi_1}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_1}, 0, \dots\right) \leq \phi(\underbrace{1,\dots,1}_n,0,\dots),$$

d.h.

$$\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\phi(\xi)}{\Phi_\infty(\xi)} = \sup_n \phi(\underbrace{1,\dots,1}_n,0,\dots).$$

Wegen $\xi_1 \leq \phi(\xi)$ gilt stets $\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\Phi_\infty(\xi)}{\phi(\xi)} < \infty$ also folgt die erste Behauptung.

•) Offenbar gilt

$$\frac{n}{\phi(\underbrace{1,\dots,1}_n,0,\dots)} \leq \sup_\xi \frac{\Phi_1(\xi)}{\phi(\xi)} .$$

Sei $\xi \in \hat{l}_1$ und $\eta \in \hat{l}_1$ definiert als $\eta_1 = \dots = \eta_n = \frac{1}{n}\sum_j \xi_j$, $\eta_i = 0$, $i > n$.

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$

Es gilt $\sum_{j=1}^{p} \eta_j \leq \sum_{j=1}^{p} \xi_j$, $p = 1, 2, \dots$, denn offensichtlich ist

$$p \cdot \sum_{j=1}^{n} \xi_j \leq n \cdot \sum_{j=1}^{p} \xi_j .$$

Daher folgt

$$\phi(\xi) \geq \phi(\eta) = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) \cdot \phi(\underbrace{1,\dots,1}_n,0,0,\dots),$$

also

$$\frac{\Phi_1(\xi)}{\phi(\xi)} \leq \frac{n}{\phi(\underbrace{1,1,\dots,1}_n,0,0,\dots)} .$$

Insgesamt gilt also

$$\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\phi_1(\xi)}{\phi(\xi)} = \sup_n \frac{n}{\phi(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots)},$$

und die zweite Behauptung folgt denn es gilt stets $\frac{\phi(\xi)}{\phi_1(\xi)} \leq 1$.

□

## 3. Separable Norm-Ideale:

**Beispiel:** Für jede s.n.-Funktion $\phi$ ist $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$ ein separables Norm-Ideal, denn offenbar liegen die Operatoren

$$\sum_{\text{endl}} (\cdot, x_j)\, \omega_j$$

wo $x_j$ und $\omega_j$ aus einer abzählbaren dichten Teilmenge von $\mathcal{H}$ sind, dicht in $\mathcal{K}$ und damit in $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$ bzgl. der Norm $\|.\|_\phi$.

Wir werden auch die Umkehrung zeigen. Davor benötigen wir aber noch einige andere Aussagen.

**II.13. Lemma:** Seien $A_n \in \mathcal{J}_\infty$ schwach konvergent $\lim^\omega A_n = A \in B(\mathcal{H})$. Gilt $\lim_{j\to\infty} \sup_m s_j(A_m) = 0$, so ist $A \in \mathcal{J}_\infty$ und

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j(A) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \liminf_{m\to\infty} s_j(A_m), \quad \ell = 1,2,\dots.$$

**Beweis:** Sei die Schmidt Darstellung von $A_n$ gleich

$$A_n = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A_n)\,(\cdot, \varphi_j^{(n)})\,\psi_j^{(n)},$$

und bezeichne

$$T_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A_n)\,(\cdot, \varphi_j^{(n)})\,\psi_j^{(n)}.$$

Sei $(n_r)_{r=1}^\infty$ eine Folge so daß die Folgen (Diagonalverfahren) $(s_j(A_{n_r}))_{r=1}^\infty$ konvergieren und $(\varphi_j^{(n_r)})_{r=1}^\infty$, $(\psi_j^{(n_r)})$ schwach konvergieren:

$$\lim_{r\to\infty} s_j(A_{n_r}) = s_j, \quad \lim_{r\to\infty}^\omega \varphi_j^{(n_r)} = \varphi_j, \quad \lim_{r\to\infty}^\omega \psi_j^{(n_r)} = \psi_j.$$

~~Also~~ Mit $T_k := \sum_{j=1}^{k} s_j(\cdot,\psi_j)\psi_j$ gilt offenbar $T_k = \lim_{r\to\infty}^{\omega} T_{n_r,k}$.

Es gilt

$$\| A_n - T_{n,k} \| \le s_{k+1}(A_n) \le \sup_n s_{k+1}(A_n),$$

also ist auch

$$|(A_{n_r}\omega,\chi) - (T_{n_r,k}\omega,\chi)| \le \sup_n s_{k+1}(A_n), \quad \|\omega\| = \|\chi\| = 1.$$

Es folgt für $r\to\infty$

$$|(A\omega,\chi) - (T_k\omega,\chi)| \le \sup_n s_{k+1}(A_n),$$

also auch $\|A - T_k\| \le \sup_n s_{k+1}(A_n)$. Nach VS! ist daher

$$\lim_{k\to\infty} \|A - T_k\| = 0,$$

und es folgt $A \in \mathcal{J}_\infty$.

Sei nun $U$ unitär und $(\chi_j)$ ein Orthonormalsystem, so daß $(UA\chi_j,\chi_j) = s_j(A)$, $j = 1,2,\dots$, gilt. Wegen

$$\left| \sum_{j=1}^{\ell} (UA_{n_r}\chi_j,\chi_j) \right| \le \sum_{j=1}^{\ell} s_j(A_{n_r})$$

folgt für $r\to\infty$

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j(A) = \left| \sum_{j=1}^{\ell} (UA\chi_j,\chi_j) \right| \le \sum_{j=1}^{\ell} s_j \le \sum_{j=1}^{\ell} \liminf_{m\to\infty} s_j(A_m).$$

□

<u>II.14 Satz:</u> Sei $\Phi$ eine s.n.-Funktion die nicht äquivalent zu $\Phi_\infty$ ist. Seien weiters $A_m \in \mathcal{J}_\Phi$ schwach konvergent zu $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und gelte $\sup_m \|A_m\|_\Phi < \infty$. Dann ist $A \in \mathcal{J}_\Phi$ und

$$\|A\|_\Phi \le \liminf_{m\to\infty} \|A_m\|_\Phi .$$

<u>Beweis:</u> Es gilt

$$s_n(A_m)\,\Phi(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots) \le \Phi(s_1(A_m),\dots,s_n(A_m),0,\dots) \le \|A_m\|_\Phi \le M$$

mit $M = \sup_m \|A_m\|_\Phi$. Also folgt mit II.12

$$\sup_m s_n(A_m) \le \frac{M}{\phi(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots)} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Mit II.13 folgt $A \in \mathcal{J}_\infty$. Seien $s_j$ wie im Beweis von II.13, dann ist $\phi(s_1,\dots,s_k,0,\dots) \le M$. Wegen II.13 (Beweis) ist

$$\sum_{j=1}^{l} s_j(A) \le \sum_{j=1}^{l} s_j, \quad l=1,2,\dots,$$

also gilt auch $\phi(s_1(A),\dots,s_k(A),0,\dots) \le M$, d.h. $A \in \mathcal{J}_\phi$ und $\|A\|_\phi \le M$.

□

<u>II.15. Korollar:</u> Sei $\phi$ eine s.n.-Funktion nicht äquivalent zu $\phi_\infty$. Sei $P_n$ eine Folge endlichdimensionaler Orthogonalprojektionen mit $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} P_n = I$. Dann ist $A \in \mathcal{J}_\phi$ genau dann, wenn

$$\sup_n \|P_n A P_n\|_\phi < \infty.$$

<u>Beweis:</u> II.14 mit $A_n = P_n A P_n$.

□

RS (x)

<u>II.16. Satz:</u> Sei $\mathcal{J}$ ein separabler Norm-Ideal bzgl. einer symmetrischen Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ und bezeichne $\phi$ die von $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ nach II.8 induzierte s.n.-Funktion. Dann gilt $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\phi^{(0)}$.

<u>Beweis:</u> Angenommen es gibt $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ so dass $B \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_\phi^{(0)}$. Für jeden endlichdimensionalen Orthoprojektor gilt

RS (xx)

$$\|PBP\|_\phi = \|PBP\|_{\mathcal{J}} \le \|B\|_{\mathcal{J}},$$

also folgt mit II.15 (der Fall $\mathcal{J}_\phi = \mathcal{J}_\infty$ ist sowieso trivial) $B \in \mathcal{J}_\phi$.

Sei $B_n$ die $n$-te Partialsumme der Schmidt-Darstellung von $B$:

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(B)\,(\cdot,\varphi_j)\,\psi_j.$$

Wegen $B \notin \mathcal{J}_\phi^{(0)}$ gilt für ein gewisses $\delta > 0$

$$\| B - B_n \|_\phi > \delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mit II.10, (v), existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geeignete Zahl $m = m(n)$, so daß

$$\Big\| \sum_{j=n}^{m} s_j(B) (\cdot, \varphi_j) \psi_j \Big\|_\phi > \delta .$$

Wir können also eine Folge $n_k$ wählen, so daß für

$$C_k := \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} s_j(B) (\cdot, \varphi_j) \psi_j$$

stets $\| C_k \|_\phi > \delta$ gilt.

Sei $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ eine $\{0,1\}$-Folge und bezeichne

$$A_\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C_j .$$

Offenbar gilt ~~[illegible]~~ $A_\alpha = PB$ wobei $P$ die orthogonale Projektion auf ~~[illegible]~~

$$\operatorname{clo} \{ \psi_{n_j}, \dots, \psi_{n_{j+1}-1} \mid \alpha_j = 1 \}$$

RS ⊗

bezeichnet. Es gilt insbesondere $A_\alpha \in \mathcal{J}$. Es gilt

$$A_{\alpha'} - A_{\alpha''} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j C_j$$

mit gewissen $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$. Ist für ein $j$ die Zahl $\varepsilon_j \neq 0$, so gilt offenbar $s_k(A_{\alpha'} - A_{\alpha''}) \geq s_k(C_j)$ und wegen II.5, (ii), gilt

$$\| A_{\alpha'} - A_{\alpha''} \|_{\mathcal{J}} \geq \| C_j \|_{\mathcal{J}} = \| C_j \|_\phi > \delta .$$

Da die Menge der $\{0,1\}$-Folgen überabzählbar ist, ist $\mathcal{J}$ nicht separabel, ein WS!

$\square$

Eine s.n.-Funktion $\phi$ heißt mononormalisierend, wenn für jedes $\xi \in c_\phi$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \phi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots) = 0 .$$

Andernfalls heißt $\phi$ binormalisierend.

17 

II.18. Lemma: Sei $\Phi$ eine s.n.-Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) $\Phi$ ist mononormalisierend.

(ii) Für jedes $A \in \mathfrak{S}_\Phi$ gilt $A = \lim A_n$ bzgl. $\|\cdot\|_\Phi$ wobei $A_n$ die $n$-te Partialsumme der Schmidt Darstellung von $A$ ist.

(iii) $\mathfrak{S}_\Phi = \mathfrak{S}_\Phi^{(0)}$.

(iv) $\mathfrak{S}_\Phi$ ist separabel.

Beweis: (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) folgt aus II.17. (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial. (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt wegen

$$\| A - A_n \|_\Phi = \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \dots).$$

Nun gilt für einen beliebigen Operator $K \in \mathcal{K}$, $\dim K \leq n$

$$s_j(A - K) \geq s_{n+j}(A), \quad j = 1, 2, \dots,$$

also ist

$$\min_{K \in \mathcal{K}, \dim K \leq n} \| A - K \|_\Phi = \| A - A_n \|_\Phi = \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \dots).$$

Da $\Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \dots)$ mit $n$ nichtwachsend ist, gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii).
Sei nun $\xi \in c_\Phi$, dann gibt es eine monoton fallende Folge $\xi^* \in c_\Phi$ die durch Umordnung entsteht, $\Phi(\xi^*) = \Phi(\xi)$. Weiters existiert $A \in \mathfrak{S}_\infty$ mit $\xi^* = s(A)$. (ii) $\Rightarrow$ $\Phi(\xi^*_{n+1}, \xi^*_{n+2}, \dots) \to 0$. Zu
12.11.98 jedem $m$ existiert ein $n(m)$ ~~mit~~ $\lim_{m \to \infty} n(m) = \infty$, so daß

$$\Phi((\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots)^*) \leq \Phi(\xi^*_{n+1}, \xi^*_{n+2}, \dots)$$

gilt. Damit folgt (i). $\square$

RS | $\to$ $\otimes$

## 4. Beispiele von Norm-Idealen:

Sei $1 \leq p < \infty$ und betrachte die Funktion

$$\Phi_p(\xi) := \Big( \sum_j |\xi_j|^p \Big)^{1/p}, \quad \xi \in \hat{c}.$$

Die Eigenschaften (i), (ii), (iv), (v) der ~~[illegible]~~ s.n.-Funktion sind klar, (iii) folgt aus der ~~Hölderschen~~ Minkowski Ungleichung, also ist $\Phi_p$ eine s.n.-Funktion. Offenbar gilt $c_{\Phi_p} = \ell_p$ und

$$\mathcal{Y}_{\Phi_p} =: \mathcal{Y}_p = \{ A \in \mathcal{Y}_\infty \mid \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^p < \infty \}.$$

Die Funktion $\Phi_p$ ist mononormalisierend. Für $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ gilt $\mathcal{Y}_{p_1} \subseteq \mathcal{Y}_{p_2}$ und wenn $A \in \mathcal{Y}_{p_1}$, so ist $\|A\|_{p_1} \geq \|A\|_{p_2}$, denn die Funktion ($1 \leq p < \infty$, $s_j \geq 0$)

$$f(p) = \Big( \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p \Big)^{1/p}$$

ist nichtwachsend.

Im folgenden konstruieren wir Beispiele von s.n.-Funktionen anderen Typs. Dazu sei $\pi := (\pi_j)_{j=1}^{\infty}$ eine nichtwachsende Folge positiver Zahlen mit $\pi_1 = 1$. Wir betrachten die Funktionen

$$\Phi_\pi(\xi) := \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j}, \quad \xi \in \hat{c},$$

$$\Phi^\pi(\xi) := \sum_j \pi_j \xi_j^*, \quad \xi \in \hat{c}.$$

<u>II.18 Lemma:</u> Die Funktionen $\Phi_\pi$ und $\Phi^\pi$ sind s.n.-Funktionen. Es gilt

(i) $\Phi_\pi \approx \Phi_1 \iff \Phi^\pi \approx \Phi_\infty \iff \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty$,

(ii) $\Phi_\pi \approx \Phi_\infty \iff \Phi^\pi \approx \Phi_1 \iff \lim_{j\to\infty} \pi_j > 0$.

Gilt für $\pi$ weder (i) noch (ii), so ist $\Phi_\pi$ binormalisierend und $\Phi^\pi$ mononormalisierend. Die Funktion $\Phi_\pi$ ist die maximale s.n.-Funktion mit $\Phi(\pi) \leq 1$.

<u>Beweis:</u>

·) Die Funktion $\Phi_\pi$ ist in offensichtlicher Weise eine s.n.-Funktion.

Die Funktion $\phi^\pi$ erfüllt klarerweise die Eigenschaften (i')-(iv') einer s.n.-Funktion. Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \xi_j = \pi_n \eta_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\pi_j - \pi_{j+1}) \eta_j \ , \ \xi \in \hat{k}, \ \eta_j = \sum_{i=1}^{j} \xi_i ,$$

gilt auch (v').

·) Wegen

$$k \sum_{j=1}^{n} \pi_j \le n \sum_{j=1}^{k} \pi_j \ , \ k \le n ,$$

gilt

$$\phi_\pi(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots) = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} ,$$

wegen II.12 ist $\phi_\pi \approx \phi_1$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty$. Ist $\lim \pi_j = \pi_\infty > 0$, so gilt $\sum_{j=1}^{n} \pi_j \geq n\pi_\infty$, also wegen II.12 ist $\phi_\pi \approx \phi_\infty$. Ist $\lim \pi_j = 0$, so ist auch $\lim \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 0$, denn für $\varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) : \pi_j < \varepsilon, j > n(\varepsilon)$ also ist für n hinreichend groß

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \pi_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \pi_j + \frac{1}{n}\sum_{j=n(\varepsilon)+1}^{n} \pi_j \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \pi_j + \varepsilon \le 2\varepsilon ,$$

also ist $\phi_\pi$ nicht äquivalent zu $\phi_\infty$.

Es gilt weiters die Beziehung

$$\phi^\pi(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j ,$$

also ist $\phi^\pi \approx \phi_\infty$ genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty$ und mit der obigen Überlegung $\phi^\pi \approx \phi_1$ genau dann, wenn $\lim \pi_j > 0$.

·) Erfülle nun $\pi$ weder (i) noch (ii). Dann ist $\pi \in c_0$ und offenbar ist $\phi_\pi(\pi) = 1$, also $\pi \in c_{\phi_\pi}$. Es gilt

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{m+j}}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n+m} \pi_j - \sum_{j=1}^{m} \pi_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \geq 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m} \pi_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} ,$$

also folgt falls $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty$ für jedes feste $m$

$$\phi_\pi(\pi_{m+1}, \pi_{m+2}, \dots) \geq 1,$$

d.h. $\phi_\pi$ ist lühnormalisierend.

Sei nun $\xi \in c_{\phi_\pi}$, d.h. $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_j^* < \infty$, und $\varepsilon > 0$. Dann gilt für ein gewisses $m$: $\sum_{j=m+1}^{\infty} \pi_j \xi_j^* < \varepsilon$. Da $\xi_j \in c_0$ gilt für große $n$, dass $\sum_{j=1}^{m} \pi_j \xi_{j+n}^* < \varepsilon$. Insgesamt folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \xi_{j+n}^* \leq \sum_{j=1}^{m} \pi_j \xi_{j+n}^* + \sum_{j=m+1}^{\infty} \pi_j \xi_j^* < 2\varepsilon,$$

also ist $\lim \phi^\pi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots) = 0$, d.h. $\phi^\pi$ ist mononormalisierend.

•) Wir haben schon gezeigt, daß $\phi^\pi(\pi) = 1$ ist. Sei $\phi$ eine andere s.n.-Funktion mit $\phi(\pi) \leq 1$. Dann gilt für $\xi \in \hat{c}$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j^* \leq \phi_\pi(\xi) \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j, \quad \ell = 1, 2, \dots,$$

also folgt $\phi(\xi) \leq \phi_\pi(\xi)\, \phi(\pi) \leq \phi_\pi(\xi)$. □

Wir haben insbesondere nichtseparable Norm-Ideale konstruiert, nämlich $\mathcal{J}_{\phi_\pi}$ für geeignetes $\pi$, d.h. es gilt $\mathcal{J}_{\phi_\pi} \neq \mathcal{J}_{\phi_\pi}^{(0)}$ in diesem Fall.

<u>II.20 Lemma:</u> Die Folge $\pi$ erfülle weder (i) noch (ii). Es gilt für $A \in \mathcal{J}_{\phi_\pi}$:

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} \| A - K \|_{\phi_\pi} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j}.$$

Insbesondere ist

$$\mathcal{J}_{\phi_\pi}^{(0)} = \left\{ A \in \mathcal{J}_\infty \;\middle|\; \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} = 0 \right\}.$$

<u>Beweis:</u> Wie wir im Beweis von II.18 gesehen haben ist

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} \| A - K \|_{\phi_\pi} = \lim_{m \to \infty} \phi_\pi(s_{m+1}(A), s_{m+2}(A), \dots) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} s_{j+m}(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j}.$$

Die Behauptung folgt nun ganz allgemein. Sei $(s_j)$ eine ~~—~~ nichtwachsende Nullfolge, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \le \sum_{j=1}^{m} s_j + \sum_{j=1}^{n} s_{j+m},$$

also

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \le \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} + \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} s_{j+m}}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j},$$

und daher wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \le \lim_{m\to\infty} \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} s_{j+m}}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j}.$$

Andererseits sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gilt für $n \geq n_0$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} s_{j+m}}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \le \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} + \varepsilon.$$

Ist $m$ hinreichend groß, so gilt diese Beziehung auch für $n \le n_0$.

$\square$

In gewissen Fällen kann die Zugehörigkeit zum Ideal $\mathcal{J}_{\phi_\pi}$ als asymptotische Bedingung an die $s$-Zahlen formuliert werden.

II.21 Lemma: Die Folge $\pi$ erfülle neben $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty$ und $\lim_{j\to\infty} \pi_j = 0$ noch die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = O(n\pi_n).$$

Dann liegt ~~ist~~ ein Operator $A \in \mathcal{J}_\infty$ genau dann in $\mathcal{J}_{\phi_\pi}$, wenn

$s_n(A) = O(\pi_n)$ und genau dann in $\mathcal{Y}^{(0)}_{\phi_\pi}$, wenn $s_n(A) = o(\pi_n)$.

