Canonical Systems

Harald Woracek und Johannes Mader

(1.Auflage, 2020)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Das Kanonische System

1.1 Die Differentialgleichung und ein Eindeutigkeitssatz

Wir betrachten Differentialgleichungen der Gestalt

$$y'(t) = zJH(t)y(t), \quad t \in (a,b). \tag{1.1.1}$$ DG

wobei

- $-\infty \leq a < b \leq \infty$,
- $H \in L^1_{loc}\Big((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\Big)$,
- $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- $z \in \mathbb{C}$ und
- $y : (a,b) \to \mathbb{C}^2$.

Die Matrix H wird *Hamiltonian des Systems* genannt. Diese Nomenklatur kommt aus der Physik, wo der Hamiltonoperator die Energie und damit die Bewegungsgleichungen eines Systems beschreibt.

J101. **1.1.1 Definition.** Eine Funktion $y : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ heißt *Lösung von (1.1.1)*, wenn $y \in AC_{loc}\Big((a,b), \mathbb{C}^2\Big)$ und für fast alle $t \in (a,b)$ gilt die Gleichung (1.1.1). $\Diamond$

Wie meistens, ist eine Differentialgleichung nur eine ungeschickte Art eine Integralgleichung aufzustellen. Zu Daten wie oben und zusätzlich einem Punkt $c \in (a,b)$ betrachte die Integralgleichung

$$y(t) = y(c) + \int_c^t zJH(s)y(s)\, ds, \quad t \in (a,b). \tag{1.1.2}$$ IG

Hier verwenden wir die übliche Konvention, dass bei Integration nach dem Lebesgue Maß

$$\int_c^d f(s)\, ds = \begin{cases} \int_{[c,d)} f\, ds, & d \geq c, \\ -\int_{(d,c]} f\, ds, & d < c. \end{cases}$$

J102. **1.1.2 Definition.** Eine Funktion $y : (a,b) \to \mathbb{C}^2$ heißt *Lösung von (1.1.2)*, wenn $y \in \mathcal{BM}_{loc}((a,b), \mathbb{C}^2)$ und für alle $t \in (a,b)$ gilt die Gleichung (1.1.2). $\Diamond$

J103. *1.1.3 Bemerkung.* Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) y ist Lösung der DG (1.1.1).

(2) y ist für ein $c \in (a,b)$ Lösung der IG (1.1.2).

(3) y ist für alle $c \in (a,b)$ Lösung der IG (1.1.2).

◊

Eine Variante des Grönwall Lemmas gibt uns eine Schranke für die Größe von Lösungen.

J104. **1.1.4 Lemma** (Lemma von Grönwall). *Sei y eine Lösung von (1.1.1). Dann gilt*

$$\|y(d)\| \leq \|y(c)\| \exp\left(|z| \left| \int_c^d \|H(s)\| \, ds \right| \right), \quad c, d \in (a,b).$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $c < d$. Da y eine Lösung von (1.1.2) mit dem Punkt c als Anschlussstelle ist, gilt

$$\|y(t)\| \leq \|y(c)\| + \int_c^t |z| \cdot \|H(s)\| \cdot \|y(s)\| \, ds, \quad t \in [c,d).$$

Es folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ für fast alle $t \in [c,b)$

$$\frac{d}{dt} \log\left(\varepsilon + \|y(c)\| + \int_c^t |z| \cdot \|H(s)\| \cdot \|y(s)\| \, ds\right) = \frac{|z| \cdot \|H(t)\| \cdot \|y(t)\|}{\varepsilon + \|y(c)\| + \int_c^t |z| \cdot \|H(s)\| \cdot \|y(s)\| \, ds} \leq |z| \cdot \|H(t)\|.$$

Integriert man über (c,d), so folgt

$$\log\left(\varepsilon + \|y(c)\| + \int_c^d |z| \cdot \|H(s)\| \cdot \|y(s)\| \, ds\right) \leq \log(\varepsilon + \|y(c)\|) + |z| \int_c^d \|H(s)\| \, ds$$

und damit

$$\|y(d)\| \leq \varepsilon + \|y(c)\| + \int_c^d |z| \cdot \|H(s)\| \cdot \|y(s)\| \, ds \leq (\varepsilon + \|y(c)\|) \exp\left(|z| \int_c^d \|H(s)\| \, ds\right).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Betrachte nun den Fall $d < c$. Die Funktion $\tilde{y}(t) := y(-t),\ t \in (-b,-a)$, ist Lösung der DG

$$\tilde{y}(t) = (-z) J \tilde{H}(t) \tilde{y}(t), \quad t \in (-b,-a),$$

mit $\tilde{H}(t) := H(-t)$. Es ist $-c < -d$ und nach dem bisher bewiesenen gilt

$$\|\tilde{y}(-d)\| \leq \|\tilde{y}(-c)\| \exp\left(|-z| \int_{-c}^{-d} \left\|\tilde{H}(s)\right\| \, ds\right) = \|y(c)\| \exp\left(|z| \left| \int_c^d \|H(s)\| \, ds \right| \right).$$

❑

Als Folgerungen erhalten wir einen Eindeutigkeitsaussage.

J105. **1.1.5 Korollar.** *Seien y_1, y_2 Lösungen von (1.1.1). Wenn ein $c \in (a,b)$ existiert, sodass $y_1(c) = y_2(c)$, dann ist $y_1 = y_2$.*

Beweis. Wegen der Linearität der Gleichung (1.1.1) ist $y_1 - y_2$ auch eine Lösung. Nun gilt $(y_1 - y_2)(c) = 0$ und nach Lemma 1.1.4 gilt daher $(y_1 - y_2)(d) = 0$ für alle $d \in (a,b)$. ❑

Wir erhalten auch Existenz- und eindeutige Bestimmtheit durch Randwerte, wenn H bei einem Randpunkt integrierbar bleibt.

J106. **1.1.6 Definition.** Wir sagen, dass a ein L^1*-Randpunkt* ist, wenn es ein (und damit für alle) $c \in (a,b)$ gibt, sodass $\int_a^c \|H(s)\| \, ds < \infty$.

Analog ist b ein L^1*-Randpunkt*, wenn es ein (und damit für alle) $c \in (a,b)$ gibt, sodass $\int_c^b \|H(s)\| \, ds < \infty$.

◊

J107. **1.1.7 Korollar.** *Ist a ein L^1-Randpunkt, dann gelten die folgenden Aussagen*

(1) *Eine Funktion y ist genau dann Lösung von (1.1.2), wenn $y \in \mathcal{BM}_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^2\right)$, der Limes $y(a) := \lim_{t\to a} y(t)$ existiert und die Integralgleichung*

$$y(t) = y(a) + \int_a^t zJH(s)y(s)\,ds, \quad t \in (a,b) \tag{1.1.3}$$ IG2

gilt.

(2) *Seien y_1, y_2 Lösungen von (1.1.1) mit $y_1(a) = y_2(a)$. Dann ist $y_1 = y_2$.*

(3) *Sei y eine Lösung von (1.1.1). Dann gilt*

$$\|y(d)\| \le \|y(c)\| \exp\left(|z| \cdot \left|\int_c^d \|H(s)\|\ ds\right|\right), \quad c,d \in [a,b).$$

Die analogen Aussagen gelten bei b, wenn b ein L^1-Randpunkt ist.

Beweis.

(1): Sei y eine Lösung von (1.1.1) und wähle $c \in (a,b)$. Nach Lemma 1.1.4 ist dann $\sup_{t\in(a,c]} \|y(t)\| < \infty$ und damit auch
$$H(t)y(t) \in L^1\left((a,c],\mathbb{C}^2\right).$$
Nun gilt für alle $t \in (a,c]$
$$y(t) = y(c) + zJ\int_c^t H(s)y(s)\,ds$$
und wir sehen, dass
$$y(a) = \lim_{t\to a} y(t) = y(c) + zJ\int_c^a H(s)y(s)\,ds.$$
Somit folgt durch substituieren von c durch t die Aussage
$$y(t) = y(a) + zJ\int_a^t H(s)y(s)\,ds.$$

(2): Seien y_1, y_2 Lösungen von (1.1.1) mit $y_1(a) = y_2(a)$. Dann ist $y_1 - y_2$ auch eine Lösung mit $(y_1 - y_2)(a) = 0$. Sei $d \in (a,b)$ festgehalten. Dann ist $\int_a^d \|H(s)\|\ ds < \infty$ und daher nach Lemma 1.1.4
$$\|(y_1 - y_2)(d)\| \le \liminf_{c\to a} \|(y_1 - y_2)(c)\| \exp\left(|z| \int_a^d \|H(s)\|\ ds\right) = 0.$$

(3): Gehe im Lemma von Grönwall zum Limes $c \to a$ bzw. $d \to a$ über, falls das hier gegebene c bzw. d gleich a ist.

❑

J108. **1.1.8 Definition.** Seien H und $\tilde{H}$ gegeben auf (a,b) bzw. auf $(\tilde{a},\tilde{b})$. Dann sind $H \sim \tilde{H}$ Umparametrisierungen von einander und wir schreiben $H \sim \tilde{H}$, wenn eine Funktion $\varphi : (\tilde{a},\tilde{b}) \to (a,b)$ existiert mit

(1) φ bijektiv

(2) φ, φ^{-1} lokal absolut stetig

(3) $\tilde{H}(t) = H(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\tilde{a},\tilde{b})$.

◊

J109. *1.1.9 Bemerkung.* $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. ◊

J110. **1.1.10 Lemma.** *Seien H und $\tilde{H}$ Umparametrisierungen von einander, mit der Funktion $\varphi : (\tilde{a},\tilde{b}) \to (a,b)$. Bezeichne mit L bzw. $\tilde{L}$ die linearen Räume der Lösungen von (1.1.1) für H bzw. $\tilde{H}$. Dann induziert die Funktion $y \mapsto y \circ \varphi$ ein Bijektion zwischen L und $\tilde{L}$.*

Beweis. Seien $\tilde{c}, \tilde{d} \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ und $y \in L$. Dann gilt

$$y(\varphi(\tilde{d})) - y(\varphi(\tilde{c})) = \int_{\varphi(\tilde{c})}^{\varphi(\tilde{d})} zJHy(s)\, ds = \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} zJ(H \circ \varphi)(r)(y \circ \varphi)(r)\varphi'(r)\, dr.$$

Also ist $y(\varphi(.))$ Lösung von $\tilde{H}$. Und

$$(\tilde{H} \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})' = \Big((H \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\Big)(\varphi' \circ \varphi^{-1}) \underbrace{(\varphi^{-1})'}_{(\varphi' \circ \varphi^{-1})^{-1}} = H.$$

Klarerweise sind $y \mapsto y \circ \varphi$ und $\tilde{y} \mapsto \tilde{y} \circ \varphi^{-1}$ zueinander invers. ❑

Umparametrisierung macht es möglich uns auf spezielle Hamiltonians zurückzuziehen. Dies ändert nichts an der Lösung und dem Spektrum. Daher kann Eindeutigkeit nur bis auf Umparametrisierung gezeigt werden.

J111. *1.1.11 Beispiel.* Betrachte H auf (a, b). Wähle $c \in (a, b)$ als Aufhängepunkt. Betrachte die Funktion

$$\varphi(t) := \int_c^t v(s)\, ds, \quad v(s) := \begin{cases} \|H(s)\|, & H(s) \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist φ bijektiv, weil der Integrand nicht negativ ist. Außerdem sind φ und φ^{-1} absolut stetig. Weiters sei $(H \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})' =: \tilde{H}$. Nun ist $(\tilde{H} \circ \varphi)\varphi' = H$. Berechne

$$\|H(t)\| = \left\|\tilde{H}(\varphi(t))\right\| \left|\varphi'(t)\right| = \begin{cases} \left\|\tilde{H}(\varphi(t))\right\| \|H(t)\|, & \|H(t)\| \neq 0 \\ \left\|\tilde{H}(\varphi(t))\right\| & , sonst. \end{cases}$$

Damit

$$\left\|\tilde{H}(r)\right\| = \begin{cases} 1, & r \in \varphi\left(\{t : \|H(t)\| \neq 0\}\right) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

◊

J112. *1.1.12 Bemerkung.* Auf der Menge aller Hamiltonians ist eine Äquivalenzrelation definiert als $H_1 \sim H_2$, falls H_1 und H_2 Umparametrisierungen von einander sind.

Ist $H_1 \sim H_2$, so ist der linke Randpunkt von H_1 ein L^1-Randpunkt für H_1 genau dann, wenn der linke Randpunkt von H_2 ein L^1-Randpunkt für H_2 ist. Das gleiche gilt auch für den rechten Randpunkt. Daher liefert uns $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf jeder der Mengen

$$\left\{H \text{ Hamiltonian} : a, b\ L^1\text{-Randpunkte}\right\}$$
$$\left\{H \text{ Hamiltonian} : a\ L^1\text{-Randpunkte}, b \text{ kein } L^1\text{-Randpunkt}\right\}$$
$$\left\{H \text{ Hamiltonian} : a \text{ kein } L^1\text{-Randpunkte}, b\ L^1\text{-Randpunkt}\right\}$$
$$\left\{H \text{ Hamiltonian} : a, b \text{ kein } L^1\text{-Randpunkt}\right\}$$

Ein vollständiges Repräsentantensystem der ersten bzw. der zweiten Menge ist gegeben durch $\bigcup_{0<T<\infty} \mathbb{L}_T$ bzw. $\mathbb{L}_\infty$, wobei

$$\mathbb{L}_T := \left\{H : (0, T) \to \mathbb{C}^{2\times 2} : H \text{ messbar}, \|H(t)\| = 1 \text{ für } t \in (0, T)\right\}$$

Die dritte Menge bildet ein analog definiertes vollständiges Repräsentantensystem. Für die vierte Menge ist es nicht in solch einfacher Weise möglich ein vollständiges Repräsentantensystem anzugeben.

◊

1.2 Existenz von Lösungen analytisch im Parameter

J113. **1.2.1 Satz** (Existenzsatz). *Sei $H \in L^1_{loc}\left([a, b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ ein Hamiltonian und a ein L^1-Randpunkt. Dann existiert eine eindeutige Matrix $W : [a, b) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, sodass*

(1) *Für alle $z \in \mathbb{C}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ist die Funktion*

$$t \mapsto W(t,z)^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad t \in (a,b)$$

eine Lösung von (1.1.1).

(2) *Für alle $z \in \mathbb{C}, t \in (a,b)$ ist $W(a,z) = I$ und*

$$\|W(t,z) - I\| \leq e^{|z| \int_a^t \nu(s)\, ds} - 1,$$

mit

$$\nu(t) := \begin{cases} \|H(t)\|, & H(t) \neq 0 \\ 1, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(3) *Für alle $t \in [a,b)$ ist $z \mapsto W(t,z)$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$.*

Die Funktion $W(t,z)$ hat die Potenzreihenentwicklung $W(t,z) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(t) z^l, t \in [a,b), z \in \mathbb{C}$ mit $w_0(t) = I$ und

$$w_{l+1}(t) = -\int_a^t w_l(s) H(s)^T J \, ds.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von W folgt aus der expliziten angabe der Potenzreihe.

Wir betrachten zuerst den Fall $\|H(t)\| \in \{0,1\}$ f.ü. . Mittels Umparametrisieren setzten wir o.B.d.A. $a = 0$. Definiere w_l mittels der Rekursion des Satzes. Damit folgt $w_l(0) = 0$ für $l \geq 1$. Die w_l sind absolut stetig. Wir zeigen nun induktiv die folgende Abschätzung

$$\|w_l(t)\| \leq \frac{t^l}{l!}, \quad t \in [a,b). \tag{1.2.1}$$

EQ : 2 . 2

Dies gilt für $l = 0$. Weiters folgt

$$\|w_{l+1}(t)\| \leq \int_0^t \underbrace{\|w_l(s)\|}_{\leq \frac{s^l}{l!}} \underbrace{\|H(s)\|}_{\leq 1} \, ds \leq \frac{t^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Die Potenzreihe

$$W(H;t,z) := \sum_{l=0}^{\infty} w_l(H;t) z^l \tag{1.2.2}$$

EQ : 2 . 3

konvergiert absolut gleichmäßig für $(H;t,z) \in B_1^{L^\infty}\left([a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right) \times [a,c] \times K$, mit einem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Wir berechnen

$$\int_0^t zJH(s)W(s,z)^T \, ds = \int_0^t \left(\sum_{l=0}^{\infty} zJHw_l(t)^T z^l \right) ds.$$

Nachdem die Potenzreihe gleichmäßig in s konvergiert, können wir die Integration und Summation vertauschen. Somit gilt

$$= \sum_{l=0}^{\infty} z^{l+1} \int_0^t JHw_l(t)^T \, ds = \sum_{l=0}^{\infty} z^{l+1} \left(\int_0^t w_l(t)H(s)^T(-J)\, ds \right)^T = \sum_{l=0}^{\infty} z^{l+1} w_{l+1}(t)^T = W(t,z)^T - I.$$

Damit folgt für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, dass $t \mapsto W(t,z)^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung von (1.1.2) und damit auch eine Lösung von (1.1.1) ist.

Weiters gilt

$$\left\|W(t,z)^T - I\right\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |z|^l \, \|w_l(t)\| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |z|^l \frac{t^l}{l!} = e^{|z|t} - 1.$$

Im allgemeinen wähle die Umparametrisierung aus Beispiel 1.1.11, sodass $\tilde{H} := (H \circ \varphi)\varphi'$ mit $\left\|\tilde{H}(t)\right\| \in \{0,1\}$.

Damit erhalten wir

$$\tilde{W}(r,z) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{w}_l(r) z^l.$$

Definieren wir uns nun

$$W(t,z) := \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{w}_l(\varphi(t)) = \tilde{W}(\varphi(t),z).$$

Damit ist $W(t,z)$ wieder eine Lösung von (1.1.1). Es fehlt noch die Rekursion und die Abschätzung zu zeigen. Es gilt $w_0(t) = TW(\varphi(t)) = I$ und

$$w_{l+1}(t) = \tilde{w}_{l+1}(\varphi(t)) = -\int_0^{\varphi(t)} \tilde{w}_l(s)\tilde{H}(s)^T J\, ds = -\int_0^{\varphi(t)} \tilde{w}_l(s)(H\circ\varphi^{-1})^T(s)(\varphi^{-1})'(s) J\, ds = -\int_0^t \tilde{w}_l(\varphi(r))H(r)^T J\, dr.$$

Weiters gilt

$$\left\|\tilde{W}(t,z)^T - I\right\| \leq e^{|z|\varphi(t)} - 1 = e^{|z|\int_0^t v(s)\, ds} - 1$$

❑

J114. **1.2.2 Definition.** Sei H ein Hamiltonian definiert auf (a,b) und sei a ein L^1-Randpunkt für H. Dann heißt $W(t,z)$ *Fundamentallösung* von (1.1.1). Wenn b ein L^1-Randpunkt ist, so existiert $W(b,z) := \lim_{t\to b} W(t,z)$ und heißt *Matrizant* von H. ◊

J115. *1.2.3 Bemerkung.* Die Fundamentallösung $W(t,z)$ ist die eindeutige Lösung des AWP

$$\frac{d}{dt}W(t,z)J = zW(t,z)H(t)^T, t \in (a,b), \quad W(a,z) = I \tag{1.2.3}$$ EQ:2.4

mit Integralgleichung

$$W(t,z) - I = -z\int_a^t W(s,z)H(s)^T J\, ds.$$

Es sei angemerkt, dass hier plötzlich ein Minus vorkommt, im Gegensatz zur Gleichung (1.1.2), da dies das Transponierte Problem ist und $J^T = -J$. Schreibt man das AWP in seinen Komponenten, so ergibt sich mit $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}w_{11}(t,z) &= -z\left(h_{12}(t)w_{11}(t,z) + h_{22}(t)w_{12}(t,z)\right), \quad & w_{11}(a,z) = 1,\\
\frac{d}{dt}w_{12}(t,z) &= z\left(h_{11}(t)w_{11}(t,z) + h_{21}(t)w_{12}(t,z)\right), \quad & w_{12}(a,z) = 0,\\
\frac{d}{dt}w_{21}(t,z) &= -z\left(h_{12}(t)w_{21}(t,z) + h_{22}(t)w_{22}(t,z)\right), \quad & w_{21}(a,z) = 0,\\
\frac{d}{dt}w_{22}(t,z) &= z\left(h_{11}(t)w_{21}(t,z) + h_{21}(t)w_{22}(t,z)\right), \quad & w_{22}(a,z) = 1.
\end{aligned}$$

◊

1.3 Eigenschaften der Fundamentallösung

Wir zeigen einige einfache Eigenschaften von $W(t,z)$. Achtung: die Eigenschaften (*iii*) ist zwar einfach, aber extrem wichtig!

J116. **1.3.1 Proposition.** *Sei $H \in L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ und $W(t,z)$ die Fundamentallösung von (1.1.1).*

(1) *Es gilt*

$$\det W(t,z) = \exp\left(-z\int_a^t \operatorname{tr}(JH(s))\, ds\right).$$

(Diese Erkenntnis kennen wir schon aus der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen, als Darstellung der Wronski-Determinante.)

(2) *Für $c \in (a, b)$ sei $W_c(t, z)$ Fundamentallösung von (1.1.1) mit Hamiltonian $H|_{(c,b)}$. Dann*

$$W(t, z) = W(c, z)W_c(t, z), t \in (c, b).$$

(3) *Ist $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ f.ü. . Dann folgt $\overline{w_{ij}(t, \overline{z})} = w_{ij}(t, z)$, wobei $W(t, z) = \left(w_{ij}(t, z)\right)_{i,j=1}^{2}$.*

(4) *Falls $H(t)$ selbst adjungiert ist, so gilt*

$$W(t, z)JW(t, w)^* - J = (z - \overline{w}) \int_a^t W(s, z)\overline{H}(s)W(s, w)^* \, ds$$

Beweis.

(1): $W(., z)$ ist lokal absolut stetig auf $[a, b)$ und damit erbt auch $\det W(., z)$ diese Eigenschaft.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det W(t, z) &= \frac{d}{dt} [w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}] = w'_{11}w_{22} + w_{11}w'_{22} - w'_{12}w_{21} - w_{12}w'_{21} \\
&= -z\,(h_{12}w_{11} + h_{22}w_{12})\,w_{22} + w_{11}z\,(h_{11}w_{21} + h_{21}w_{22}) \\
&\quad - z\,(h_{11}w_{11} + h_{21}w_{12})\,w_{21} + w_{12}z\,(h_{12}w_{21} + h_{22}w_{22}) \\
&= z(h_{21} - h_{12}) \det W = -z tr(JH) \det W.
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir eine DG für $\det W$. Weil $\det W$ die eindeutige Lösung dieser DG mit Anfangswert $W(a, z) = I$ ist, folgt dei gewünscht Darstellung von $\det W$.