Beweis:

•) Sei $s_n(A) = O(\pi_n)$, d.h. $\sup_n \frac{s_n(A)}{\pi_n} = M < \infty$. Dann ist $\phi_\pi(s(A)) \le M\, \phi_\pi(\pi) \le M$, d.h. $A \in \mathcal{Y}_{\phi_\pi}$. Ist umgekehrt $A \in \mathcal{Y}_{\phi_\pi}$, so gilt

$$\sum_{j=1}^n s_j(A) \le \|A\|_{\phi_\pi} \cdot \sum_{j=1}^n \pi_j, \quad n = 1, 2, \dots,$$

also auch

$$s_n(A) \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j(A) \le \|A\|_{\phi_\pi} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_j = O(\pi_n).$$

•) Sei $s_n(A) = o(\pi_n)$. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt $s_j \le \varepsilon \pi_j$ für $j \ge m$. Also ist

$$\frac{\sum_{j=1}^n s_j}{\sum_{j=1}^n \pi_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m_0} s_j}{\sum_{j=1}^n \pi_j} + \frac{\sum_{j=m+1}^n s_j}{\sum_{j=1}^n \pi_j} \le \frac{\sum_{j=1}^m s_j}{\sum_{j=1}^n \pi_j} + \varepsilon,$$

und es folgt $A \in \mathcal{Y}^{(0)}_{\phi_\pi}$ wegen II.20 da $\sum_{j=1}^\infty \pi_j = \infty$. Ist umgekehrt

$$\sum_{j=1}^n s_j(A) = o\Big(\sum_{j=1}^n \pi_j\Big),$$

so folgt mit der VS! $\sum_{j=1}^n \pi_j = O(n \pi_n)$, daß

$$s_n(A) \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j(A) = o\Big(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_j\Big) = o(\pi_n).$$

□

Beispiel: Für $0 < \alpha < 1$ erfüllt die Folge $\pi_n = \frac{1}{n^\alpha}$ die VS! von II.21.

Denn es gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^\alpha} \le \int_0^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=0}^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

In manchen Fällen stehen die Ideale $\phi_\pi$ bzw. $\phi^\pi$ in einer Relation zu $\mathcal{Y}_p$, $1 \le p \le \infty$. Ist nämlich für ein $p > 1$

$$\sum_{j=1}^\infty \pi_j^p < \infty,$$

so gilt $\mathfrak{S}_{\phi_\pi} \subseteq \mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{S}_{\phi^\pi}$ wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Denn für $\xi$ gilt

$$\phi^\pi(\xi) = \sum_{j=1}^\infty \pi_j \xi_j \le \left(\sum_{j=1}^\infty \pi_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^\infty \xi_j^q\right)^{1/q},$$

also ist für $A \in \mathfrak{S}_q$ auch $\|A\|_{\phi^\pi} \le \left(\sum_{j=1}^\infty \pi_j^p\right)^{1/p} \|A\|_{\mathfrak{S}_q}$ und daher $A \in \mathfrak{S}_{\phi^\pi}$. Ist $A \in \mathfrak{S}_{\phi_\pi}$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j(A) \le \|A\|_{\phi_\pi} \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j, \quad \ell = 1,2,\dots,$$

und da die Funktion $\phi_p$ eine s.n.-Funktion ist gilt nach (v)

$$\phi_p(s(A)) \le \|A\|_{\phi_\pi} \phi_p(\pi_j) = \left(\sum_{j=1}^\infty \pi_j^p\right)^{1/p} \|A\|_{\phi_\pi},$$

und daher $A \in \mathfrak{S}_p$.

## 5. Dualräume von $\mathfrak{S}_\phi$:

II.22 Satz: Sei $\phi$ eine s.n.-Funktion. Für jedes $\eta \in \hat{k}$ existiert das Maximum

$$\phi^*(\eta) := \max_{\xi \in \hat{k}} \left(\frac{1}{\phi(\xi)} \sum_j \eta_j \xi_j\right).$$

Die Funktion $\phi^*$ ist eine s.n.-Funktion; sie heißt die adjungierte zu $\phi$. Es gilt $\phi^{**} = \phi$. ~~Ist $\phi$ eine s.n.-Funktion für die gilt~~

$$\cancel{\sum \eta_j \xi_j \le \phi(\xi)\, \phi(\eta), \quad \xi, \eta \in \hat{k},}$$

~~wobei für jedes $\xi$ ($\eta$) ein $\eta$ ($\xi$) existiert, so daß Gleichheit gilt,~~

Beweis:

•) Bezeichne $F(\xi) := \frac{1}{\phi(\xi)} \sum_j \xi_j \eta_j$ für $\xi \in \hat{k}$ und setze $F(0)=0$. Dann gilt $F(\alpha\xi) = F(\xi)$ für $\alpha > 0$ und

$$F(\xi) \le \sum_j \frac{\xi_j}{\xi_1} \eta_j \le \sum_j \eta_j .$$

Ist $k$ der größte Index mit $\eta_k \neq 0$, so ist

$$F(\xi) \le F(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots).$$

19.11.98 Um das Maximum von $F$ auf $\hat{k}$ zu finden, kann man sich also auf jenen Teil der Einheitskugel im $\mathbb{R}^k$ beschränken der in $\hat{k}$ liegt. Da $F$ dort stetig und beschränkt ist, wird ein Maximum angenommen.

•) Die Eigenschaften (i'), (ii'), (iii') der s.n.-Funktion werden von $\phi^*$ offensichtlich erfüllt. Die Eigenschaft (iv') folgt wegen $\phi(\xi) \ge \xi_1$ und $\phi(1, 0, \dots) = 1$. (v') folgt wegen

$$\frac{1}{\phi(\xi)} \sum_j \eta_j \xi_j = \frac{1}{\phi(\xi)} \sum_j \Big( \sum_{m=1}^{j} \eta_m \Big) (\xi_j - \xi_{j+1}).$$

•) Betrachte den Raum $\mathbb{C}^n$ mit der Norm $|\xi|_\phi = \phi(\xi^*)$. Das ist tatsächlich eine Norm, die Dreiecksungleichung folgt wegen

$$\sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j^* \le \sum_{j=1}^{\ell} \xi_j^* + \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j^*, \quad \zeta = \xi + \eta.$$

Wir bestimmen den Dualraum. Sei $f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} f_j \xi_j$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, ein lineares Funktional. Dann gilt

$$\|f\| = \max_{\xi \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|_\phi} = \max_{\xi \in \mathbb{C}^n} \frac{1}{\phi(\xi^*)} \Big| \sum_{j=1}^{n} f_j \xi_j \Big| =$$

$$= \max_{\xi \in \mathbb{C}^n} \frac{1}{\phi(\xi^*)} \sum_{j=1}^{n} f_j^* \xi_j^* = \max_{\xi \in \hat{k}} \frac{1}{\phi(\xi)} \sum_{j=1}^{n} f_j^* \xi_j = \phi^*(f^*).$$

Es gilt also $(\mathbb{C}^n, |.|_\phi)^* \cong (\mathbb{C}^n, |.|_{\phi^*})$ isometrisch isomorph. Da endlichdimensionale Banachräume reflexiv sind folgt $\phi^{**} = \phi$.

$\square$

Wegen $\phi^{**} = \phi$ ergibt sich die folgende Charakterisierung der adjungierten s.n.-Funktion: ~~Ist~~ sind $\phi, \psi$ s.n.-Funktionen mit

$$\sum_j \xi_j \eta_j \le \phi(\xi)\, \psi(\eta), \quad \xi, \eta \in \hat{k}$$

und gilt es zu jedem $\xi$ ein $\eta$ (oder zu jedem $\eta$ ein $\xi$), so daß

Gleichheit gilt, so ist $\psi = \phi^*$ und $\phi = \psi^*$. $\otimes \leftarrow$ RS

Im folgenden bestimmen wir zu den uns bekannten s.n.-Funktionen die adjungierten.

**II.23 Lemma:** Es gilt:

(i) $\phi_\infty^* = \phi_1$,

(ii) Für $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, gilt $\phi_p^* = \phi_q$.

(iii) Für jede nichtwachsende Folge $\pi$ nichtnegativer Zahlen, $\pi_1 = 1$, gilt $\phi_\pi^* = \phi^\pi$.

**Beweis:**

•) Es gilt $\sum \eta_j \xi_j \le \eta_1 \sum \xi_j$, $\eta, \xi \in \hat{k}$, und für $\xi = (1, 0, \dots)$ gilt Gleichheit.

•) Die Höldersche Ungleichung besagt

$$\sum \eta_j \xi_j \le \left(\sum \eta_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \xi_j^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \eta, \xi \in \hat{k}.$$

Setzt man $\xi_j := \eta_j^{p-1}$, so gilt Gleichheit.

•) Sei $\eta \in \hat{k}$, $\eta_j = 0$ für $j > n$. Bezeichne $\Lambda$ die Menge

$$\Lambda = \{\xi \in \hat{k} \mid \xi_j = 0,\ j>n, \text{ und } \sum_{j=1}^n \pi_j \xi_j = 1\}.$$

Wir zeigen für das Funktional $f(\xi) = \sum_{j=1}^n \eta_j \xi_j$ die Beziehung

$$\max_{\xi \in \Lambda} f(\xi) = \max_r \left( \sum_{j=1}^r \eta_j \Big/ \sum_{j=1}^r \pi_j \right).$$

Die Behauptung (iii) folgt dann wie oben.

Betrachte die lineare invertierbare Abbildung $H: \xi \mapsto x$ mit

$$x_j = \xi_j - \xi_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad x_n = \xi_n.$$

Dann ist

$$H(\Lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j \pi_i \right) x_j = 1 \right\}.$$

Die Eckenpunkte dieser konvexen Menge sind jene Punkte der Hyperebene $\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j \pi_i \right) x_j = 1$ welche nur in einer Komponente

$\neq 0$ sind. Die Extrempunkte von $\Lambda$ sind daher die Punkte

$$\xi^{(r)} = (\underbrace{a,a,\dots,a}_{r},0,\dots,0), \quad a=\left(\sum_{i=1}^{r} \pi_i\right)^{-1}.$$

Es gilt

$$f(\xi^{(r)}) = \frac{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{r} \pi_j},$$

und da ~~das~~ das lineare Funktional $f$ sein Extremum auf der konvexen Menge $\Lambda$ in einem Extrempunkt annehmen muß folgt die behauptete Beziehung. $\square$

Bevor wir zur Beschreibung von Dualräumen kommen benötigen wir einige Aussagen über ein spezielles – und sehr wichtiges – Funktional auf $\mathcal{S}_1$, nämlich die Spur.

Ist $K \in \mathcal{K}$, $K = \sum_{j=1}^{r} (\cdot,\varphi_j)\psi_j$, so hat der endlichdimensionale Teilraum $H := \operatorname{span}\{\varphi_j, \psi_j \mid j=1,\dots,r\}$ die Eigenschaft $KH \subseteq H$, $H^\perp \subseteq \ker K$. Man definiert dann

$$\operatorname{tr} K := \operatorname{tr} K_1$$

wobei $K_1 = K|_H$ ist, ein Operator im endlichdimensionalen Raum $H$. Da die Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$ von $K_1$ gleich denen von $K$ sind und $\operatorname{tr} K_1 = \sum \lambda_j$ gilt, hängt diese Definition nicht von der Wahl von $H$ mit $KH \subseteq H$, $H^\perp \subset \ker K$, ab.

<u>II.24 Lemma:</u> Seien $F, G \in \mathcal{K}$, dann gilt

(i) $\operatorname{tr}(F+G) = \operatorname{tr} F + \operatorname{tr} G$,

(ii) $\operatorname{tr}(\alpha F) = \alpha \operatorname{tr} F$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(iii) $|\operatorname{tr} F - \operatorname{tr} G| \leq \|F - G\|_1$.

<u>Beweis:</u>

•) Seien $H_1$ und $H_2$ endlichdimensionale Teilräume wie oben und setze $H_0 = H_1 + H_2$.

Dann gilt $(F+G)H_0 \subseteq H_0$, $H_0^\perp \subseteq \ker F \cap \ker G \subseteq \ker(F+G)$.
Die Behauptungen (i) und (ii) folgen nun aus der entsprechenden Tatsache für Matrizen.

•) (iii) folgt aus der Linearität und der Tatsache

$$|\mathrm{tr}\, F| \le \sum_j |\lambda_j| \le \sum_j s_j(F) = \|F\|_1 .$$

□

Wegen der Eigenschaften (i)-(iii) können wir tr zu einem stetigen linearen Funktional auf $\mathcal{S}_1$ fortsetzen. Die Spur kann auch anders berechnet werden:

__II.25 Lemma:__ Sei $A \in \mathcal{S}_1$ und sei $(\varphi_j)$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_j (A\varphi_j, \varphi_j) .$$

__Beweis:__ Sei $P_n$ die orthogonale Projektion auf span $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Dann gilt $\lim^s P_n = I$. Wegen II.18a folgt

$$\lim P_n A P_n = A \quad \text{bzgl. } \|.\|_1 .$$

Da die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Diagonalelemente ist gilt $\mathrm{tr}\, P_n A P_n = \sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_j)$. Da die Spur stetig bzgl. $\|.\|_1$ ist folgt die Behauptung.

□

II.26 →

II.27 __II.~~28~~ Satz:__ Sei $\phi$ eine s.n.-Funktion, $\phi$ nicht äquivalent zu $\phi_1$. Die allgemeine Form eines stetigen linearen Funktionals auf $\mathcal{S}_\phi^{(0)}$ ist

$$F(X) = \mathrm{tr}(AX), \quad X \in \mathcal{S}_\phi^{(0)},$$

wobei $A$ die Menge $\mathcal{S}_{\phi^*}$ durchläuft. Es gilt

$$\|F\| = \|A\|_{\phi^*} .$$

__Beweis:__

•) Ist $X \in \mathcal{S}_\phi$ und $A \in \mathcal{S}_{\phi^*}$, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AX) \le \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\, s_j(X) \le \phi^*(A)\, \phi(X),$$

also ist $AX \in \mathcal{J}_1$ und $\|AX\|_1 \leq \|A\|_{\phi^*} \|X\|_\phi$. Es folgt für das Funktional $F(X) := tr(AX)$ ~~daher~~ wegen $|tr(AX)| \leq \|AX\|_1$

$$\|F\| \leq \|A\|_{\phi^*}.$$

•) Sei $A = \sum_j s_j(A) (\cdot, \phi_j) \psi_j$ die Schmidt Darstellung von $A$. Setze

$$K_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)} (\cdot, \psi_j) \phi_j \quad , n = 1, 2, \ldots,$$

wobei die Vektoren $\xi^{(n)}$ so gewählt sind, daß

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A) \xi_j^{(n)} = \phi^*(s_1(A), \ldots, s_n(A), 0, \ldots)$$

und $\phi(\xi^{(n)}) = 1$ gilt. Es ist

$$A K_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \xi_j^{(n)} (\cdot, \psi_j) \psi_j ,$$

also mit II.25

$$F(K_n) = tr(AK_n) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A) \xi_j^{(n)} .$$

Wir haben daher $\lim F(K_n) = \|A\|_{\phi^*}$ und wegen $\|K_n\|_\phi = \phi(\xi^{(n)}) = 1$ folgt

$$\|F\| = \|A\|_{\phi^*}.$$

•) Sei nun $F$ ein stetiges Funktional auf $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$. Da stets $\phi \leq \phi_1$, also $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_\phi^{(0)}$ gilt induziert F ein stetiges Funktional auf $\mathcal{J}_1$. Nach II.27 existiert $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, so daß für $X \in \mathcal{J}_1$ gilt

$$F(X) = tr(AX).$$

~~Da $\mathcal{J}_1$ dicht in $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$ liegt und $F$ stetig bzgl $\|.\|_\phi$ ist, gilt diese Darstellung auf ganz $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$.~~

Sei $P_n$ eine monoton wachsende Folge, $\lim^s P_n = I$. Setze (endl. dim. Orthogonalproj.)

$$F_n(X) = F(P_n X P_n) = tr(A P_n X P_n)$$

Es gilt $tr(A P_n X P_n) = tr(P_n A P_n X)$, also ist nach dem

~~$|F_n(X)| = |F(P_n X P_n)| \leq \|F\| \|P_n X P_n\|_\phi \leq \|F\| \|X\|_\phi$.~~

oben bewiesenen

$$\|F_n\| = \|P_n A P_n\|_{\phi^*}.$$

Wegen

$$|F_n(X)| = |F(P_n X P_n)| \leq \|F\| \cdot \|X\|_\phi ,$$

gilt $\|F_n\| \le \|F\|$. Aber erstrecken sich die Normen eines Funktionals als Norm auf $\mathcal{J}_\phi$ (oder $\mathcal{J}_\phi^{(0)}$). Nun folgt mit II.15 $A \in \mathcal{J}_{\phi^*}$, ~~...~~ denn nach VS! ist $\phi^*$ nicht äquivalent zu $\phi_\infty$. $\square$

II.27 Satz: Die allgemeine Form eines stetigen linearen Funktionals auf $\mathcal{J}_1$ ist
$$F(X) = tr(AX), \quad X \in \mathcal{J}_1,$$
wobei $A$ die Menge $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ durchläuft. Es gilt $\|F\| = \|A\|$.

Beweis:

- Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so gilt $AX \in \mathcal{J}_1$ für jedes $X \in \mathcal{J}_1$ und
$$|tr(AX)| \le \|AX\|_1 \le \|A\| \cdot \|X\|_1,$$
also induziert $A$ ein stetiges Funktional auf $\mathcal{J}_1$ mit $\|F\| \le \|A\|$.
Sei $\varphi_n$, $\|\varphi_n\| = 1$, eine Folge so daß $\lim \|A\varphi_n\| = \|A\|$ gilt, und setze
$$X_n = \frac{1}{\|A\varphi_n\|}(\cdot, A\varphi_n)\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$
offenbar ist $\|X_n\|_1 = 1$ und $F(X_n) = tr(AX_n) = \|A\varphi_n\|$. Es folgt $\|F\| = \|A\|$.

- Sei nun $F$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{J}_1$. Für $f, g \in \mathcal{H}$ setze $X_{f,g} = (\cdot, g)f$ und betrachte die Bilinearform
$$B(f,g) = F(X_{f,g}).$$
Es gilt
$$|F(X_{f,g})| \le \|F\| \, \|X_{f,g}\|_1 = \|F\| \, \|f\| \, \|g\|,$$
d.h. $B$ ist beschränkt. Daher existiert ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, mit $B(f,g) = (Af, g)$. Es gilt daher
$$F(X_{f,g}) = (Af, g) = tr(AX_{f,g}).$$
Sei nun $X \in \mathcal{J}_1$, $X = \sum_j s_j(X)(\cdot, \varphi_j)\psi_j$. Da diese Reihe in der

Norm $\|\cdot\|_1$ konvergiert, folgt $F(X) = \sum_j s_j(X)\, F(X\psi_j, \varphi_j) =$
$= \sum_j s_j(X)(A\psi_j, \varphi_j) = \sum_j (AX\varphi_j, \varphi_j) = \operatorname{tr}(AX)$ wegen
II.25 und der Tatsache daß $\operatorname{span}\{\varphi_j\}^\perp = \ker X$. $\square$

II.26 Lemma: Sei $A \in \mathcal{J}_\infty$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, und sei $AB, BA \in \mathcal{J}_1$. Dann gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Beweis: Sei $A = \sum_j s_j(\cdot, \varphi_j)\psi_j$, dann gilt

$$BA = \sum_j s_j(\cdot, \varphi_j) B\psi_j,$$

also folgt wegen II.25 und $\operatorname{span}\{\varphi_j\}^\perp = \ker A$, daß

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_j s_j(B\psi_j, \varphi_j).$$

Andererseits gilt

$$AB = \sum_j s_j(\cdot, B^*\varphi_j)\psi_j,$$

und daher wegen II.25 und $\operatorname{span}\{\psi_j\}^\perp = \operatorname{ran} A^\perp$, daß

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_j s_j(\psi_j, B^*\varphi_j). \quad \square$$

Man kann II.28 auch für $\Phi \approx \Phi_1$ formulieren, allerdings muß man für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ erklären was $\Phi^*(s(A))$ bedeutet. Die s-Zahlen von $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bilden eine nichtwachsende Folge ~~reell~~ nichtnegativer Zahlen mit $s_1(A) = \|A\|$. Im Falle $\Phi \approx \Phi_1$ ist $\Phi^* \approx \Phi_\infty$, d.h. $\sup_n \Phi^*(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots) < \infty$. Daher macht der Ausdruck

$$\Phi^*(s(A)) = \lim_{n\to\infty} \Phi^*(s_1(A), \dots, s_n(A), 0, \dots)$$

Sinn und definiert eine "symmetrische Norm" auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Wegen $\|A\| \le \|A\|_{\Phi^*} \le \|A\| \cdot \|I\|_{\Phi^*}$ ist diese natürlich zu $\|\cdot\|$ äquivalent.
Da in II.28 die VS! $\Phi \not\approx \Phi_1$ ⟹ im letzten Beweisschritt "$A \in \mathcal{J}_{\Phi^*}$"

~~[illegible]~~ und an Schritt $\|F\| \geq \|A\|_{\phi^*}$ benötigt.

**II.28 Satz:** Sei $\phi$ eine s.n.-Funktion, $\phi \approx \phi_1$. Die allgemeine Form eines stetigen linearen Funktionals auf $\mathcal{J}_\phi$ $(= \mathcal{J}_\phi^{(0)})$ ist
$$F(X) = \operatorname{tr}(AX), \quad X \in \mathcal{J}_\phi,$$
wobei $A$ die Menge $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ durchläuft. Es gilt
$$\|F\| = \|A\|_{\phi^*}.$$

Beweis:

•) Da $\mathcal{J}_\phi = \mathcal{J}_1$ als Menge ist und die Normen $\|\cdot\|_\phi$, $\|\cdot\|_1$ äquivalent sind definiert nach II.27 die Formel $F(X) = \operatorname{tr}(AX)$, $X \in \mathcal{J}_\phi$, ~~mit~~ $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ die allgemeine Form eines stetigen Funktionals. Nach dem ersten Beweisteil von II.28 gilt $\|F\| \leq \|A\|_{\phi^*}$.

•) Wir zeigen $\|F\| \geq \|A\|_{\phi^*}$. Die Polarzerlegung von $A$ sei $A = HU$ und sei $\rho \leq \infty$ die kleinste Zahl mit $s_{\rho+1}(A) = s_\infty(A)$. Weiters sei $\varphi_j$, $j = 1,..,\rho$, ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $H$ zu $s_j(A)$, $j = 1,..,\rho$, und für $\varepsilon > 0$ sei
$$\mathcal{M}_\varepsilon := E(s_\infty + 0)\mathcal{H} \ominus E(s_\infty - \varepsilon)\mathcal{H},$$
wobei $E(\lambda)$ die Spektralfunktion von $H$ ist, und $\varphi_j$, $j = \rho+1, \rho+2, ..$ sei ein beliebiges Orthonormalsystem in $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Setze $H_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A) (\cdot, \varphi_j)\varphi_j$, $n = 1,2,..$. Bezeichnet $P_n$ die Orthogonalprojektion auf span $\{\varphi_j \mid j = 1,..,n\}$, so gilt
$$\|P_n H P_n - H_n\| < \varepsilon, \quad n = 1,2,...$$
Weiters sei $L_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)} (\cdot, \varphi_j)\varphi_j$ wobei $\xi^{(n)}$ (so wie im Beweis von II.28) gewählt ist mit $\phi(\xi^{(n)}) = 1$ und
$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)} = \phi^*(s_1(A),.., s_n(A), 0, ..).$$
Für den Operator $K_n = U^* L_n$ gilt dann $\|K_n\|_\phi = \|L_n\|_\phi = 1$ und $\operatorname{tr}(AK_n) = \operatorname{tr}(HUU^*L_n) = \operatorname{tr}(HL_n) = \operatorname{tr}(HP_nL_nP_n) =$

$= tr(P_n H P_n L_n)$, folgt

$$tr(AK_n) = tr(H_nL_n) - tr([H_n - P_nHP_n]L_n) \geq$$
$$\geq tr(H_nL_n) - \|H_n - P_nHP_n\| \cdot \|L_n\|_1 .$$

Nach der VS: $\phi \approx \phi_1$ gilt $\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\phi_1(j)}{\phi(j)} = C < \infty$, also

26.11.88 $\|L_n\|_1 \leq C\|L_n\|_\phi = C$ und wir erhalten

$$tr(AK_n) \geq tr(H_nL_n) - \varepsilon C.$$

Wegen $H_nL_n = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j$ gilt $tr(H_nL_n) = \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\xi_j^{(n)}$

und für $n \to \infty$ erhalten wir $\|tr(A\,\cdot)\| \geq \|A\|_{\phi^*} - C\varepsilon$.

□

Mit Hilfe von II.23 ergibt sich aus den obigen Sätzen:

**Beispiel:** Es gilt

(i) Für $1 < p < \infty$ gilt $\mathcal{J}_p^* \cong \mathcal{J}_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(ii) $\mathcal{J}_\infty^* \cong \mathcal{J}_1$.

(iii) Für eine nichtwachsende Folge $\pi$ nichtnegativer Zahlen $\pi_1 = 1$, mit $\lim \pi_j = 0$ und $\sum \pi_j = \infty$ gilt

$$\mathcal{J}_{\phi_\pi}^{(0)\,*} \cong \mathcal{J}_{\phi^\pi}, \quad \mathcal{J}_{\phi^\pi}^{*} \cong \mathcal{J}_{\phi_\pi}.$$

(iv) Gilt in (iii) $\lim \pi_j > 0$, so ist

$$\mathcal{J}_{\phi_\pi}^{*} \cong \mathcal{J}_{\phi^\pi}, \quad \mathcal{J}_{\phi^\pi}^{*} \cong (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\phi_\pi}).$$

Gilt $\sum \pi_j < \infty$, so ist

$$\mathcal{J}_{\phi^\pi}^{*} \cong \mathcal{J}_{\phi_\pi}, \quad \mathcal{J}_{\phi_\pi}^{*} \cong (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\phi^\pi}).$$

Als eine Folgerung aus II.28 ergibt sich ein Kriterium für $A \in \mathcal{J}_\phi$.

**II.30 Korollar:** Sei $\phi$ nicht äquivalent zu $\phi_\infty$ und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dann gilt $A \in \mathcal{J}_\phi$ genau dann, wenn

$$\sup_{K \in \mathcal{K}} \frac{|\mathrm{tr}\,(AK)|}{\|K\|_\phi} < \infty .$$

<u>**Beweis:**</u> Ist $A \in \mathcal{J}_\phi$, so ist die Bedingung wegen II.28 erfüllt. Umgekehrt sei $A$ mit $\sup < \infty$ gegeben. Dann definiert $F(X) = \mathrm{tr}\,(AX)$ ein Funktional auf $\mathcal{K}$, welches sich stetig auf $\mathcal{J}^{(0)}_{\phi^*}$ fortsetzt. Also existiert nach II.28 ein $B \in \mathcal{J}_\phi$ mit $F(X) = \mathrm{tr}\,(BX)$, $X \in \mathcal{J}^{(0)}_{\phi^*}$. Speziell gilt für $X = (\cdot, g) f$ mit $f, g \in \mathcal{H}$:

$$(Af, g) = \mathrm{tr}\,(AX) = \mathrm{tr}\,(BX) = (Bf, g),$$

also $A = B \in \mathcal{J}_\phi$.

$\square$

# III. Hilbert-Schmidt und trace-class Operatoren

## 1. Integraloperatoren:

Definition: Das Ideal $\mathcal{J}_1$ heißt trace-class, ein Operator aus $\mathcal{J}_2$ ein Hilbert-Schmidt Operator.

III.1 Lemma: Sei $A \in \mathcal{J}_\infty$, dann sind äquivalent:

(i) $A \in \mathcal{J}_2$

(ii) $A^*A \in \mathcal{J}_1$

(iii) $\sum_{j=1}^{\infty} \| A\varphi_j \|^2 < \infty$ für ein (für alle) vollständiges Orthonormalsystem

(iv) $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(A\varphi_j, \varphi_k)|^2 < \infty$ für ein (für alle) vollständiges Orthonormalsystem.

Es gilt $\| A \|_2^2 = tr(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} \| A\varphi_j \|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(A\varphi_j, \varphi_k)|^2$.

Die Menge $\mathcal{J}_2$ mit dem inneren Produkt

$$\langle A, B \rangle := tr(B^* A), \quad A, B \in \mathcal{J}_2,$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis: Seien $\lambda_j$ die Eigenwerte von $A^*A$ und sei

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\cdot, \psi_k) \psi_k .$$

Ist $(\varphi_j)$ ein Orthonormalsystem, so gilt

$$(A^*A\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(\varphi_j, \psi_k)|^2$$

Da alle Summanden $\geq 0$ sind gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi_j, \psi_k)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(\varphi_j, \psi_k)|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (A^*A\varphi_j, \varphi_j).$$

2 

Offensichtlich ist weiters

$$\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{j=1}^{\infty} (A^*A\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \|A\varphi_j\|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |(A\varphi_j, \varphi_k)|^2 .$$

$\square$

<u>III.2 Satz:</u> Sei $k(t,s) \in L_2([0,1)\times[0,1))$. Dann ist der Operator $K: L_2([0,1)) \to L_2([0,1))$

$$(K\varphi)(t) := \int_0^1 k(t,s)\varphi(s)\,ds, \quad t\in[0,1)$$

Hilbert-Schmidt. Ist umgekehrt $A \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$, so existiert ein unitärer Operator $U: \mathcal{H} \to L_2([0,1))$, so daß $UAU^{-1}$ von obiger Gestalt ist.

<u>Beweis:</u>

·) Sei $k$ gegeben. Sei $(\varphi_j)$ eine Orthonormalbasis in $L_2([0,1))$, dann ist $\psi_{ij}(t,s) = \varphi_i(t)\overline{\varphi_j(s)}$ eine Orthonormalbasis in $L_2([0,1)\times[0,1))$. $\oplus \Leftarrow$ RS. Es gilt

$$(K\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1\int_0^1 k(t,s)\varphi_i(s)\overline{\varphi_j(t)}\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 k(t,s)\overline{\psi_{ij}(t,s)}\,ds\,dt = (k, \psi_{ij}),$$

also folgt

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |(K\varphi_i, \varphi_j)|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |(k, \psi_{ij})|^2 = \|k\| < \infty,$$

d.h. $K \in \mathcal{S}_2$.

·) Sei $(\omega_j)$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ und setze

$$U\omega_j := \varphi_j,$$

$$k = \sum_{i,j=1}^{\infty} (A\omega_j, \omega_i)\psi_{ij}.$$

$U$ definiert offensichtlich einen unitären Operator und wegen $A \in \mathcal{J}_2$ gilt $\sum_{i,j=1}^{\infty} |(A\omega_j,\omega_i)|^2 < \infty$, d.h. die Summe $\sum_{i,j=1}^{\infty} (A\omega_j,\omega_i)\,\psi_{ij}$ ist in der $L_2([0,1]\times[0,1])$-Norm konvergent, d.h. $k \in L_2([0,1]\times[0,1])$.
Es gilt wegen $(A\omega_j,\omega_i) = (k,\psi_{ij}) = (K\varphi_j,\varphi_i)$

$$UAU^{-1}\varphi_j = UA\omega_j = U\sum_i (A\omega_j,\omega_i)\,\omega_i =$$

$$= \sum_i (A\omega_j,\omega_i)\,\varphi_i = \sum_i (K\varphi_j,\varphi_i)\varphi_i = K\varphi_j .$$

□

Im folgenden bestimmen wir gewisse Kerne $k$, die sogar trace-class Operatoren induzieren. Als Vorbereitung brauchen wir noch den Satz von Mercer.

<u>III.3 Lemma:</u> Sei $k \in C([0,1]\times[0,1])$. Dann gilt $\operatorname{ran} K \subseteq C([0,1])$. Ist $K \geq 0$, so ist $k(t,t) \geq 0$, $t \in [0,1]$.

<u>Beweis:</u>

•) Die Schwarzsche Ungleichung zeigt ($h = K\varphi$)

$$|h(t) - h(t_0)| = \left| \int_0^1 (k(t,s) - k(t_0,s))\,\varphi(s)\,ds \right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\| \cdot \left( \int_0^1 |k(t,s) - k(t_0,s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

und da $k$ gleichmäßig stetig ist folgt die erste Behauptung.

•) Da $K \geq 0$ ist gilt insbesondere $K = K^*$, also $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$. Daher ist $k(t,t) \in \mathbb{R}$. Wäre $k(t_0,t_0) < 0$, so wäre $\operatorname{Re} k(t,s) < 0$ auf einem ganzen Quadrat $[c,d]\times[c,d]$. Es folgt

$$0 \leq (K\chi_{[c,d]}, \chi_{[c,d]}) = \int_0^1\int_0^1 k(t,s)\,\chi_{[c,d]}(s)\,\chi_{[c,d]}(t)\,ds\,dt =$$

$$= \operatorname{Re} \int_c^d\int_c^d k(t,s)\,ds\,dt = \int_c^d\int_c^d \operatorname{Re} k(t,s)\,ds\,dt < 0$$

ein WS!

□

III.4 Satz (von Mercer): Sei $k \in C([0,1]\times[0,1])$, $K \geq 0$, und bezeichne $(\varphi_n)$ und $(\lambda_n)$ ein vollständiges System von normierten Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerten von $K$. Dann gilt

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)},$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig auf $[0,1]\times[0,1]$ konvergiert.

Beweis:

•) Die Schwarzsche Ungleichung angewandt auf die Zahlenfolgen $(\sqrt{\lambda_j}\varphi_j(t))$ und $(\sqrt{\lambda_j}\varphi_j(s))$ zeigt

$$\sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}| \leq \left(\sum_{j=m}^{n} \lambda_j |\varphi_j(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=m}^{n} \lambda_j |\varphi_j(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

•) Wir zeigen $\sum_j \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 \leq \max_s k(s,s)$: Sei

$$k_n(t,s) := k(t,s) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}.$$

Da $\varphi_j$ als Eigenvektor von $K$ stetig ist, ist $k_n$ stetig. Es gilt für $f \in L_2([0,1])$:

$$\int_0^1\int_0^1 k_n(t,s) f(s) \overline{f(t)}\, ds\, dt = (Kf,f) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 =$$

$$= \sum_{j>n} \lambda_j |(f,\varphi_j)|^2 \geq 0,$$

d.h. der Operator $K_n$ ist $\geq 0$. Insbesondere folgt

$$k(t,t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\varphi_j(t)|^2 = k_n(t,t) \geq 0.$$

•) Ein festes $t$ und $\varepsilon > 0$ existiert $N$, so daß für $n,m \geq N$ gilt:

$$\sum_{j=m}^{n} |\lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}| \leq \varepsilon \cdot \max_s k(s,s),$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$ absolut und gleichmäßig in $s$ für jedes feste $t$.

•) Setze $\tilde{k}(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$, dann ist $\tilde{k}(t,s)$ für jedes feste $t$ stetig in $s$ und es gilt für $f \in L_2([0,1])$

$$\int_0^1 (k(t,s) - \tilde{k}(t,s)) f(s)\, ds = (Kf)(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j) \varphi_j(t).$$

Ist $f \in \ker K = \operatorname{ran} K^{\perp}$, so gilt $Kf = 0$ und $(f, \varphi_j) = 0$, also ist der obige Ausdruck $= 0$. Ist $f = \varphi_i$, so ~~gilt~~ ist die rechte Seite gleich

$$\underbrace{\lambda_i \varphi_i(t)}_{\text{für jedes } t} - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\varphi_i, \varphi_j) \varphi_j(t) = 0.$$

Insgesamt folgt $k(t,s) = \tilde{k}(t,s)$ in $L_2([0,1])$ ~~I~~ also fast überall in $s$. Da $k$ und $\tilde{k}$ stetig in $s$ sind folgt $k(t,s) = \tilde{k}(t,s)$ für jedes $t$ und $s$.

•) Es gilt $k(t,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\varphi_j(t)|^2$ für jedes $t$. Die Partialsummen der Reihe sind eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen die punktweise zur stetigen Funktion $k(t,t)$ konvergiert. Der Satz von Dini besagt, daß die Konvergenz sogar gleichmäßig ist. Nach dem ersten Beweisschritt folgt, daß ~~die~~ die Reihe $\sum \lambda_j \varphi_j(t) \overline{\varphi_j(s)}$ gleichmäßig in $t$ und $s$ konvergiert.

$\square$

Die Voraussetzung $K \geq 0$ im Satz von Mercer kann nicht vollständig

12.98 weggelassen werden, denn sonst wäre jede stetige Funktion gleichmäßiger Grenzwert einer Fourierreihe. (← Bsp) Es genügt ~~Beschränkung~~ jedoch zu verlangen, daß ~~die~~ die Bilinearform $(Kf, g)$ nur endlich viele negative Quadrate hat.

---

**III.5 Korollar:** Sei $k \in C([0,1] \times [0,1])$, $K \geq 0$. Dann gilt $K \in \mathcal{J}_1$ und $\overset{\operatorname{tr} K}{\|K\|_1} = \int_0^1 k(t,t)\, dt$.

Beweis: Es gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum \lambda_j |\varphi_j(t)|^2$:

$$\int_0^1 k(t,t)\, dt = \int_0^1 \sum_j \lambda_j |\varphi_j(t)|^2\, dt = \sum_j \lambda_j \int_0^1 |\varphi_j(t)|^2\, dt = \sum_j \lambda_j = \|K\|_1.$$

$\square$

Betrachte den Operator $S_h$ am $L_2([0,1])$ mit dem Kern $s_h(t-s)$

$$s_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & |t| \leq h \\ 0, & |t| > 0 \end{cases},$$

d.h. es ist

$$(S_h f)(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(s)\, ds, \quad t \in [0,1].$$

RS → ⊗

III.6 Lemma: Es gilt $\lim_{h\to 0}^{s} S_h = I$.

Beweis: Sei $f_\alpha(t) = f(t-\alpha)$, $f$ wird hier außerhalb von $[0,1]$ immer durch $0$ fortgesetzt. Für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für $|\alpha| < \delta$ gilt $\| f_\alpha - f \|_2 < \varepsilon$. ~~Sei …~~

RS → ⊗⊗ $\cancel{\int |(S_h f)(t) - f(t)|\,|g(t)|\,dt = \int \left|\int s_h(\alpha)(f(t-\alpha) - f(t))\,d\alpha\right|}$

~~$|g(t)|\,dt$~~

~~Weiter sei $\delta$ so klein, dass~~

$$\cancel{\int_0^\delta |(S_h f)(t) - f(t)|\,|g(t)|\,dt,\ \int_{1-\delta}^{1} |(S_h f)(t) - f(t)|\cdot|g(t)|\,dt < \varepsilon \|g\|.}$$

~~Für $|h| < \delta$ gilt~~

$$\cancel{\int_\delta^{1-\delta} \left| (S_h f)(t) - f(t) \right| \cdot |g(t)|\, dt = \int_\delta^{1-\delta} \left| \int_0^1 s_h(t-\beta) f(\beta)\, d\beta - f(t) \right| |g(t)|\, dt}$$

$$\cancel{= \int_\delta^{1-\delta} \left| \int_{t-1}^{t} s_h(\alpha)\,(f(t-\alpha) - f(t))\, d\alpha \right| \cdot |g(t)|\, dt \leq}$$

$$\cancel{\leq \int_{\delta-h}^{1-\delta} |s_h(\alpha)| \int_{\delta}^{1-\delta} |f(t-\alpha) - f(t)| \cdot |g(t)|\, dt\, d\alpha}$$

$$\cancel{\leq \|f_\alpha - f\| \cdot \|g\|}$$

$$\leq \int_\delta^{1-\delta} \int_{t-1}^{t} |s_h(\alpha)| \cdot |f(t-\alpha) - f(t)| \cdot |g(t)|\, d\alpha\, dt \leq$$

$$\cancel{\leq \int_\delta^{1-\delta} \int_{\delta-1}^{1-\delta} |s_h(\alpha)|\, |f(t-\alpha) - f(t)| \cdot |g(t)|\, d\alpha\, dt =}$$

7 

$$= \int_{\delta-1}^{1-\delta} |s_h(\alpha)| \cdot \underbrace{\int_{\delta}^{1-\delta} |f(t-\alpha)-f(t)|\cdot|g(t)|\,dt}_{\le \|f_\alpha - f\|\cdot\|g\|}\,d\alpha \le$$

$$\le \underbrace{\int_{\delta-1}^{1-\delta} |s_h(\alpha)|\,d\alpha}_{\le 1} \cdot \underbrace{\|f_\alpha - f\|}_{\le \varepsilon}\cdot\|g\| \le \varepsilon\|g\|.$$

Insgesamt ist $\int_0^1 |(S_h f)(t) - f(t)|\cdot|g(t)|\,dt \le 3\varepsilon\|g\|$, also $\|S_h f - f\| \le 3\varepsilon$.

□

III.7 Satz: Sei $k \in L_2([0,1]\times[0,1])$, $K \geq 0$. Dann ist $K \in \mathcal{S}_1$ genau dann, wenn

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{4h^2}\int_0^1\int_0^1 \max(2h-|t-s|,0)\,k(t,s)\,dt\,ds < \infty.$$

In diesem Fall gilt

$$\operatorname{tr} K = \|K\|_1 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2}\int_0^1\int_0^1 \max(2h-|t-s|,0)\,k(t,s)\,dt\,ds.$$

Beweis:

•) Sei $k_h$ der Kern

$$k_h(t,s) = \frac{1}{4h^2}\int_{t-h}^{t+h}\int_{s-h}^{s+h} k(v,u)\,du\,dv = \int_0^1\int_0^1 s_h(t-u)\,k(u,v)\,s_h(v-s)\,du\,dv.$$

Dann gilt

$$\int_0^1 k_h(s,s)\,ds = \int_0^1\int_0^1 k(u,v)\Big(\underbrace{\int_0^1 s_h(s-u)\,s_h(v-s)\,ds}_{=\max(2h-|u-v|,0)}\Big)\,du\,dv,$$

also ist die Bedingung des Satzes äquivalent mit

$$\limsup_{h\to 0} \int_0^1 k_h(s,s)\,ds < \infty.$$

•) Der Kern $k_h(t,s)$ ist stetig und der Kern des Operators $S_h K S_h$. Weiters ist nach VS: $S_h K S_h \geq 0$. Also ist nach III.5

$$S_h K S_h \in \gamma_1 \;, \quad \| S_h K S_h \|_1 = \int_0^1 k_h(s,s)\, ds.$$

Wegen $K \in \gamma_\infty$ und $\lim\limits_{h\to 0}^{s} S_h = I$ gilt ~~[illegible]~~ mit II.18a $\lim\limits_{h\to 0} S_h K S_h = K$ ~~[illegible]~~ in der ~~Norm~~ Operatornorm. Mit II.14 folgt $K \in \gamma_1$. Wieder mit II.18a folgt $\lim\limits_{h\to 0} S_h K S_h = K$ in der Norm $\|.\|_1$, also gilt mit III.5

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 k_h(s,s)\, ds = \lim_{h\to 0} \| S_h K S_h \|_1 = \| K \|_1 .$$

•) Sei nun umgekehrt $K \in \gamma_1$. Dann gilt mit II.18a $\lim\limits_{h\to 0} S_h K S_h = K$ in $\|.\|_1$, also auch nach obigem Argument

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 k_h(s,s)\, ds = \| K \|_1 ,$$

insbesondere die Bedingung des Satzes. $\square$

<u>III.8 Korollar:</u> Ist der Kern $k(t,s)$ beschränkt und $K \geq 0$, so ist $K \in \gamma_1$.