(4): Da H selbstadjungiert ist f.ü. gilt $H^T = (H^*)^T = \overline{H}$ f.ü. und damit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [W(t, z)JW(t, w)^*] &= \left[\frac{d}{dt} W(t, z)\right] JW(t, w)^* + W(t, z)J \left[\frac{d}{dt} W(t, w)\right]^* \\
&= \left[-zW(t, z)H(t)^T J\right] JW(t, w)^* + W(t, z)J \left[-wW(t, w)H(t)^T J\right]^* \\
&= zW(t, z)H(t)^T W(t, w)^* + W(t, z) \underbrace{JJ^*}_{=I} \underbrace{(H(t)^*)^T}_{=\overline{H(t)}} (-\overline{w})W(t, w)^* \\
&= (z - \overline{w})W(t, z)\overline{H(t)}W(t, w)^*.
\end{aligned}$$

Integrieren liefert nun die gewünschte Gleichung.

(2): Betrachte für $t \in [c, b)$

$$\Phi(t, z) := W(c, z)W_c(t, z)$$

mit $\Phi(c, z) = W(c, z)$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, z) = W(c, z)\frac{d}{dt} W_c(t, z) = W(c, z)(-zW_c(t, z)H(t)^T J) = -z\Phi(t, z)H(t)^T J.$$

Also erfüllen $\Phi(t, z)$ und $W(t, z)$ die gleiche DG mit den gleichen Anfangswerten, damit sind sie gleich.

(3): Ist H reell, so ist $\overline{H(t)}^T = H(t)^T$. Damit sind $W(t, z)$ und $\overline{W(t, \overline{z})}$ beide Lösungen von (1.2.3).

❑

Wir stellen uns nun folgende Fragen:

(1) Wie hängt $W(H; t, z)$ von H, t, z ab?

(2) Was ist wenn b kein L^1-Randpunkt ist?

(3) Wie sieht das Wachstum und die Nullstellenverteilung bzgl. z aus?

(4) Ist H stabil und in welchem Sinn?

J117. **1.3.2 Definition.** Sei $T \in (0, \infty)$. Wir bezeichnen mit

$$\Psi_T : \mathbb{L}_T \to Hol\left(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$$

die Abbildung, die einem Hamiltonian H seinen Matrizanten zuordnet. ◊

Räume analytischer Funktionen, wie hier $Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ werden immer mit der lokal gleichmäßigen Konvergenz τ_{lu} versehen.

J118. **1.3.3 Proposition.** *Sei $T \in (0, \infty)$ und $H, \tilde{H} \in \mathbb{L}_T$. Bezeichne mit $W(H; t, z)$ und $W(\tilde{H}; t, z)$ die Fundamentallösungen von H bzw. $\tilde{H}$. Dann gilt mit*

$$\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty := \operatorname{esssup}_{t\in(0,T)} \left\|H(t) - \tilde{H}(t)\right\| \in [0, \infty]$$

die Ungleichung

$$\left\|W(H; t, z) - W(\tilde{H}; t, z)\right\| \le t\,|z|\,e^{t|z|} \left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty, \quad (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{C}. \tag{1.3.1}$$ EQ:3.1

Beweis. Wir zeigen induktiv, dass

$$\left\|w_l(H; t) - w_l(\tilde{H}; t)\right\| \le \frac{t^l}{(l-1)!} \left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty, \quad t \in [0, T], l \ge 1. \tag{1.3.2}$$ EQ:3.2

Für $l = 1$ gilt

$$\left\|w_l(H, t) - w_l(\tilde{H}, t)\right\| = \left\|\int_0^t w_{l-1}(H, s)H(s)J\,ds - \int_0^t w_{l-1}(\tilde{H}, s)\tilde{H}(s)J\,ds\right\|$$

Dazu berechne für $l \ge 1$ und $t \in [0, T]$ mit der Rekursion. Die Definition von w_l liefert uns

$$\left\|w_l(H, t) - w_l(\tilde{H}, t)\right\| = \left\|\int_0^t H(s)J\,ds - \int_0^t \tilde{H}(s)J\,ds\right\| \le \int_0^t \left\|H(s) - \tilde{H}(s)\right\|\,ds \le t\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty .$$

Weiters gilt

$$\le \int_0^t \left\|w_{l-1}(H; s) - w_{l-1}(\tilde{H}; s)\right\| \underbrace{\|H(s)J\|}_{=1}\,ds + \int_0^t \left\|w_{l-1}(\tilde{H}; s)\right\| \underbrace{\left\|H(s) - \tilde{H}(s)\right\|}_{\le\|H-\tilde{H}\|_\infty} \cdot \underbrace{\|J\|}_{=1}\,ds.$$

Für $l > 1$ verwenden wir die Induktionsvoraussetzung und die Ableitung (1.2.1)

$$\left\|w_l(H; t) - w_l(\tilde{H}, t)\right\| \le \int_0^t \frac{s^{l-1}}{(l-2)!}\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty ds + \int_0^t \frac{s^{l-1}}{(l-1)!}\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty ds$$

$$= \underbrace{\left(\frac{t^l}{(l-2)!l} + \frac{t^l}{l!}\right)}_{=\frac{t^l}{(l-1)!}}\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty .$$

Damit ist (1.3.1) bewiesen.

Nun folgt mit der Definition (1.2.2) der Fundamentallösung

$$\left\|W(H; t, z) - W(\tilde{H}; t, z)\right\| \le \sum_{l=1}^\infty \left\|w_l(H, t) - W_l(\tilde{H}; t)\right\| \cdot |z|^l \le \sum_{l=1}^\infty \frac{t^l}{(l-1)!} \cdot \left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty \cdot |z|^l = t\,|z|\,e^{t|z|}\left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty .$$

❑

J119. **1.3.4 Korollar.** *Es gibt eine Metrik d_{lu} auf $Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2})$, die die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz induziert und für die (d_∞ ist die von $\|.\|_\infty$ induzierte Metrik)*

$$\Psi_T : \langle \mathbb{L}_T, d_\infty\rangle \to \left\langle Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2}), d_{lu}\right\rangle$$

eine Kontraktion ist.

Beweis. Wir erinnern uns an die Konstruktion von Metriken die τ_{lu} induzieren: Wähle eine Folge $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{C}$, wähle eine summierbare Folge $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ positiver Zahlen und setzte

$$d_{lu}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{\left\| f|_{K_n} - g|_{K_n} \right\|_\infty}{1 + \left\| f|_{K_n} - g|_{K_n} \right\|_\infty}.$$

Wir verwenden zum Beispiel

$$\gamma_n := \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left(\max_{z \in K_n} T\,|z|\, e^{T|z|} \right)^{-1}.$$

Dann gilt

$$d_{lu}\left(W(H;t,z), W(\tilde{H};t,z)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sup_{z\in K_n} \left\|W(H;T,z) - W(\tilde{H};T,z)\right\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n T\,|z|\, e^{T|z|} \left\|H - \tilde{H}\right\|_\infty.$$

❑

Offenbar gilt

$$\mathbb{L}_T = B_1^{L^\infty} \subseteq L^\infty\left((0,T), \mathbb{C}^{2\times 2}\right) \subseteq L^1\left((0,T), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$$

und damit haben wir in kanonischer Weise auch andere Topologien auf $\mathbb{L}_T$ als die von $\|.\|_\infty$ induzierte. Nämlich die von $\|.\|_1$ induzierte, die von der schwachen Topologie des L^1 induzierte (τ_ω) und die der Konvergenz im Maß (τ_{mens}). Es gilt dabei

$$\tau_\omega \subseteq \tau_{\|.\|_1} = \tau_{mens} \subseteq \tau_{\|.\|_\infty}.$$

Die beiden Inklusionen sind klar. Für die Gleichheit in der Mitte bemerke, dass $\mathbb{L}_T$ gleichmäßig beschränkt ist und zwar punktweise durch die L^∞ Funktion 1.

Nun gilt die folgende Stabilitätsaussage.

1.3.5 Bemerkung.

- $$L^1\left((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)' = span\left\{ H \mapsto \int_a^b e_i^* H(s) e_j^* \cdot f(s)\, ds | i,j \in \{1,2\}, f \in L^\infty\left((a,b), \mathbb{C}\right) \right\}.$$

- Sei X separabel und $K \subseteq X$ schwach kompakt. So ist (K, ω) metrisierbar.

  Weil X separabel ist, wähle $\{x_n\}$, sodass $span\{x_n\}$ dicht in X. Betrachte

  $$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} X' & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ f & \mapsto & (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

  ist $\omega^* \to \prod$ stetig und injektiv. Für jede ω^*- kompakte Teilmenge $L \subseteq X'$ ist $\psi_1|_L$ Homöomorphismus. Also ist L metrisierbar. Weiters ist L ω^* separabel. Insbesondere mit Banach-Alaoglu ist $B_1^{X'}$ schwach*-separabel, metrisierbar.

  Wähle $f_n \in B_1^{X'}$ dicht und

  $$\psi_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

  ist $\omega \to \prod$ stetig, injektiv. Für jede ω-kompakte K ist die Einschränkung Homöomorphismus, also ist K metrisierbar.

◊

1.3.6 Bemerkung. Betrachte $L^1\left((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$. Für $f \in L^1$ mit $\int f \mathbb{1}_\Delta = 0\ \forall \Delta$ folgt $f = 0$.

Betrachte

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} L^1 & \to & \mathbb{C}^{\mathcal{F}} \\ f & \mapsto & (\lambda(f))_{\lambda\in\mathcal{F}} \end{array} \right. , \quad \mathcal{F} := \left\{ H \mapsto \int_a^b e_i^* H(s) e_j^* \cdot \mathbb{1}_{(c,d)} | \ i,j = 1,2, a \leq c < d \leq b, c,d \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist stetig und injektiv. Damit können wir damit metrisieren. ◊

1.3.7 Definition. $\mathcal{F}$ ist gleichgradig integrierbar, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall E \in \mathcal{A}: \quad \mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

◊

1.3.8 Satz. *$\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$ mit μ endliches Maß. Dann ist $\mathcal{F}$ relativ ω-kompakt genau dann, wenn $\mathcal{F}$ gleichgradig integrierbar und $\|.\|_1$ beschränkt.*

Beweis im FANA 1 Skript.

1.3.9 Korollar. *$B_1^{L^\infty} \subseteq L^1$ ist schwach kompakt.*

Beweis. Weil das Maß endlich ist, folgt $\int_\Omega |f| \, d\mu \le \mu(\Omega)$ und $\left|\int_E f \, d\mu\right| \le \mu(E)$. ❑

J120. **1.3.10 Satz.** *Die Abbildung*

$$\Psi_T : \langle \mathbb{L}_T, \tau_\omega \rangle \to \left\langle Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2}), d_{lu} \right\rangle$$

ist stetig

Beweis. 1. Für $l \in \mathbb{N}$ betrachte die Familie

$$\mathcal{F}_l := \left\{ g_{H;H_1,H_2}(t) := \int_0^t w_l(H;s)(H_1(s) - H_2(s))J \, ds \,\middle|\, H, H_1, H_2 \in \mathbb{L}_T \right\}.$$

Wir zeigen, dass für jedes $l \in \mathbb{N}$ diese Familie relativ kompakt in $C\left([0,T], \mathbb{C}^2\right)$ ist. Dazu bemerke, dass für alle $H, H_1, H_2 \in \mathbb{L}_T$ gilt $g_{H;H_1,H_2}(0) = 0$ und dass wegen der, vom Hamiltonian unabhängigen, Abschätzung (1.2.1) und $\|H_1\|, \|H_2\| \le 1$

$$\left\| g_{H;H_1,H_2}(t) - g_{H;H_1,H_2}(t') \right\| \le \int_{t'}^t \underbrace{\|w_l(H;s)\|}_{\frac{T^l}{l!}} \cdot \underbrace{\|H_1(s) - H_2(s)\|}_{\le 2} \, ds \le (t - t') \frac{2T^l}{l!}$$

gilt für $0 \le t' \le t \le T$. Nach Arzela-Ascoli ist damit $\mathcal{F}_l$ tatsächlich relativ kompakt.

2. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ und $\tilde{H} \in \mathbb{L}_T$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} \langle \mathbb{L}_T \times \mathbb{L}_T, \tau_\omega \times \tau_\omega \rangle & \to & \left\langle C\left([0,T], \mathbb{C}^2\right), \|.\|_\infty \right\rangle \\ (H_1, H_2) & \mapsto & g_{\tilde{H},H_1,H_2} \end{cases}$$

stetig.
Um dies zu sehen, seine $(H_{1,i})_{i\in I}$ und $(H_{2,i})_{i\in I}$ Netze in $\mathbb{L}_T$ mit

$$\lim_{i\in I}^{\omega} H_{1,i} = H_1, \quad \lim_{i\in I}^{\omega} H_{2,i} = H_2.$$

Dann ist für jedes $t \in [0,T]$

$$\left| g_{H;H_{1,i},H_{2,i}}(t) - g_{H;H_1,H_2}(t) \right| = \left| \int_0^T \mathbb{1}_{(0,t)}(s) w_l(H;s) \cdot \underbrace{[(H_{1,i}(s) - H_1(s)) + (H_{2,i}(s) - H_2(s))]}_{\xrightarrow{\omega} 0} \cdot J \, ds \right| \xrightarrow{i\in I} 0.$$

Also haben wir $\lim_{i\in I} g_{H;H_{1,i},H_{2,i}} = g_{H;H_1,H_2}$ punktweise für $t \in [0,T]$. Da $\mathcal{F}_l$ relativ kompakt bzgl. $\|.\|_\infty$ ist, folgt, dass diese Konvergenz sogar schon bzgl. $\|.\|_\infty$ stattfindet.

3. Wir zeigen, dass für jedes $l \in N$ die Abbildung

$$\mathcal{K}_l : \begin{cases} \langle \mathbb{L}_T, \tau_\omega \rangle & \to & \left\langle C\left([0,T], \mathbb{C}^{2\times 2}\right), \|.\|_\infty \right\rangle \\ H & \mapsto & w_l(H;.) \end{cases}$$

stetig ist.

Wir zeigen dies mittels Induktion nach l. Für $l = 0$ ist immer $w_l(H; .) = I$, also ist die Stetigkeit trivial. Sei $l \geq 0$ und angenommen, dass $\mathcal{K}_l$ stetig ist. Sei $(H_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathbb{L}_T$ und $H \in \mathbb{L}_T$ mit $\lim_{i\in I} H_i = H$. Nach der Rekursion für $w_l(H; .)$ haben wir

$$\|w_{l+1}(H_i;t) - w_{l+1}(H;t)\|_\infty = \left\| \int_0^t w_l(H_i;s)H_i(s)J\,ds - \int_0^t w_l(H;s)H(s)J\,ds \right\|_\infty$$

$$\leq \left\| \int_0^t (w_l(H_i;s) - w_l(H;s))\,H_i(s)J\,ds \right\|_\infty + \left\| \underbrace{\int_0^t w_l(H;s)\,(H_i(s) - H(s))\,J\,ds}_{=g_{H;H_i,H}} \right\|_\infty$$

$$\leq \|w_l(H_i;s) - w_l(H;s)\|_\infty \cdot T + \left\| g_{H;H_1,H} \right\|_\infty$$

Beide Summanden streben gegen 0; der erste wegen der Induktionsvoraussetzung und der zweite wegen Schritt (2).

4. Wegen der, vom Hamiltonian unabhängigen Abschätzung (1.2.1), konvergiert die Reihe (1.2.2) gleichmäßig auf $\mathbb{L}_T \times [0,T] \times K$ für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}$. Die gezeigte Stetigkeit in H der Potenzreihenkoeffizienten impliziert daher die Stetigkeit in H der Potenzreihe.

❑

J403. *1.3.11 Bemerkung.* Wir verwenden die Notation $L^1_{[a,b]} := L^1_{loc}\left([a,b], \mathbb{C}^{2\times 2}\right) = L^1\left((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ und $L^1_{[a,b)} := L^1_{loc}\left([a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ und

$$\mathbb{L}_{a,b} := \left\{ H \in L^\infty\left((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right) \mid \|H\|_\infty \leq 1 \right\}$$

und

$$\Psi^\circ_{a,b} : \begin{cases} L^1_{[a,b]} & \to & Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2}) \\ H & \mapsto & W(H;b,.) \end{cases}$$

Wir wissen für alle $H \in L^1_{[a,b]}$ gibt es ein $\tilde{H} \in L^1_{[a,b]} \cap \mathbb{L}_{a,b}$, sodass $H \sim \tilde{H}$.

◊

J404. **1.3.12 Satz.** *Sei $-\infty < a < b < \infty$ so ist $\Psi^\circ_{a,b} : \mathbb{L}_{a,b} \to Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2})$ ω-lu-stetig.*

1.4 Beispiele und Transformationen kanonischer Systeme

Wir betrachten ein paar konkrete Beispiele bzw. Beispielklassen von Hamiltionian

J401. *1.4.1 Beispiel* (Paley-Wiener). Betrachte den Hamiltonian $H(t) := I$ für $t \in (0, L)$. Die Differentialgleichung 1.2.3 der Fundamentallösung hat die Lösung

$$W(t,z) = \begin{pmatrix} \cos tz & \sin tz \\ -\sin tz & \cos tz \end{pmatrix} = \exp(-tzJ).$$

Dies nachzurechnen ist ein gute Übung für interessierte Leser. ◊

J402. *1.4.2 Bemerkung.* Für $\phi \in \mathbb{R}$ definieren wir $\xi_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$. So gelten folgende Rechenregeln.

- $$\exp(\alpha J) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \xi_\varphi\alpha = \exp(\alpha J)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J = \exp\left(\frac{\pi}{2}J\right)$$

- $$\xi_\alpha\xi_\alpha^* J = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$$

- $$\exp(\alpha J)\begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\exp(-\alpha J) = I - P\xi_\alpha\xi_\alpha^* J = \begin{pmatrix} 1 - p\cos\alpha\sin\alpha & p\cos^2\alpha \\ -p\sin^2\alpha & -1 + p\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$$

- $$\xi_\phi^* J \xi_\phi = 0.$$

$\Diamond$

J405. *1.4.3 Beispiel* (indivisible Intervall). Betrachte $H(t) := h(t)\xi_\phi\xi_\phi^*$, $t \in (a,b)$ wobei $h \in L^1((a,b),\mathbb{C})$ und $\phi \in \mathbb{R}$. Die Potenzreihenkoeffizienten der Fundamentallösung können mittels der Rekursion aus Satz 1.2.1 berechnet werden.

$$\begin{aligned}
w_0(t) &= I,\\
w_1(t) &= -\int_a^t h(s)\xi_\phi\xi_\phi^* J\, ds = -\left(\int_a^t h(s)\, ds\right)\xi_\phi\xi_\phi^* J,\\
w_2(t) &= -\int_a^t \left[-\int_a^s h(s)\xi_\phi\xi_\phi^* J\, du\right] h(s)\xi_\phi\xi_\phi^* J\, ds\\
&= \int_a^t \left[\int_a^s h(s)\, du\right] h(s)\xi_\phi \underbrace{\xi_\phi^* J \xi_\phi}_{=0} \xi_\phi^* J\, ds = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist auch $w_l(t) = 0$ für $l \geq 2$.

Also bekommen wir mit $l(t) := \int_a^t h(s)\, ds$ die Fundamentallösung

$$W(H;t,z) = I - zl(t)\xi_\phi\xi_\phi^* J = \begin{pmatrix} 1 - zl(t)\cos\phi\sin\phi & zl(t)\cos^2\phi \\ -zl(t)\sin^2\phi & 1 + zl(t)\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} = e^{\phi J}\begin{pmatrix} 1 & lz \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi J}.$$

Notation: $W_{l,\phi}(z) := I - zl(t)\xi_\phi\xi_\phi^* J.$ $\Diamond$

J405. *1.4.4 Beispiel* (finite ranke Hamiltonian). Ein Hamiltonian H heißt ein *finite rank Hamiltonian*, wenn er aus einer endlichen Anzahl von indivisible Intervalls besteht. Expliziter sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Partition und

$$h_1 \in L^1_{loc}((t_0,t_1],\mathbb{C}), \quad h_i \in L([t_{i-1},t_i],\mathbb{C}), i = 2,\ldots,n-1 \quad h_n \in L^1_{loc}([t_{n-1},t_n),\mathbb{C})$$

skalare Funktionen und $\phi_1,\ldots,\phi_n \in \mathbb{R}$. Definiere

$$H(t) := h_i(t)\xi\phi_i\xi_{\phi_i}\xi_{\phi_i}^*, \quad \text{für } t \in (t_{i-1},t_i), i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Damit ist a ein L^1-Randpunkt genau dann, wenn $h_1 \in L^1((t_0,t_1],\mathbb{C})$ und b ein L^1-Randpunkt genau dann, wenn $h_n \in L^1([t_{n-1},t_n),\mathbb{C})$

Seine a und b beide L^1 Randpunkte, so ist der Matrizant $W(z)$ von H gegeben durch

$$W(H;t,b)(z) = \prod_{i=1}^n W_{l_i,\phi_i}(z), \quad l_i := \int_{t_{i-1}}^{t_i} h_i(s)\, ds.$$

Dabei wird dieses Produkt von links nach rechts gerechnet. $\Diamond$

1.5 Wachstum der Fundamentallösung

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Hamiltonien H auf einem endlichen Intervall (a,b), wobei a und b beide L^1-Randpunkt von H sind. Weiters bezeichnen wir mit $W(z)$ den Matrizanten von H.

J501. *1.5.1 Bemerkung*. zum Grönwall-Lemma. Weil für $(\alpha_1,\alpha_2)^T \in \mathbb{C}^2$ die Funktion $W(t,z)^T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ eine Lösung von (1.1.1) ist mit Anfangswert $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, gilt mit Grönwall

$$\left\| W(t,z)^T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right\| \leq \left\|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right\| \exp\left(|z|\int_a^t \|H(s)\|\, ds\right)$$

Damit folgt

$$\|W(b,z)\| \leq \exp\left(|z|\int_a^b \|H(s)\|\, ds\right). \tag{1.5.1}$$ I.EQ:5.1

Diese Abschätzung kann das tatsächliche Wachstum des Matrizanten in z beschreiben. Für $H(s) = I$ gilt Gleichheit. Im allgemeinen wird sie aber viel zu grob sein. Für H finite rank, ist der Matrizant ein Polynom und damit ist diese Abschätzung völlig daneben.

◊

Wir zeigen nun, dass die Geschwindigkeit des Wachstums beschriebende Konstante $\int_a^b \|H(s)\| \; ds$ in (1.5.1) im Limes $|z| \to \infty$ durch eine andere Konstante ersetzt werden kann, die oft kleiner sein wird.

Als erstes definieren wir, was wir unter "im Limes $|z| \to \infty$" verstehen.

J502. **1.5.2 Definition.** Sei $f : \mathbb{C} \to (0, \infty)$. Dann definiere

$$\tau(f) := \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log^+ f(z)}{|z|} = \inf\left\{\gamma > 0 | f(z) \le Ce^{\gamma|z|},\ z \in \mathbb{C}\right\}$$

mit $\log^+ x := \max(0, \log x)$. ◊

J503. **1.5.3 Satz.** *Sei $H \in L^1_{[a,b]}$. Dann ist die Funktion*

$$t \mapsto \tau\left(\|W(t, .)\|\right), \quad t \in [a, b]$$

absolut stetig und es gilt

$$\frac{d}{dt}\tau\left(\|W(t, .)\|\right) \le \|H(t)\| \;\; f.ü..$$

Beweis. Sei $a \le c < d \le b$ und $W_c(t, z)$ ist Lösung zu $H|_{(c,b)}$.

1. Dann ist
$$W(d, z) = W(c, z)W_c(d, z).$$
Damit folgt
$$\log \|W(d, z)\| \le log \|W(c, z)\| + \log \|W_c(d, z)\| .$$
Nun kann zu $\log^+$ übergegangen werden
$$\log^+ \|W(d, z)\| \le log^+ \|W(c, z)\| + \log^+ \|W_c(d, z)\| .$$
Mit (1.5.1) gilt
$$\le log^+ \|W(c, z)\| + |z| \int_c^d \|H(s)\| \; ds$$
und damit folgt
$$\tau\left(\|W(d, .)\|\right) \le \tau\left(\|W(c, .)\|\right) + \int_c^d \|H(s)\| \; ds.$$

2. Betrachte dem Hamiltonian $H|_{(c,d)}$ mit der Lösung y des AWP $y(c) = W_c(d, z)^{-T}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. So gilt mit $y(t) = W_c(t, z)^{-T}y(c)$ und damit $y(d) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. Also folgt mit dem Lemma 1.1.4 von Grönwall
$$\left\|W_c(d, z)^{-T}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right\| = \|y(c)\| \le \|y(d)\| \exp\left(|z| \int_c^d \|H(s)\| \; ds\right) \le \left\|\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right\| \exp\left(|z| \int_c^d \|H(s)\| \; ds\right)$$
Damit folgt
$$\left\|W_c(d, z)^{-1}\right\| \le \exp\left(|z| \int_c^d \|H(s)\| \; ds\right)$$

3. Mit $W(c, z) = W(d, z)W_c(d, z)^{-1}$ folgt
$$log^+ \|W(c, z)\| \le log^+ \|W(d, z)\| + log^+ \left\|W_c(d, z)^{-1}\right\|$$
und damit
$$\tau\left(\|W(c, .)\|\right) \le \tau\left(\|W(d, .)\|\right) + \int_c^d \|H(s)\| \; ds.$$

4. Zusammen folgt
$$|\tau(\|W(c,.)\|) - \tau(\|W(d,.)\|)| \le \int_c^d \|H(s)\| \; ds.$$
Daraus sieht man, dass $t \mapsto \tau(\|W(t,.)\|)$ absolut stetig ist und an jedem Punkt wo $\frac{d}{dt}\tau(\|W(t,.)\|)$ existiert und $\frac{d}{dt}\int_a^t \|H(s)\| \; ds = \|H(t)\|$ gilt, die Ungleichung
$$\frac{d}{dt}\tau(\|W(t,.)\|) \le \|H(t)\|$$
gilt.

❑

J5031. **1.5.4 Lemma.** *Sei $H \in L^1_{[a,b]}$ und $Q \in GL(2,\mathbb{C})$. Setze*
$$H_Q := (-JQ^{-1}J)^T H Q^T$$
Dann ist
$$W(H_Q; t, z) = QW(H; t, z)Q^{-1}$$
Beweis. Betrachte die rechte Seite, sprich $W(t,z) := QW(H;t,z)Q^{-1}$. So ist $W(t,0) = I = W(a,z)$ und
$$\frac{d}{dt}W(t,z) = Q\frac{d}{dt}W(H;t,z)J(-J)Q^{-1}J = QzW(H;t,z)H(t)^T(-J)Q^{-1}J$$
$$= zQW(H;t,z)Q^{-1} \cdot QH(t)^T(-J)Q^{-1}J = zW(t,z)H_Q^T.$$

❑

J5032. **1.5.5 Lemma** (Lemmachen). *Sei $H \in L^1_{[a,b]}$ und $Q \in GL(2,\mathbb{C})$. Dann gilt*
$$\tau(\|W(H;t,.)\|) = \tau\left(\left\|W(H_Q, t, .)\right\|\right).$$
Beweis.
$$\left\|QW(H;t,z)Q^{-1}\right\| \le \|Q\| \left\|Q^{-1}\right\| \|W(H;t,z)\| = \|Q\| \left\|Q^{-1}\right\| \left\|Q^{-1}QW(H;t,z)Q^{-1}Q\right\| \le \|Q\|^2 \left\|Q^{-1}\right\|^2 \left\|QW(H;t,z)Q^{-1}\right\|$$
Also gilt mit $f(z) := \left\|QW(H;t,z)Q^{-1}\right\|$ und $g(z) := \|W(H;t,z)\|$ schon $g(z) \le cf(z)$. Damit ist $\tau(g) \le \tau(f)$. Die andere Richtung folgt analog. ❑

J504. **1.5.6 Korollar.** *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1.5.3 *gilt*
$$\tau(\|W(H;b,.)\|) \le \int_a^b \inf_{Q \in GL(2,\mathbb{C})} \left\|H_Q(s)\right\| \; ds.$$
Beweis. Es gilt
$$\frac{d}{dt}\tau(\|W(H;t,.)\|) = \frac{d}{dt}\tau\left(\left\|W(H_Q;t,.)\right\|\right) \le \left\|H_Q(t)\right\|$$
Nachdem die linke Seite von Q unabhängig ist, kann man zum Infimum übergehen und aufintegrieren. So kommt man zur Aussage. ❑

J505. **1.5.7 Lemma.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\operatorname{tr} A = 0$. Dann gilt*
$$\inf_{Q \in GL(2,\mathbb{C})} \left\|QAQ^{-1}\right\| = \sqrt{|\det A|} \qquad (1.5.2)$$ I.EQ:5.4

Beweis. Es gibt zwei EW λ_1, λ_2 von A mit $0 = \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$. Damit gibt es zwei Fälle

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Entweder $A = 0$ oder es gibt $B \in GL(2,\mathbb{C})$ mit $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für $r > 0$ ist $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ invertierbar und
$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} BAB^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to 0.$$
Damit sind in diesem Fall beide Seiten der Gleichung 0.

2. $\lambda_1 = a \neq 0$ und $\lambda_2 = -\lambda_1 = -a$: Damit gibt es ein $B \in GL(2,\mathbb{C})$, sodass $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Weiters gilt

$$\inf_{Q\in GL(2,\mathbb{C})} \left\|QAQ^{-1}\right\| \leq \left\|BAB^{-1}\right\| = |a| = \sqrt{|\det A|}.$$

Andererseits gilt

$$\left\|QAQ^{-1}\right\| \geq r_{QAQ^{-1}} = a.$$

Wobei $r_{QAQ^{-1}}$ der Spektralradius ist.

❑

J5051. **1.5.8 Korollar.** *Sei $H \in L^1_{[a,b]}$ mit $\operatorname{tr} JH = 0$. Dann ist*

$$\tau\left(\|W(H;b,.)\|\right) \leq \int_a^b \sqrt{|\det H(s)|}\, ds$$

Beweis. Es gilt

$$\tau\left(\|W(H;b,.)\|\right) \leq \int_a^b \inf_{Q\in GL(2,\mathbb{C})} \left\|H_Q(s)\right\|\, ds = \int_a^b \inf_{Q\in GL(2,\mathbb{C})} \left\|Q^{-T}(JH)Q^T\right\|\, ds = \int_a^b \sqrt{|\det H(s)|}\, ds.$$

❑

J5052. *1.5.9 Beispiel.* Betrachten wir den Hamiltonian

$$H(t) := \begin{cases} I, & t\in(0,1) \\ -I, & t\in(1,2). \end{cases}$$

Dann ist

$$W(t,z) = e^{-\alpha(t)zJ} \text{ mit } \alpha(t) = \begin{cases} t, & t\in(0,1) \\ 2-t, & t\in(1,2). \end{cases}$$

So ist W periodisch. ◊

J5053. **1.5.10 Satz.** *Sei $H \in L^1\left((a,b),\mathbb{R}^{2\times 2}\right)$ und $H(t)\geq 0$ fast überall. So gilt*

$$\tau\left(\|W(t,.)\|\right) = \int_a^t \sqrt{|\det H(s)|}\, ds.$$

Beweis. Weil H symmetrisch ist, gilt $h_1, h_2 \geq 0, h_3^2 \leq h_1h_2$ für $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$. Insbesondere gilt $\operatorname{tr} HJ = 0$. Also bekommen wir mittels Korollar 1.5.8 die Ungleichung "≤". Betrachte

$$\tilde H(t) := H(t) + Ji\sqrt{\det H(t)} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_3(t) - i\sqrt{\det H(t)} \\ h_3(t) + i\sqrt{\det H(t)} & h_2(t) \end{pmatrix}.$$

So gilt $\tilde H$ ist s.a. und $\tilde H(t) \geq 0$ und $\tilde H \in L^1\left((a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$.

Eine fundamentale Eigenschaft eines Hamiltonians ist

$$W(t,z)JW(t,w)^* - J = (z-\overline{w})\int_a^t W(s,z)H(s)^T W(s,w)^*\, ds.$$

Damit gilt für die Fundamentallösung $\tilde W$ von $\tilde H$ und $z = w = iy$ und $y > 0$

$$\frac{1}{i}\left(\tilde W(t,iy)J\tilde W(t,iy)^* - J\right) = 2y\int_a^t \tilde W(s,iy)\tilde H(s)^T \tilde W(s,iy)^*\, ds \geq 0.$$

Definiere $\Psi(t) := \int_a^t \sqrt{\det H(s)}\, ds$. So gilt

$$\left(\frac{d}{dt}e^{iz\Psi(t)}W(t,z)\right)J = iz\Psi'(t)e^{iz\Psi(t)}W(t,z)J + e^{iz\Psi(t)}\left(zW(t,z)H^T(t)\right)J = z\left(e^{iz\Psi(t)}W(t,z)\right)\left(i\Psi'(t) + H(t)\right)J.$$

Damit ist $\tilde{W}(t,z) = e^{iz\Psi(t)}W(t,z)$ die Fundamentallösung von $\tilde{H}$.

Angenommen $\tau(\|W(t,z)\|) < \Psi(t)$, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0, r_0 \geq 0 : \log^+ \|W(t,z)\| \leq |z| \left(\Psi(t) - \varepsilon\right), \forall\, |z| \geq r_0$$

Damit gilt

$$\left\|\tilde{W}(t,iy)\right\| = \left\|e^{iiy\Psi(t)}W(t,iy)\right\| \leq e^{-|y|\Psi(t)} \cdot e^{\log^+\|W(t,iy)\|} \leq e^{-|y|\Psi(t)}e^{|y|(\Psi(t)-\varepsilon)} = e^{-\varepsilon|y|}, \quad y \geq r_0,$$

womit $\lim_{y\to\infty} \tilde{W}(t,iy) = 0$ folgt. Damit folgt der Widerspruch $\frac{1}{i}(-J) \geq 0$. ❑

1.5.11 Bemerkung. Für ein absolut stetiges Ψ gilt

$$W(H + i\Psi' J; t, z) = e^{iz\Psi(t)}W(H;t,z).$$

Bis jetzt hatten wir

$$\tau(\|W(t,.)\|) \leq \int_a^t \inf_{Q\in GL(2,\mathbb{C})} \left\|QH(s)Q^{-1}\right\| \, ds$$

insbesondere für $\operatorname{tr} JH = 0$ gilt

$$\tau(\|W(t,.)\|) \leq \int_a^t \sqrt{|\det H(s)|}\, ds,$$

insbesondere gilt Gleichheit für $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch oder $H \geq 0$. ◊

Wir suchen eine ρ, sodass

$$\|W(t,z)\| \leq e^{c'\lambda(|z|)}, \lambda(r) = r^\rho \log^+(r), \quad \rho \in (0,1).$$

Diese Abschätzung ist besser für große Werte von z.

J506. *1.5.12 Bemerkung.* Lässt man in der Formel von Korollar 1.5.6 das Infimum außerhalb des Integrals, so wäre die Abschätzung trivial mit 1.5.1 und Lemma 1.5.4 und würde sogar punktweise (ohne den Limes der in der Definition von $\tau(.)$ steht) gelten.

Die Stärke von Satz 1.5.3, sprich die Differenzierbarkeit von $\tau(.)$, ermöglicht es, das Infimum ins Integral hineinzubekommen ◊

Möchte man das Wachstum von $\|W(b,z)\|$ mit einer anderen Funktion als $|z|$ vergleichen, sprich im " Nenner von $\tau(.)$" etwas anderes als $|z|$ haben, so ist die entsprechende Funktion "$t \mapsto \tilde{\tau}(\|W(b,.)\|)$" nicht einmal mehr notwendig stetig. Man kann aber oft die fehlende Differenzierbarkeit durch geeignetes Diskretisieren ersetzen.

J507. **1.5.13 Proposition.** *Sei $H \in L^1\left((a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$, sodass a und b jeweils L^1-Randpunkt sind. Sei folgendes gegeben*

- *$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = b$ eine Partition von $[a,b]$ und*
- *$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N \in GL(2,\mathbb{C})$.*

Setzte

$$A_1 := \sum_{j=1}^{N} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left\|\Omega_j J H(s)\Omega_j^{-1}\right\| \, ds$$

$$A_2 := \sum_{j=1}^{N-1} \log \left\|\Omega_j \Omega_{j+1}^{-1}\right\|$$

$$A_3 := \log \left\|\Omega_1^{-1}\right\| + \log \|\Omega_N\|.$$

Dann gilt

$$\log \|W(b,z)\| \leq |z|\, A_1 + A_2 + A_3, \quad z \in \mathbb{C}$$

Beweis. Sei W_j die Lösung von H eingeschränkt auf $y_{j-1}.y_j$. Dann gilt mit der Mutliplikativität Proposition 1.3.1 (ii)

$$W(b,z) = W_1(z) \cdot W_2(z) \cdot \ldots \cdot W_N(z)$$

Nun schieben wir $\Omega_i^{-1}\Omega_i$ ein

$$\begin{aligned} \|W(b,z)\| &= \left\|\Omega_1^{-1}\Omega_1 W_1(z)\Omega_1^{-1}\Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_2 W_2(z)\Omega_2^{-1}\Omega_2 \cdots \Omega_N^{-1}\Omega_N W_N(z)\Omega_N^{-1}\Omega_N\right\| \\ &\le \left(\left\|\Omega_1^{-1}\right\| \|\Omega_N\|\right)\left(\prod_{j=1}^{N-1} \left\|\Omega_j\Omega_{j+1}^{-1}\right\|\right)\underbrace{\left(\prod_{j=1}^{N} \left\|\Omega_j W_j(z)\Omega_j^{-1}\right\|\right)}_{\le e^{|z|\int_{y_{j-1}}^{y_j}\left\|\Omega_j JH(s)\Omega_j^{-1}\right\|\,ds}}. \end{aligned}$$

❑

Der Trick um Beispiel 1 gewinnbringend anzuwenden ist, dass man für $R > 0$ von R abhängige Partitionen und Matrizen Ω_i wählt.

J508. **1.5.14 Lemma.** *Es gilt mit $\alpha, \beta > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$. Setze*

$$\Omega(\alpha,\beta,\phi) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} e^{-\phi J}.$$

Dann ist

1.
$$\left\|\Omega(\alpha,\beta,\phi)J\xi_\psi\xi_\psi^T\Omega\,(\alpha,\beta,\phi)^{-1}\right\| = \frac{\beta}{\alpha}\cos^2(\psi-\phi) + \frac{\alpha}{\beta}\sin^2(\psi-\phi)$$

2.
$$\left\|\Omega(\alpha,\beta,\phi)\Omega(\alpha',\beta',\phi')^{-1}\right\| \le \max\left\{\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}\right\}\left|\cos(\phi-\phi')\right| + \max\left\{\frac{\beta}{\alpha'}, \frac{\alpha}{\beta'}\right\}\left|\sin(\phi-\phi')\right|,$$

3.
$$\|\Omega(\alpha,\beta,\phi)\| = \max\{\alpha,\beta\}, \quad \left\|\Omega(\alpha,\beta,,\phi)^{-1}\right\| = \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\}.$$

Beweis. Wir bemerken, dass

$$e^{-\phi J} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

und schrieben $D(a,b) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

3. Die Matrix $e^{-\phi J}$ ist unitär und daher gilt

$$\|\Omega(\alpha,\beta,\phi)\| = \left\|\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} e^{i\phi J}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right\| = \max\{\alpha,\beta\}.$$

1. Es gilt

$$\begin{aligned} B := \Omega(\alpha,\beta,\phi)J\xi_\psi\xi_\psi^T\Omega\,(\alpha,\beta,\phi)^{-1} &= D(\alpha,\beta)e^{-\phi J}J \underbrace{\xi_\psi\xi_\psi^*}_{=e^{\psi J}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}e^{-\psi J}} e^{\phi J} D\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) \\ &= D(\alpha,\beta)J\underbrace{e^{(\psi-\phi)J}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}e^{-(\psi-\phi)J}}_{=\xi_{\psi-\phi}\xi_{\psi-\phi}^*} D\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Für eine bessere Übersicht wird das Argument $(\psi - \phi)$ der Sinuse und Cosinuse nicht angeschrieben. Von jedem Leser dieser Mitschrift wird vorausgesetzt, die Fähigkeit, dies zu ergänzen, zu besitzen. Ausmultiplizieren ergibt

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\sin & -\frac{\alpha}{\beta}\sin^2 \\ \frac{\beta}{\alpha}\cos^2 & \cos\sin \end{pmatrix}.$$

$$B^*B = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos^4 + \cos^2\sin^2 & * \\ * & \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^4 + \cos^2\sin^2 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\operatorname{tr}(B^*B) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\cos^2 + \frac{\alpha}{\beta}\sin^2\right)^2$. Dies genügt um die Norm von B zu berechnen, denn

$$r(B^*B) = \|B^*B\| = \left\|B^2\right\|$$

Da $\det B = 0$, ist einer der beiden Eigenwerte von B^*B gleich Null und der andere gleich $\operatorname{tr} B^*B$. Wir erhalten somit

$$\|B\| = \sqrt{\operatorname{tr}(B^*B)} = \frac{\beta}{\alpha}\cos^2(\psi - \phi) + \frac{\alpha}{\beta}\sin^2(\psi - \phi)$$

2. Es ist

$$\Omega(\alpha,\beta,\phi)\Omega(\alpha',\beta',\phi')^{-1} = D(\alpha,\beta)e^{-\phi J}e^{\phi' J}D\left(\frac{1}{\alpha'},\frac{1}{\beta'}\right) = \cos(\phi' - \phi)\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha'} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\beta'} \end{pmatrix} + \sin(\phi' - \phi)\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta'} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha'} \end{pmatrix} J$$

Damit

$$\left\|\Omega(\alpha,\beta,\phi)\Omega(\alpha',\beta',\phi')^{-1}\right\| \le \max\left\{\frac{\alpha}{\alpha'},\frac{\beta}{\beta'}\right\}\left|\cos(\phi - \phi')\right| + \max\left\{\frac{\beta}{\alpha'},\frac{\alpha}{\beta'}\right\}\left|\sin(\phi - \phi')\right|.$$

❑

Das folgende Beispiel ist aufwendig, aber verdeutlicht unsere bisherige Macht.

J509. *1.5.15 Beispiel.* Sei $\alpha \in (0,1]$ und $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ Hölder-stetig mit Exponenten α und betrachte $H(t) = \xi_{\phi(t)}\xi_{\phi(t)}^T$. Dann gibt es eine Konstante $c < 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge 1$ mit

$$\log^+ \|W(H;t,z)\| \le c\,|z|^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Kleiner Einwurf: Wenn H beschränkte Variation, dann $\log\|W\| \le c\,|z|^{\frac{1}{2}}$.
Um die Aussage zu zeigen, wähle für $N \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Partition

$$y_j = a + \frac{b-a}{N}j, \quad j = 0,\dots,N, \qquad \Omega_j := \Omega\left(\delta^{-1},\delta,\phi(y_j)\right), \quad j = 1,\dots,N$$

und $\delta \in (0,1]$, wobei $\Omega(\alpha,\beta,\phi) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} e^{-\phi J}$.