<u>Beweis:</u> Es gilt $\sup\limits_{t,s\in[0,1],\, h>0} |k_h(t,s)| \leq \sup\limits_{t,s\in[0,1]} |k(t,s)|$, also ist die Bedingung von III.7 erfüllt. $\square$

<u>III.8 Korollar:</u> Sei $k(t,s) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ und sei $K \in \gamma_1$. Dann gilt

$$\operatorname{tr} K = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h^2} \int_0^1\!\!\int_0^1 \max(2h - |t-s|, 0)\, k(t,s)\, dt\, ds .$$

Ist zusätzlich $k$ beschränkt, so gilt

$$|\operatorname{tr} K| \leq \sup_{t,s\in[0,1]} |k(t,s)| ,$$

~~[illegible]~~ ist zusätzlich $k$ stetig, so gilt

$$\operatorname{tr} K = \int_0^1 k(s,s)\, ds.$$

Beweis:

•) Der Kern $k$ kann als Linearkombination von vier nichtnegativen Kernen geschrieben werden: Denn sei $K = \operatorname{Re} K + i \operatorname{Im} K$,

$$\operatorname{Re} K = \sum_j \alpha_j (\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad \operatorname{Im} K = \sum_j \beta_j (\cdot, \psi_j)\psi_j .$$

Setze
$$K_1 = \sum_j \max(\alpha_j, 0)\,(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad K_2 = \sum_j \max(-\alpha_j, 0)\,(\cdot, \varphi_j)\varphi_j,$$

$$K_3 = \sum_j \max(\beta_j, 0)\,(\cdot, \psi_j)\psi_j, \quad K_4 = \sum_j \max(-\beta_j, 0)\,(\cdot, \psi_j)\psi_j .$$

Da $K \in \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ ist und daher auch $\operatorname{Re} K, \operatorname{Im} K \in \mathcal{T}_2$ folgt $\sum_j \max(\alpha_j, 0)^2 < \infty$ und analog für die anderen. Also ist $K_1, \dots, K_4 \in \mathcal{T}_2$ und werden daher als Integraloperatoren dargestellt. Dann gilt $K = K_1 - K_2 + i K_3 - i K_4$ die gewünschte Zerlegung. Die Formel für $\operatorname{tr} K$ folgt also aus III.7.

•) Ist $k$ beschränkt, so folgt die gegebene Abschätzung sofort aus der Formel für $\operatorname{tr} K$. Ist $k$ stetig, so konvergiert $k_h(s,s)$ gleichmäßig zu $k(s,s)$ auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$, $0<\alpha<\beta<1$. Wegen $\sup_{t,s,h} |k_h(t,s)| \leq \sup_{t,s} |k(t,s)|$ folgt

$$\limsup_{h\to 0} \int_0^1 k_h(s,s)\,ds = \int_0^1 k(s,s)\,ds. \qquad \square$$

17.12.85

Es genügt nicht $k \in C([0,1]\times[0,1])$ zu verlangen, möchte man $K \in \mathcal{T}_1$ bekommen ($\leftarrow$ Bsp.).

## 2. Die Determinante:

Wie für die Spur wollen wir die Determinante mittels eines Stetigkeitsarguments auf $\mathcal{S}_1$ übertragen. ⊗ ⇐ RS!

**III.10 Lemma:** Seien $F, G \in \mathcal{R}$. Dann gilt

(i) $\det\left[(I+F)(I+G)\right] = \det(I+F)\cdot\det(I+G)$,

(ii) $|\det(I+F)| \leq e^{\|F\|_1}$,

(iii) $|\det(I+F)-1| \leq e^{\|F\|_1}-1$.

**Beweis:**

·) Zunächst bemerke, daß $(I+F)(I+G) = I + (F+G+FG)$ gilt. Es ist daher die linke Seite in (i) definiert. Sei $\mathcal{H}_0$ ein endlichdimensionaler Teilraum mit $F, G : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_0^{\perp} \subseteq \ker F \cap \ker G$. Verwendet man diesen Raum $\mathcal{H}_0$ in der Definition der Determinante, so folgt (i).

·) Es gilt (mit $1+x \leq e^x$)

$$|\det(I+F)| \leq \prod_j (1+|\lambda_j(F)|) \leq \prod_j (1+s_j(F)) \leq$$
$$\leq e^{\sum_j s_j(F)} = e^{\|F\|_1}.$$

·) Es gilt

$$|\det(I+F)-1| = \left|\prod_j (1+\lambda_j(F)) - 1\right| \leq$$
$$\leq \sum_{n\geq 1} \sum_{j_1<\dots<j_n} |\lambda_{j_1}(F)\cdot\ldots\cdot\lambda_{j_n}(F)| \leq$$
$$\leq \sum_{n\geq 1} \sum_{j_1<\dots<j_n} s_{j_1}(F)\cdot\ldots\cdot s_{j_n}(F) = \prod_j (1+s_j(F)) - 1 \leq$$
$$\leq e^{\sum_j s_j(F)} - 1 = e^{\|F\|_1} - 1.$$

□

III.11 Lemma: Sei $A \in \mathcal{J}_1$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \det(I+F_n) =: \det(I+A)$$

für jede Folge $F_n \in \mathcal{R}$, $F_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} A$, und hängt nicht von dieser Folge ab.

Beweis:

•) Sei zuerst $I+A$ invertierbar, dann ist für hinreichend große $n$ auch $I+F_n$ invertierbar. Es gilt also für Folgen $(F_n)$, $(F_n')$ mit $F_n \to A$, $F_n' \to A$

$$I+F_m' = (I+F_n)\left[I + (I+F_n)^{-1}(F_m'-F_n)\right]$$

und es folgt

$$|\det(I+F_m') - \det(I+F_n)| = |\det(I+F_n)| \cdot$$
$$\cdot \left|\det[I+(I+F_n)^{-1}(F_m'-F_n)] - 1\right| \leq$$
$$\leq e^{\|F_n\|_1}\left(e^{\|(I+F_n)^{-1}(F_m'-F_n)\|_1} - 1\right) \to 0,$$

also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \det(I+F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \det(I+F_n')$.

•) Sei nun $I+A$ nicht invertierbar. Wir zeigen $\det(I+F_n) \to 0$. Der Punkt $-1$ ist ein isolierter Eigenwert endlicher Vielfachheit von $A$. Bezeichne $P$ die Riesz Projektion, $\mathcal{H}_1 = \operatorname{ran} P$, $\mathcal{H}_2 = \ker P$. Bezüglich der Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ schreibe

$$F_n = \begin{pmatrix} K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Da $F_n \to A$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ folgt

$$\|K_{11}^{(n)} - A_{11}\|_1,\ \|K_{12}^{(n)}\|_1,\ \|K_{21}^{(n)}\|_1,\ \|K_{22}^{(n)} - A_{22}\|_1 \to 0.$$

Bezeichne $I_j$ die Identität auf $\mathcal{H}_j$. Da $I_2 + A_{22}$ invertierbar ist, ist auch (für hinreichend großes $n$) $I_2 + K_{22}^{(n)}$ invertierbar. Daher kann man $I+F_n$ wie folgt zerlegen:

$$I+F_n = (I+C_n)(I+D_n)(I+E_n)$$

mit

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & K_{12}^{(n)}(I_2+K_{22}^{(n)})^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} K_{11}^{(n)} - K_{12}^{(n)}(I_2+K_{22}^{(n)})^{-1}K_{21}^{(n)} & 0 \\ 0 & K_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (I_2+K_{22}^{(n)})^{-1}K_{21}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar haben $C_n$ und $E_n$ keine von Null verschiedenen Eigenwerte, also gilt $\det(I+C_n) = \det(I+E_n) = 1$ und daher

$$\det(I+F_n) = \det(I+D_n) =$$

$$= \det\left(I_1+K_{11}^{(n)} - K_{12}^{(n)}(I_2+K_{22}^{(n)})^{-1}K_{21}^{(n)}\right)\cdot \det(I_2+K_{22}^{(n)}).$$

Wegen dem ersten Teil dieses Beweises gilt

$$\lim_{n\to\infty} \det(I_2+K_{22}^{(n)}) = \det(I_2+A_{22}).$$

Da $\mathcal{X}_1$ endlichdimensional ist und die Determinante (bei Matrizen) stetig, folgt

$$\det\left(I_1+K_{11}^{(n)} - K_{12}^{(n)}(I_2+K_{22}^{(n)})^{-1}K_{21}^{(n)}\right) \to \det(I_1+A_{11}) = 0. \qquad \square$$

Wegen III.11 können wir also die Determinante (als vgl. II.11, stetige Funktion) auf ganz $\mathcal{X}_1$ fortsetzen. Einige Eigenschaften sind:

**III.12 Korollar:** Sei $A \in \mathcal{X}_1$ und sei $(\varphi_j)$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Dann gilt

$$\det(I+A) = \lim_{n\to\infty} \det\left(\delta_{jk} + (A\varphi_k,\varphi_j)\right)_{j,k=1}^{n}.$$

Ist weiters $B \in \mathcal{X}_1$, so gilt

$$\det(I+A)\det(I+B)=\det\left[(I+A)(I+B)\right]$$
$$|\det(I+A)|\leq\prod_j(1+s_j(A))\leq e^{\|A\|_1}$$
$$|\det(I+A)-1|\leq e^{\|A\|_1}-1.$$

Beweis: ¹) Sei $P_n$ die orthogonale Projektion auf span $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$. Dann ist $(\delta_{jk}+(A\varphi_k,\varphi_j))_{j,k=1}^n$ die Matrix von $P_nAP_n$. Die Behauptung folgt da $P_nAP_n\to A$ bzgl. $\|\cdot\|_1$.
²) Die erste und dritte Formel folgen unmittelbar. Die zweite Formel folgt wegen $s_j(A)\geq s_j(P_nAP_n)$:
$$|\det(I+P_nAP_n)|=\left|\prod_j(1+\lambda_j(P_nAP_n))\right|\leq$$
$$\leq\prod_j(1+s_j(P_nAP_n))\leq\prod_j(1+s_j(A)).$$ □

III.13 Korollar: Sei $A\in\mathcal{J}_1$, dann ist $I+A$ invertierbar genau dann wenn $\det(I+A)\neq 0$ ist.

Beweis: Ist $I+A$ nicht invertierbar, so gilt wie im Beweis von III.11 gezeigt wurde $\det(I+A)=0$. Sei $I+A$ invertierbar,
$$(I+A)^{-1}=I+C$$
mit $C=-A(I+A)^{-1}\in\mathcal{J}_1$. Also folgt
$$\det(I+A)\det(I+C)=\det(I+A)(I+C)=1.$$ □

Ist $A\in\mathcal{J}_1$, so ist für $\lambda\in\mathbb{C}$ die Funktion $\det(I-\lambda A)$ definiert. Sie ist eine ganze Funktion vom Exponentialtyp 0 wie wir im folgenden zeigen werden.

III.14 Satz: Sei $A\in\mathcal{J}_1$. Ist $(F_n)$ eine Folge, $F_n\in\mathcal{K}$ mit $F_n\to A$ bzgl. $\|\cdot\|_1$, so gilt $\lim_{n\to\infty}\det(I-\lambda F_n)=\det(I-\lambda A)$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ ⊗. Für $\varepsilon>0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon$, so daß
$$|\det(I-\lambda A)|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|},\quad\lambda\in\mathbb{C}.$$

⊗ und $\det(I-\lambda A)$ ist vom Exponentialtyp 0, d.h.

Beweis:

•) Sei $R>0$, so daß $\{|\zeta| = R^{-1}\} \subseteq \rho(A)$. Da $F_n \to A$ bzgl. $\|.\|_1$ und daher auch bzgl. $\|.\|$ gilt (für hinreichend große $n$) auch $\{|\zeta| = R^{-1}\} \subseteq \rho(F_n)$. weiters folgt gleichmäßig auf $|\lambda| = R$:

$$\lim_{n\to\infty} (I-\lambda F_n)^{-1} = (I-\lambda A)^{-1}, \quad |\lambda| = R,$$

Es gilt

$$\max_{|\lambda|=R} |\det(I-\lambda F_m) - \det(I-\lambda F_n)| \le e^{R\|F_n\|_1} \cdot \left(e^{R\|(I-\lambda F_n)^{-1}(F_m-F_n)\|_1} - 1\right)$$

und da die Konvergenz oben gleichmäßig auf $|\lambda| = R$ ist, d.h.

$$\sup_{|\lambda|=R} \|(I-\lambda F_n)^{-1}(F_m-F_n)\|_1 \le C_R \|F_m - F_n\|_1$$

konvergiert $\det(I-\lambda F_n) \to \det(I-\lambda A)$ gleichmäßig auf $|\lambda| = R$. Da $\det(I-\lambda F_n) = \prod_j (1-\lambda\lambda_j(F_n))$ ein Polynom, also analytisch ist, folgt gleichmäßige Konvergenz auch im Inneren (gegen $\det(I-\lambda A)$ da dieser sowieso punktweise gilt).

•) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $N$ so groß, daß

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} s_j(A) < \varepsilon.$$

Weiters existiert eine Konstante $C_\varepsilon$, so daß

$$\prod_{j=1}^{N} (1+|\lambda| s_j(A)) \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Es folgt

$$|\det(I-\lambda A)| \le \prod_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda| s_j(A)) = \prod_{j=1}^{N}(1+|\lambda| s_j(A)) \cdot \prod_{j=N+1}^{\infty}(1+|\lambda| s_j(A)) \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|} \cdot e^{\varepsilon|\lambda|}.$$

$\square$

**III.15 Satz:** Sei $A \in \mathcal{J}_1$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die von Null verschiedenen Eigenwerte. Dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda} \det(I-\lambda A) = -\det(I-\lambda A) \cdot \operatorname{tr}\left[A(I-\lambda A)^{-1}\right], \quad \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

Weiters ist $\det(I-\lambda A) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \lambda^k$ mit $(\sigma_j = \operatorname{tr} A^j)$

$$\Delta_k = \frac{(-1)^k}{k} \det\begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & k-1 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \cdots & \cdots & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1,$$

$$\Delta_0 = 1.$$

Beweis:

- Sei $F \in \mathcal{K}$, dann gilt $\det(I-\lambda F) = \prod_j (1-\lambda \lambda_j(F))$,

also
$$\frac{\frac{d}{d\lambda}\det(I-\lambda F)}{\det(I-\lambda F)} = \sum_j \frac{-\lambda_j(F)}{1-\lambda\lambda_j(F)} = -\operatorname{tr} F(I-\lambda F)^{-1},$$

denn $\frac{\lambda_j(F)}{1-\lambda\lambda_j(F)}$ sind die Eigenwerte von $F(I-\lambda F)^{-1}$. Also folgt die erste Formel da $\det$, ihre Ableitungen und Spur stetig bzgl. $\|\cdot\|_1$ sind.

- Es gilt (geometrische Reihe) da die Spur stetig ist

$$\operatorname{tr} A(I-\lambda A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \operatorname{tr} A^{j+1}.$$

Schreibe

$$\det(I-\lambda A) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_k \lambda^k, \quad \frac{d}{d\lambda}\det(I-\lambda A) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\Delta_{j+1}\lambda^j.$$

Koeffizientenvergleich und die Cramersche Regel liefern die Behauptung.

$\square$

Aus III.15 folgt wegen $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ unmittelbar, daß für $A \in \mathcal{J}_1$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\det(I-AB) = \det(I-BA)$

~~Determinante und Eigenwerte~~

Wir zeigen den Satz:

**III.16 Satz:** Sei $A \in \mathcal{S}_1$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die ~~[illegible]~~ Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt). Dann gilt

$$\det(I - A) = \prod_j (1 - \lambda_j), \quad \operatorname{tr} A = \sum_j \lambda_j .$$

Dazu benötigen wir die folgende Aussage (Beweis cf. ):

**III.17 Satz:** Sei $f$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp 0, $f(0) = 1$, und seien $a_1, a_2, \ldots$ die Nullstellen von $f$. Gilt

$$\sum_j \frac{1}{|a_j|} < \infty,$$

so folgt

$$f(\lambda) = \prod_j \left(1 - \frac{\lambda}{a_j}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Beweis (von III.16):

·) Wegen III.13 ist $\det(I - \lambda A) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \lambda_j^{-1}$ für ein gewisses $j$ ist. Zerlegt man $\mathcal{H}$ in $\operatorname{ran} P$ und $\ker P$ für den Riesz-Projektor $P$ zu $\lambda_j$, so ist $m = \dim \operatorname{ran} P$ gleich der algebraischen Vielfachheit von $\lambda_j$ und es gibt eine Jordan-Basis in $\operatorname{ran} P$. Es folgt

$$\det(I_{\operatorname{ran} P} - \lambda A|_{\operatorname{ran} P}) = (1 - \lambda \lambda_j)^m .$$

14.1. Da $I - \lambda A$ auf $\ker P$ invertierbar ist, ist $\lambda_j^{-1}$ eine Nullstelle von $\det(I - \lambda A)$ der Vielfachheit $m$.

·) Da $A \in \mathcal{S}_1$ ist gilt $\sum_j |\lambda_j| \le \|A\|_1 < \infty$, also sind alle VS von III.17 erfüllt und es gilt $\det(I - \lambda A) = \prod_j (1 - \lambda \lambda_j)$. Vergleicht man die Koeffizienten bei $\lambda$ (III.15), so sieht man $\operatorname{tr} A = \sum_j \lambda_j$. $\square$

Die erste Formel in III.15 ist ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Aussage:

III.17a Satz: Sei $A(\mu): \mathcal{G} \to \mathcal{J}_1$ eine auf dem Gebiet $\mathcal{G}$ bzgl. $\|.\|_1$ holomorphe Funktion. Weiters sei $F$ eine auf einem Gebiet $\mathcal{G}_F$, $\mathcal{G}_F \supseteq \bigcup_{\mu \in \mathcal{G}} \sigma(A(\mu)) \cup \{0\}$, holomorphe skalare Funktion, $F(0)=0$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\mu} tr\Big(F(A(\mu))\Big) = tr\Big(F'(A(\mu)) \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big), \mu \in \mathcal{G},$$

Beweis:

·) Zunächst zur Erklärung von $F(A(\mu))$: Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $F$ holomorph auf (einem Gebiet umfassend) $\sigma(A)$, so definiert man

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\,(A-z)^{-1}\,dz$$

mit einer rektifizierbaren Kurve $\gamma$, die $\sigma(A)$ im Inneren enthält.

Ist $F(0)=0$, so ist $\frac{F(z)}{z}$ holomorph und wegen der Beziehung $\frac{1}{z}A(A-z)^{-1} = (A-z)^{-1} + \frac{1}{z}$ folgt

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\,A\,(A-z)^{-1}\,\frac{dz}{z}.$$

Ist $A$ in einem Norm-Ideal $\mathcal{J}$ enthalten, so ist $A(A-z)^{-1}$ eine bzgl. $\|.\|_{\mathcal{J}}$ stetige Funktion auf der Kurve $\gamma$, also ist dann auch $F(A) \in \mathcal{J}$. Weiters gilt $\sigma(F(A)) = F(\sigma(A))$.

·) Sei $\mu_0 \in \mathcal{G}$ fest und wähle eine Kurve $\gamma$ in $\mathcal{G}_F$ die $\sigma(A(\mu_0))$ enthält. Sie enthält dann auch $\sigma(A(\mu))$ für $\mu$ hinreichend nahe bei $\mu_0$, also gilt lokal um $\mu_0$:

$$F(A(\mu)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\,C(\mu,z)\,dz,$$

mit $C(\mu,z) = \frac{1}{z}A(\mu)(A(\mu)-z)^{-1}$. Es folgt

$$\operatorname{tr} F(A(\mu)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\, \operatorname{tr}(C(\mu,z))\, dz .$$

Es gilt

$$\frac{C(\mu,z)-C(\mu_0,z)}{\mu-\mu_0} = (A(\mu_0)-z)^{-1}\, \frac{A(\mu)-A(\mu_0)}{\mu-\mu_0}\, (A(\mu)-z)^{-1},$$

also erhält man bzgl. $\|\cdot\|_1$

$$\frac{d}{d\mu} C(\mu,z)\Big|_{\mu=\mu_0} = \lim_{\mu\to\mu_0} \frac{C(\mu,z)-C(\mu_0,z)}{\mu-\mu_0} =$$

$$= (A(\mu_0)-z)^{-1}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0} (A(\mu_0)-z)^{-1} = (A(\mu_0)-z)^{-2}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}$$

Diese Beziehung gilt auf $\gamma$ gleichmäßig. Also folgt (auch gleichmäßig auf $\gamma$)

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{tr} C(\mu,z)\Big|_{\mu=\mu_0} = \operatorname{tr}\Big[ (A(\mu_0)-z)^{-2}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0} =$$

$$= -\frac{d}{dz} \operatorname{tr}\Big[ (A(\mu_0)-z)^{-1}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}\Big],$$

und daher

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{tr} F(A(\mu))\Big|_{\mu=\mu_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\, \frac{d}{d\mu} \operatorname{tr} C(\mu,z)\Big|_{\mu=\mu_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\, \frac{d}{dz} \operatorname{tr}\Big[ (A(\mu_0)-z)^{-1}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0}\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F'(z)\, \operatorname{tr}\Big[ (A(\mu_0)-z)^{-1}\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}\Big] dz =$$

$$= \operatorname{tr}\Big[ -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F'(z)\, (A(\mu_0)-z)^{-1}\, dz\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}\Big] = \operatorname{tr}\Big[F'(A(\mu_0))\, \frac{dA(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=\mu_0}\Big].$$

$\square$

**III.17b Korollar:** Sei $A(\mu)$ wie in III.17a. Die Funktion $\det(I-A(\mu))$ ist in $G$ holomorph und erfüllt

$$\frac{d}{d\mu}\ln\det(I-A(\mu)) = -\operatorname{tr}\left[(I-A(\mu))^{-1}\frac{dA(\mu)}{d\mu}\right],\quad 1\in\varrho(A(\mu)).$$

Beweis:

·) Sei $P_n$ eine Folge von endlichdimensionalen orthogonalen Projektoren, $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} P_n = I$. Dann gilt für $\mu\in G$

$$\det(I-A(\mu)) = \lim_{n\to\infty}\det(I-P_nA(\mu)P_n).$$

Wegen

$$|\det(I-P_nA(\mu)P_n)| \le e^{\|P_nA(\mu)P_n\|_1} \le e^{\|A(\mu)\|_1},$$

folgt aus dem Satz von Vitali, daß dieser Limes lokal gleichmäßig ist und daher ist $\det(I-A(\mu))$ holomorph.