1. Es gilt

$$\left\|\Omega_j J\xi_{\phi(s)}\xi_{\phi(s)}^*\Omega_j^{-1}\right\| = \delta^2\cos^2(\phi(s) - \phi(y_j)) + \frac{1}{\delta^2}\sin^2(\phi(s) - \phi(y_j)) \le \delta^2 + c^2\frac{1}{\delta^2}\left|s - y_j\right|^{2\alpha}$$

und

$$\left\|\Omega_j\Omega_{j+1}^{-1}\right\| \le \left|\cos(\phi(y_j) - \phi(y_{j+1})\right| + \frac{1}{\delta^2}\left|\sin(\phi(y_j) - \phi(y_{j+1})\right| \le 1 + c\frac{1}{\delta^2}\left|y_j - y_{j+1}\right|^\alpha = 1 + \frac{2}{\delta^2 N^\alpha}(b-a)^\alpha$$

und

$$\left\|\Omega_j\right\| = \left\|\Omega_{j+1}^{-1}\right\| = \frac{1}{\delta}.$$

Damit ergibt sich

$$A_1 = \sum_{j=1}^N \int_{y_j - 1}^{y_j} \left\|\Omega_j J\xi_{\phi(s)}\xi_{\phi(s)}^*\Omega_j^{-1}\right\| \, ds \le \sum_{j=1}^N \int_{y_j - 1}^{y_j} \left(\delta^2 + c^2\frac{1}{\delta^2}\left|s - y_j\right|^{2\alpha}\right) ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\delta^2 + \frac{c^2}{\delta^2} \frac{(b-a)^{2\alpha}}{N^{2\alpha}} \right) ds = \left(\left(\delta^2 + \frac{c^2}{\delta^2} \frac{(b-a)^{2\alpha}}{N^{2\alpha}} \right) \right) (b-a) \leq c'' \max \left\{ \delta^2, \frac{1}{\delta^2 N^{2\alpha}} \right\}$$

und

$$A_2 = \sum_{j=1}^{N-1} \log \left\| \Omega_j \Omega_{j+1}^{-1} \right\| \leq N \log \left(1 + \frac{c(b-a)^\alpha}{\delta^2 N^\alpha} \right) \leq c(b-a)^\alpha \frac{N^{1-\alpha}}{\delta^2}.$$

und

$$A_3 = \log \left\| \Omega_1^{-1} \right\| + \log \| \Omega_N \| = \log \frac{1}{\delta^2}.$$

Beachte, dass

$$\log \frac{1}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2} \leq \frac{N^{1-\alpha}}{\delta^2}.$$

J507. liefert uns nun die Abschätzung

$$\log \| W(H; b, z) \| \leq A_1 |z| + A_2 + A_3 \leq c''' \max \left\{ \delta^2 |z|, \frac{|z|}{\delta^2 N^{2\alpha}}, \frac{N^{1-\alpha}}{\delta^2} \right\}$$

für alle $\delta \in (0, 1], N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$.

2. Daher versuchen wir δ, N in Anhänglichkeit von $r := |z|$ so zu wählen, dass das Maximum mit einer -so gut wie möglichen- Potenz klein wird, wenn $|z| \to \infty$. Wir machen daher den Ansatz $\delta(r) := r^{-\frac{\gamma_1}{2}}, N(r) := r^{\gamma_2}$, wobei $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Betrachte die Funktion

$$F(r) := \max \left\{ r\delta(r)^2, \frac{r}{\delta(r)^2 N(r)^{2\alpha}}, \frac{N(r)^{1-\alpha}}{\delta(r)^2} \right\} = r^{\max\{1-\gamma_1, 1+\gamma_1-2\alpha\gamma_2, (1-\alpha)\gamma_2+\gamma_1\}}.$$

Für festes γ_1 ist der zweite Term in γ_2 fallend und der dritte Term in γ_2 wachsend. Das Maximum dieser beiden wird also angenommen, wenn γ_2 so gewählt wird, dass die beiden Terme gleich sind. Betrachte

$$1 + \gamma_1 - 2\alpha\gamma_2 = (1-\alpha)\gamma_2 + \gamma_1$$

Damit ergibt sich $\gamma_2 = \frac{1}{1+\alpha}$. Für dieses γ_2 steht auf beiden Seiten der Gleichung $1 + \gamma_1 - 2\alpha \frac{1}{1+\alpha}$. Nun sieht man, dass das Gesamtmaximum minimal wird, wenn

$$1 - \gamma_1 = 1 + \gamma_1 - 2\alpha \frac{1}{1+\alpha}.$$

Aus dieser Gleichung folgt $\gamma_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Für diese γ_1, γ_2 gilt

$$F(r) = r^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

3. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Wähle r die kleinste Zahl, sodass $|z| \leq r$ und $r^{\frac{1}{1+\alpha}} \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\log \| W(z) \| \leq c''' F(r) = c''' r^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Wegen $\left(r^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \right)^{1+\alpha} < |z|$ haben wir $r^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq |z|^{\frac{1}{1+\alpha}} + 1$ und damit

$$\log \| W(z) \| \leq c''' \left(|z|^{\frac{1}{1+\alpha}} + 1 \right) \leq c'''' \, |z|^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

◊

Kapitel 2

Nevanlinna-Funktionen und Möbiustransformation

2.1 Nevanlinna-Funktionen

A101. **2.1.1 Definition.** Eine Funktion q ist eine *Nevanlinna-Funktion*, wenn q meromorph in $\mathbb{C}^+$ und $q(\mathbb{C}^+) \subseteq \overline{\mathbb{C}^+}$. Dies ist äquivalent zu $q \in Hol(\mathbb{C}^+)$ und $q(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathbb{C}^+$ oder q konstant $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Die Menge aller Nevanlinna-Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_0$. Die Menge aller $f \in \mathcal{N}_0$ mit $f \not\equiv c \in \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_0^x$. ◊

Hier verstehen wir $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\overline{\mathbb{C}^+}$ als den Abschluss von $\mathbb{C}^+$ in der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$. Explizit ist also $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Nimmt eine Funktion $q \in \mathcal{N}_0$ einen Wert aus $\overline{\mathbb{R}}$ an, so muss sie wegen dem Satz von der Gebietstreue schon konstant sein. Insbesondere ist q entweder analytisch in ganz $\mathbb{C}^+$ oder konstant ∞.

A102. *2.1.2 Bemerkung.* Nevanlinna-Funktionen haben folgende Eigenschaften.

- $q \in \mathcal{N}_0, \psi \in \mathcal{N}_0$ nicht konstant und $\varphi \in \mathcal{N}_0$. Dann ist $\varphi \circ q \circ \psi \in \mathcal{N}_0$.
- Sei $M \in SL(2,\mathbb{R})$ und $\varphi(z) := \frac{m_{11}z+m_{12}}{m_{21}z+m_{22}}$. Dann ist $\varphi \circ q \in \mathcal{N}_0$ genau dann, wenn $q \in \mathcal{N}_0$.
- $q \in \mathcal{N}_0$ genau dann, wenn $-\frac{1}{q} \in \mathcal{N}_0$

◊

Im nächsten Satz zeigen wir die Herglotz Integraldarstellung von Funktionen der Klasse $\mathcal{N}_0$.

A1021. **2.1.3 Definition.** Ein positives Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ heißt *Poisson-integrierbar*, falls $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$. ◊

A103. **2.1.4 Satz.** *Sei $q \in Hol(\mathbb{C}^+)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\operatorname{Im} q(z) \geq 0, z \in \mathbb{C}^+$, *sprich* $q \in \mathcal{N}_0$

(ii) Der Kern

$$K_q(w,z) := \frac{q(z) - \overline{q(w)}}{z - \overline{w}}, z, w \in \mathbb{C}^+$$

ist positiv semidefinit.

(iii) Es gilt $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$ und ein positives Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{1+t^2} < \infty$, sodass

$$q(z) = a + bz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Wir bezeichnen das Tripple (a, b, μ) als eine Integraldarstellung von q.

Beweis. Die Äquivalenz von (*ii*) und (*i*) folgt aus

$$K_q(z,z) = \frac{\operatorname{Im} q(z)}{\operatorname{Im} z}$$

und weil die quadratische Form $\xi \mapsto K_q(z,z)\xi\overline{\xi}$ genau dann positiv semidefinit ist, wenn $K_q(z,z) \geq 0$.

Wir zeigen zuerst $(iii) \implies (ii)$:

Für $q(z) = a \in \mathbb{R}$ gilt $K_q(w,z) = 0 \geq 0$ und für $q(z) = bz$ mit $b \geq 0$ gilt $K_q(w,z) = b \geq 0$.

Sei nun μ ein Poisson-integrierbares positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und sei

$$q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu(t).$$

Wegen

$$\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\overline{w}} = \frac{z-\overline{w}}{(x-z)(x-\overline{w})}$$

gilt

$$K_q(w,z) = \frac{1}{z-\overline{w}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t-\overline{w}} \right) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-z)(t-\overline{w})}\, d\mu(t).$$

Damit gilt für beliebiges $\xi \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{N} K_q(z_j, z_i)\xi_i\xi_j^* = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-z_i)(t-\overline{z}_j)} \xi_i\xi_j^*\, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{1}{t-z_i}\xi_i \right|^2 d\mu(t) \geq 0.$$

Also ist der Kern positiv semidefinit.

Für $(i) \implies (iii)$ gehen wir in 3 Schritten vor:

1. Wir zeigen eine Integraldarstellung für Funktionen die auf einer, die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ umfassenden, Gebiet analytisch sind.
2. Die obige Integraldarstellung lässt sich mit einem Limes-Argument auf Funktionen in $Hol(\mathbb{D})$ mit nicht-negativem Realteil übertragen.
3. Mittels einer Möbiustransformation in Definitions- und Bildbereich folgt die Herglotz-Integraldarstellung.

Kommen wir zur Ausführung.

1. Sei $G \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ ein Gebiet und $f \in Hol(G)$. Dann gilt mit der Poisson-Jensen-Formel

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\varphi}) \left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \right) d\varphi.$$

Betrachte $\psi : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}, y \mapsto e^{iy}$ und sei μ das Bildmaß von $\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} f(e^{i\varphi})\, d\varphi$ unter ψ. So gilt

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

2. Sei nun $f \in Hol(\mathbb{D})$ mit $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ für $z \in \mathbb{D}$. Für $0 < r < 1$ setze $F_r(z) := f(rz)$, so ist $F_r \in Hol\left(\frac{1}{r}\mathbb{D}\right)$ also ist

$$F_r(z) = i \operatorname{Im} F_r(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu_r(\zeta),$$

wobei μ_r das Bildmaß von $\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re} F_r(e^{i\varphi})\, d\varphi$ ist.

Nun ist μ_r ein positives Maß und daher

$$\|\mu_r\| = \int_{\mathbb{T}} d\mu_r = \operatorname{Re} F_r(0) = \operatorname{Re} f(0), \quad r \in (0,1).$$

Also liegen alle Maße μ_r in der Kugel um Null mit dem Radius $\operatorname{Re} f(0)$ in $\mathbb{M}(\mathbb{T})$. Nach Banach-Alaoglu finden wir ein Netz $(r_i)_{i\in I}$ mit $\lim_{i\in I} r_i = 1$, sodass der Limes $\mu := \lim_{i\in I} \mu_{r_i}$ in der ω^*-Topologie existiert.

Für jedes feste $z \in \mathbb{D}$ ist die Funktion $\zeta \mapsto \frac{\zeta+z}{\zeta-z}$ in $C(\mathbb{T})$ und wir erhalten

$$f(z) = \lim_{i\in I} f(r_i z) = \lim_{i\in I} F_{r_i}(z) = \lim_{i\in I} \left(i \operatorname{Im} F_{r_i}(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu_{r_i}(\zeta) \right) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta).$$

3. Sei β die Möbiustransformation $\beta(z) := \frac{z-i}{z+i}$ mit $\beta(\mathbb{C}^+) = \mathbb{D}, \beta(\mathbb{R}) = \mathbb{T} \setminus \{1\}, \beta(i) = 0$ und $\beta(\infty) = 1$. Für $q \in Hol(\mathbb{C}^+)$ betrachte $f(z) := (-i)(q \circ \beta^{-1})(z)$. Damit ist $f \in Hol(\mathbb{D})$ und $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} q(\beta^{-1}(z))$. Also $q \in \mathcal{N}_0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} f \geq 0$.

   Sei $q \in \mathcal{N}_0$ und ν das Bildmaß von μ unter β^{-1}. Sei weiters $w = \beta^{-1}(z)$, so gilt

$$\frac{1+\beta(w)}{1-\beta(w)} = \frac{1}{i}w, \quad \operatorname{Im} f(0) = -\operatorname{Re} q(i).$$

   Eine Nebenrechnung ergibt

$$\frac{\beta(x)+\beta(z)}{\beta(x)-\beta(z)} = \frac{\frac{x-i}{x+i} + \frac{z-i}{z+i}}{\frac{x-i}{x+i} - \frac{z-i}{z+i}} = \frac{(x-i)(z+i)+(z-i)(x+i)}{(x-i)(z+i)-(z-i)(x+i)} = \frac{2(xz+1)}{2i(x-z)} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2}\right)(1+x^2).$$

   Damit folgt

$$(-i)q(w) = f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1+z}{1-z}\mu(\{1\}) + \int_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)$$
$$= i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1+z}{1-z}\mu(\{1\}) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta(x)+\beta(w)}{\beta(x)-\beta(w)}\, d\nu(x)$$
$$= -i\operatorname{Re} q(i) + \frac{1}{i}w\mu(\{1\}) + \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-w} - \frac{x}{1+x^2}\right)(1+x^2)\, d\nu(x)$$

   Multiplizieren mit i liefert

$$q(w) = \underbrace{\operatorname{Re} q(i)}_{=:a} + w\underbrace{\mu(\{1\})}_{=:b} + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-w} - \frac{x}{1+x^2}\right)\underbrace{(1+x^2)\, d\nu(x)}_{=:\mu}.$$

❑

Mit der Herglotz-Integraldarstellung erhalten wir eine Abschätzung für das Wachstum einer Nevanlinna-Funktion.

A104. **2.1.5 Korollar.** *Sei $q \in \mathcal{N}_0 \setminus \{\infty\}$ mit der Integarldarstellung (a, b, μ). Dann gilt*

$$|q(z)| \leq |a| + b\,|z| + \left(|z| + \frac{1+|z|^2}{\operatorname{Im} z}\right)\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Insbesondere gibt es für alle $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ein $c > 0$ sodass

$$|q(z)| \leq c\,|z|, \quad z \in \Gamma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : \theta \leq \arg z \leq \pi - \theta\}.$$

Beweis. Mit der Integraldarstellung ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\mu(t) = \int \left(\frac{1+tz}{t-z}\right)\frac{d\mu(t)}{1+t^2} = z\int \frac{d\mu(t)}{1+t^2} + (1+z^2)\int \frac{1}{t-z}\frac{d\mu(t)}{1+t^2}.$$

Damit folgt die erste Abschätzung.

Für $z \in \Gamma_\theta$ gilt $\operatorname{Im} z \geq \sin\theta\,|z|$. Damit gilt

$$|q(z)| \leq |a| + b\,|z| + |z|\int \frac{d\mu}{1+t^2} + \frac{1}{\sin\theta\,|z|}\int \frac{d\mu}{1+t^2} + \frac{|z|}{\sin\theta}\int \frac{d\mu}{1+t^2} \leq c\,|z|.$$

❑

Ein Paar andere Formen wie man Korollar 2.1.5 oft verwendet, sind die Folgenden, welche auch Abschätzungen nach unten enthalten.

A105. **2.1.6 Korollar.** *Sei Sei $q \in \mathcal{N}_0 \setminus \{\infty, 0\}$. Dann gilt*

1. *Es gibt ein $c > 0$ mit*
$$\left|\log|q(z)|\right| \le c \max\left\{1, \log^+|z|, \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z}\right\}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

2. *Für $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ gibt es $c_1, c_2 > 0$, sodass*
$$c_1\frac{1}{|z|} \le |q(z)| \le c_2|z|, \quad z \in \Gamma_\theta,$$

3. *Für alle $x \in \mathbb{R}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ gibt es $c_1, c_2 > 0$, sodass*
$$c_1|z - x| \le |q(z)| \le \frac{c_2}{|z - x|},$$
für $z \in \{w \in \mathbb{C}^+ : \theta \le \arg(w - x) \le \pi - \theta, |z| \le 1 + |x|\}$.

Beweis. 1. Für $z \in \mathbb{C}^+$ gibt es ein $c' > 0$, sodass gilt
$$|q(z)| \le c' \max\left\{1, |z|, \frac{1}{\operatorname{Im} z}, \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}\right\}.$$
Damit gibt es ein $c > 0$, sodass
$$\log|q(z)| \le c' + \max\left\{1, \log^+|z|, \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z}\right\} \le c \max\left\{1, \log^+|z|, \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z}\right\}$$
Verwendet man diese Abschätzung für $-\frac{1}{q} \in \mathcal{N}_0$, so erhält man
$$-\log|q|(z) = \log\left|-\frac{1}{q(z)}\right| \le c'' \max\left\{1, \log^+|z|, \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z}\right\}$$

2. Nach Korollar 2.1.5 ist $|q(z)| \le c|z|$ für $z \in \Gamma_\theta$ und $|z| \ge 1$. Verwendet man dies wieder für $-\frac{1}{q}$, so folgt
$$\left|-\frac{1}{q(z)}\right| \le c|z| \quad \text{und damit} \quad \frac{c'}{|z|} \le |q(z)|.$$

3. Verwendet man (ii) mit der Funktion $q\left(\frac{-1}{z}\right)$, so folgt die behauptete Abschätzung für $x = 0$, denn
$$c_1|z| = \frac{c_1}{\left|-\frac{1}{z}\right|} \le \left|q\left(\frac{-1}{z}\right)\right| \le c_2\left|\frac{-1}{z}\right| = \frac{c_2}{|z|}.$$
Genauso folgt sie für ein beliebiges x, wenn man den selben Trick mit $q\left(x + \frac{-1}{z}\right) \in \mathcal{N}_0$ macht.

❑

2.1.7 Bemerkung. Für $f \in Hol(\mathbb{C})$ gilt $f(z) = f^\#(z) := \overline{f(\overline{z})}$ genau dann, wenn $\forall z \in \mathbb{C} : f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ bzw. genau dann, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}$. ◊

Eine weitere wichtige Folgerung ist, dass zwei ganze reelle Funktionen das gleiche Wachstum haben, wenn ihr Quotient Nevanlinna ist.

A106. **2.1.8 Korollar.** *Seien $f, g \in Hol(\mathbb{C})$, $f(z) = f^\#(z)$, $g = g^\#$, f, g haben keine Nullstellen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\frac{f}{g}\Big|_{C^+} \in \mathcal{N}_0$. Dann gibt es $c_1, c_2 > 0$ mit*
$$\log^+|f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|g(z + ze^{i\theta})\right| \, d\mu(\theta) + c_1\log^+|z| + c_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Betrachte $z \in \mathbb{C}^+$ mit $\operatorname{Im} z > 1$. Dann ist $f, g \neq 0$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} | |z - w| \leq 1\}$. Damit gilt

$$\log|f(z)| \leq \log\left|g(z)\frac{f(z)}{g(z)}\right| = \log|g(z)| + \log\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \log|g(z)| + c\max\{1, \log^+|z|\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|g(z + ze^{i\theta})\right| \, d\mu(\theta) + c\max\{1, \log^+|z|\}.$$

Die letzte Gleichung ist die Mittelwerteigenschaft angewendet auf den Realteil eines analytischen Logarithmuses von g in der gesamten Kreisscheibe.

Sei nun $z \in \mathbb{C}^+$ mit $0 < \operatorname{Im} z \leq 1$ und f, g hat keine Nullstellen auf $\{\zeta | |\zeta - z| = 1\}$. So gilt

$$\log\left|f(z + e^{i\theta})\right| = \log\left|g(z + e^{i\theta})\right| + \log\left|\frac{f(z + e^{i\theta})}{g(z + e^{i\theta})}\right|$$
$$\leq \log\left|g(z + e^{i\theta})\right| + c\max\left\{1, \log^+\left|z + e^{i\theta}\right|, \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z + e^{i\theta}}\right\}.$$

Mit Jensson folgt also

$$\log|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(z + e^{i\theta})\right| \, d\theta$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|g(z + e^{i\theta})\right| \, d\theta + c\max\left\{1, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|z + e^{i\theta}\right| \, d\theta, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\frac{1}{\operatorname{Im} z + e^{i\theta}} \, d\theta\right\}$$

Nun ist

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^+}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{\operatorname{Im} z + e^{i\theta}}\right| \, d\theta < \infty.$$

Dies gilt wegen $\operatorname{Im}(z + e^{i\theta}) = \operatorname{Im} z + \sin\theta$. Weiters ist

$$\int_0^{2\pi} \log^+\left|z + e^{i\theta}\right| \, d\theta \leq C'' \max\{1, \log^+|z|\}.$$

Damit ist

$$\log|f(z)| = \log|g(z)| + \log\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|g(z + e^{i\theta})\right| \, d\theta + c\max\{1, \log^+|z|\}$$

❑

Wir fahren fort mit einer allgemeinen Bemerkung.

2.1.9 Bemerkung.
1. Eine weitere Integraldarstellung eine Nevanlinna-Funktion q ist

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + tz}{t - z} \, d\nu, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0, \int d\nu < \infty$$

   mit dem endlichen positiven Maß $d\nu(t) := \frac{d\mu(t)}{1+t^2}$.

2. Damit folgt

$$\operatorname{Im} q(x + iy) = by + \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} \, d\mu(t).$$

◊

A108. **2.1.10 Korollar.** *Sei $q \in \mathcal{N}_0 \setminus \{\infty\}$ mit Integraldarstellung (a, b, μ). Dann ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion*

$$\varphi_x : \begin{cases} (0, \infty) & \to & [0, \infty) \\ y & \mapsto & y \operatorname{Im} q(x + iy) \end{cases}$$

nicht fallend. Falls $b = 0$ gilt, dann ist

$$\lim_{y\to\infty} y \operatorname{Im} q(iy) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t).$$

Beweis. Wir sehen

$$y \operatorname{Im} q(x+iy) = by^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{(t-x)^2+y^2}\, d\mu(t) = by^2 + \int_{\mathbb{R}} 1 - \frac{(t-x)^2}{(t-x)^2+y^2}\, d\mu(t)$$

ist monoton wachsend.

Für festes x ist

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{(t-x)^2+y^2} = 1$$

Damit folgt die Aussage mit der monotonen Konvergenz. ❑

A109. **2.1.11 Korollar.** *Für $c > 0$ ist $\mathcal{F}_c := \{q \in \mathcal{N}_0 : |q(i)| \leq c\} \subseteq Hol(\mathbb{C}^+)$ kompakt.*

Beweis. Sei $q \in \mathcal{F}_c$. Dann gilt $a = \operatorname{Re} q(i) \leq c$ und aus

$$\operatorname{Im} q(i) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+t^2}$$

folgt auch

$$b \leq c \text{ und } \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+t^2} \leq c.$$

Nach Korollar 2.1.5 ist damit $\mathcal{F}_c$ lokal gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{C}^+$. Mit dem Satz von Montel ist $\mathcal{F}_c$ relativ kompakt. Klarerweise ist $\mathcal{N}_0$ und auch $\mathcal{F}_c$ unter Grenzwerten abgeschlossen und damit kompakt. ❑

Wir wollen bemerken, dass ein weniger elementarer Beweis so funktioniert: nach dem Fundamental Normality Test ist $\mathcal{N}_0$ in $Mer(\mathbb{C}^+)$ relativ kompakt. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{N}_0$ ist wieder klar.

2.1.1 Eindeutigkeit der Integraldarstellung

Als nächstes zeigen wir, dass die Integraldarstellung (a, b, μ) einer Nevanlinna-Funktion q eindeutig ist.