·) Ist $A\in\mathfrak{J}_1$, $1\in\varrho(A)$, so gilt $\ln\det(I-A) = \operatorname{tr}\ln(I-A)$, also schreibt sich obige Formel als

$$\frac{d}{d\mu}\operatorname{tr}\ln(I-A(\mu)) = -\operatorname{tr}\left[(I-A(\mu))^{-1}\frac{dA(\mu)}{d\mu}\right],$$

was III.17a mit $F(z)=\log(1-z)$ ist (jener Zweig mit $F(0)=0$). $\square$

## 3. Wachstum der Resolvente:

**III.18 Satz:** Sei $A\in\mathcal{S}_1$, $\det(I+A)\neq 0$. Dann gilt
$$\|(I+A)^{-1}\| \le \frac{1}{|\det(I+A)|}\prod_{j=1}^{\infty} (1+s_j(A)).$$

Beweis:

•) Sei zunächst $\dim\mathcal{H}=n<\infty$. Betrachte den Operator
$$R=\big(\det(I+A)\big)\,(I+A)^{-1},$$
dann ist
$$s_1^2(R)=\lambda_1(R^*R)=|\det(I+A)|^2\,\lambda_1\big((I+A^*)^{-1}(I+A)^{-1}\big).$$
Wegen
$$|\det(I+A)|^2=\det\big((I+A)(I+A^*)\big)=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\big((I+A)(I+A^*)\big)$$
folgt
$$s_1^2(R)=\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_j\big((I+A)(I+A^*)\big)=\prod_{j=1}^{n-1}s_j^2(I+A)\le$$
$$\le\Big(\prod_{j=1}^{n-1}(1+s_j(A))\Big)^2,$$
insbesondere also die Behauptung.

•) Ist $\dim\mathcal{H}=\infty$ und $A\in\mathcal{K}$, so folgt die Behauptung ebenfalls. Denn wähle $\mathcal{H}_0$, $\dim\mathcal{H}_0<\infty$, so daß $A\mathcal{H}_0\subseteq\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_0^{\perp}\subseteq\ker A$. Dann gilt die Behauptung für $A_0=A|_{\mathcal{H}_0}$. Die rechte Seite ändert sich nicht wenn man $A_0$ durch $A$ ersetzt, für die linke Seite gilt
$$\|(I+A)^{-1}\|\le\max\big(1,\|(I+A_0)^{-1}\|\big).$$
Da die rechte Seite immer $\geq 1$ ist folgt die Behauptung für $A$.

•) Sei nun $A$ beliebig. Wähle eine Folge von endlichdimensionalen Orthogonalprojektoren $P_n$ mit $\lim^{s}_{n\to\infty}P_n=I$. Wegen $\lim^{\|\cdot\|_1}P_nAP_n=A$

folgt $\lim \det(I+P_nAP_n) = \det(I+A)$, also ist (für hinreichend großes $n$) $I+P_nAP_n$ invertierbar. Da insbesondere $P_nAP_n \to A$ bzgl. $\|.\|$ folgt

$$\|(I+P_nAP_n)^{-1}\| \to \|(I+A)^{-1}\|.$$

Weiters ist stets $s_j(P_nAP_n) \leq s_j(A)$. Aus der Behauptung für $P_nAP_n$:

$$\|(I+P_nAP_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\det(I+P_nAP_n)|} \prod_j \underbrace{(1+s_j(P_nAP_n))}_{\leq 1+s_j(A)}$$

folgt also die Behauptung für $A$.

$\square$

Aus diesem Satz erhalten wir eine Wachstumsaussage für die Resolvente eines Volterra-Operators (d.h. $\sigma(A) = \{0\}$). Beachte, daß für einen Volterra-Operator $(I-zA)^{-1}$ eine ganze Funktion ist.

<u>III.18 Satz:</u> Sei $A \in \mathfrak{I}_r$ für ein gewisses $r>0$ und ein Volterra Operator. Dann ist $\|(I-zA)^{-1}\|$ vom Minimaltyp der Ordnung $r$, d.h. für beliebiges $\delta > 0$ existiert eine Konstante $C_\delta$, so daß

$$\|(I-zA)^{-1}\| \leq C_\delta e^{\delta|z|^r}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

<u>Beweis:</u>

•) Sei zunächst $0 < r \leq 1$. Dann gilt $1+|z| \leq e^{\beta|z|^r}$ für eine gewisse Konstante $\beta$, denn: Für $|z| \leq 1$ ist $|z| \leq |z|^r$, also

$$1+|z| \leq e^{|z|} \leq e^{|z|^r}.$$

Wegen $\lim_{z\to\infty} |z|^{-r}\log(1+|z|) = 0$ ist die Funktion $|z|^{-r}\log(1+|z|)$ auf $|z| \geq 1$ beschränkt, d.h. $\log(1+|z|) \leq \alpha |z|^r$. Insgesamt folgt obige Ungleichung.

•) Sei nun (für $r \leq 1$) $\delta$ gegeben. Wähle $N$ so, daß $\sum_{j=N+1}^{\infty} s_j(A)^r < \delta$, Dann folgt mit III.18, da wegen $\sigma(A) = \{0\}$ und III.16: $\det(I+A) = 1$:

$$\|(I-zA)^{-1}\| \le \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+|z|s_j(A)\right) \le \prod_{j=1}^{N}\left(1+|z|s_j(A)\right)\cdot e^{\beta\delta|z|^r}.$$

Da ein Polynom Ordnung 0 und Typ 0 hat folgt die Behauptung.

•) Sei nun $r \geq 1$ und $\delta$ gegeben. Sei $q$ eine ganze Zahl, $r \le q < r+1$ und setze $\rho = \frac{r}{q}$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A^q)^{\frac{r}{q}} \le \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^r < \infty,$$

d.h. $A^q \in \mathcal{J}_\rho$. Nach dem obigen Beweisschritt gilt

$$\|(I-\lambda A^q)^{-1}\| \le C e^{\delta|\lambda|^\rho},$$

also

$$\|(I-z^qA^q)^{-1}\| \le C e^{\delta|z|^r}.$$

Wegen $(I-zA)^{-1} = (I+zA+\dots+z^{q-1}A^{q-1})(I-z^qA^q)^{-1}$ und wieder da ein Polynom Ordnung 0 und Typ 0 hat folgt die Behauptung. $\square$

## 4. Vollständigkeit:

Wir sagen der Operator $A$ hat ein vollständiges System von Haupt- und Eigenvektoren, wenn die lineare Hülle aller Haupt- und Eigenvektoren in $\mathcal{H}$ dicht ist. Bezeichne im folgenden

$$W_A = \{(A\varphi,\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|=1\}$$

den numerischen Wertebereich von $A$.

**III.20 Lemma:** Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. (i) Ist $\lambda \notin \overline{W_A}$, so ist $\lambda - A$ invertierbar und $\|(\lambda-A)^{-1}\| \le [\operatorname{dist}(\lambda,\overline{W_A})]^{-1}$.

(ii) Liegt $W_A$ in einem abg. Winkel mit Ecke in $0$ und Öffnung $\le \pi$, so ist $\ker A = \ker A^*$.

Beweis:

•) Sei $0 < \delta = \operatorname{dist}(\lambda,\overline{W_A})$. Für $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|=1$, gilt

$$\|(\lambda-A)x\| \geq |((\lambda-A)x,x)| = |\lambda-(Ax,x)| \geq \delta,$$

also ist $(\lambda-A)$ injektiv und hat abgeschlossenen Wertebereich.
Analog gilt

$$\|(\lambda-A)^*x\| \geq |\bar\lambda-(A^*x,x)| = |\lambda-(Ax,x)| \geq \delta,$$

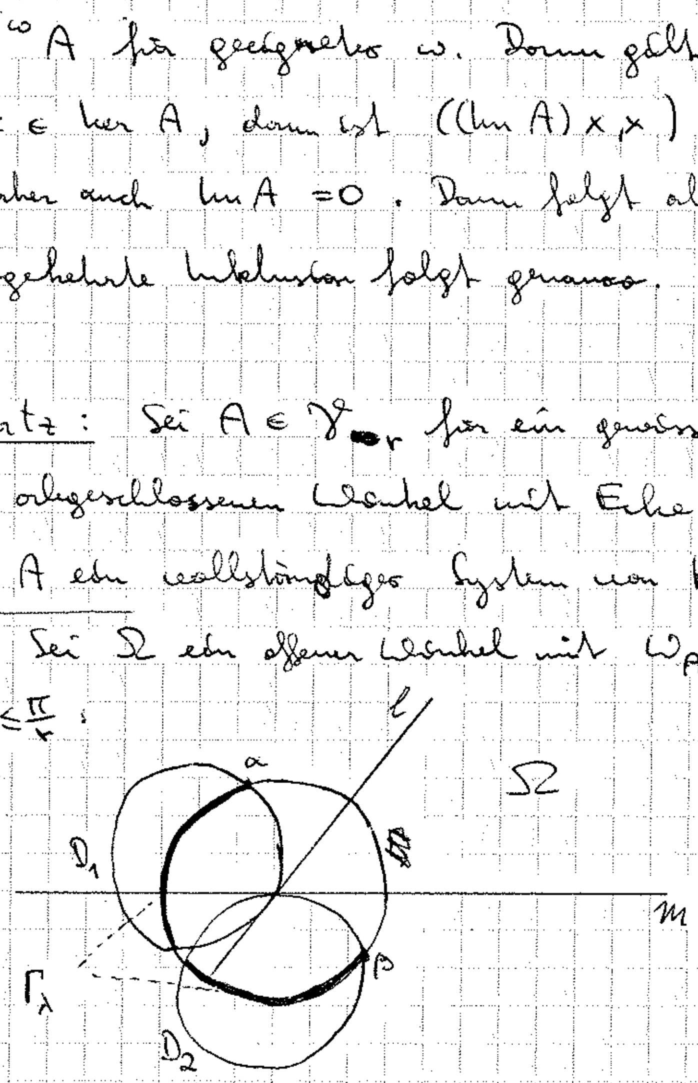
also ist $\ker(\lambda-A)^* = \{0\}$ und daher $\overline{\operatorname{ran}(\lambda-A)} = \mathcal{H}$.

•) Man kann sich auf $W_A \subseteq \overline{\mathbb{C}^+}$ beschränken, denn sonst betrachte $\tilde A = e^{i\omega}A$ für geeignetes $\omega$. Dann gilt $\operatorname{Im} A \geq 0$. Sei nun $x \in \ker A$, dann ist $((\operatorname{Im} A)x,x) = 0$, also $(\operatorname{Im} A)^{\frac12}x = 0$, und daher auch $\operatorname{Im} A = 0$. Dann folgt aber $x \in \ker A^*$, d.h. $\ker A \subseteq \ker A^*$.
Die umgekehrte Inklusion folgt genauso. $\square$

21.1.89

**III.21 Satz:** Sei $A \in \mathfrak{S}_r$ für ein gewisses $r \geq 1$. Liegt $W_A$ in einem abgeschlossenen Winkel mit Ecke in $0$ und Öffnung $\leq \frac{\pi}{r}$, so hat $A$ ein vollständiges System von Haupt- und Eigenvektoren.

**Beweis:** Sei $\Omega$ ein offener Winkel mit $W_A \subseteq \overline{\Omega}$ mit Ecke in $0$ und Öffnung $\leq \frac{\pi}{r}$:



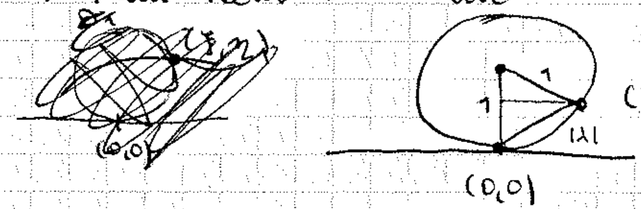

Hier seien $D_1, D_2$ Kreise mit Radius 1, die $l$ bzw. $m$ in $0$ berühren.

•) Wir zeigen, daß es einen Winkel $\Omega'$ mit gleicher Öffnung wie $\Omega$ gibt, so daß $I-zA$ für $z \notin \Omega'$ invertierbar ist und

$$\|(I-zA)^{-1}\| \leq 2|z|, \quad z \notin \Omega',$$

erfüllt.

Sei $D = D_1 \cup D_2$ und sei $\lambda \in D \setminus \{0\}$. Dann ist $\lambda - A$ invertierbar und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le (\mathrm{dist}(\lambda, \bar\Omega))^{-1}$. Sei $\Gamma_\lambda = \{z \in D \mid |z| = |\lambda|\}$, dann wird $\min_{z \in \Gamma_\lambda} \mathrm{dist}(z, \bar\Omega)$ offenbar in den Punkten $\alpha$ und $\beta$ angenommen. Man sieht elementar




$\Rightarrow \xi^2 = 1 - (1-\eta)^2 = |\lambda|^2 - \eta^2$,

also $\mathrm{dist}(\alpha, \bar\Omega) = \frac{|\lambda|^2}{2}$. Das heißt

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le 2|\lambda|^{-2}, \quad \lambda \in D \setminus \{0\}.$$

Nun führe die Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ durch. Dabei gehen $D_1$ und $D_2$ in Halbebenen, deren Komplement ein Winkel $\Omega'$ mit der gleichen Öffnung wie $\Omega$ ist über. Sei nun $z \notin \Omega'$, dann ist also $z^{-1} \in D \setminus \{0\}$ und daher $\|(z^{-1} - A)^{-1}\| \le 2|z^{-1}|^{-2}$, also $\|(I - zA)^{-1}\| \le 2|z|$.

•) Sei A zunächst ein Volterra-Operator. Wir müssen $A = 0$ zeigen. Betrachte die Funktion

$$A(z) = z^{-1}((I - zA)^{-1} - I) = A(I - zA)^{-1}.$$

Offenbar ist $A(z)$ ganz und wegen des eben bewiesenen ist $\sup_{z \notin \Omega'} \|A(z)\| < \infty$, also insbesondere $\|A(z)\|$ auf den Schenkeln von $\Omega'$ beschränkt. Wegen III.18 gilt $\|A(z)\| \le Ce^{\delta|z|^r}$, $z \in \mathbb{C}$, und da $\Omega'$ Öffnung $\le \frac{\pi}{r}$ hat folgt aus dem Satz von Phragmen-Lindelöf, daß $A(z)$ auch in $\Omega'$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist $A(z)$ konstant, also wegen $A(z) = A + z^2A^2 + \dots$ folgt $A^2 = 0$. Sei $x$ beliebig, dann ist also $Ax \in \ker A = \ker A^* = \mathrm{ran}\, A^\perp$ wegen III.20 (ii), also $Ax = 0$.

•) Sei nun $A$ beliebig und bezeichne mit $E_A$ die abgeschlossene lineare Hülle der zu Eigenwerten $\neq 0$ gehörenden Haupt- und Eigenvektoren. Sei $P$ die orthogonale Projektion auf $E_A^\perp$ und $B = PA|_{E_A^\perp}$.

Offensichtlich ist $B$ kompakt. $B$ ist sogar ein Volterra-Operator: Angenommen $\mu \in \sigma(B) \setminus \{0\}$, d.h. $\bar\mu \in \sigma(B^*)$. Sei $x_0 \in E_A^\perp$, $B^* x_0 = \bar\mu x_0$. Wegen $AE_A \subseteq E_A$ folgt $A^* E_A^\perp \subseteq E_A^\perp$, also $B^* = A^*|_{E_A^\perp}$, und daher gilt auch $A^* x_0 = \bar\mu x_0$. Bezeichne $P_{\bar\mu}(A^*)$ den Riesz-Projektor von $A^*$ zu $\{\bar\mu\}$ und $P_\mu(A)$ jenen von $A$ zu $\{\mu\}$. Dann gilt

$$E_A^\perp \subseteq [\operatorname{ran} P_\mu(A)]^\perp = \ker[P_\mu(A)^*] = \ker[P_{\bar\mu}(A^*)],$$

ein WS! zu dem oben gesagten.

Für $\varphi \in E_A^\perp$ gilt $(B\varphi,\varphi) = (PA\varphi,\varphi) = (A\varphi,\varphi)$, d.h. $W_B \subseteq W_A$. Weiters ist $s_j(B) \le s_j(A)$. Nach dem bereits bewiesenen gilt $B = 0$ und daher $A^*|_{E_A^\perp} = B^* = 0$, d.h. $E_A^\perp \subseteq \ker A^* \subseteq \ker A$ nach III.20 (ii).

$\square$

Ist in III.21 speziell $r = 1$ und $W_A \in \overline{\mathbb{C}^+}$, d.h. $A \in \mathcal{S}_1$ und $\operatorname{Im} A \ge 0$, so hat $A$ ein vollständiges System von Haupt- und Eigenvektoren.

<u>III.22 Satz:</u> Sei $A \in \mathcal{S}_\infty$, $\operatorname{Im} A \in \mathcal{S}_1$, $\operatorname{Im} A \ge 0$. Dann gilt

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) \le \operatorname{tr}(\operatorname{Im} A),$$

und es gilt Gleichheit genau dann, wenn $A$ ein vollständiges System von Haupt- und Eigenvektoren hat.

<u>Beweis:</u> Sei $(\varphi_j)$ eine Schur-Basis in $E_A$ (vgl. I.16). Dann ist

$$A\varphi_j = a_{1j}\varphi_1 + \dots + a_{jj}\varphi_j, \quad a_{jj} = \lambda_j(A).$$

Sei $(\psi_j)$ eine Orthonormalbasis von $E_A^\perp$. Dann gilt (II.25)

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Im} A) = \sum_j ((\operatorname{Im} A)\varphi_j,\varphi_j) + \sum_j ((\operatorname{Im} A)\psi_j,\psi_j) =$$

$$= \sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) + \sum_j ((\operatorname{Im} A)\psi_j,\psi_j),$$

denn $((\operatorname{Im} A)\varphi,\varphi) = (\frac{A-A^*}{2i}\varphi,\varphi) = \operatorname{Im}(A\varphi,\varphi)$.

Da $\operatorname{Im} A \geq 0$ gilt die behauptete Ungleichung. Gleichheit gilt genau dann, wenn $((\operatorname{Im} A)\psi_j, \psi_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Wegen $((\operatorname{Im} A)\psi_j, \psi_j) = \|(\operatorname{Im} A)^{\frac{1}{2}}\psi_j\|^2$ ist diese Beziehung äquivalent zu $(\operatorname{Im} A)\psi_j = 0$, d.h. $E_A^{\perp} \subseteq \ker(\operatorname{Im} A)$.

28.1.99 Hat $A$ ein vollständiges System, ist diese Beziehung trivialerweise erfüllt. Sei sie umgekehrt erfüllt, dann ist also $A|_{E_A^{\perp}}$ selbstadjungiert. Da $A|_{E_A^{\perp}}$ ein kompakter Volterra-Operator ist, wie im Beweis von III.21 gezeigt wurde, ist $A|_{E_A^{\perp}} = 0$, d.h. $E_A^{\perp} \subseteq \ker A$ und $A$ hat ein vollständiges System. $\square$

Wir zeigen im folgenden den Satz von Keldysh. Davor benötigen wir noch ein Lemma.

**III.23 Lemma:** Sei $K = K^* \in \mathfrak{S}_\infty$, $\ker K = \{0\}$, und $T \in \mathfrak{S}_\infty$. Weiters sei $\Omega$ ~~der~~ abgeschlossener Winkel mit Ecke in $0$, und $\Omega'$ sein Spiegelbild an der reellen Achse. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \omega \leq \arg z \leq \pi - \omega\}$ für einen gewissen $\omega > 0$. Dann gilt

$$\lim_{z \to \infty} \|T(I - zK)^{-1}\| = 0, \quad z \in \Omega \cup \Omega' \text{ gleichmäßig.}$$

(*) ⇐ RS

Beweis:

- Sei zuerst $T$ eindimensional, $T = (\cdot, f)g$, $\|f\| = \|g\| = 1$.

Schreibe

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\cdot, \varphi_j)\varphi_j .$$

Es gilt $(z \neq \lambda_j^{-1})$

$$T(I - zK)^{-1}\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - z\lambda_j)^{-1} (\varphi, \varphi_j)(\varphi_j, f) g ,$$

also

$$\|T(I - zK)^{-1}\varphi\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |(1 - z\lambda_j)^{-1}(f, \varphi_j)| \cdot |(\varphi, \varphi_j)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(1 - z\lambda_j)^{-1}(f, \varphi_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi\| ,$$

d.h. $\|T(I-zK)^{-1}\| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(1-z\lambda_j)^{-1}(f,\varphi_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Das Bild von $\Omega$ unter $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist wieder ein Winkel mit Ecke in $0$ mit der gleichen Öffnung wie $\Omega$, der keine reellen Punkte $(\neq 0)$ enthält. Also gilt für einen geeigneten Winkel $\omega > 0$ $\measuredangle$

$$\left|\frac{1}{1-\lambda_j z}\right| = \frac{|z^{-1}|}{|z^{-1}-\lambda_j|} \le \frac{|z^{-1}|}{|\operatorname{Im}(z^{-1})|} \le \frac{1}{\sin\omega}, \quad z \in \Omega \setminus \{0\}.$$

Sei nun $\varepsilon$ gegeben. Wähle $N$ so, daß $\sum_{j=N+1}^{\infty} |(f,\varphi_j)|^2 < \varepsilon$ und $R$ so, daß

$$\sum_{j=1}^{N} |(1-z\lambda_j)^{-1}(f,\varphi_j)|^2 < \varepsilon, \quad |z| \ge R.$$

Dann folgt für $z \in \Omega$, $|z| \ge R$:

$$\|T(I-zK)^{-1}\|^2 \le \sum_{j=1}^{N} |(1-z\lambda_j)^{-1}(f,\varphi_j)|^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} |(1-z\lambda_j)^{-1}(f,\varphi_j)|^2 \le$$

$$\le \varepsilon + \frac{1}{\sin\omega}\varepsilon. \quad \otimes \leftarrow \underline{RS}$$

•) Die Behauptung gilt offenbar für alle $T \in \mathcal{K}$.
Wegen $\|(I-zK)^{-1}\| \le \frac{1}{\sin\omega}$ für $z \in \Omega$ gilt

$$\|T(I-zK)^{-1}\| \le \frac{1}{\sin\omega}\|T-F\| + \|F(I-zK)^{-1}\|.$$

Wählt man $F \in \mathcal{K}$ mit $\|T-F\|$ beliebig klein, so folgt die Behauptung für beliebiges $T \in \mathcal{S}_\infty$. □

**III.24 Satz (von Keldysh):** Sei $K = K^* \in \mathcal{S}_r$ für ein gewisses $r \ge 1$, $\ker K = \{0\}$, und sei $S \in \mathcal{S}_\infty$, $I+S$ invertierbar. Dann hat der Operator $A = K(I+S)$ ein vollständiges System von Haupt- und Eigenvektoren. Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen alle Eigenwerte von $A$ bis auf endlich viele im Sektor

$$\Delta_\varepsilon = \{re^{i\varphi} \mid r \ge 0,\ |\pi-\varphi| < \varepsilon \text{ oder } |\varphi| < \varepsilon\}.$$

$\otimes\otimes \leftarrow \underline{RS}$

<u>Beweis:</u> Sei $\Omega = \mathbb{C}^+ \setminus \Delta_\epsilon$, $\Omega' = \mathbb{C}^- \setminus \Delta_\epsilon$.

•) Betrachte den Operator $T = S(I+S)^{-1}$. Dann ist $T \in \mathfrak{S}_\infty$, $I - T = (I+S)^{-1}$, also gilt

$$I - zA = I - zK(I+S) = (I-T-zK)(I+S).$$

Sei $z \in \Omega \cup \Omega'$, dann ist $I - zK$ invertierbar und daher gilt

$$I - zA = (I - T(I-zK)^{-1})(I-zK)(I+S).$$

Wegen III.23 gibt es $R>0$, so daß

$$\|T(I-zK)^{-1}\| \le \frac{1}{2}, \quad z \in \Omega \cup \Omega',\ |z| \geq R,$$

also ist $I - zA$ für solche $z$ invertierbar. Alle Eigenwerte von $A$ in $\Omega \cup \Omega'$ müssen daher außerhalb von $\{|z| \le \frac{1}{R}\}$ liegen, können also nur endlich viele sein. ⊗ ← RS;

•) Da $A$ injektiv ist, hat $A$ genau dann ein vollständiges System wenn $E_A = \mathcal{H}$ gilt. Bezeichne $P$ die Orthogonalprojektion auf $E_A^\perp$ und sei $B$ der kompakte Volterra-Operator $B = PA|_{E_A^\perp}$.
Es genügt zu zeigen, daß $B = 0$ ist: denn ist $B = 0$ so ist $B^* = A^*|_{E_A^\perp} = 0$, d.h. $E_A^\perp \subseteq \ker A^* = \ker[(I+S)^* K] = \{0\}$.

•) Wir zeigen zunächst $\sup_{z \in \Omega \cup \Omega'} \|(I - zB)^{-1}\| < \infty$: Es gilt

$$\|(I - T(I-zK)^{-1})^{-1}\| \le 2, \quad z \in \Omega \cup \Omega',\ |z| \geq R,$$

und $\|(I-zK)^{-1}\| \le \frac{1}{\sin \epsilon}$, $z \in \Omega \cup \Omega'$ (vgl. Beweis von III.23).
Also folgt

$$\|(I-zA)^{-1}\| \le \frac{2}{\sin\epsilon} \|(I+S)^{-1}\|, \quad z \in \Omega \cup \Omega',\ |z| \geq R.$$

Weiters gilt $(I - zB)^{-1} = P(I-zA)^{-1}|_{E_A^\perp}$ wenn $I - zA$ invertierbar ist, also kann man in der letzten Beziehung $A$ durch $B$ ersetzen.
Da $(I-zB)^{-1}$ in $\{|z| \le R\}$ stetig ist, folgt die obige Behauptung.

•) Da $K \in \mathfrak{S}_r$ ist, ist $B = PK(I+S)|_{E_A^\perp} \in \mathfrak{S}_r$ und III.18 zeigt

$$\| (I - zB)^{-1} \| \le C e^{\delta |z|^r}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Phragmen-Lindelöf ist $(I-zB)^{-1}$ auch in $\Delta_c$ beschränkt, nach Liouville konstant, also $(I-zB)^{-1} = I$. Daher gilt auch $I - zB = I$, d.h. $B = 0$. $\square$

## 5. Asymptotische Eigenschaften des Spektrums:

III.25 Lemma: Sei $K \geq 0$, $K \in \mathcal{C}_p$ für ein gewisses $p \in \mathbb{N}$, und sei $S \in \mathcal{C}_\infty$, $-1 \in \varrho(S)$. Setze $A = K(I+S)$ und bezeichne $A(\lambda)$ und $K(\lambda)$ die Fredholm Resolventen von $A$ bzw. $K$ ($A(\lambda) = \frac{1}{\lambda}((I-\lambda A)^{-1} - I)$). Dann gilt

$$\lim_{\substack{\lambda \to -\infty \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\operatorname{tr} A(\lambda)^p}{\operatorname{tr} K(\lambda)^p} = 1.$$

Beweis: Es gilt

$$A(\lambda) - K(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[ (I-\lambda A)^{-1} - (I-\lambda K)^{-1} \right] =$$

$$= (I-\lambda A)^{-1} KS (I-\lambda K)^{-1} = (I-\lambda A)^{-1} AT (I-\lambda K)^{-1} =$$

$$= A(\lambda)\, T\, (I-\lambda K)^{-1}$$

mit $T = S(I+S)^{-1}$. Es folgt

$$A(\lambda) = K(\lambda)\left[ I + C(\lambda) \right]$$

mit $C(\lambda) = \left[ I + T(I-\lambda K)^{-1} \right]^{-1} - I$. Wegen III.23 gilt $\| T(I-\lambda K)^{-1} \| \to 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \to -\infty$, also existiert für hinreichend großes $\lambda$ der Ausdruck $C(\lambda)$ und $\lim_{\lambda \to -\infty} C(\lambda) = 0$.

Weiter folgt

$$A(\lambda)^p = K(\lambda)^p + \sum_{\substack{\sum \alpha_j = p,\ 2 \le \ell \le r+1 \\ \alpha_j > 0,\ j < \ell \\ \alpha_\ell \geq 0}} K(\lambda)^{\alpha_1} C(\lambda) K(\lambda)^{\alpha_2} C(\lambda) \cdots K(\lambda)^{\alpha_\ell}$$

Das sind $2^p - 1$ Summanden. Wir erhalten also

$$|\operatorname{tr}(A(\lambda)^p - K(\lambda)^p)| \le \|A(\lambda)^p - K(\lambda)^p\|_1 \le \sum \|K(\lambda)^{\alpha_1}\|_p^{\alpha_1} \|C(\lambda)\| \cdot$$
$$\ldots \cdot \|C(\lambda)\| \cdot \|K(\lambda)^{\alpha_l}\|_p \le (2^p - 1)\, \|K(\lambda)\|_p^p \, \|C(\lambda)\| =$$
$$= (2^p - 1)\ \operatorname{tr} K(\lambda)^p \, \|C(\lambda)\| .$$

$\square$

Im folgenden bezeichne $\mu_j(X) = \dfrac{1}{\lambda_j(X)}$ wobei $\lambda_j$ die Eigenwerte von $X$ durchläuft $|\lambda_j| \ge |\lambda_{j+1}|$. Weiters sei
$$n(r, X) = \#\{\mu_j(X) \mid |\mu_j| \le r\}.$$

<u>III.26 Lemma:</u> Seien $K, S, A$ wie in III.25. Dann gilt
$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dn(r,A)}{(r+t)^p}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dn(r,K)}{(r+t)^p}} = 1 .$$

<u>Beweis:</u>

•) Es ist $A \in \mathcal{J}_p$ $(K \in \mathcal{J}_p)$, also auch $A(\lambda) \in \mathcal{J}_p$ $(K(\lambda) \in \mathcal{J}_p)$ und daher $A(\lambda)^p \in \mathcal{J}_1$ $(K(\lambda)^p \in \mathcal{J}_1)$.

Es gilt
$$\operatorname{tr} A(\lambda)^p = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(A) - \lambda)^p}, \quad \operatorname{tr} K(\lambda)^p = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(K) - \lambda)^p} .$$

Nun gilt
$$\int_0^\infty \frac{dn(r,A)}{(r+t)^p} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(|\mu_j(A)| + t)^p}, \quad \int_0^\infty \frac{dn(r,K)}{(r+t)^p} \underset{K \ge 0}{=} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(K) + t)^p} =$$
$$= \operatorname{tr} K(-t)^p .$$

•) Wir zeigen
$$\sum \frac{1}{(\mu_j(A) + t)^p} \Big/ \sum \frac{1}{(|\mu_j(A)| + t)^p} \longrightarrow 1, \quad t \in \mathbb{R},\ t \to +\infty,$$
dann folgt die Behauptung aus III.25.

Wegen III.24 liegen für beliebiges $\delta > 0$ fast alle $\mu_j(A)$ im Sektor $\{|\arg z| < \delta\}$.

Da $\lim_{j \to \infty} \mu_j = \infty$ folgt $\lim_{j \to \infty} \operatorname{Re} \mu_j = +\infty$, $\lim_{j \to \infty} \arg \mu_j = 0$, d.h. $\lim_{j\to\infty} \frac{\mu_j}{|\mu_j|} = 1$. Es ~~folgt~~ gilt

$$\frac{\mu_j + t}{|\mu_j|+t} - 1 = \frac{\frac{\mu_j}{|\mu_j|} - 1}{1 + \frac{t}{|\mu_j|}},$$

also folgt, daß für $\varepsilon > 0$ stets $N_0$ existiert, so daß

$$\left| \left(\frac{\mu_j+t}{|\mu_j|+t}\right)^{-p} - 1 \right| < \varepsilon, \quad j \geq N, \ t \geq 0.$$

Es folgt

$$\left| \sum_{j\geq N} (\mu_j + t)^{-p} \Big/ \sum_{j \geq N} (|\mu_j| + t)^{-p} - 1 \right| < \varepsilon, \ t \geq 0.$$

10.3.89

Für hinreichend großes $t$ gilt aber auch

$$\left| \sum_{j=1}^{N} (\mu_j + t)^{-p} \Big/ \sum_{j=1}^{N} (|\mu_j|+t)^{-p} \right| < \varepsilon.$$

$\square$

---

Korenbljum, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88 (1953)

**III.27 Lemma:** Seien $\phi(r), \psi(r)$, $0 \leq r < \infty$, nichtfallende Funktionen, so daß für ein gewisses $p > 0$

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \frac{d\phi(r)}{(r+t)^p}, \quad \Psi(t) = \int_0^\infty \frac{d\psi(r)}{(r+t)^p} < \infty, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Weiters gelte $\phi(r) \to \infty$, $r \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{\Phi(t)} = 1$$

und es existiere $\gamma$, $0 < \gamma < p$, so daß für hinreichend große $r < s$ gilt

$$\frac{\phi(s)}{\phi(r)} \leq \left(\frac{s}{r}\right)^{\gamma}.$$

Dann gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\phi(r)} = 1.$$

III.28 Satz: Sei $K \geq 0$, $K \in \mathcal{S}_\infty$, $S \in \mathcal{S}_\infty$, $-1 \in \varrho(S)$, und setze $A = K(I+S)$. Existiert eine nichtfallende Funktion $\phi(r)$, $0 \leq r < \infty$, $\phi(r) \to \infty$, $r \to \infty$, mit den Eigenschaften

(i) für ein $\gamma > 0$ gilt für hinreichend große $r < s$

$$\frac{\phi(s)}{\phi(r)} \leq \left(\frac{s}{r}\right)^{\gamma},$$

(ii) $\displaystyle\lim_{r \to \infty} \frac{n(r,A)}{\phi(r)} = 1$,

dann gilt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r,A)}{n(r,K)} = 1.$$

Beweis: OBdA ist $\phi(r) \geq 0$. Wegen (i) gilt $\phi(r) = O(r^{\gamma})$, also ist für $\rho > \gamma$

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \frac{d\phi(r)}{(r+t)^{\rho}} = \rho \int_0^\infty \frac{\phi(r)\,dr}{(r+t)^{\rho+1}} < \infty, \quad 0 < t < \infty.$$

Mit (ii) folgt

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{dn(r,K)}{(r+t)^{\rho}} = \rho \int_0^\infty \frac{n(r,K)\,dr}{(r+t)^{\rho+1}} < \infty$$

und $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{F(t)}{\Phi(t)} = 1$. Also ist insbesondere $K \in \mathcal{S}_\rho$, da $K \geq 0$.

Wegen III.26 gilt $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{F(t)} = 1$ mit

$$G(t) = \int_0^\infty \frac{d\,n(r,A)}{(r+t)^{\rho}},$$

und daher auch $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{\Phi(t)} = 1$. Die Behauptung folgt aus III.27. □

Bevor wir zum nächsten Satz kommen, benötigen wir noch ein allgemeines Lemma.

**III.28 Lemma:** Sei $\mathcal{G}$ ein Gebiet, $A(\lambda): \mathcal{G} \to \mathcal{S}_\infty$ holomorph, und bezeichne $\alpha(\lambda) = \dim \ker (I - A(\lambda))$. Dann gilt für $\lambda \in \mathcal{G}$ mit Ausnahme von gewissen isolierten Punkten

$$\alpha(\lambda) = n.$$

In den Ausnahmepunkten ist $\alpha(\lambda) > n$.

**Beweis:** Wir zeigen zuerst eine lokale Version, nämlich:

•) Sei $\lambda_0 \in \mathcal{G}$, dann existiert eine punktierte Kreisscheibe $K_\varepsilon = \{\lambda \mid 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$, so daß $\alpha(\lambda)$ auf $K_\varepsilon$ konstant ist.

Denn: Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $\ker(I - A(\lambda_0))$, und $g_1, \ldots, g_n$ eine von $\operatorname{ran}(I - A(\lambda_0))^\perp$. Setze

$$B(\lambda) = I - A(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} (\cdot, e_j)\, g_j .$$

Offenbar ist $\ker B(\lambda_0) = \{0\}$ und $\operatorname{ran} B(\lambda_0) = \mathcal{H}$, d.h. $B(\lambda_0)$ ist beschränkt invertierbar. Da $B(\lambda)$ von $\lambda$ holomorph also insbesondere stetig abhängt, ist $B(\lambda)$ auch in einer Umgebung $\{|\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ invertierbar. Die Gleichung $(I - A(\lambda))\varphi = 0$ ist offensichtlich äquivalent zu

$$B(\lambda)\varphi = \sum_{j=1}^{n} (\varphi, e_j)\, g_j ,$$

d.h. zum Gleichungssystem

$$\xi_k = (\varphi, e_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, B(\lambda)^{-1} g_j ,$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n} \left( \delta_{kj} - \left( B(\lambda)^{-1} g_j, e_k \right) \right) \xi_j = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Da die Matrix dieses Systems analytisch von $\lambda$ abhängt, ist die Dimension des Lösungsraumes mit Ausnahme isolierter Punkte konstant, und an diesen ist sie größer.

•) Die allgemeine Aussage folgt mit einem trivialen Zusammenhangs=argument. □

<u>III.30 Satz:</u> Sei $K = K^* \in \mathfrak{S}_\infty$, $(K \neq 0)$ $S = S^* \in \mathfrak{S}_\infty$ und setze $A = K(I+S)K$.

Dann gilt
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(K^2)} \leq 1 .$$

Ist zusätzlich entweder

(i) $\ker K = \{0\}$ und $-1 \in \rho(S)$,

oder

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}(K)}{s_n(K)} = 1 ,$$

so gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(K^2)} = 1 .$$

<u>Beweis:</u>

•) Sei $\varphi_j$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $K$, $K\varphi_j = \lambda_j(K)\,\varphi_j$. Ist $\mathcal{L}_n = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, so gilt
$$\lambda_n(K^2) = \max_{\varphi \in \mathcal{L}_{n-1}^{\perp}} \frac{(K\varphi, K\varphi)}{(\varphi,\varphi)} .$$

~~[illegible]~~ so gilt
$$\frac{(A\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)} = \frac{(K\varphi, K\varphi)}{(\varphi,\varphi)} \left(1 + \frac{(SK\varphi, K\varphi)}{(K\varphi, K\varphi)}\right) .$$

Bezeichne $N_n = \overline{\operatorname{ran} K} \ominus \mathcal{L}_n$. Da $S \in \mathfrak{S}_\infty$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\psi \in N_n} \frac{|(S\psi,\psi)|}{(\psi,\psi)} = 0$$

Da $K$ den Raum $N_n$ invariant lässt und $\overline{K(N_n)} = N_n$ ist, folgt
$$\varepsilon_{n+1} = \sup_{\varphi \in N_n} \frac{|(SK\varphi, K\varphi)|}{(K\varphi, K\varphi)} = \sup_{\psi \in N_n} \frac{|(S\psi,\psi)|}{(\psi,\psi)}$$

Für hinreichend großes $n$ gilt insbesondere

$$(A\varphi,\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in N_n .$$

Da $(\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A$ hat $A$ höchstens endlich viele negative Eigenwerte.

Wir zeigen, daß es genügt den Fall $A \geq 0$ zu behandeln.

•) Betrachte die Fredholm Resolvente $A(-t) = A(I+tA)^{-1}$.

Es gilt

$$\lambda(A(-t))^{-1} = \lambda(A)^{-1} + t,$$

also kann man in den Behauptungen des Satzes $\lambda_j(A)$ durch $\lambda_j(A(-t))$ ersetzen.

Die Voraussetzung (ii) hängt nicht von $t$ ab. Es ist

$$A(-t) = A - tAA(-t) = K(I+S(-t))K$$

mit

$$S(-t) = S - t(I+S)K(I-tA(-t))K(I+S),$$

$S(t) = S(t)^* \in \mathfrak{S}_\infty$. Ist $-1 \in \rho(S)$, $S = S(0)$, so ist wegen III.29 für alle $t$ außer einer Menge isolierter Punkte $-1 \in \rho(S(t))$, also hängt (i) nicht wesentlich von $t$ ab.

Wir wählen $t$ so groß, daß $A(-t) \geq 0$ ist und, im Falle (i), $-1 \in \rho(S(-t))$.