A110. **2.1.12 Lemma.** *Sei σ positives endliches Maß. Dann gilt*

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+iyt}{t-iy}\, d\sigma(t) = 0.$$

Insbesondere gilt für $q \in \mathcal{N}_0$ mit der Integraldarstellung (a, b, μ)

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \operatorname{Im} q(iy) = b.$$

Beweis. Für $y \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{1}{y}\frac{1+iyt}{1-iy}\right|^2 = \frac{1+y^2t^2}{y^2(t^2+y^2)} \leq 1.$$

Damit gibt es eine punktweise Majorante. Mit dem Satz der beschränkten Konvergenz und

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\frac{1+iyt}{t-iy} = 0$$

folgt also die Aussage. ❑

Die Rekonstruktion von μ funktioniert mit der Stieltgeschen Umkehrformel.

A111. **2.1.13 Satz.** *Sei μ ein positives, Poisson-integrierbar, d.h., $\int \frac{d\mu}{1+t^2} < \infty$ und*

$$V(x+iy) := \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \mu(t), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

Dann gibt für $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ stets

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} V(x+iy)\, dx = \mu((\alpha,\beta)) + \frac{1}{2}\mu(\{\alpha\}) + \frac{1}{2}\mu(\{\beta\})$$

Beweis. Setze
$$\chi(t) := \begin{cases} 1, & t \in (\alpha,\beta) \\ \frac{1}{2}, & t \in \{\alpha,\beta\} \\ 0, & sonst \end{cases}$$
Da der Integrand in der Definition von V nicht-negativ ist, können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten so
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta V(x+iy)\,dx - \mu((\alpha,\beta)) - \frac{1}{2}\mu(\{\alpha\}) - \frac{1}{2}\mu(\{\beta\}) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\mu(t)\,dx - \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_\alpha^\beta \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,dx}_{=\arctan\frac{\beta-t}{y}-\arctan\frac{\alpha-t}{y}}\,d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\,d\mu(t) \end{aligned}$$
Es gilt
$$\lim_{y\to 0}\left(\arctan\frac{\beta-t}{y} - \arctan\frac{\alpha-t}{y}\right) = \begin{cases} 0, & t<\alpha \\ \frac{\pi}{2}, & t=\alpha \\ \pi, & \alpha<t<\beta \\ \frac{\pi}{2}, & t=\beta \\ 0, & \beta<t \end{cases} = \pi\chi(t).$$
Damit strebt der Integrand punktweise gegen 0.

Wir zeigen weiters
$$\sup_{(t,y)\in\mathbb{R}\times(0,1]}\left[\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{\beta-t}{y} - \arctan\frac{\alpha-t}{y}\right) - \chi(t)\right](1+t^2) < \infty$$
Es gilt
$$\sup_{(t,y)\in[-T,T]\times(0,1]}\left[\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{\beta-t}{y} - \arctan\frac{\alpha-t}{y}\right) - \chi(t)\right](1+t^2) < 2(1+T^2).$$
Betrachte $(t,y) \in (-\infty,\alpha-1)\times(0,1]$. Mit dem Mittelwertsatz folgt
$$\arctan\frac{\beta-t}{y} - \arctan\frac{\alpha-t}{y} = \frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{\beta-t}{y} - \frac{\alpha-t}{y}\right), \quad \xi \in \left(\frac{\alpha-t}{y}, \frac{\beta-t}{y}\right).$$
Damit folgt für $t \le \alpha-1$ $\chi(t)=0$ und somit
$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{\beta-t}{y} - \arctan\frac{\alpha-t}{y}\right)(1+t^2) \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}\frac{\beta-\alpha}{y}(1+t^2) \le \frac{1}{\pi}\frac{1+t^2}{1+\left(\frac{\alpha-t}{y}\right)^2}\frac{\beta-\alpha}{y} \\ &= \frac{\beta-\alpha}{\pi}y\frac{1+t^2}{y+(\alpha-t)^2} \le \frac{\beta-\alpha}{\pi}\underbrace{\frac{1+t^2}{(\alpha-t)^2}}_{\text{beschrankt auf }(-\infty,\alpha-1]}. \end{aligned}$$
Eine analoge Abschätzung erhalten wir für $t \ge \beta+1$. Nun liefert der Satz von der beschränkten Konvergenz die Behauptung.

❑

A112. **2.1.14 Korollar.** *Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \ge 0$ und μ ein positives Poisson-integrierbares Borel-Maß und*
$$q(z) = a + bz + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right)d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$
Dann gilt für alle $-\infty < \alpha < \beta < \infty$
$$\mu((\alpha,\beta)) + \frac{\mu(\{\alpha\})+\mu(\{\beta\})}{2} = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0}\int_\alpha^\beta \operatorname{Im} q(x+iy)\,dx.$$

Beweis. Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(q(z) - bz)$ ist gleich dem Poisson Integral von μ. Nun gilt

$$\lim_{y\to 0} \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(-b(x+iy))\,dx = \lim_{y\to 0} \int_\alpha^\beta -by\,dx = 0.$$

❑

A113. **2.1.15 Korollar.** *1. Die Integraldarstellung (a, b, μ) vom $q \in \mathcal{N}_0$ ist eindeutig.*

2. $q \in \mathcal{N}_0$ hat eines Fortsetzung zu $Q \in Mer(\mathbb{C})$ mit $Q = Q^{\#}$ genau dann, wenn μ diskret ist.

3. $q \in \mathcal{N}_0$ hat eine Fortsetzung zu $Q \in Hol(\mathbb{C})$ und $Q = Q^{\#}$ genau dann, wenn $q(z) = a + bz$ mit $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$.

Beweis. 1. Ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.1.12 und Korollar 2.1.14.

2. Wenn es eine Fortsetzung Q gibt, dann sind die Polstellen diskret. Betrachte ein Intervall $[\alpha, \beta]$, so dass keine Polstelle von Q drin liegt. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\, Q(x+iy)\,dx \to 0$$

lokal gleichmäßig. Damit ist $\mu([\alpha, \beta]) = 0$. Also

$$\operatorname{supp} \mu \subseteq \{\text{Polstellen von } Q\}.$$

Damit ist μ diskret.

Ist umgekehrt μ diskret, so ist die Funktion q analytisch in $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu$. Ist $x \in \operatorname{supp} \mu$, so ist für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}\setminus[x-\varepsilon, x+\varepsilon]} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\mu(t) + \frac{\mu(\{x\})}{x-z} - \frac{x\mu(\{x\})}{1+x^2}.$$

Das verbliebene Integral ist analytisch bei x und damit hat q einen einfachen Pol mit Residuum

$$Res(q, x) = -\mu(\{x\}) < 0.$$

3. Offensichtlich ein Spezialfall von (ii), denn in diesem Fall muss $\mu = 0$ sein.

❑

Den folgende Beweis einer Variante von Satz 2.1.4 ((ii) impliziert (iii)) haben wir gratis dazubekommen weil Prof. Woracek seine Zettel vergessen hat und diesem zu Thema passenden Satz auswendig konnte.

2.1.16 Satz. *Sei $q : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ und $K(w, z) := \frac{q(z) - \overline{q(w)}}{z - \overline{w}}$ positiv definit.*
Technische zusatz Voraussetzung $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \mathrm{Im}\, q(iy) = 0$
Dann $\exists a \in \mathbb{R}, b \geq 0, \mu$ positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int \frac{d\mu}{1+t^2} < \infty$, sodass

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\mu(t).$$

und $b = 0$.

Beweis. Die Idee ist, dass wir uns von K einen Hilbertraum erzeugen lassen.

Betrachte $\mathcal{F} := \left\{ f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{supp} f| < \infty \right\}$ und definieren $(f, g) := \sum_{z,w\in\mathbb{C}^+} K(w, z) f(z)\overline{g(w)}$.

Die Indikatorfunktionen $\varepsilon_z := \mathbb{1}_{\{z\}}$ bilden eines Basis von $\mathcal{F}$. Weiters ist

$$(\varepsilon_z, \varepsilon_w) = K(w, z) = \frac{q(z) - \overline{q(w)}}{z - \overline{w}}.$$

Betrachte in diesem Raum den Operator $S : \operatorname{dom} S \subseteq \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mit $\operatorname{dom} S := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{z_i} \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \right\}$ und

$$S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{z_i}\right) := \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i \varepsilon_{z_i}.$$

Wir rechnen nach, dass S symmetrisch ist. Dies gilt, wegen

$$(z-\overline{w})K(z,w) = q(z) - \overline{q(w)}$$

und

$$\sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta}_j q(z_i) - \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j q(z_i)} = \sum_i \alpha_i q(z_i) \sum_j \beta_j - \sum_i \alpha_i \cdot = 0$$

Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ isometrisch mit dichtem Bild eine Hilbertraumvervollständigung.

$$A := \mathrm{clo}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}\left[(\iota \times \iota)(S)\right]$$

ist linearer, abgeschlossenen TR von $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. In diesem TR A gilt

$$\forall (x,y),(u,v) \in A : \quad (y,u) = (x,v)\,.$$

Wir zeigen, dass A der Graph eines Operators ist. Es gilt

$$\left(\varepsilon_{iy}, \varepsilon_{iy}\right) = \frac{\mathrm{Im}\, q(iy)}{y} \to 0$$

Also ist $\lim_{y\to\infty} \hat{\varepsilon}_{iy} = 0$ in $\|.\|$ von $\mathcal{H}$.

Angenommen $(0,y) \in A$ dann ist $\forall z \in \mathbb{C}^+, y > \mathrm{Im}\, z\; y \perp \hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_{iy}$. Damit gilt $y \perp \hat{\varepsilon}_z$ und damit $y = 0$.

Also ist A ein Operator mit dichtem Domain.

Sei $z \in \mathbb{C}^+$. So gilt

$$A(\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w) = z\hat{\varepsilon}_z - w\hat{\varepsilon}_w$$

Betrachte

$$(A-z)(\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w) = (z-w)\hat{\varepsilon}_w$$

Also ist $(A-z)\left(\frac{\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w}{z-w}\right) = \hat{\varepsilon}_w$. Also ist für alle $z \in \mathbb{C}^+$ und $\forall w \in \mathbb{C}^+ \setminus \{z\}$ ist $\hat{\varepsilon}_w \in \mathrm{ran}(A-z)$ mit $(A-z)^{-1}\hat{\varepsilon}_w = \frac{\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w}{z-w}$

Es gilt

$$\lim_{w\to z} \hat{\varepsilon}_w = \hat{\varepsilon}_z$$

wegen

$$(\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w, \hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w) = K(z,z) + K(w,w) - K(z,w) - K(w,z) \to 0.$$

Also ist $\mathrm{ran}(A-z)$ dicht.

Damit folgt

$$\left((A-z)^{-1}, \hat{\varepsilon}_w, \hat{\varepsilon}_w\right) = \left(\frac{\hat{\varepsilon}_z - \hat{\varepsilon}_w}{z-w}, \hat{\varepsilon}_w\right) = \frac{(\hat{\varepsilon}_z, \hat{\varepsilon}_w)}{z-w} - \frac{\hat{\varepsilon}_w, \hat{\varepsilon}_w}{z-w} = \frac{q(z) - \overline{q(w)}}{(z-\overline{w})(z-w)} - \frac{\mathrm{Im}\, q(w)}{\mathrm{Im}\, w}\frac{1}{z-w}$$

Dann muss man Spektralsatz auf $(A-z)^{-1}$ anwenden. ❑

2.2 Möbiustransformationen

2.2.1 Definition. Sei $M = (m_{ij}) \in SL(2,\mathbb{C})$, so ist

$$M * z := \frac{m_{11}z + m_{12}}{m_{21}z + m_{22}}$$

eine Möbiustransformation. ◊

Dies sind die Automorphismen auf $\mathbb{C}_\infty$. Wir interessieren uns in diesem Abschnitt aber nur für die Möbiustransformationen auf der oberen Halbebene

M1. **2.2.2 Lemma.** *Sei $M \in SL(2,\mathbb{C})$. So gilt*

1. *$M * \mathbb{R}_\infty$ ist eine Gerade genau dann, wenn $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) = 0$. Dabei ist $M * \mathbb{C}^+$ der obere Halbraum genau dann, wenn $m_{21} = 0, Re\,(m_{22}\overline{m_{11}}) > 0$ oder $m_{21} \neq 0, Re\, \frac{\det M}{m_{21}} > 0$*

2. *Sei* $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) \neq 0$. *Dann ist* $M * \mathbb{R}_\infty$ *ein Kreis mit Mittelpunkt*

$$\frac{m_{12}\overline{m_{21}} - m_{11}\overline{m_{22}}}{2i\,\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}})}$$

und Radius

$$\left|\frac{\det M}{2\,\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}})}\right|.$$

Dabei ist $M * \mathbb{C}^+$ *im Inneren des Kreises genau dann, wenn* $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) > 0$.

Beweis. 1. Sei $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) = 0$, so gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder $m_{21} = 0$ oder $-\frac{m_{22}}{m_{21}} \in \mathbb{R}$. Im ersten Fall ist

$$M * z = \frac{m_{11}}{m_{22}} z + \frac{m_{12}}{m_{22}}.$$

Im anderen Fall betrachte $M_0 := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_{22}}{m_{21}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also ist $M_0 * \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R}_\infty$ und

$$M * \mathbb{R}_\infty = MM_0 * \mathbb{R}_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\det M}{m_{21}} & m_{11} \\ 0 & m_{21} \end{pmatrix} * \mathbb{R}_\infty.$$

Damit ist

$$M * z = \frac{\det M}{m_{21}^2} z + \frac{m_{11}}{m_{21}}.$$

2. Sei nun $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) \neq 0$. Dann ist $m_{21} \neq 0$ und $-\frac{m_{22}}{m_{21}} \notin \mathbb{R}$. Damit ist $M * \left(-\frac{m_{22}}{m_{21}}\right) = \infty$. Also $\infty \notin M * \mathbb{R}_\infty$, d.h., $M * R_\infty$ ist echter Kreis in $\mathbb{C}$.

Weiters ist der Spiegelpunkt von $-\frac{m_{22}}{m_{21}}$, der Mittelpunkt des Kreises, also

$$M * \left(-\frac{\overline{m_{22}}}{\overline{m_{21}}}\right) = \frac{m_{12}\overline{m_{21}} - m_{11}\overline{m_{22}}}{2i\,\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}})}.$$

Durch Nachrechnen wird man sich von dieser Gleichheit vergewissern.

Also ist $M * \mathbb{C}^+$ das Innere genau dann, wenn $-\frac{\overline{m_{22}}}{\overline{m_{21}}} \in \mathbb{C}^+$ bzw. $\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}}) > 0$.

Wir erhalten den Radius, also Abstand des Mittelpunktes zur Peripherie

$$\left|\frac{m_{12}\overline{m_{21}} - m_{11}\overline{m_{22}}}{2i\,\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}})} - -\frac{m_{22}}{m_{21}}\right| = \left|\frac{\det M}{2\,\mathrm{Im}(m_{22}\overline{m_{21}})}\right|.$$

❑

Kapitel 3

Die Methode der Weyl'schen Kreise

3.1 Weyl'sche Kreise

3.1.1 Definition. Sei $H \in L^1\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ und $W(H,t,z)$ ist invertierbar, also $\in GL(2,\mathbb{C})$. So ist $W(H,t,z)*\overline{\mathbb{C}^+} =: \Omega_{H,t,z}$ der *Weylsche'sche Kreis.* ◊

Im Allgemeinen kann man über diese Kreise nicht viel aussagen. Ist jedoch H nicht negativ, dann haben sie einige höchst interessante Eigenschaften. Wir bezeichnen im Folgenden (hier steht ξ für (oder [ )

$$L^{1,+}_{\xi a,b\xi} := \left\{H \in L^1_{\xi a,b\xi} | H(t) \geq 0 \text{ für } t \in [a,b) \text{ f.ü.}\right\}.$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}^2$ und jede Borelmenge $A \subseteq (a,b)$ ist die Abbildung

$$\varphi_{\alpha,A} : H \mapsto \int_{(a,b)} (\mathbb{1}_A(\alpha))^* H(s)(\mathbb{1}_A(\alpha))\, ds$$

in $\left(L^1_{[a,b]}\right)'$. Damit ist

$$L^{1,+}_{[a,b]} = \bigcap \left\{\varphi^{-1}_{\alpha,A}([0,\infty)) | \alpha \in \mathbb{C}^2, A \in (a,b) \text{ Borelmenge}\right\}.$$

Insbesondere ist $L^{1,+}_{[a,b]}$ ω-abgeschlossen.

Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung.

3.1.2 Bemerkung. Es gilt

$$W(H;t,z)JW(H;t,w)^* - J = (z-\overline{w}) \int_a^t W(H;s,z)H(s)^T W(H;s,w)^*\, ds$$

Falls $H = H^* \geq 0$, so folgt

$$\frac{1}{i}\left(W(H;t,z)JW(H;t,z)^* - J\right) \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

◊

3.1.3 Lemma. *Sei $M \in GL(2,\mathbb{C})$. Dann ist $M * \overline{\mathbb{C}^+} \subseteq \overline{\mathbb{C}^+}$ genau dann, wenn*

$$\frac{1}{i}\left(MJM^* - J\right) \geq 0.$$

Eine direkte Folgerung aus dem obigen Lemma ist $W(H;t,z) \in \mathcal{N}_0$.

II102. **3.1.4 Lemma.** *Sei $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq H \in L^{1,+}_{[a,b)}$. Dann folgt*

1. *Für alle $z \in \mathbb{C}^+$ ist $\Omega_{H,a,z} = \overline{\mathbb{C}^+}$.*
2. *Für alle $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \forall t_1 \leq t_2$ gilt $\Omega_{H,t_1,z} \supseteq \Omega_{H,t_2,z}$*

Beweis. Die erste Aussage ist trivial wegen $W(H, a, z) = \mathrm{id}$.

Seien nun $t_1, t_2 \in [a, b)$ mit $t_1 \leq t_2$, so ist

$$W(H, t_2, z) = W(H; t_1, z) W(H|_{(t_1,b)}, t_2, z)$$

Nach Proposition 1.3.1 (iii) ist $W(H|_{(t_1,b)}, t_2, z) \in \mathcal{M}_0$ und daher

$$W(H; t_2, z) * \overline{\mathbb{C}^+} = W(H; t_1, z) \underbrace{W(H|_{(t_1,b)}, t_2, z) * \overline{\mathbb{C}^+}}_{\subseteq \overline{\mathbb{C}^+}} \subseteq W(H; t_1, z) * \overline{\mathbb{C}^+}.$$

❑

3.1.5 Bemerkung. b ist L^1-Randpunkt genau dann, wenn $\int_a^b \operatorname{tr} H(s)\, ds < \infty$ bzw. Grenzkreisfall. ◊

Der folgende Satz ist von grundlegender Bedeutung.

IIl03. **3.1.6 Satz.** *Sei $H \in L^1_{loc}\left([a, b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$, $H = H^* \geq 0$ f.ü. und $y > 0$. Dann gilt für alle $t \in [a, b)$*

$$\operatorname{diam}_\chi \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{4}{y \int_a^t \operatorname{tr} H(s)\, ds}.$$

Im Beweis von Satz Satz 3.1.6 verwenden wir eine Notation und ein Lemma, welche die Bedeutung der Positivität von H widerspiegeln.

3.1.7 Definition. Sei $G \in \mathbb{C}$ offen und $\vec{f} \in Hol(G, \mathbb{C}^2)$, dann ist

$$K_{\vec{f}}(w, z) := \begin{cases} \frac{\vec{f}(w)^* J \vec{f}(z)}{z - \overline{w}} = \frac{-\frac{f_2}{f_1}(z) + \overline{\left(-\frac{f_2}{f_1}(w)\right)}}{z - \overline{w}}, & z, w \in G, z \neq \overline{w} \\ \vec{f}(w)^* J \vec{f}'(z), & sonst. \end{cases}$$

Also entspricht dieser Kern dem Kern von $-\frac{f_2}{f_1}$. ◊

Für $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$K_{\vec{f}}(w, z) = \frac{1}{z - \overline{w}} \left(f_1(z)\overline{f_2(w)} - f_2(z)\overline{f_1(w)} \right) = \overline{f_2(w)} \underbrace{\frac{\frac{f_1(z)}{f_2(z)} - \overline{\left(\frac{f_1(w)}{f_2(w)}\right)}}{z - \overline{w}}}_{\text{ist ein nevelinaKern}} \overline{f_2(z)}.$$

In der folgenden Bemerkung wiederholen wir einige Definitoinen und Aussagen aus der komplexen Analysis.

3.1.8 Definition. Sei $f \in Hol(\mathbb{C})$, so ist die *Ordnung* von f

$$\rho_f := \inf\left\{ \rho > 0 | \exists c_1, c_2 > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c_1 e^{c_2 |z|^\rho} \right\} \in [0, \infty].$$

Sei $(w_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge komplexer Zahlen ungleich 0, die keinen Häufungspunkt besitzt. Dann ist

$$\rho(w_n) := \inf\left\{ \rho > 0 : \sum \frac{1}{|w_n|^\rho} < \infty \right\} \in [0, \infty]$$

der *Konvergenzexponent* der Folge $(w_n)_{n=1}^\infty$. ◊

3.1.9 Bemerkung. Sei $f \in Hol(\mathbb{C})$ und w_n Nullstellen von f ungleich 0. Dann ist $\rho(w_n) \leq \rho_f$. ◊

IIHada. **3.1.10 Satz** (Hadamard). *Sei $f \in Hol(\mathbb{C})$ und (w_n) die Folge der Nullstellen $\neq 0$ und $\rho_f < \infty$. Sei $p \in \mathbb{N}$, sodass $\rho_f < p + 1$. Dann ist*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{w_n}\right) \exp\left(\frac{z}{w_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{w_n}\right)^p\right)$$

das entsprechende Weierstrass-Produkt. Dann ist $g(z)$ ein Polynom mit $\deg g \leq p$.

Es gilt auch eine umgekehrte Aussage, die brauchen wir aber (derzeit noch) nicht.

II105. **3.1.11 Lemma.** *Sei* $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2)$ *mit* $\vec{f} = \vec{f}^{\#} \neq 0$, $\frac{f_1}{f_2}$ *nicht konstant,* $K_{\vec{f}}(w,z)$ *ist positiv semidefiniter Kern und* $\rho_{f_1}, \rho_{f_2} < 2$. *Dann ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *die Funktion*

$$\varphi_x : \begin{cases} [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ y & \mapsto & K_{\vec{f}}(x+iy, x+iy) \end{cases}$$

nicht fallend.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Wir zeigen, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $f_1(x) = 0$.

   Es gilt $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \in \mathbb{R}_\infty$. Setze

   $$\alpha := \begin{cases} \arctan\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x), & \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \neq \infty \\ \frac{\pi}{2}, & sonst, \end{cases}$$

   dann ist

   $$e^{\alpha J} * \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{\cos\alpha\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) - \sin\alpha}{\sin\alpha\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) + \cos\alpha} = \begin{cases} 0 & \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \neq \infty \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

   Setze $\vec{h} := e^{\alpha J}\vec{f}$. Damit gilt

   $$K_{\vec{h}}(w,z) = \frac{1}{z-w}\left(\vec{f}(w)^* e^{-\alpha J} J e^{\alpha J} \vec{f}(z)\right) = K_{\vec{f}}(w,z).$$

   Somit erfüllt auch $\vec{h}$ alle Voraussetzungen mit der zusätzlichen $h_1(x) = 0$.

2. Für das x mit $f_1(x) = 0$ gilt nun mit $z = x + iy$

   $$K_f(z,z) = \frac{\vec{f}(z)^* J \vec{f}(z)}{z - \bar{z}} = \frac{f_1(z)\overline{f_2(z)} - \overline{f_1(z)} f_2(z)}{2i \operatorname{Im} z} = \frac{|f_1(z)|^2}{2i \operatorname{Im} z}\left(\frac{\overline{f_2(z)}}{\overline{f_1(z)}} - \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right)$$

   $$= |f_1(z)|^2 \frac{\operatorname{Im}\left(-\frac{f_2}{f_1}(z)\right)}{y} = \left|\frac{f_1(z)}{z-x}\right|^2 y \operatorname{Im}\left(-\frac{f_2}{f_1}(z)\right).$$

   Wegen der Voraussetzung Kern ≥ 0, ist $-\frac{f_2}{f_1}$ eine Nevanlinna-Funktion und damit auch $\frac{f_1}{f_2}$. Also ist nach Korollar 2.1.10 $y \operatorname{Im} \frac{f_1}{f_2}(x+iy)$ nicht fallend.

3. Weil $f_1(z+x)$ Ordnung kleiner 2 hat, bekommen wir mit Hadamad Satz 3.1.10 die Produktdarstellung

   $$f_1(z+x) = z^m e^{\alpha z} \beta \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{x_n}\right) e^{\frac{z}{x_n}},$$

   wobei x_n die Nullstellen von $f_1(z+x)$ ungleich 0 sind. Wir wissen, dass alle Nullstellen reell sind und wegen $\vec{f} = \vec{f}^{\#}$ sind auch $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wegen $f_1(x) = 0$ folgt $m \geq 1$. Damit ist für $z = iy$

   $$\left|\frac{f_1(x+iy)}{(x+iy) - x}\right| = |y|^{m-1} |\beta| \prod_{x_n \neq x} \left|1 - \frac{iy}{x_n}\right|$$

   Weil alle Faktoren auf der rechten Seite monoton steigend sind in y, ist es auch die linke Seite. Also Ist auch φ_x monoton steigend.

❑

IlangeKern. **3.1.12 Lemma.** *Sei $W:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det W = 1$, $\overline{W(\overline{z})} = W(z)$, $\tau:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}_\infty$ und $V=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Betrachte $z\mapsto W(z)*\tau(z)$. Dann gilt*

$$(w_{21}(z)\tau(z)+w_{22}(z))\frac{(W*\tau)(z)-\overline{(W*\tau)(w)}}{z-\overline{w}}\left(w_{21}(\overline{w})\overline{\tau(w)}+w_{22}(\overline{w})\right)$$

$$=\frac{\tau(z)-\overline{\tau(w)}}{z-\overline{w}}+\begin{pmatrix}-\tau(z)\\1\end{pmatrix}^*\frac{(VW^{-1}V)(z)J(VW^{-1}V)^*(w)-J}{z-\overline{w}}\begin{pmatrix}-\overline{\tau(z)}\\1\end{pmatrix}.$$

Beweis. Berechnen ergibt

$$\frac{(VW^{-1}V)(z)J(VW^{-1}V)^*(w)-J}{z-\overline{w}}=\frac{VW^{-1}(z)VJVW^{-*}(w)V-J}{z-\overline{w}}$$

$$=V\frac{W^{-1}V)(z)JW^{-*}V(w)+J}{z-\overline{w}}V=VW^{-1}(z)\frac{-J+W(z)JW^*(w)}{z-\overline{w}}W^{-*}(w)V$$

Weiters gilt

$$(W*\tau)(z)-\overline{(W*\tau)(w)}=\frac{(w_{11}(z)\tau(z)+w_{12}(z))\overline{(w_{21}(w)\tau(w)}+\overline{w_{22}(w)})-(\overline{w_{11}(w)\tau(w)}+\overline{w_{12}(w)})(w_{21}(z)\tau(z)+w_{22}(z))}{(w_{21}(z)\tau(z)+w_{22}(z))\overline{(w_{21}(w)\tau(w)+w_{22}(w))}}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix}-\tau(z)\\1\end{pmatrix}^*V^{-1}\frac{-W^{-1}(z)JW^{-*}(w)+J}{z-\overline{w}}V\begin{pmatrix}-\overline{\tau(w)}\\1\end{pmatrix}$$

mit

$$W^{-1}=\begin{pmatrix}w_{22}&-w_{12}\\-w_{21}&w_{11}\end{pmatrix}.$$

Sei

$$\begin{pmatrix}Az&Bz\\Cz&Dz\end{pmatrix}J\begin{pmatrix}Aw&Bw\\Cw&Dw\end{pmatrix}^*+J=\begin{pmatrix}Bz\overline{Aw}-Az\overline{Bw}&Bz\overline{Cw}-Az\overline{Dw}+1\\Dz\overline{Aw}-Cz\overline{Bw}-1&Bz\overline{Cw}-Cz\overline{Dw}\end{pmatrix}$$

Also ist

$$\left[-W^{-1}(z)JW^{-*}(w)+J\right]=-\begin{pmatrix}-w_{12}z\overline{w_{22}(w)}+w_{22}z\overline{w_{12}(w)}&w_{12}z\overline{w_{21}}-w_{22}z\overline{w_{11}(w)}+1\\w_{11}z\overline{w_{22}(w)}-w_{21}z\overline{w_{12}(w)}-1&-w_{11}z\overline{w_{21}(w)}+w_{21}z\overline{w_{21}(w)}\end{pmatrix}$$

und damit

$$V\left[-W^{-1}(z)JW^{-*}(w)+J\right]V=-\begin{pmatrix}-w_{11}z\overline{w_{21}(w)}+w_{21}z\overline{w_{21}(w)}&w_{11}z\overline{w_{22}(w)}-w_{21}z\overline{w_{12}(w)}-1\\w_{12}z\overline{w_{21}}-w_{22}z\overline{w_{11}(w)}+1&-w_{12}z\overline{w_{22}(w)}+w_{22}z\overline{w_{12}(w)}\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die gewünschte Gleichung. ❑

II1051. *3.1.13 Bemerkung.* Von früher kennen wir den Trick, Sei $\tilde{H}(t):=H(t)+iJ\psi(t)$ mit

$$W(\tilde{H};t,z)=e^{iz\Psi(t)}W(H;t,z).$$

Damit ist die Möbiustransformation von $W(\tilde{H};t,z)$ gleich der Möbiustransformation von $W(H;t,z)$.

Für $H\in\mathbb{C}^{2\times2}, H=H^*\geq 0$ gilt $h_1,h_2\geq 0$ und $h_1h_2\geq |h_3|^2$. Betrachte

$$\begin{pmatrix}h_1&h_3\\\overline{h_3}&h_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}h_1&\operatorname{Re}h_3\\\operatorname{Re}h_3&h_2\end{pmatrix}}_{=:H'}+iJ(-\operatorname{Im}h_3)$$

Nachdem wir aus dem Lemma die Aussage für $H'\in\mathbb{R}^{2\times2}, H'=H'^*$ zeigen können, gilt die Aussage auch für H. ◊

Beweis von Satz 3.1.6. Wir werden in mehreren Schritten vorgehen.

1. Wir können uns mit Bemerkung 3.1.13 auf den Fall $H \in L^1_{loc}\left([a,b), \mathbb{R}^{2\times 2}\right)$ zurückziehen.

   Sonderfall: Für $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ ist $h_2|_{(a,t)} = 0$ f.ü., d.h,
$$H = h_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   und
$$W(H; t, z) = \begin{pmatrix} 1 & lz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } l := \int_a^t h_1(s)\, ds = \int_a^t \operatorname{tr} H(s)\, d.$$
   Damit ist $\Omega_{H,t,iy} = \mathbb{C}^+ + ily$. Sei nun $w \in \mathbb{C}^+ + iyl$, so gilt
$$\chi(w, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|w|^2}} \le \frac{2}{ly}.$$
   Also folgt
$$\operatorname{diam}_\chi \Omega_{H,t,iy} \le \frac{2}{ly} = \frac{2}{y \int_a^t \operatorname{tr} H(s)\, ds}$$

2. Damit haben wir diesen Fall abgearbeitet und können uns auf alle andere beschränken. Weil h_2 nicht 0 ist f.ü., so gilt $\int_a^t h_2(s)\, ds > 0$. Die Fundamentallösung ist rekursiv definiert durch $W(t,z) = \sum w_l(t) z^l$ mit $w_0(t) = \text{id}$ und $w_{l+1}(t) = -\int_a^t w_l(s) H(s)^T J\, ds$. So gilt $w_1(t) = -\left(\int_a^t H(s)\, ds\right)^T$. Weiters ist
$$\frac{d}{dt} w_{21}(t,z)\Big|_{z=0} = -\int_a^t h_2(s)\, ds < 0.$$
   Also ist w_{21} nicht identisch 0. Die Funktion $\frac{w_{22}}{w_{21}}$ ist eine meromorphe Funktion mit Pol an 0 und damit nicht konstant. Weiters ist $w_{21}^\# = w_{21}, w_{22}^\# = w_{22}$ weil die Dinge reell sind und $\det W = 1$.
   Mit Lemma 3.1.12 und $\tau = 0 \in \mathcal{N}_0$ wissen wir, dass
$$K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(w,z) = \frac{\vec{w}(w)^* J \vec{w}(z)}{z - \overline{w}} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* \frac{W(z) J (W(w))^* - J}{z - \overline{w}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   und damit ist dieser Kern positiv semidefinit. Weil auch alle anderen Voraussetzungen von Lemma 3.1.11 erfüllt sind, ist
$$y \mapsto K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(iy, iy)$$
   steigend in y, und damit $K(iy, iy) \ge K(0,0)$. Weiters ist
$$K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(w,z) = \frac{w_{22(z)} \overline{w}_{21}(w) - w_{21}(z) \overline{w}_{22}(w)}{z - \overline{w}}$$
   und damit
$$K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(0,z) = \frac{1}{z} w_{21}(z), \qquad K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(0,0) = -\frac{d}{dt} w_{21}(z)\Big|_{z=0} = \int_a^t h_2 > 0.$$
   Damit ist der Weyl-Kreis $\Omega_{H,t,iy}$ eine echte Kreisscheibe mit Radius
$$\left| \frac{\det W(t, iy)}{2 \operatorname{Im}\left(w_{22}(iy) \overline{w_{21}(iy)}\right)} \right| = \frac{1}{\left| w_{22}(iy) \overline{w_{21}(iy)} - w_{21}(iy) \overline{w_{22}(iy)} \right|} = \frac{1}{2y K_{\begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{21} \end{pmatrix}}(iy, iy)} \le \frac{1}{2y \int_a^t h_2(s)\, ds.}$$
   Wegen $2\,|\xi - \zeta| \ge \chi(\xi, \zeta)$ folgt
$$\operatorname{diam}_\chi \Omega_{H,t,iy} \le \frac{4}{2y \int_a^t h_2(s)\, ds} = \frac{2}{y \int_a^t h_2(s)\, ds}.$$

3. Für einen Hamiltonian H betrachte den Transformierten Hamiltonian $\tilde{H} := -JHJ = \begin{pmatrix} h_2 & -h_3 \\ -h_3 & h_1 \end{pmatrix}$. Dann ist
$$W(\tilde{H};t,z) = -JW(H;t,z),$$
daher folgt $\Omega_{\tilde{H},t,iy} = (-J) * \Omega_{H,t,iy}$. Die Möbiustransformation $\tau \mapsto (-J) * \tau$ ist eine Rotation der Sphäre und daher bzgl. der chordalen Metrik isometrisch. Es folgt
$$\operatorname{diam}_\chi \Omega_{\tilde{H},t,iy} = \operatorname{diam}_\chi \Omega_{H,t,iy}.$$

4. Ist $h_1(s) = 0$ für $s \in (a,t)$ f.ü., so können wir (1) auf $\tilde{H}$ anwenden und erhalten so
$$\operatorname{diam} \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{2}{y\int_a^t \operatorname{tr} H(s)\,ds}.$$

5. Sind h_1 und h_2 nicht 0 f.ü. auf (a,t), so können wir (2) auf $\tilde{H}$ anwenden und erhalten so
$$\operatorname{diam} \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{2}{y\int_a^t h_i(s)\,ds}, \quad i = 1,2.$$
Damit gilt weiters
$$\left(\operatorname{diam}_\chi \Omega_{H,t,iy}\right)^{-1} \geq \frac{y}{2} \max\left\{\int_a^t h_1(s)\,ds, \int_a^t h_2(s)\,ds\right\} \geq \frac{y}{2}\frac{\int_a^t \operatorname{tr} H(s)\,ds}{2}.$$
Also folgt
$$\operatorname{diam} \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{4}{y\int_a^t \operatorname{tr} H(s)\,ds}.$$

❑

3.1.14 Bemerkung. Mit der etwas besseren Abschätzung $\frac{\pi}{2}\xi - \zeta \geq \chi(\xi,\zeta)$ bekommen wir
$$\operatorname{diam} \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{\pi}{y\int_a^t \operatorname{tr} H(s)\,ds}.$$
◊

3.1.15 Bemerkung. Hat man $H \in L^1_{[a,b]}$, so existiert der Limes
$$\lim_{t\to b} W(H;t,.) = W(H;b,.) \in Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2\times 2})$$
lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{C}$, vgl. Satz 1.2.1(ii).

Falls $H \geq 0, L^1_{loc}\left([a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ und b ist jedoch kein L^1-Randpunkt. So existiert der Grenzwert $\lim_{t\to b} W(H;t,z)$ nicht. ◊

Beweis der Bemerkung. Es gilt
$$\|H(t)\| \leq 2\,|\operatorname{tr} H(t)| \leq 4\,\|H\|.$$
Damit ist Integrierbarkeit von H äquivalent zur Integrierbarkeit von $\operatorname{tr} H$. Also ist b ein L^1-Randpunkt, wenn $\int_a^b h_1 < \infty, \int_a^b h_2 < \infty$. Nun gilt
$$\int_a^t h_1 = \frac{d}{dz} w_{12}(H;t,z)|_{z=0}, \quad \int_a^t h_2 = \frac{d}{dz} w_{21}(H;t,z)|_{z=0}.$$
Existiert der Grenzwert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$, so müssen auch beide Integrale endlich sein. ❑

Der obige Satz 3.1.6 zeigt nun, dass man einen Ersatz für den Limes hat. Man betrachtet nämlich Anstelle der kompletten Matrixfunktion $W(H;t,.)$, skalare Funktionen $W(H;t,iy) * \tau$ mit $\tau \in \mathbb{C}^+$.

II106. **3.1.16 Satz.** *Es gibt eine Funktion*

$$\Psi : \mathbb{H}^+ := \left\{ H \in L^1_{loc}\left([a,b), \mathbb{C}^{2\times 2}\right) | b \text{ nicht } L^1 - Randpunkt, H \geq 0 \text{ f.ü.} \right\} \to \mathcal{N}_0$$

mit der Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \forall K \subseteq \mathbb{C}^+ kompakt \exists R > 0 :$$

$$\sup \left\{ \chi \left(W(H;t,z) * \tau, (\Psi(H))(z) \right) \middle| z \in K, \tau \in \overline{\mathbb{C}^+}, H \in \mathbb{H}^+, t \in [a,b) \text{ mit } \int_a^t \operatorname{tr} H \geq R \right\} < \varepsilon$$

II108. **3.1.17 Korollar.** *Sei $H \in \mathbb{H}^+$, dann folgt für jedes $\tau \in \overline{\mathbb{C}^+}, z \in \mathbb{C}$ existiert der Grenzwert*

$$\lim_{t \to b} W(H;t,z) * \tau =: q_H(z) \in \mathcal{N}_0$$

unabhängig von τ.

Beweis von Satz 3.1.16. Wir gehen wieder in mehreren Schritten vor.

1. Sei $y > 0$ und sei $H \in \mathbb{H}^+$. Die Familie $\left\{ \Omega_{H,t,iy} : t \in [a,b) \right\}$ ist absteigend, komapkt und der Durchmesser geht gegen 0. Also
$$\bigcap_{t \in [a,b)} \Omega_{H,t,iy} =: \{q_H(iy)\}$$
ist ein-elementig. Damit haben wir eine Funktion definiert, $q_H : i\mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{C}^+}$.
Nach der in Satz 3.1.6 gezeigten Abschätzung, haben wir sogar eine gewisse Gleichmäßigkeit in H. Es gilt nämlich für alle $R > 0$ und $y_0 > 0$
$$\sup \left\{ \chi \left(W(H;t,iy) * \tau, q_H(iy) \right) \middle| H \in \mathbb{H}^+, t \in [a,b) \text{ mit } \int_a^t \operatorname{tr} H \geq R, \tau \in \overline{\mathbb{C}^+}, y \geq y_0 \right\} \leq \frac{4}{y_0 R}.$$

2. Betrachte $\mathcal{N}_0$. So definieren wir uns eine neue Metrik
$$d(f,g) := \sup \left\{ \chi(f(z), g(z)) | z \in i[1,2] \right\}, \quad f,g \in \mathcal{N}_0.$$
Falls $f_n \to f$ lokal gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert f_n auch in d gegen f. Wegen der Kompaktheit von $i[1,2]$ gilt auch die Umkehrung (Satz von Vitali).

3. Sei $H \in \mathbb{H}^+$ fest und $t_n \to b$. Dann ist $W(H;t_n,.)^* 0 \in \mathcal{N}_0$, wegen der langen Kern-Beziehung (Lemma 3.1.12). Weil $\mathcal{N}_0$ kompakt ist, finden wir eine Teilfolge t_{n_k}, sodass
$$\lim_{k \to \infty} W(H;t_{n_k},.) * 0 =: \Psi_H \in \mathcal{N}_0,$$
lokal gleichmäßig existiert. Wegen Lemma 3.1.4 gilt
$$\Psi_H(iy) = \lim_{k \to \infty} W(H;t_{n_k},iy) * 0 = q_H(iy).$$
Damit konvergiert die gesamte Folge, sprich
$$\lim_{t \to b} W(H;t,.) * 0 \in \mathcal{N}_0.$$

4. Sei $K \subseteq \mathbb{C}^+$ kompakt. Sei
$$d_K(f,g) := \sup \left\{ \chi(f(z), g(z)) | z \in K \cup i[1,2] \right\}.$$
Damit ist
$$\operatorname{id} : \langle \mathcal{N}_0, d \rangle \to \langle \mathcal{N}_0, d_k \rangle$$
gleichmäßig stetig, d.h.,
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f,g \in \mathcal{N}_0 : d(f,g) \leq \delta \implies d_K(f,g) < \varepsilon. \qquad (3.1.1)$$ Eq:d-dK

5. Sei $\varepsilon > 0, K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Wähle $\delta > 0$ aus (3.1.1) und setze $R := \frac{4}{\delta}$. Wir haben das Intervall $[1, 2]$ gewählt, damit $y_0 = 1$ gilt. Sei z, τ, H, t wie oben. So gilt mit Punkt 1

$$\forall y \in [1, 2] : \chi(W(H; t, iy) * \tau, \Psi_H(iy)) \leq \frac{4}{R} = \delta.$$

Jetzt bekommen wir aus der Wahl von δ

$$\chi\left(W(H; t, z) * \tau, \Psi_H(z)\right) < \varepsilon.$$

❑

3.1.18 Definition. Für $H \in \mathbb{H}^+$ heißt die Funktion Ψ_H der *Weigl-Koeffizient* von H. ◊

3.1.19 Bemerkung. Unsere Abschätzung war

$$diam_\chi \Omega_{H,t,iy} \leq \frac{4}{y \int_a^t \operatorname{tr} H}.$$

Man kann zeigen, dass

$$diam_\chi \Omega_{H,t,x+iy} \leq \frac{4}{y \int_a^t \operatorname{tr} W(H; s, x) * H(s) W(H; s, x)\, ds}.$$

Mit Hilfe von Operatortheorie kann man zeigen, für jedes feste H geht $\int_a^t \operatorname{tr} W(H; s, x) * H(s) W(H; s, x)\, ds$ gegen ∞. So bekommt man aber keine Gleichmäßigkeit in H. ◊

3.1.20 Bemerkung. Sei $H \in L^1_{loc}\left([a, b), \mathbb{R}^{2\times2}\right), H \geq 0$. Dann ist für alle $\tau \in \mathcal{N}_0$

$$\lim_{t\to b} W(H; t, z) * \tau(z) \in \mathcal{N}_0.$$

Ist b nicht L^1-Randpunkt, dann hängt dieser Limes nicht von τ ab. Falls b jedoch L^1-Randpunkt ist, so hängt dieser Limes injektiv von τ ab, sprich

$$\left(\lim_{t\to b} W(H; t, z) * \tau_1(z) = \lim_{t\to b} W(H; t, z) * \tau_2(z)\right) \implies \tau_1 = \tau_2.$$

Dies gilt wegen

$$\lim_{t\to b} W(H; t, z) * \tau(z) = W(H; z) * \tau.$$

◊

3.2 Der Weyl Koeffizient als Funktion des Hamiltonians

Wir untersuchen nun die im vorherigen Abschnitt definierte Funktion

$$\Psi : L^{1,+}_{[a,b)} \to \mathcal{N}_0.$$

Unser Ziel ist wieder eine Stetigkeitseigenschaft zu zeigen. Dazu müssen wir zuerst $L^{1,+}_{[a,b)}$ topologisieren. Da $L^1_{[a,b)}$ aus lokal integrierbaren Funktionen besteht, liegt es nahe eine Limestopologie zu verwenden. Nämlich, betrachte das Diagramm

$$L^1_{[a,t']} \xrightarrow{\rho_t^{t'}} L^1_{[a,t]},$$

wobei $t, t' \in (a, b)$ und $\rho_t^{t'} : L^1_{[a,t']} \to L^1_{[a,t]}$ definiert ist falls $t < t'$ und zwar als Einschränkung $\rho_t^{t'} H := H|_{(a,t)}$. Der Limes dieser Diagramme ist gerade der $L^1_{[a,b)}$ mit den entsprechenen Einschränkungsabbildungen $\rho_t H := H|_{(a,t)}$

3.2.1 Bemerkung. Betrachte die injektiven Abbildung

$$\lambda : \begin{cases} L^1_{loc}\left([a, b), \mathbb{C}^{2\times2}\right) & \to & \prod_{t\in(a,b)} L^1_{loc}\left([a, t], \mathbb{C}^{2\times2}\right) \\ H & \mapsto & (H|_{[a,t]})_{t\in(a,b)} \end{cases}.$$

So ist

$$\lambda\left(L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)\right)=\left\{(\rho_t)_{t\in(a,b)}\in\prod_{t\in(a,b)}L^1_{[a,t]}\;\middle|\;\forall t<t':\rho_t^{t'}\rho_{t'}=\rho_t\right\}.$$

Wir versehen nun jeden $L^1_{loc}\left([a,t],\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ mit der ω-Topologie und das Produkt mit der Produkt-Topologie. Weil wir via λ den $L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ also Teilraum des Produktraumes auffassen können, betrachten wir den $L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ mit der Spurtopologie der Produkttopologie (bzgl. λ), sodass also λ ein Homöomorphismus aufs Bild wird. Die Abbildungen $\rho_t^{t'}$ sind bezüglich der $\|.\|_1$-Normen kontraktiv und damit stetig und insbesondere auch ω-ω-stetig. Daher ist $\lambda(L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right))$ ein abgeschlossener Teilraum von $\prod_{t\in(a,b)}L^1_{loc}\left([a,t],\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$.