•) Sei $A \geq 0$. Dann ist

$$\lambda_n(A) \leq \sup_{\varphi \in N_{n-1}} \frac{(A\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)} = \sup_{\varphi \in N_{n-1}} \left[ \frac{(K\varphi,K\varphi)}{(\varphi,\varphi)} \left( 1 + \frac{(SK\varphi,K\varphi)}{(K\varphi,K\varphi)} \right) \right],$$

also $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(K^2)\,(1+c_n)$ und wir erhalten

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(K^2)} \leq 1.$$

•) Sei nun (i) erfüllt (andernfalls $A \geq 0$). Da $\ker K = \{0\}$ folgt aus $(A\varphi,\varphi) = ((I+S)\psi,\psi) \geq 0$ mit $\psi = K\varphi$, daß $I+S \geq 0$. Setze $F = (I+S)^{\frac12}K$, dann ist $F^*F = A$ also gilt für $A_1 = FF^* = (I+S)^{\frac12}K^2(I+S)^{\frac12}$

$$\lambda_n(A_1) = s_n(F)^2 = s_n(F^*)^2 = \lambda_n(A).$$

Da $-1 \in \varrho(S)$ ist $(I+S)^{-1} = I + S_1$, $S_1 \in \mathcal{S}_\infty$, $(I+S_1)^{\frac12} = (I+S)^{-\frac12}$,

also
$$K^2 = (I+S_1)^{\frac12} A_1 (I+S_1)^{\frac12}.$$

Setzt man $L = A_1^{\frac12}(I+S_1)^{\frac12}$, ~~folgt~~ $K^2 = L^* L$. Für $K_1 = LL^*$

gilt
$$K_1 = A_1^{\frac12}(I+S_1)A_1^{\frac12}, \quad \lambda_n(K_1) = \lambda_n(K^2).$$

Das bereits bewiesene angewandt auf $K_1$ $(\approx A)$, $A_1^{\frac12}$ $(\approx K)$, $S_1$ $(\approx S)$

zeigt
$$1 \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(K_1)}{\lambda_n(A_1)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(K^2)}{\lambda_n(A)}.$$

·) ~~[illegible]~~ Da $\overline{\operatorname{ran} K}$ ein invarianter Teilraum für $A$ und $K$ ist ~~=~~ $(\overline{\operatorname{ran} K} \supseteq \overline{\operatorname{ran} A})$ und $A|_{\operatorname{ran} K^\perp} = K|_{\operatorname{ran} K^\perp} = 0$, können wir die Einschränkungen auf $\overline{\operatorname{ran} K}$ betrachten. Denn ist $P$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\operatorname{ran} K}$, so ist

$$(PAP) = PK(I+S)KP = PKP(I+S)PKP =$$
$$= (PKP)\,(P + (PSP))\,(PKP).$$

Betrachtet man also $\tilde A = PAP$, $\tilde K = PKP$, $\tilde S = PSP$ am Raum $\tilde{\mathcal{H}} = P\mathcal{H}$, so ist $\tilde A = \tilde K (I + \tilde S)\tilde K$. Wegen $\lambda_n(\tilde A) = \lambda_n(A)$ und $\lambda_n(\tilde K) = \lambda_n(K)$ ~~[illegible]~~ kann man sowohl in der Behauptung als auch in der VS! (ii) $A$ ~~[illegible]~~ $(K)$ durch $\tilde A$ $(\tilde K)$ ersetzen. Behandelt man den Fall (ii), so kann man also $\ker K = \{0\}$ oBdA voraussetzen.

·) Sei $A_1$ wie oben, $A_1 = (I+S)^{\frac12} K^2 (I+S)^{\frac12}$. Dann ist $\ker(I+S) = \ker A_1 = \operatorname{ran} A_1^{\perp}$. Sei $Q$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(I+S)^{\perp}$, dann gilt

$$A_1 = QA_1Q = (I+S)^{\frac12} \underbrace{QK^2Q}_{=:\hat K} (I+S)^{\frac12}.$$

Sei ~~[illegible]~~ $\hat A_\bullet = \hat K^{\frac12}(I+\hat S)\hat K^{\frac12}$, $\hat S = QSQ$, am Raum $Q\mathcal{H}$.

Für $\varphi \in Q\mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$ ist $(I+\hat{S})\varphi \neq 0$, $\|\hat{K}^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 = \|K\varphi\|^2 \neq 0$, also ist die VS (i) erfüllt und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\hat{A})}{\lambda_n(\hat{K})} = 1 .$$

Es gilt $\lambda_n(\hat{A}) = \lambda_n(A)$ und $(d = \dim \ker (I+S))$

$$\lambda_{n+2d}(K^2) \leq \lambda_n(\hat{K}) \leq \lambda_n(K^2),$$

denn

$$(K^2 - QK^2Q)\varphi = \begin{cases} (I-Q)K^2\varphi, & \varphi \in \operatorname{ran} Q \\ K^2\varphi, & \varphi \in \ker Q \end{cases}.$$

17.3.99

Wegen (ii) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\hat{K})}{\lambda_n(K^2)} = 1 .$$

□

---

III.31 Korollar: Sei $K = K^* \in \mathcal{S}_\infty$ $(K \notin \mathcal{K})$, $S \in \mathcal{S}_\infty$ und sei (i) oder (ii) von III.30 erfüllt. Dann gilt für $A = K(I+S)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(A)}{s_n(K)} = 1 .$$

Beweis: Wende III.30 an auf $A_1 = AA^* = K(I+S_1)K$ mit $S_1 = S + S^* + SS^*$.

□

III.32 Korollar: Sei $K \geq 0$, $K \in \mathcal{S}_\infty$ $(K \notin \mathcal{K})$, $S \in \mathcal{S}_\infty$ und sei $A = K(I+S)$ selbstadjungiert. Gilt entweder $-1 \in \rho(S)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}(K)}{\lambda_n(K)} = 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(K)} = 1 .$$

Beweis:

- Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}(K)}{\lambda_n(K)} = 1$ ist III.31 Fall (ii) anwendbar, denn $\lambda_n(K) = s_n(K)$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n(A)}{s_n(K)} = 1$. Nach III.23 (vgl. dem ersten Beweisschritt von III.24) hat $A$ nur endlich viele negative Eigenwerte, also gilt für hinreichend großes $n$: $\lambda_n(A) = s_n(A)$.

·) Sei jetzt $-1 \in \varrho(S)$. Da $A = A^*$ folgt

$$K(I+S) = (I+S^*)K,$$

d.h. $\overline{\operatorname{ran} K}$ ist invariant unter $(I+S^*)$. Bezeichne wie im letzten Beweisschritt von III.30 $P$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\operatorname{ran} K}$. Dann ist $\ker P(I+S^*)P|_{\overline{\operatorname{ran} K}} = \{0\}$, d.h. auch $-1 \in \varrho(\tilde{S})$ mit der Notation aus dem Beweis von III.30. Die Behauptung folgt wie im anderen Fall durch Anwendung von III.31 (i). □

## 6. Regularisierte Determinante:

Für $A \in \mathcal{S}_1$ konvergiert das Produkt $\prod_j (1 - z\lambda_j(A)) = \det(I - zA)$. Ist $A \in \mathcal{S}_p$ für ein gewisses $p \in \mathbb{N}$ liegt es daher nahe eine regularisierte Determinante zu definieren durch

$$\det{}^{(p)}(I - zA) = \prod_j (1 - z\lambda_j(A))\, e^{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \lambda_j(A)^k z^k}.$$

Wegen $\sum_j |\lambda_j(A)|^p < \infty$ ist dadurch eine ganze Funktion mit Ordnung höchstens $p$ und Typ $0$ definiert.

Ist $A$ sogar in $\mathcal{S}_1$, so gilt offensichtlich

$$\det{}^{(p)}(I - zA) = \det(I - zA)\, e^{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \operatorname{tr} A^k \cdot z^k}.$$

Es gilt auch ein Analogon zur ersten Formel in III.15:

$$\frac{d}{dz} \log \det{}^{(p)}(I - zA) = \sum_j \frac{d}{dz}\left[\log(1 - z\lambda_j(A)) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \lambda_j(A)^k z^k\right] =$$

$$= \sum_j \left[\frac{-\lambda_j(A)}{1 - z\lambda_j(A)} + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_j(A)^k z^{k-1}\right] = -\sum_j \sum_{k=p}^{\infty} \lambda_j(A)^k z^{k-1} =$$

$$= -\sum_j z^{p-1} \lambda_j^p \frac{1}{1 - z\lambda_j} = -\operatorname{tr}\left[z^{p-1} A^p (I - zA)^{-1}\right], \quad z \in \varrho(A)^{-1}.$$

Insbesondere folgt aus dieser Formel

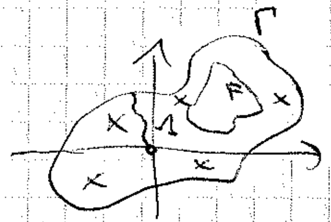
$$\det^{(p)}(I-zA) = e^{-\int_0^z tr[z^{p-1}A^p(I-zA)^{-1}]\,dz}, \quad z\in\varrho(A)^{-1}.$$

Mit Hilfe dieser Formel zeigt man leicht, daß $\det^{(p)}(I-zA)$ stetig von $A\in\mathcal{J}_p$ abhängt.

III.33 Lemma: Sei $p\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{J}_p$ und $F$ eine kompakte Menge. Dann gibt es zu $\varepsilon>0$ stets $\delta>0$, so daß ($B\in\mathcal{J}_p$)

$$\|A-B\|_p<\delta \Rightarrow \max_{z\in F}\left|\det^{(p)}(I-zA)-\det^{(p)}(I-zB)\right|<\varepsilon.$$

Beweis: Sei $\Gamma$ eine einfach geschlossene rektifizierbare Kurve in $\varrho(A)^{-1}$, die $F$ und $0$ im Inneren enthält. Wegen dem Maximumprinzip genügt es zu zeigen $\max\limits_{z\in\Gamma} < \varepsilon$. Sei $\Lambda$ eine einfache rektifizierbare Kurve, die $0$ mit einem Punkt von $\Gamma$ verbindet, $\Lambda\subseteq\varrho(A)^{-1}$:




Wegen $(I-zB)^{-1} = (I-zA)^{-1}\left[I - z(B-A)(I-zA)^{-1}\right]^{-1}$, gilt für

$$\|A-B\| \leq q < \min_{z\in\Gamma\cup\Lambda}\left(\left[|z|\cdot\|(I-zA)^{-1}\|\right]^{-1}\right)$$

$\Gamma\cup\Lambda \subseteq \varrho(B)^{-1}$ und

$$\max_{z\in\Gamma\cup\Lambda}\|(I-zB)^{-1}\| \leq C\cdot\max_{z\in\Gamma\cup\Lambda}\|(I-zA)^{-1}\|,$$

wobei $C$ nur von $q$, $\Gamma$, $\Lambda$, und $A$ abhängt. Für die Fredholm Resolventen gilt

$$A(z)-B(z) = (I-zA)^{-1}(B-A)(I-zB)^{-1},$$

also

$$\|A(z)-B(z)\|_p \le C_1 \cdot \|A-B\|_p ,$$

mit $C_1 = C\cdot \max_{z\in\Gamma\cup\Delta} \|(I-zA)^{-1}\|^2$. So gilt

$$\det{}^{(p)}(I-zA) - \det{}^{(p)}(I-zB) =$$
$$= \det{}^{(p)}(I-zA)\cdot\left[1-e^{\int_0^z tr\left[z^{p-1}A^p(I-zA)^{-1} - z^{p-1}B^p(I-zB)^{-1}\right]dz}\right],$$

und

$$\left|tr\left[z^{p-1}A^{p-1}A(z) - z^{p-1}B^{p-1}B(z)\right]\right| \le \max_{z\in\Gamma\cup\Delta}|z|\cdot\Big(\|A^{p-1}(A(z)-B(z))\|_1 +$$
$$+\|(A^{p-1}-B^{p-1})B(z)\|_1\Big) \le \max_{z\in\Gamma\cup\Delta}|z|\cdot\Big(\|A^{p-1}\|_q\cdot\|A(z)-B(z)\|_p +$$
$$+\|A^{p-2}(A-B)B(z)\|_1 +$$
$$+\|A^{p-3}(A-B)BB(z)\|_1 + \dots + \|(A-B)B^{p-2}B(z)\|_1\Big) \le$$
$$\le \max_{z\in\Gamma\cup\Delta}|z|\cdot\Big(\|A^{p-1}\|_q\cdot C_1 + \|A\|_p^{p-2}\max_{z\in\Gamma\cup\Delta}\|B(z)\|_p + \dots$$
$$\dots + \|B\|_p^{p-2}\max_{z\in\Gamma\cup\Delta}\|B(z)\|_p\Big)\,\|A-B\|_p$$

□

Ist $A\in\mathcal{J}_2$, so gilt also mit $A_n=\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\phi_j)A\phi_j$ mit einem vollständigen Orthonormalsystem $(\phi_j)$ (vgl. III.12)

$$\det{}^{(2)}(I-A) = \lim_{n\to\infty}\det{}^{(2)}(I-A_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\det\left(\delta_{jk}-(A\phi_j,\phi_k)\right)_{j,k=1}^{n} e^{\sum_{j=1}^{n}(A\phi_j,\phi_j)}\right].$$

Analog findet man für $A, B \in \mathcal{J}_2$ wegen

$$\det{}^{(2)}(I-A_n)\cdot\det{}^{(2)}(I-B_n) = \det(I-A_n)\,e^{\operatorname{tr}A_n}\cdot\det(I-B_n)e^{\operatorname{tr}B_n}$$

$$= \det\left[(I-A_n)(I-B_n)\right]\cdot e^{\operatorname{tr}(A_n+B_n)} =$$

$$= \det{}^{(2)}\left\{(I-A_n)(I-B_n)\right\}\cdot e^{\operatorname{tr}(A_nB_n)},$$

die Beziehung

$$\det{}^{(2)}\left[(I-A)(I-B)\right]e^{\operatorname{tr}(AB)} = \det{}^{(2)}(I-A)\cdot\det{}^{(2)}(I-B).$$

<u>III.34 Lemma:</u> Sei $A \in \mathcal{J}_2$, dann gilt

$$\left|\det{}^{(2)}(I-zA)\right| \le e^{\frac{|z|^2}{2}\operatorname{tr}(A^*A)}.$$

Diese Schranke kann nicht verbessert werden.

<u>Beweis:</u> •) Es gilt

$$\left|\det{}^{(2)}(I-zA)\right|^2 = \prod|1-z\lambda_j|^2 e^{2\operatorname{Re}(z\lambda_j)} =$$

$$= \prod_j\left(1-2\operatorname{Re}(z\lambda_j)+|z\lambda_j|^2\right)e^{2\operatorname{Re}(z\lambda_j)} \underset{1+x\le e^x}{\le} \prod_j e^{|z\lambda_j|^2} =$$

$$= e^{|z|^2\sum|\lambda_j|^2} \le e^{|z|^2\sum s_j^2(A)} = e^{|z|^2\operatorname{tr}(A^*A)}.$$

•) Betrachte für ein vollständiges Orthonormalsystem $(\phi_j)$ den Operator

$$K_n = \sqrt{\frac{\ell}{2n}}\left[\sum_{j=1}^{n}(\cdot,\phi_j)\phi_j - \sum_{j=n+1}^{2n}(\cdot,\phi_j)\phi_j\right].$$

Dann gilt

$$\det{}^{(2)}(I-zK_n) = \left(1-z\sqrt{\frac{\ell}{2n}}\right)^n\left(1+z\sqrt{\frac{\ell}{2n}}\right)^n = \left(1-z^2\frac{\ell}{2n}\right)^n,$$

24.3.99

also

$$\lim_{n\to\infty}\det{}^{(2)}(I-zK_n) = e^{-z^2\frac{\ell}{2}}.$$

Nun ist $\operatorname{tr}(K_n^*K_n) = \ell$, also gilt für $z \in i\mathbb{R}$ in obiger Ungleichung „=". $\square$

## 7. Stördeterminante:

Seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A - B \in \mathcal{Y}_1$, dann ist für $\mu \in \varrho(A)^{-1}$

$$(I-\mu B)(I-\mu A)^{-1} = I - \mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}$$

und $\mu(B-A)(I-\mu A)^{-1} \in \mathcal{Y}_1$. Also ist der Ausdruck

$$D_{B/A}(\mu) = \det\left[(I-\mu B)(I-\mu A)^{-1}\right]$$

definiert. Er heißt Stördeterminante von A mit dem Operator $T = B - A$. Offensichtlich ist die Stördeterminante auf $\varrho(A)^{-1}$ holomorph. Ist $A, B \in \mathcal{Y}_1$, so gilt

$$D_{B/A}(\mu) = \frac{\det(I-\mu B)}{\det(I-\mu A)},$$

ist $A, B \in \mathcal{Y}_2$, $A - B \in \mathcal{Y}_1$, so gilt

$$D_{B/A}(\mu) = \det\left(I - \mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}\right) =$$

$$= \det{}^{(2)}\left(I - \mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}\right) e^{-\operatorname{tr}[\mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}]} =$$

$$= \frac{\det^{(2)}(I-\mu B)}{\det^{(2)}(I-\mu A)} e^{\operatorname{tr}[\mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}\mu A]} \cdot e^{-\operatorname{tr}[\mu(B-A)(I-\mu A)^{-1}]} =$$

$$= \frac{\det^{(2)}(I-\mu B)}{\det^{(2)}(I-\mu A)} e^{\mu \operatorname{tr}(A-B)}.$$

Einige Eigenschaften sind im folgenden Lemma zusammengefasst:

**III.35 Lemma:** Es gilt

(i) Sind $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mu \in \varrho(A)^{-1} \cap \varrho(B)^{-1}$, $B - A, C - B \in \mathcal{Y}_1$, dann gilt

$$D_{C/B}(\mu)\, D_{B/A}(\mu) = D_{C/A}(\mu).$$

(ii) Ist $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mu \in \varrho(A)^{-1} \cap \varrho(B)^{-1}$, $B - A \in \mathcal{Y}_1$, so gilt

$$D_{B/A}(\mu) = D_{A/B}(\mu)^{-1}.$$

(iii) Ist $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\frac{1}{\mu}$ ein normaler Punkt von $A$ und $B$, d.h. entweder $\frac{1}{\mu} \in \varrho(A)$ oder $\frac{1}{\mu}$ isolierter Eigenwert endlicher Vielfachheit, und analog für $B$, $A - B \in \mathcal{J}_1$, dann ist die Ordnung der Determinante $D_{B/A}(\mu)$ im Punkt $\mu$ gleich $\nu_{1/\mu}(B) - \nu_{1/\mu}(A)$ wobei $\nu.(\cdot)$ die algebraische Vielfachheit bezeichnet.

(iv) Ist $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mu \in \varrho(A)^{-1} \cap \varrho(B)^{-1}$, $A - B \in \mathcal{J}_1$, und bezeichne $A(\mu)$ bzw. $B(\mu)$ die Fredholm Resolventen. Dann gilt

$$\frac{d}{d\mu} \ln D_{B/A}(\mu) = \operatorname{tr}\left(A(\mu) - B(\mu)\right).$$

Für hinreichend kleine Werte von $\mu$ gilt insbesondere

$$\frac{d}{d\mu} \ln D_{B/A}(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \operatorname{tr}\left(A^{j+1} - B^{j+1}\right).$$

<u>Beweis:</u>

·) Es gilt

$$(I-\mu C)(I-\mu A)^{-1} = \left[(I-\mu C)(I-\mu B)^{-1}\right]\left[(I-\mu B)(I-\mu A)^{-1}\right].$$

Also folgt (i). (ii) folgt unmittelbar aus (i).

·) Wir unterscheiden drei Fälle. Zuerst sei $\frac{1}{\mu} \in \varrho(A) \cap \varrho(B)$, dann ist $D_{B/A}(\mu)$ in $\mu$ regulär und wegen (ii) $\neq 0$.

Sei $\frac{1}{\mu} \in \varrho(A)$, $\nu_{\frac{1}{\mu}}(B) \neq 0$. Bezeichne $P$ den Riesz Projektor auf den algebraischen Eigenraum bei $\frac{1}{\mu}$ und setze $B_1 = B(I-P)$, $B_2 = BP$. Dann gilt

$$D_{B/A}(\mu) = D_{B/B_1}(\mu) \cdot D_{B_1/A},$$

und wegen $B_2 B_1 = 0$ gilt

$$D_{B/B_1}(\mu) = \det\left((I-\mu B_2)(I-\mu B_1)(I-\mu B_1)^{-1}\right) = \det(I-\mu B_2),$$

$D_{B/B_1}$ hat also bei $\mu$ eine Nullstelle der Ordnung $\nu_{\frac{1}{\mu}}(B)$ und wegen dem bereits bewiesenen ist $D_{B_1/A}(\mu) \neq 0$.

Betrachte jetzt den allgemeinen Fall. Wie bereits bewiesen wurde hat $D_{A/B_1}$ bei $\mu$ eine Nullstelle der Ordnung $\nu_{\frac{1}{\mu}}(A)$. Der lokal um $\mu$

gilt $D_{B_1/A}(\lambda) = D_{A/B_1}(\lambda)^{-1}$, hat $D_{B_1/A}$ bei $\mu$ einen Pol der Ordnung $\nu_{\frac{1}{\mu}}(A)$. ~~Insgesamt also~~ Da folglich um $\mu$ gilt $D_{B/A}(\lambda) = D_{B/B_1}(\lambda)\, D_{B_1/A}(\lambda)$ hat $D_{B/A}$ bei $\mu$ die Ordnung $\nu_{\frac{1}{\mu}}(B) - \nu_{\frac{1}{\mu}}(A)$.

∘) Da $A - B \in \mathfrak{J}_1$ ist auch $A(\mu) - B(\mu) = (I-\mu B)^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-1} \in \mathfrak{J}_1$.