Man kann auch auf beiden Seiten auf L^∞-Einheitskugel einschränken. So sind wir metrisierbar und weil es eine abgeschlossene Teilmenge ist, ist die Topologisierung kompakt und metrisierbar.

$\Diamond$

3.2.2 Definition. τ ist die Topologie auf $L^1_{loc}\left([a,b),\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ als Spur der $\prod$-Top der ω-Topoplogie bezüglich λ.

$\Diamond$

Konvergenz bezüglich der Topologie τ heißt

$$\forall t\in(a,b): H_n|_{(a,t)}\to H|_{(a,t)}$$

schwach.

3.2.3 Bemerkung. Sei $\tilde{H}=(H\circ\varphi)\varphi'$ mit $\varphi:[\tilde{a},\tilde{b})\to[a,b)$ bijektiv und φ,φ^{-1} absolut stetig.

Wenn y eine Lösung des kanonischen Systems mit H ist, so ist $y\circ\varphi$ Lösung des kanonischen Systems mit $\tilde{H}$.

Damit ist, falls a L^1-Randpunkt,

$$W(\tilde{H};t,z)=W(H;\varphi(t),z),\ \forall z\in\mathbb{C},t\in[\tilde{a}.,\tilde{b}).$$

Und a ist L^1-Randpunkt genau dann, wenn $\tilde{a}$ ein L^1-Randpunkt. deto für b.

Falls a ein L^1-Randpunkt ist aber b keiner, so ist

$$q_{\tilde{H}}(z)=q_H(z),\ z\in\mathbb{C}^+.$$

$\Diamond$

Aufgrund der Gleichmäßigkeit der Abschätzung in Satz 3.1.16 in H erhalten wir folgende Aussage.

II202. **3.2.4 Satz.** *Die Funktion*

$$\Psi:\begin{cases}\left\langle L^{1,+}_{[a,b)}\cap L^\infty([a,b)),\tau\right\rangle & \to & \langle\mathcal{N}_0,lu\rangle\\ H & \mapsto & \Psi_H\end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. 1. Sei $(H_i)_{i\in I}$ eine Netz mit $\lim_{i\in I}H_i=H$ und $\varepsilon>0,K\subseteq\mathbb{C}^+$ kompakt. Wähle das $R>0$ aus Satz 3.1.16. Wähle weiters $t_0\in(a,b)$ mit $\int_a^{t_0}\operatorname{tr}H\geq 2R$.

Wegen $\int_a^{t_0}\operatorname{tr}\tilde{H}=\int_a^{t_0}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^*\tilde{H}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\int_a^{t_0}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^*\tilde{H}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, ist $\tilde{H}\mapsto\int_a^{t_0}\operatorname{tr}\tilde{H}$ stetig in $\omega-L^1_{[a,t_0]}$. Wähle $i_0\in I$ mit $\int_a^{t_0}\operatorname{tr}H_i\geq R$ für $i\geq i_0$.

2. Es ist

$$\begin{cases}L^1([a,t_0],\mathbb{C}^{2\times 2})\cap L^\infty([a,t_0]) & \to & Hol(\mathbb{C}^+)\\ \tilde{H} & \mapsto & W(\tilde{H},t_0,.)\end{cases}$$

$\omega-loc.glm.$ stetig. Damit ist $\lim_{i\in I}W(H_i;t_0,z)=W(H;t_0,z)$. Insbesondere ist $\lim_{i\in I}W(H_i;t_0,z)*0=W(H;t_0,z)*0$, weil Multiplizieren und $\frac{1}{\cdot}$ stetig sind.

Wähle $i_1\geq i_0$ mit

$$\chi(W(H_i;t_0,z)*0,W(H;t_0,z)*0)\leq\varepsilon,\quad z\in K.$$

Damit gilt

$$\chi(q_{H_i}(z),q_H(z))\leq\chi(q_{H_i}(z),W(H_i;t_0,z)*0)+\chi(W(H_i,t_0,z)*0,W(H;t_0,z)*0)+\chi(W(H;t_0,z)*0,q_H(z))\leq 3\varepsilon.$$

❑

Auf das Verhalten von $q_H(z)$ in z wir hier nicht weiter besprochen.

3.2.5 Bemerkung. Ψ ist nicht injektiv, denn die Relation

$$\tilde{H} \sim H :\Leftrightarrow \tilde{H} \text{ ist Reparametrisierung.}$$

liegt im $\ker \Psi$.

Ein weiters Jahr würde weisen, dass sogar Gleichheit gilt. ◊

3.2.6 Lemma (Lemmachen). *Betrachte*

$$D := \left\{ H \in L^1_{loc}\left([a,b), \mathbb{R}^{2\times 2}\right) \mid b \textit{ nicht } L^1\textit{-Randpunkt}, H \geq 0 \right\}.$$

1. *Für alle $H \in D$ existiert ein $\tilde{H} \in D$, sodass $\tilde{H} \sim H$ und $\operatorname{tr} \tilde{H}(t) \in \{0,1\}$ f.ü..*
2. *Für alle $H \in D$ mit $H(t) \neq 0$ f.ü. existiert ein eindeutiges $\tilde{H} \in D$ auf $\left[0, \int_a^b \operatorname{tr} H\right)$ mit $\tilde{H} \sim H$ und $\operatorname{tr} \tilde{H}(t) = 1$ f.ü..*

3.2.7 Bemerkung. Wir sind an der tr interessiert, da tr linear ist und damit ist das Repräsentantensystem konvex. Die Norm ist dies nicht. ◊

Beweis. Definiere

$$\nu(t) := \begin{cases} \operatorname{tr} H(t), & t \text{ mit } H(t) \neq 0 \\ 1, & else. \end{cases}, \quad \varphi(t) := \int_a^t \nu(s)\, ds.$$

Betrachte dann $\tilde{H} := \left(H \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi^{-1})'$. φ ist absolut stetig und bijektiv von $[a,b)$ nach $[0, \int_a^b \nu)$

Damit ist

$$\operatorname{tr} H(t) = \operatorname{tr} \tilde{H}(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)' = \operatorname{tr} \tilde{H}(\varphi(t)) \cdot \nu(t).$$

Damit ist $\operatorname{tr} \tilde{H}(t) = 1$ falls $H(t) \neq 0$ und $\operatorname{tr} \tilde{H} = 0$ sonst. Damit ist $\operatorname{tr} \tilde{H} = \mathbb{1}_{\varphi(\{H(t)\neq 0\})}$.

Sei $H \sim \tilde{H}$ mit gleicher Spur, so gilt

$$\operatorname{tr} \tilde{H}(t) = \operatorname{tr} H(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)'$$

Wenn $\operatorname{tr} H = 1$ f.ü. und $\operatorname{tr} \tilde{H} = 1$ f.ü., so ist $\varphi' = 1$ f.ü.. Damit ist φ f.ü. eine Transation und weil der Bereich $\left[0, \int_a^b \operatorname{tr} H\right)$ fix gewählt wurde, muss $\varphi = \mathrm{id}$ f.ü. und damit $H = \tilde{H}$ f.ü. ❑

3.2.8 Lemma. *Die Menge*

$$E := \{H \in D \mid \operatorname{tr} H = 1 \textit{ f.ü.}, H \textit{ definiert auf } [0,\infty)\}$$

ist in τ kompakt.

Beweis. Sei $c \in (a,b)$ und sei $E_c := \left\{ H \in L^1_{loc}\left([a,c], \mathbb{C}^{2\times 2}\right) : \operatorname{tr} H = 1, H \geq 0, H \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{alles f.ü.} \right\}$.

1. Behauptung: E_c ist schwach kompakt.

   Sicherlich gilt $E_c \subseteq \left\{ H \in L^\infty\left([a,c], \mathbb{C}^{2\times 2}\right) \mid \|H(t)\| \leq 2 \text{ f.ü.} \right\}$ und diese Menge ist ω-kompakt nach Danfer-Betis.

   Sei H_i ein Netz in E_c konvergenz gegen $H \in L^1_{loc}\left([a,c], \mathbb{C}^{2\times 2}\right)$, so gilt

   $$\lambda(\Delta) = \int_\Delta \operatorname{tr} H(s)\, ds = \int_{[a,c]} \left(\mathbb{1}_\Delta(s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^* H_i(s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ds + \int_{(a,c]} \left(\mathbb{1}_\Delta(s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)^* H_i(s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ds$$

   Damit ist $\operatorname{tr} H = 1$ f.ü.

   Sei

   $$f_\Delta(\tilde{H}) := \int_{[a,c]} \left(\mathbb{1}_\Delta(s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)^* \tilde{H}(s)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ds$$

   Nun ist f_Δ setig und damit folgt aus $f_\Delta(H_i) \in \mathbb{R}$ schon $f_\Delta(H) \in \mathbb{R}$. Damit ist $\mu : \Delta \to f_\Delta(H)$ reelles Maß und absolut stetig bzgl. λ. Damit ist $\frac{d\mu}{d\lambda} \in \mathbb{R}$ f.ü..

   Damit ist E_c ω-kompakt.

2. Sei $0 < c < c' < \infty$ betrachte
$$\rho_c^{c'} : L^1_{loc}\left([0,c'],\mathbb{C}^{2\times 2}\right) \to L^1_{loc}\left([0,c]\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$$
ist ω-ω-stetig. Das Bild von der Abbildung (aus der wir die Top bekommen haben) ist
$$\left\{(H_c)_{c\in(0,\infty)} | \forall 0 < c < c' < \infty . \rho_c^{c'}(H_{c'}) = H_c\right\}$$
ist abgeschlossen in dem Produkttop. Nun ist $[inj](E) = \underbrace{(Bild([inj]))}_{abgeschlossen} \cap \underbrace{\prod_{c\in(o,\infty)} E_c}_{kompaktin \prod -Tychonov}$

❑

3.2.9 Bemerkung. E ist konvex. ◊

3.2.10 Bemerkung. $\tau|_E$ ist mertisierbar. ◊

Beweis. Sei $I \supseteq J$ gerichtete Indexmenge. Betrachte die Abbildung
$$\varphi : \begin{cases} \prod_{i\in I} X_i & \to & \prod_{j\in J} X_j \\ (x_i) & \mapsto & (x_j) \end{cases}$$
stetig. ❑

3.3 rationale Funktionen

Betrachte
$$\begin{cases} L^1([a,b]) & \to & Hol(\mathbb{C}^+,\mathbb{C}^{2\times 2}), mit \frac{W(z)JW(w)^*-J}{z-\overline{w}} \geq 0 \\ H & \mapsto & W(b,z) \end{cases} \text{ und } \begin{cases} L^1([a,b],\mathbb{R}^{2\times 2}) \geq 0, b \; nicht \; L^1-RP & \to & \mathcal{N}_0 \\ H & \mapsto & q_H(z) \end{cases}.$$
Wir werden zeigen, dass die zweite Funktion surjektiv ist.

3.3.1 Definition. Sei
$$* : \begin{cases} GL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_\infty & \to & \mathbb{C}_\infty \\ \left(\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}, \tau\right) & \mapsto & \begin{cases} \frac{m_{11}\tau+m_{12}}{m_{21}\tau+m_{22}}, & \tau\in\mathbb{C}, m_{21}\tau+m_{22}\neq 0 \\ \frac{m_{11}}{m_{21}}, & \tau=\infty, m_{21}\neq 0 \\ \infty, & sonst. \end{cases} \end{cases}$$
◊

Es gilt
$$(M_1M_2) * \tau = M_1 * (M_2 * \tau).$$
Dies kann man mittels mühsamen Nachrechnens zeigen, wird aber hier nicht ausgeführt.

3.3.2 Definition. Sei $\mathbb{C}[z]_0$ die Menge aller komplexen Polynome p mit $p(0) = 0$. Dann sei
$$\Lambda : \{(p,r) \in \mathbb{C}[z]\times\mathbb{C}[z] | r \neq 0, r \nmid p\} \to [(\mathbb{C}[z]\times\mathbb{C}[z]) \setminus \{(0,0)\}] \times [\mathbb{C}[z]_0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}[z]_0]$$
so definiert durch die Vorschrift

1. Sei $s_1 \in \mathbb{C}[z]$ das eindeutige, mit $\deg(p - s_1r) < \deg r$, so setze $p_1 := r, r_1 := p - s_1r \neq 0$.
2. Sei $s_2 \in \mathbb{C}[z]$ jenes eindeutige mit $\deg(p_1 - s_2r_1) \leq \deg r_1$ mit $s_2(0) = 0$. Setze $p_2 := r_1 + s_1(0)r_2$ und $r_2 = p_1 - s_2r_2$.

   Falls $r_2 = 0$, dann $p_2 = r_1 \neq 0$
3. Setze
$$\Lambda(p,r) := ((p_2,r_2),(s_1 - s_1(0), s_1(0), s_2)).$$

◊

Warum wir den veränderten Euklidischen Algorithmus verwenden mit $s_2(0) = 0$ wird sich im Laufe der Rechnung erweisen und hängt damit zusammen, dass $W(H;0,z) = \mathrm{id}$ und die Identität hat rechts oben einen Nuller.

II303. **3.3.3 Lemma.** *Sei $p, r \in \mathbb{R}[z], r \neq 0, r \nmid p$. Schreibe $\Lambda(p,r) = \big((\tilde{p},\tilde{r}),(v,\cot\phi,-u\sin^2\phi)\big)$ mit $\phi \in (0,\pi)$. Dann gilt*

$$\frac{p}{r} = \begin{pmatrix}1 & v\\0 & 1\end{pmatrix}\left(e^{\phi J}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi J}\right) * \frac{\tilde{p}}{\tilde{r}}.$$

Vergleiche mit indivisible Intervalle. Man kann mit einem Schritt zwei intervalle abspalten.

Beweis. Es gilt

$$e^{\phi J}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi J} = \begin{pmatrix}1 - u\cos\phi\sin\phi & u\sin^2\phi\\ -u\sin^2\phi & 1 + u\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + s_2s_1(0) & -s_2s_1(0)^2\\ s_2 & 1 - s_2s_1(0)\end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix}1 & v\\0 & 1\end{pmatrix}\left(e^{\phi J}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi J}\right) * \frac{\tilde{p}}{\tilde{r}} = (s_1 - s_1(0)) + \begin{pmatrix}1 + s_2s_1(0) & -s_2s_1(0)^2\\ s_2 & 1 - s_2s_1(0)\end{pmatrix} * \frac{\tilde{p}}{\tilde{r}}$$

Es kann sein, dass $\tilde{r} = 0$, in diesem Fall ist $\tilde{p} \neq 0$ und damit $\frac{\tilde{p}}{\tilde{r}} = \infty$. In diesem Fall gilt $0 \neq r = p_1 = s_2r_1$. Also ist $s_2 \neq 0$

$$s_2r_1 = s_2(p - s_1r)$$

Also ist $\frac{1}{s_2} = \frac{p}{r} - s_1$. Weiters gilt

$$\begin{pmatrix}1 & v\\0 & 1\end{pmatrix}\left(e^{\phi J}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi J}\right) * \frac{\tilde{p}}{\tilde{r}} = (s_1 - s_1(0)) + \frac{1 + s_2s_1(0)}{s_2} = s_1 + \frac{1}{s_2} = \frac{p}{r}.$$

Falls $\tilde{r}_2 \neq 0$, so gilt

$$s_2\frac{\tilde{p}}{\tilde{r}} + (1 - s_2s_1(0)) = s_2\left(\frac{p_2}{r_2} - s_1(0)\right) + 1 = s_2\frac{p_2 - s_1(0)r_2}{r_2} + 1 = s_2\frac{r_1}{r_2} + 1 = \frac{s_2r_1 + r_2}{r_2} = \frac{p_1}{r_2} = \frac{r}{r_2} \neq 0.$$

Weiters gilt

$$(1+s_2s_1(0))p_2 - s_2s_1(0)^2r_2 = (1+s_2s_1(0))(r_1+s_1(0)r_2) - s_2s_1(0)^2r_2 = r_1 + s_2s_1(0)r_1 + s_1(0)r_2 + s_2s_1(0)^2r_2 - s_2s_1(0)^2r_2$$

$$= r_1 + s_2s_1(0)r_1 + s_1(0)(p_1 - s_2r_1) = r_1 + s_1(0)p_1 = p - s_1r + s_1(0)r.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix}1 + s_2s_1(0) & -s_2s_1(0)^2\\ s_2 & 1 - s_2s_1(0)\end{pmatrix} = (s_1 - s_1(0)) + \frac{p - s_1r + s_1(0)r}{p_1} = \frac{p}{r}.$$

❑

3.3.4 Bemerkung. Es gilt $\deg\tilde{p} \leq \deg p$ und $\deg\tilde{r} < \deg r$.

Denn $\deg\tilde{r} = \deg r_2 \leq \deg r_1 < \deg r$. Andererseits gilt

$$\deg\tilde{p} = \deg p_2 \leq \max\{\deg r_2, \deg r_2\} = \deg r_1.$$

Falls $\deg p \geq \deg r$, so ist $\deg r_1 < \deg p$. Sonst ist $s_1 = 0$ und damit $p = r_1$ und damit $\deg r_1 = \deg p$.

Damit haben wir gezeigt, dass der Algorithmus zu Ende kommen muss. ◊

II305. **3.3.5 Satz.** *Sei $q \in \mathbb{R}(z)$ eine rationales Polynom in z. Dann existieren eindeutige $n \in N, \tau \in \mathbb{R}_\infty, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[z]_0 \setminus \{0\}, \phi_1, \dots, \phi_n \in [0,\pi)$ mit $\tau \neq \cot\phi_n$ und $\phi_{k-1} \neq \phi_k$ für $k = 2, \dots, n-1$, sodass*

$$q = \prod_{m=1}^{n} e^{\phi_m J}\begin{pmatrix}1 & p_m\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi_m J} * \tau.$$

3.3.6 Bemerkung. Die zusätzlichen Ansprüche an ϕ_i erzwingen die Eindeutigkeit. Wären zwei aufeinanderfolgende Polynome gleich, so könnte man zwei Matrizen zusammenfügen. Falls $\tau = \cot\phi_n$, so liefert die erste Möbiustransformation ∞ und man kann den letzten weglassen. Die Anforderungen sind aber auch keine Einschränkung.

Weiters sei angemerkt, dass Produkte immer von links nach rechts aufgebaut werden.

Der Grad einer rationalen Funktion ist Grad des Zählers - Grad des Nenners. ◊

II307. **3.3.7 Lemma.** *Sei $q \in \mathbb{R}(z)$ nicht konstant. Dann gibt es genau ein $\alpha \in [0, \pi)$ mit* $\deg(e^{\alpha J} * q) > 0$.

Beweis. Sei $q = \frac{p}{r}$ mit $ggt(p, r) = 1$ und $p, r \in \mathbb{R}[z]$. Und $\max\{\deg p, \deg r\} > 0$. Dann ist

$$e^{\alpha J} * q = \frac{\cos\alpha \cdot q - \sin\alpha}{\sin\alpha \cdot q + \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha \cdot p - \sin\alpha \cdot r}{\sin\alpha \cdot p + \cos\alpha \cdot r}.$$

Sei $\deg p > \deg r$. So gilt

$$\deg(e^{\alpha J} * q) = \begin{cases} \deg r - \deg p > 0, & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \deg p - \deg r < 0, & \alpha = 0 \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Sei $\deg p < \deg r$. So gilt

$$\deg(e^{\alpha J} * q) = \begin{cases} \deg r - \deg p > 0, & \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \deg p - \deg r < 0, & \alpha = 0 \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Sei $\deg p = \deg r$. So schreibe

$$p(z) = \sum_{l=0}^{n} a_l z^l, \quad r(z) = \sum_{l=0}^{n} b_l z^l$$

$$\deg(e^{\alpha J} * q) = \begin{cases} < 0, & \frac{b_n}{a_n} = \cot\alpha \\ > 0, & \frac{a_n}{b_n} = \cot\alpha \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Also ist das α eindeutig. ❑

Beweis von Satz 3.3.5.

1. (a) Falls q konstant ist: So kann man $n = 0, q = \tau$ wählen.

   (b) Falls q ein Polynom ist: So ist
   $$q = \begin{pmatrix} 1 & q - q(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * q(0).$$

   (c) Falls $r \nmid p$: So ist
   $$\frac{p}{r} = e^{\phi_1 J} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} e^{\phi_2 J} \begin{pmatrix} 1 & p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_2 J} * \frac{\tilde{p}}{\tilde{r}},$$
   wobei $p_1 := v, \phi_1 := 0, p_2 := u, \phi_2 := \phi$ aus Lemma 3.3.3. Weiters gilt $\deg\tilde{r} < \deg r$. Diesem Fall kann man nun iterieren und landet nach endlich vielen Schritten bei einem Polynom.