Setze $C(\mu) = \mu(A-B)(I-\mu A)^{-1}$. Mit III.17b folgt

$$\frac{d}{d\mu}\log D_{B/A}(\mu) = \frac{d}{d\mu}\log\det\left(I + C(\mu)\right) = \operatorname{tr}\left[(I+C(\mu))^{-1}\,\frac{dC(\mu)}{d\mu}\right] =$$

$$= \operatorname{tr}\left[\left(I+\mu(A-B)(I-\mu A)^{-1}\right)^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-2}\right] =$$

$$= \operatorname{tr}\left(A(\mu) - B(\mu)\right),$$

denn

$$(I-\mu A)^{-1} - (I-\mu B)^{-1} = \mu (I-\mu B)^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-1},$$

also

$$(I-\mu B)^{-1} = (I-\mu A)^{-1}\left[I + C(\mu)\right]^{-1},$$

also

$$A(\mu) - B(\mu) = (I-\mu A)^{-1}(I+C(\mu))^{-1}(A-B)(I-\mu A)^{-1}. \qquad \square$$

Im folgenden betrachten wir dissipative Operatoren, d.h. $A \in B(\mathcal{H})$ mit

$$\operatorname{Im}(A\varphi,\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{H},$$

oder, äquivalent, $\operatorname{Im} A \geq 0$.

Ist $A$ dissipativ, so gilt $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}^+}$ und

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Denn für $\|f\| = 1$ gilt

$$\|(A-z)f\| \geq |((A-z)f,f)| \geq \operatorname{Im}((A-z)f,f) = ((\operatorname{Im} A)f,f) - \operatorname{Im} z \cdot (f,f) \geq |\operatorname{Im} z|.$$

Insbesondere ist $(A-z)$ injektiv und $\|(A-z)^{-1}f\| \leq |\operatorname{Im} z| \cdot \|f\|$ für $f \in \operatorname{ran}(A-z)$, und $\operatorname{ran}(A-z)$ abgeschlossen. Wäre $f \perp \operatorname{ran}(A-z)$, so wäre

$f \in \ker(A^* - \bar{z})$. Da mit $A$ auch $-A^*$ dissipativ ist, ist das ein WS! zum oben bewiesenen.

<u>III.36 Lemma:</u> Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A$ dissipativ, und sei $B = A + T$ mit $T \in \mathcal{Y}_1$. Dann gilt

$$\limsup_{\varrho \to \infty} \frac{1}{\varrho} \ln |D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})| \leq 0$$

gleichmäßig in jedem Winkel $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$

$$|\tfrac{\pi}{2} - \theta| \leq \theta_0 .$$

Ist zusätzlich $B$ dissipativ, so gilt sogar (gleichmäßig in jedem solchen Winkel)

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{1}{\varrho} \ln |D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})| = 0 .$$

<u>Beweis:</u>

•) Es gilt

$$D_{B/A}(\mu) = \det\left[(I - \mu B)(I - \mu A)^{-1}\right] = \det\left[I - \mu T S(\mu)\right]$$

mit $S(\mu) = (I - \mu A)^{-1}$. Also ist

$$|D_{B/A}(\mu)| \leq \prod_j \left(1 + |\mu|\, s_j(T S(\mu))\right) .$$

Wegen ($\operatorname{Im} \mu > 0$, $\mu = \varrho e^{i\theta}$)

$$\|\mu S(\mu)\| = \|(A - \tfrac{1}{\mu})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \frac{1}{\mu}|} = \frac{|\mu|^2}{\operatorname{Im} \mu} = |\mu| \frac{1}{\sin\theta}$$

folgt $s_j(T S(\mu)) \leq \frac{s_j(T)}{\sin\theta}$, also ist

$$|D_{B/A}(\varrho e^{i\theta})| \leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varrho\, s_j(T)}{\sin\theta}\right) \leq \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\varrho\, s_j(T)}{\sin\theta}\right) e^{\frac{\varrho}{\sin\theta} \sum_{j=n+1}^{\infty} s_j(T)} .$$

Die erste Behauptung folgt.

•) Ist auch $B$ dissipativ, so kann man in dem eben bewiesenen die Rollen von $A$ und $B$ vertauschen. Da $\ln |D_{B/A}(\mu)| = -\ln |D_{A/B}(\mu)|$ gilt folgt die zweite Behauptung. $\square$

**III.37 Satz:** Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A = G + iH$ $(G = \operatorname{Re} A, H = \operatorname{Im} A)$, $A$ dissipativ, und sei $B = G + iF$ mit

$$-H \le F \le H.$$

Dann ist der Operator

$$W(\lambda) = I - i\,(H-F)^{\frac{1}{2}}\,(A-\lambda)^{-1}\,(H-F)^{\frac{1}{2}}$$

für $\operatorname{Im}\lambda < 0$ eine Kontraktion, d.h. $\|W(\lambda) f\| \le \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$.

Ist zusätzlich $H \in \mathfrak{S}_1$, so gilt $|D_{B/A}(\mu)| \le 1$, $\operatorname{Im}\mu > 0$.

Beweis:

•) Bezeichne $T = H - F$, $R(\lambda) = (A-\lambda)^{-1}$, dann ist $W(\lambda) = I - iT^{\frac{1}{2}}R(\lambda)T^{\frac{1}{2}}$.

Es folgt

$$I - W(\lambda)^* W(\lambda) = iT^{\frac{1}{2}}R(\lambda)T^{\frac{1}{2}} - iT^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^*T^{\frac{1}{2}} - T^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^*TR(\lambda)T^{\frac{1}{2}}.$$

Es gilt wegen $R(\lambda)^* = (A^* - \bar\lambda)^{-1}$

$$R(\lambda) - R(\lambda)^* = R(\lambda)^*\left[(A^* - \bar\lambda) - (A - \lambda)\right]R(\lambda) =$$

$$= -2i\,R(\lambda)^* H R(\lambda) + 2i(\operatorname{Im}\lambda)\,R(\lambda)^* R(\lambda).$$

Also ergibt sich

$$I - W(\lambda)^* W(\lambda) = 2\,T^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^* H R(\lambda)T^{\frac{1}{2}} - 2(\operatorname{Im}\lambda)\,T^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^*R(\lambda)T^{\frac{1}{2}}$$

$$- T^{\frac{1}{2}}R^*(\lambda)\,(H-F)\,R(\lambda)T^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^*(H+F)R(\lambda)T^{\frac{1}{2}} -$$

$$-2(\operatorname{Im}\lambda)\,T^{\frac{1}{2}}R(\lambda)^*R(\lambda)T^{\frac{1}{2}},$$

d.h. $I - W(\lambda)^*W(\lambda) \ge 0$ für $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

•) Ist $H \in \mathfrak{S}_1$, so folgt wegen $T = H - F \le 2H$, daß auch $T \in \mathfrak{S}_1$.

Es folgt

$$D_{B/A}(\mu) = \det\left(I + i\mu T(I-\mu A)^{-1}\right) = \det\left(I + i\mu T^{\frac{1}{2}}(I-\mu A)^{-1}T^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \det W\left(\tfrac{1}{\mu}\right).$$

Sind $\varepsilon_j(\mu)$ die Eigenwerte von $i\mu T^{\frac{1}{2}}(I-\mu A)^{-1}T^{\frac{1}{2}}$, so ist

$$\cancel{\det}\; D_{B/A}(\mu) = \prod_j \left(1 + \varepsilon_j(\mu)\right).$$

Da $1+\varepsilon_j(\mu)$ die Eigenwerte von $W(\frac{1}{\mu})$ sind und $W(\frac{1}{\mu})$ kontraktiv folgt $|D_{B/A}(\mu)| \le 1$. □

III.38 Korollar: Sei $A \in \mathfrak{S}_\infty$, $A = S + iH$ ($S = \operatorname{Re} A, H = \operatorname{Im} A$), ~~...~~, $H \in \mathfrak{S}_1$, ~~...~~. Dann gilt
$$|D_{A^*/A}(\lambda)| = 1 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Ist zusätzlich $A$ dissipativ, so gilt
$$|D_{A^*/A}(\lambda)| \leq 1 \ , \quad \operatorname{Im}\lambda \geq 0.$$

Ist weiters zusätzlich $\operatorname{tr} H \neq 0$, so gilt in obiger Beziehung "=" nur für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis:

•) Es gilt
$$D_{A^*/A}(\lambda) = D_{A^*/S}(\lambda)\, D_{S/A}(\lambda) = \frac{D_{S/A}(\lambda)}{D_{S/A^*}(\lambda)}.$$
Wegen $D_{A^*/S}(\lambda) = \overline{D_{A/S}(\bar\lambda)}$ folgt also
$$D_{A^*/A}(\lambda) = \frac{D_{S/A}(\lambda)}{\overline{D_{S/A}(\bar\lambda)}},$$
insbesondere ist $|D_{A^*/A}(\lambda)| = 1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Beachte hier, daß der $A \in \mathfrak{S}_\infty$ die Determinante $D_{A^*/A}$ in $\mathbb{C}$ meromorph ist.

•) Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus III.37 mit $F = -H$.

•) Wäre "=" in einem Punkt von $\mathbb{C}^+$, so wäre nach dem Maximumsprinzip $D_{A^*/A}(\lambda)$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$ konstant. Es gilt jedoch
$$\frac{d}{d\lambda} \log D_{A^*/A}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tr}\left[ (I-\lambda A^*)^{-1} - (I-\lambda A)^{-1} \right] =$$
$$= \operatorname{tr}\left[ (I-\lambda A)^{-1} (A - A^*) (I - \lambda A^*)^{-1} \right] =$$
$$= 2i \operatorname{tr}\left[ (I-\lambda A)^{-1} H (I-\lambda A^*)^{-1} \right].$$
Für $\lambda \to 0$ erhalten wir einen WS!. $\square$

III.39 Korollar: Sei $A \in \mathfrak{F}_\infty$, $A = \xi + iH$, $H \in \mathfrak{F}_1$, $H \geq 0$,

Dann gilt

$$D_{A^*/A}(\lambda) = e^{2i\alpha\lambda} \prod_j \frac{1-\frac{\lambda}{\bar\mu_j}}{1-\frac{\lambda}{\mu_j}},$$

wobei $\left(\frac{1}{\mu_j}\right)$ ein vollständiges System von nichtreellen Eigenwerten von $A$ ist und $\alpha = \operatorname{tr} H - \sum_j \operatorname{Im} \frac{1}{\mu_j}$.

Beweis: Die meromorphe Funktion $f(\lambda) = D_{A^*/A}(\lambda)$ hat die Eigenschaften

$$|f(\lambda)| = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad |f(\lambda)| < 1,\ \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Sie lässt sich daher schreiben als

$$f(\lambda) = e^{2i\alpha\lambda} \prod_j \frac{1-\frac{\lambda}{\bar\mu_j}}{1-\frac{\lambda}{\mu_j}},$$

wobei $(\mu_j)$ die Pole von $f$ durchläuft und $\alpha \geq 0$ ist. Die Pole von $f$ sind aber genau die Inversen der Eigenwerte von $A$.

Wir bestimmen $\alpha$: Es gilt $\frac{d}{d\lambda} \ln D_{A^*/A}(\lambda) = 2i \operatorname{tr} H + O(\lambda)$, also $D_{A^*/A}(\lambda) = 1 + 2i \operatorname{tr} H \cdot \lambda + O(\lambda^2)$. Andererseits ist nach der bereits bewiesenen Darstellung

$$D_{A^*/A}(\lambda) = 1 + 2i\left[\alpha + \sum_j \operatorname{Im}\frac{1}{\mu_j}\right]\lambda + \dots .$$

□

III.40 Korollar: Sei $A \in \mathfrak{F}_\infty$, $A = \xi + iH$, $H \in \mathfrak{F}_1$, $H \geq 0$, dann gilt

(i) $|D_{\xi/A}(\lambda)| \leq 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$.

(ii) $$D_{\xi/A}(\lambda) = \overline{D_{\xi/A}(\bar\lambda)}\, e^{2\alpha i\lambda} \prod_j \frac{1-\frac{\lambda}{\bar\mu_j}}{1-\frac{\lambda}{\mu_j}},$$

wobei $\alpha$ und $(\mu_j)$ wie in III.39 sind.

Beweis: (i) folgt mit III.37 für $F = 0$. (ii) folgt aus III.39 wegen

$$D_{A^*/A} = \frac{D_{\xi/A}(\lambda)}{\overline{D_{\xi/A}(\bar\lambda)}}.$$

□

III.41 Satz: Sei $A = S + iH \in$ ein dissipativer Volterra Operator, $H \in \mathcal{J}_1$. Dann gilt $S \in \mathcal{J}_p$ für jedes $p > 1$. Für die ganze Funktion

$$\det{}^{(2)}(I - \lambda S) = \prod_j \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_j}\right) e^{\frac{\lambda}{\alpha_j}},$$

wobei $(\frac{1}{\alpha_j})$ ein vollständiges System von Eigenwerten von $S$ bezeichnet, gilt

$$|\det{}^{(2)}(I - \lambda S)| \leq e^{|\operatorname{Im}\lambda| \operatorname{tr} H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Weiters ist

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho} \ln |\det{}^{(2)}(I - \rho e^{i\theta} S)| = |\sin\theta| \operatorname{tr} H$$

gleichmäßig in jedem Winkel $|\frac{\pi}{2} - \theta| \leq \theta_0$, $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$.

Beweis: Die Funktion $F(\lambda) = D_{S/A}(\lambda)$ ist ganz mit den Nullstellen $\alpha_j$ und wegen III.40 gilt

$$|F(\lambda)| \leq 1, \quad \operatorname{Im}\lambda \geq 0$$

und $\overline{F(\bar\lambda)} = e^{-2i\lambda a} F(\lambda)$ mit $a = \operatorname{tr} H$. Es folgt $(\operatorname{Im}\lambda \leq 0)$

$$|F(\lambda)| = |\overline{F(\lambda)}| = e^{2a|\operatorname{Im}\lambda|} |F(\bar\lambda)| \leq e^{2a|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Insbesondere ist $F$ vom Exponentialtyp. Daher konvergiert die Reihe $\sum_j \frac{1}{|\alpha_j|^p}$ für jedes $p > 1$, d.h. $S \in \mathcal{J}_p$, $p > 1$.

Es folgt insbesondere $S, A \in \mathcal{J}_2$ also gilt $(\det{}^{(2)}(I - \lambda A) \equiv 1)$

$$\det{}^{(2)}(I - \lambda S) = \frac{\det{}^{(2)}(I - \lambda S)}{\det{}^{(2)}(I - \lambda A)} = e^{-i\lambda \operatorname{tr} H} D_{S/A}(\lambda) = e^{-i\lambda \operatorname{tr} H} F(\lambda).$$

Mit der obigen Abschätzung für $F(\lambda)$ folgt

$$|\det{}^{(2)}(I - \lambda S)| \leq e^{|\operatorname{Im}\lambda| \cdot \operatorname{tr} H}.$$

Aus dieser Formel folgt wegen $\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho} \log |D_{S/A}(\rho e^{i\theta})| = 0$ (vgl. III.36) auch

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{\rho} \log |\det{}^{(2)}(I - \lambda S)| = |\sin\theta| \cdot \operatorname{tr} H. \quad \square$$

Um das asymptotische Verhalten des Spektrums eines dissipativen Volterra Operators zu studieren benötigen wir zwei funktionentheoretische Ergebnisse:

RSj ⟶ (*)

III.42a Satz: Sei $f(\lambda)$ eine ganze Funktion ($f(0)=1$) die nur reelle Nullstellen $(\alpha_j)$ hat. Es sei $f$ vom Exponentialtyp und es gelte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|f(x)||}{1+x^2}\,dx < \infty .$$

Dann gilt

$$f(\lambda) = \lim_{r\to\infty} \prod_{|\alpha_j|\le r} \left(1-\frac{\lambda}{\alpha_j}\right)$$

und

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r,f)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r,f)}{r} = \frac{1}{\pi} \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f(ir)|}{r} < \infty ,$$

wobei $n_+(r,f)$ $(n_-(r,f))$ die Anzahl der Nullstellen in $[0,r]$ $([-r,0])$ bezeichnet.

III.43 Satz: Sei $A = S + iH \in \mathfrak{S}_\infty$ ein dissipativer Volterra Operator, $H \in \mathfrak{S}_1$. Dann gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r,S)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r,S)}{r} = \frac{1}{\pi} \operatorname{tr} H ,$$

und

$$\int_0^r \frac{n(\rho,S)}{\rho}\,d\rho \le \frac{2}{\pi}\, r \operatorname{tr} H .$$

Ist $H \in \mathfrak{K}$, $\dim \operatorname{ran} H = N$, so gilt

$$\frac{1}{r}\int_0^r \frac{n(\rho,S)}{\rho}\,d\rho \ge \frac{2}{\pi} \operatorname{tr} H - N\frac{\ln r}{r} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\ln(2 s_j(H))}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Hier bezeichnet $n_+(r,S)$ $(n_-(r,S))$ die Anzahl der $\frac{1}{\lambda_j(S)}$ im Intervall $[0,r]$ $([-r,0])$ und $n(r,S) = n_+(r,S) + n_-(r,S)$.

Beweis: a) Wegen der Abschätzung aus III.41 ist $\det^{(2)}(I-\lambda S)$ von beschränktem Typ in $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^-$. Also folgt wegen III.42, III.42a und der Abschätzung aus III.41 die erste Behauptung.

·) Nach der Jensenschen Formel gilt (mit III.41)

$$\int_0^r \frac{n(s,\mathfrak{g})}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\det{}^{(2)}(I-re^{i\theta}\mathfrak{g})|\,d\theta \leq$$

$$\leq \frac{r}{2\pi}\operatorname{tr} H \int_0^{2\pi} |\sin\theta|\,d\theta = \frac{2r}{\pi}\operatorname{tr} H.$$

·) Sei $\dim \operatorname{ran} H = N < \infty$. Dann gilt

$$|D_{A/\mathfrak{g}}(\lambda)| = |\det(I + i\lambda H(I-\lambda\mathfrak{g})^{-1})| \leq \prod_{j=1}^{N}(1+\sigma_j(\lambda))$$

wobei $\sigma_j(\lambda)$ die s-Zahlen von $C(\lambda) = i\lambda H(I-\lambda\mathfrak{g})^{-1}$ bezeichnen.

Es gilt ($\lambda = re^{i\theta}$)

$$|\lambda(I-\lambda\mathfrak{g})^{-1}| = |(\tfrac{1}{\lambda}-\mathfrak{g})^{-1}| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda}|} = \frac{r}{|\sin\theta|},$$

also ist

$$\sigma_j(\lambda) = s_j(C(\lambda)) \leq \frac{r}{|\sin\theta|}\, s_j(H),$$

und daher

$$|D_{A/\mathfrak{g}}(\lambda)| \leq \prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{r s_j(H)}{|\sin\theta|}\right).$$

Es folgt für $\lambda \notin \mathbb{R}$:

$$|\det{}^{(2)}(I-\lambda\mathfrak{g})| = |e^{-i\lambda \operatorname{tr} H} D_{A/\mathfrak{g}}(\lambda)^{-1}| \geq e^{|\operatorname{Im}\lambda| \operatorname{tr} H}\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{r s_j(H)}{|\sin\theta|}\right)^{-1},$$

also gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\det{}^{(2)}(I-re^{i\theta}\mathfrak{g})|\,d\theta \geq \frac{2}{\pi} r \operatorname{tr} H - \sum_{j=1}^{N}\Phi(r s_j(H))$$

mit

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(1+\frac{t}{|\sin\theta|}\right)d\theta = \ln 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(|\sin\theta|+t)\,d\theta =$$

$$= \ln 2 + \ln t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(1+\frac{|\sin\theta|}{t}\right)d\theta =$$

$$= \ln 2 + \ln t + O\left(\tfrac{1}{t}\right).$$

Es folgt daher

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\det{}^{(2)}(I - re^{i\theta}S)|\,d\theta \geq \frac{2}{\pi} r \operatorname{tr} H - N \ln r - \sum_{j=1}^{N} \ln(2 s_j(H)) +$$

$$+ O\left(\tfrac{1}{r}\right).$$

□

III.44 Korollar: Sei $A = S + iH \in \mathcal{S}_\infty$ ein dissipativer Volterra-Operator, $H \in \mathcal{S}_1$. Dann gilt

(i) $$\frac{n(r,S)}{r} \leq \frac{2e}{\pi} \operatorname{tr} H,$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} n\, s_n(A) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tr} H.$$

Beweis: ·) da $n(r,S)$ nichtfallend ist folgt

$$n(r,S) \leq \int_r^{er} n(\rho,S)\frac{d\rho}{\rho} \leq \int_0^{er} \frac{n(\rho,S)}{\rho}\,d\rho \leq \frac{2e}{\pi} r \operatorname{tr} H.$$

·) Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,S)}{r} = \frac{2}{\pi} \operatorname{tr} H.$$

Da sich im Kreis mit Radius $\frac{1}{s_n(S)}$ genau $n$ Eigenwerte$^{-1}$ befinden folgt insbesondere

21.4.99 $$\lim_{n\to\infty} n \cdot s_n(S) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tr} H.$$

Da $H \in \mathcal{S}_1$ gilt $\lim_{n\to\infty} n \cdot s_n(H) = 0$, also folgt $\lim_{n\to\infty} n s_n(A) = \frac{2}{\pi}\operatorname{tr} H$

□

# LITERATUR:


I.C. Gohberg, M.G. Krein: Introduction to the Theory of linear nonselfadjoint operators, Providence, Rhode Island 1969.

I. Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek: Classes of linear Operators I, OT 49, Birkhäuser, Basel 1990.

I. Gohberg, S. Goldberg: Basic Operator Theory, Birkhäuser, Basel 1981

R. Schatten: Norm ideals of completely continuous operators, Springer, Berlin 1960.

B. Levin: Distribution of zeros of entire functions, Providence, Rhode Island 1964