2. Wir zeigen
   $$q \in \mathbb{R}(z) : \ q = \left[\prod_{m=1}^{n} e^{\phi_m J} \begin{pmatrix} 1 & p_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_m J}\right] * \tau.$$

   Dann ist $\deg(e^{-\phi_1 J} * q) > 0$.

   Dies zeigen wir induktiv. Sei $n = 1$ so gilt
   $$q = e^{\phi_1 J} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{e^{-\phi_1 J} * \tau}_{\neq\infty}$$

Damit folgt

$$e^{-\phi_1 J} * q = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} * \tau = (e^{-\phi_1 J} * \tau) + p_1.$$

Also deg > 0.

Angenommen, es gilt für alle $m < n$. Sei

$$q = e^{\phi_1 J} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} * \underbrace{\left[\prod_{m=1}^{n} e^{\phi_m J} \begin{pmatrix} 1 & p_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_m J} * \tau \right]}_{=:\tilde{\tau}}$$

Also folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\deg(e^{-\phi_1 J} * \tilde{\tau}) > 0.$$

Wegen $\phi_1 \neq \phi_2$ folgt mit Lemma 3.3.7 $\deg(e^{-\phi_2 J} * \tilde{\tau}) \leq 0$. Damit gilt

$$e^{-\phi_1 J} * q = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} * \tilde{\tau} = (e^{-\phi_1 J} * \tilde{\tau}) + p_1$$

und damit deg > 0.

3. Sei

$$q \in \mathbb{R}(z): \; q = \left[\prod_{m=1}^{n} e^{\phi_m J} \begin{pmatrix} 1 & p_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_m J} \right] * \tau$$

eine reduzierte Darstellung.

Falls q konstant ist: So ist $\deg(e^{\alpha J} * q) \leq 0$. Damit muss $n = 0$ sein, da sonst nach dem 2. Schritt $\deg(e^{\phi_1 J} * q) > 0$.

Damit können wir $q \neq konst.$ voraussetzen.

Nach Lemma 3.3.7 gibt es genau ein $\alpha \in [0, \pi)$ mit $\deg(e^{\alpha J} * q) > 0$, weil ϕ_1 ebenfalls diese Eigenschaft hat, ist $\phi_1 = \alpha$ eindeutig.

Nun ist wegen

$$e^{-\phi_1 J} * q = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} * \tilde{\tau} = (e^{-\phi_1 J} * \tilde{\tau}) + p_1$$

p_1 eindeutig durch die linke Seite bestimmt.

Wegen

$$\tilde{\tau} = \left(e^{\phi_1 J} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} \right)^{-1} * q.$$

ist $\tilde{\tau}$ eindeutig bestimmt und die Eindeutigkeit folgt mittels vollständiger Induktion.

❑

II308. **3.3.8 Definition.** Wir definieren

$$\mathbb{H} := \left\{ H : (0, \infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2} | H \text{ messbar }, H \geq 0 \text{ f.ü. }, \operatorname{tr} H = 1 \text{ f.ü. } \right\},$$

$$\mathbb{F} := \left\{ H \in \mathbb{H} | \exists 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = \infty, \exists \phi_1, \ldots \phi_n \in [0, \pi) : H(t) = \xi_{\phi_j} \xi_{\phi_j}^*, t \in (t_{j-1}, t_j) \right\}$$

und

$$\Psi : \mathbb{H} \to \mathcal{N}_0, H \mapsto \Psi_H.$$

◊

II309. **3.3.9 Satz.** *$\Psi|_{\mathbb{F}}$ ist eine Bijektion von $\mathbb{F}$ auf $\mathcal{N}_0 \cap \mathbb{R}(z)_\infty$.*

Beweis. 1. Wir zeigen, dass Ψ_H auf $\mathbb{F}$ rational ist.

Sei $H \in \mathbb{F}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = \infty$ und $\phi_1, \ldots \phi_{n+1} \in [0, \pi)$. Für $H = \xi_\phi \xi_\phi^*$ ist nach Beispiel 1.4.4

$$W(H; t, z) = \begin{cases} e^{\phi_1 J}\begin{pmatrix} 1 & tz \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J}, & t \in [0, t_1] \\ e^{\phi_1 J}\begin{pmatrix} 1 & t_1 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J} e^{\phi_1 J}\begin{pmatrix} 1 & (t - t_1)z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J}, & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ \prod_{k=1}^{n-1} e^{\phi_k J}\begin{pmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1})z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} e^{\phi_n J}\begin{pmatrix} 1 & (t - t_n)z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_n J}, & t \in [t_{n-1}, \infty) \end{cases}$$

Nun ist

$$q_H(z) = \lim_{t\to\infty} (W(H; t, z) * \cot \phi_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} e^{\phi_k J}\begin{pmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1})z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} * \cot \phi_{n+1} \in \mathbb{R}(z)_\infty.$$

2. Wir zeigen, $\Psi(\mathbb{F}) \supseteq \mathcal{N}_0 \cap \mathbb{R}(z)_\infty$.

   Sei $q \in \mathcal{N}_0 \cap \mathbb{R}(z)_\infty$. Falls q konstant ist, wähle $\phi \in [0, \pi)$, sodass $\cot \phi = q$ und sei H der Hamiltonian zum indivisible Intervall mit ϕ. Damit folgt

$$q_H(z) = \lim_{t\to\infty} W(H; t, z) * \cot \phi = q.$$

   Falls q nicht konstant ist. Betrachte die Faktorisierung aus Satz 3.3.5. Falls alle p_k linear sind ($p_k = \beta_k z$), dann sind wir fertig, da wir dann den Hamiltonian erraten können. Nämlich mit dem finite rang Hamiltonian mit ϕ_k und $t_k = \sum_{n=1}^{k} \beta_n$.

3. Wir zeigen nun, dass alle p_k linear ist. Wegen $\deg\left(e^{-\phi_1 J} * q\right) > 0$ und $q \in \mathcal{N}_0$, d.h., $q(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathbb{C}^+$. Nun ist $e^{-\phi_1 J} * q \in \mathcal{N}_0$, weil $\tau \mapsto e^{\alpha J} * \tau$ ist ein Aut von $\mathbb{C}^+$.

   Wir wissen, dass für alle $Q \in \mathcal{N}_0$ mit Integraldarstellung (a, β_1, μ) der Grenzwert $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{iy} Q(iy) = \beta_1$ existiert. Also folgt $\deg\left(e^{-\phi_1 J} * q\right) \leq 1$.

   p_1 ist nach der Faktorisierung aus Satz 3.3.5 der Hauptteil der Laurentreihe von $e^{-\phi_1 J} * q$ bei ∞. Damit folgt $p_1 = \beta_1 z$.

   Weiters ist

$$\prod_{k=1}^{n} e^{\phi_k J}\begin{pmatrix} 1 & p_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} * \tau = \left(e^{\phi_1 J}\begin{pmatrix} 1 & -p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_1 J}\right) * q = e^{\phi_1 J} * \left(e^{-\phi_1 J} * q - \beta_1 z\right).$$

   Nun ist $e^{-\phi_1 J} * q \in \mathcal{N}_0$ und damit $e^{-\phi_1 J} * q - \beta_1 z \in \mathcal{N}_0$. Also können wir das Argument von vorher induktiv fortführen.

   Damit ist $\Psi|_{\mathbb{F}}$ surjektiv.

4. Wir zeigen nun, dass $\Psi|_{\mathbb{F}}$ injektiv ist. Betrachte zwei finite rang Hamiltonian $H, \tilde{H}$ mit den Daten t_k, ϕ_k bzw. $\tilde{t}_k, \tilde{\phi}_k$, wobei $\phi_k \neq \phi_{k+1}$ und $\tilde{\phi}_k \neq \tilde{\phi}_{k+1}$. Dies ist keine Einschränkung. Nun gilt

$$q_H(z) = e^{\phi_k J}\begin{pmatrix} 1 & (t_k - t_{k-1})z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} * \cot \phi_{n+1}.$$

   Wegen der Eindeutigkeit der Daten aus Satz 3.3.5, müssen auch schon die Daten t_k, ϕ_k und $\tilde{\phi}_k \neq \tilde{\phi}_{k+1}$ übereinstimmen. Also ist $\Psi|_{\mathbb{F}}$ injektiv.

❑

II310. **3.3.10 Satz.** $\Psi(\mathbb{H}) = \mathcal{N}_0$.

II311. **3.3.11 Definition.** Sei $\omega : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $\inf_{t\in\mathbb{R}} \omega(t) > 0$ stetig. Dann ist

$$C_0(\mathbb{R}, \omega) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}) | \underbrace{\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\, \omega(t)}_{=:\|f\|_{\infty,\omega}} < \infty \right\}.$$

Nun ist

$$\kappa : \begin{cases} C_0(\mathbb{R}, \omega) & \to & C_0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f\omega \end{cases}$$

bijektiv und isometrisch.

Also sind auch ihre Dualräume isometrisch isomorph, durch

$$\kappa' : \begin{cases} C_0(\mathbb{R})' & \to & C_0(\mathbb{R}, \omega)' \\ \nu \in M(\mathbb{R}) & \mapsto & \omega \cdot d\nu \end{cases} .$$

Für $\mu \in C_0(\mathbb{R}, \omega)'$ gilt

$$\|\mu\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,|\mu|}{\omega}$$

◊

II312. **3.3.12 Lemma.** *Die Menge*

$$\mathcal{M} := \left\{ \mu | \text{ pos. Borelmaß auf } \mathbb{R} \text{ mit } \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+t^2} \leq 1 \right\} \subseteq C_0(\mathbb{R}, 1+t^2)'$$

ist ω^*-kompakt und die Extremalpunkte $Ext\mathcal{M} = \{(1+t^2)\delta x | x \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. Nach Riez ist $\mu \geq 0$ genau dann, wenn

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), f \geq 0 : \int f d\mu \geq 0.$$

Damit ist $\mathcal{M}$ die Einheitskugel in $C_0(\mathbb{R}, 1+t^2)'$ geschnitten mit dem positiven Kegel und damit mittels Banach-Alaoglu ω^*-kompakt.

Sei $\mu \in \mathcal{M}$. Angenommen $\left|\operatorname{supp} \mu\right| \geq 2$. Damit gibt es $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ mit $\mu(\Delta_1), \mu(\Delta_2) > 0$. Also ist

$$d\mu = \mathbb{1}_{\Delta_1} d\mu + \mathbb{1}_{\Delta_2} d\mu = \underbrace{\frac{\tilde{\mu}(\Delta_1)}{\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2)}}_{\neq 0} \underbrace{\frac{\mathbb{1}_{\Delta_1}\mu}{\tilde{\mu}(\Delta_1)}(\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2))}_{\in\mathcal{M}} + \underbrace{\frac{\tilde{\mu}(\Delta_2)}{\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2)}}_{\neq 0} \underbrace{\frac{\mathbb{1}_{\Delta_1}\mu}{\tilde{\mu}(\Delta_2)}(\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2))}_{\in\mathcal{M}},$$

mit $\tilde{\mu}(\Delta)) \int_\Delta \frac{d\mu}{1+t^2}$. Es gilt

$$\int \frac{\mathbb{1}_{\Delta_1} d\mu}{\tilde{\mu}(\Delta_1)}(\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2)) \frac{1}{1+t^2} = \frac{\tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2)}{\tilde{\mu}(\Delta_1)} \int_{\Delta_1} \frac{1}{1+t^2} d\mu = \tilde{\mu}(D_1) + \tilde{\mu}(D_2) \leq 1.$$

Weiters ist

$$\alpha\delta x = (1+x^2)\delta x \cdot \frac{\alpha}{1+x^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{1+x^2}\right) 0$$

konvexkombination. ❑

Beweis von Satz 3.3.10. Weil Ψ stetig ist, $\mathbb{H}$ kompakt ist, folgt $\Psi(\mathbb{H})$ ist abgeschlossen in $\mathcal{N}_0$. Also $\Psi(\mathbb{H}) \supseteq \mathbb{R}(z)_\infty \cap \mathcal{N}_0$.

Für alle $\mu \in \mathcal{M}$ exisitieren $\mu_i \in \mathcal{M}$ und $\left|\operatorname{supp} \mu_i\right| < \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu_i \to \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu$$

Weil das eine normale Familie ist, ist dies nach Vitali lokal gleichmäßig. ❑

II313. **3.3.13 Satz.** *Sei $W \in \mathbb{R}[(z)^{2\times 2}$ und $\det W = 1$, $W(0) = \mathrm{id}$. Dann gibt es eindeutige Daten $n \in \mathbb{N}$, $p_k \in \mathbb{R}[z]_0 \setminus \{0\}$, $\phi_k \in [0, \pi$ mit $\phi_k \neq \phi_{k+1}$, sodass*

$$W = \prod_{k=1,\dots,n} \left(e^{\phi_k J} \begin{pmatrix} 1 & p_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} \right).$$

Umgekehrt ist jedes Produkt der oberen Gestalt ein Matrix-Polynom mit Determinante 1 welches bei 0 den Wert id hat.

Wir benutzen im Beweis die folgende Tatsache.

II314. **3.3.14 Lemma.** *Sei $W, \tilde{W} \in \mathbb{R}[z]^{2\times 2}$ mit $\det W = \det \tilde{W} = 1$ und*

$$W \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{W} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so existiert $p \in \mathbb{R}[z]$, sodass $\tilde{W} = W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Weil die zweiten Spalten der Matrizen übereinstimmen, schreiben wir

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & a \\ w_{21} & b \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{11} & a \\ \tilde{w}_{21} & b \end{pmatrix}.$$

Falls $a = 0$, so ist $b \neq 0$. Weiters folgt aus der Determinanten-Beziehung $w_{11} b = \tilde{w}_{11} b = 1$ und damit $w_{11} = \tilde{w}_{11}$. Somit liefert das Polynom $p(z) = \frac{\tilde{w}_{21} - w_{21}}{b}$ das Gewünschte.

Für $b = 0$ kann man das gleiche Spielchen spielen.

Falls $a, b \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\tilde{w}_{11} - w_{11}}{a} = \frac{\tilde{w}_{11} b - w_{11} b}{ab} = \frac{\tilde{w}_{11} \tilde{b} - w_{11} b}{ab} = \frac{(\det \tilde{W} + \tilde{w}_{21} a) - (\det W + w_{21} a)}{ab} = \frac{\tilde{w}_{21} - w_{21}}{b}.$$

Damit wählen wir $p := \frac{\tilde{w}_{11} - w_{11}}{a} \in \mathbb{R}[z]$. Weil a und b keine gemeinsame Nullstellen haben, ist p tatsächlich ein Polynom, da mögliche Polstellen Nullstellen von sowohl a also auch b sein müssten. ❑

Beweis von Satz 3.3.13. Wir gehen wieder in mehreren Schritten vor.

1. Die Eindeutigkeit lässt sich sehr leicht aus Satz 3.3.5 herleiten. Sei angenommen, dass in reduzierter Darstellung

$$W = \prod_{k=1,\dots,n} e^{\phi_k J} \begin{pmatrix} 1 & p_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} = \prod_{k=1,\dots,n} e^{\tilde{\phi}_k J} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{p}_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\phi}_k J}.$$

Wähle $\tau \in \mathbb{R}_\infty$ sodass $\tau \neq \cot \phi_n$ und $\tau \neq \cot \tilde{\phi}_n$. Dann sind

$$\prod_{k=1,\dots,n} e^{\phi_k J} \begin{pmatrix} 1 & p_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J} * \tau = \prod_{k=1,\dots,n} e^{\tilde{\phi}_k J} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{p}_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\phi}_k J} * \tau$$

beide reduzierte Darstellungen von der Funktion $W * \tau$ und nach Satz 3.3.5 ist diese Darstellung eindeutig.

2. Die Existenz einer Darstellung erfordert etwas mehr Aufwand. Sei uns also $W \in \mathbb{R}[z]^{2\times 2}$ mit $\det W = 1$ und $W(0) = I$ gegeben. Dann ist $w_{22}(0) = 1$ und daher $w_{22} \neq 0$. Betrachte die Funktion

$$q := W * 0 = \frac{w_{12}}{w_{22}} \in \mathbb{R}(z)$$

und sei

$$q = \underbrace{\prod_{k=1,\dots,n} e^{\phi_k J} \begin{pmatrix} 1 & p_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\phi_k J}}_{=:\tilde{W}} * \tau$$

ihre reduzierte Darstellung. Es ist

$$0 = q(0) = (\tilde{W} * \tau)(0) = \tilde{W}(0) * \tau = \tau.$$

Also haben wir

$$\frac{w_{12}}{w_{22}} = \tilde{W} * 0 = \frac{\tilde{w}_{12}}{\tilde{w}_{22}}.$$

Da $\det W = 1$, können w_{12} und w_{22} keine gemeinsamen Nullstellen haben, sind also relativ prim. Aus dem gleichen Grund sind $\tilde{w}_{12}$ und $\tilde{w}_{22}$ relativ prim. Aus der Gleichheit der Quotienten folgt also die Existenz von $a \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{w}_{12} = aw_{12} \quad \text{und} \quad \tilde{w}_{22} = aw_{22}.$$

Da $\tilde{w}_{22}(0) = w_{22}(0) = 1$, folgt $a = 1$ und damit

$$W\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \tilde{W}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Nun liefert uns Lemma 3.3.14 ein Polynom p mit

$$\tilde{W} = W\begin{pmatrix}1 & 0\\p & 1\end{pmatrix}.$$

Ist $p = 0$, so haben wir eine Darstellung von W der gewünschten Form gefunden.

Sei also im weiteren $p \neq 0$ angenommen. Wegen $\tilde{W}(0) = W(0) = I$ gilt jedenfalls $p(0) = 0$. Wir sehen, dass

$$W = \prod_{k=1,\dots,n} e^{\phi_k J}\begin{pmatrix}1 & p_k\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi_k J} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\-p & 1\end{pmatrix} = \prod_{k=1,\dots,n} e^{\phi_k J}\begin{pmatrix}1 & p_k\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\phi_k J} \cdot e^{\frac{\pi}{2}J}\begin{pmatrix}1 & p\\0 & 1\end{pmatrix}e^{-\frac{\pi}{2}J}.$$

Da $\tau = 0$, ist $\phi_n \neq \frac{\pi}{2}$ und die eben erhaltene Darstellung von W ist reduziert.

3. Die Umkehrung ist offensichtlich.

❑

Kapitel 4

Operatortheorie

IV01. *4.0.1 Motivation.* Falls H invertierbar wäre, so gilt

$$(JH)^{-1}y' = zy.$$

Betrachte den Operator $y \mapsto (JH)^{-1}y'$ und dessen Graphen

$$\{(f,g)|g = (JH)^{-1}f'\} = \{(f,g)|JHg = f'\}.$$

◊

IV02. **4.0.2 Definition.** Sei H ein Hamiltonian aus $L^1_{loc}((a,b), \mathbb{R}^{2\times 2})$, $H \geq 0$ f.ü., so definiere

$$T_{max}(H) := \{(f,g) \in L^2(H) \times L^2(H) \mid \exists \text{Repräsentant } \hat{f} \text{ von } f, \text{ a.stetig mit } JHg = \hat{f}'\}.$$

◊

Im Folgenden sei immer vorausgesetzt, dass das Intervall (a,b) nicht indivisible, d.h., H ist nicht auf ganz (a,b) von der Form $h(t)\xi_\phi\xi_\phi^T$ mit $\phi \in [0,\pi)$.

IV03. *4.0.3 Bemerkung.* Mit dieser Voraussetzung gilt die folgende Aussage

Sei $c \in \mathbb{C}^2$ und $Hc = 0$ f.ü., dann ist $c = 0$.

◊

Beweis von Bemerkung 4.0.3. Angenommen $Hc = 0$ f.ü. für $c \neq 0$. Damit ist c EV zum EW 0. Wäre der zweite EW von H auch 0, so hätte H die Gestalt eines indivisible Intervalls. Also hat H die Gestalt

$$H(t) = U(t)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_+(t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U(t)$$

mit $0 \leq \alpha_+(t)$. Damit ist der EV $e_+(t)$ von $\alpha_+(t)$ in $\{c\}^\perp$, d.h.,

$$e_+(t) = \|e_+(t)\| \underbrace{\frac{e_+(t)}{\|e_+(t)\|\, e^{i\theta(t)}}}_{konst.} e^{i\theta(t)}.$$

Es folgt $H(t)$ ist die skalierte Projektion auf $\{c\}^\perp$. Damit wäre H von der Form $h(t)\xi_\phi\xi_\phi^T$. ❏

IV04. **4.0.4 Lemma.** *Wenn $(f,g) \in T_{max}(H)$, dann ist der absolut stetige Repräsentant $\hat{f}$ von f mit $\hat{f}' = JHg$ eindeutig,*

Beweis. Sei $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ absolut stetig mit $\hat{f}_1' = JHg = \hat{f}_2'$. Also ist $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 =: c$ konstant. Weil $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ aus der selben Äquivalenzklasse sind, gilt $H(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) = 0$ und damit $c = 0$. ❏

Der maximale Operator $T_{max}(H)$ ist immer abgeschlossen und $T_{max}(H)^* \subseteq T_{max}(H)$ mit der Ko-Dimension (ohne Beweis)

- 0, falls a und b keine L^1-Randpunkte sind,
- 2, falls a oder (ausschließendes oder) b ein L^1-Randpunkt ist,
- 4, falls a und b L^1-Randpunkte sind.

4.1 T_{max} im Limit-circle-case (Lcc)

Betrachte nun den Fall, dass a und b beide L^1-Randpunkt sind. In diesem Fall bezieht sich lokal absolut stetig auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$.

IV05. **4.1.1 Definition.** Sei

$$\Gamma : \begin{cases} T_{max}(H) & \to \quad \mathbb{C}^{2\times 2} \\ (f, g) & \mapsto \quad \begin{pmatrix} \hat{f}(a) \\ \hat{f}(b) \end{pmatrix} \end{cases},$$

wobei $\hat{f}$ der eindeutige Repräsentant von f ist. ◊

IV06. *4.1.2 Bemerkung.* $T_{max}(H)$ ist ein linearer Teilraum von $L^2(H) \times L^2(H)$. Damit ist Γ linear. ◊

IV07. **4.1.3 Satz.** *Sei $H \in L^1_{loc}([a, b])$ ein Hamiltonian im Lcc. Betrachte den Raum $L^2(H)$, die maximale Relation $T_{max}(H)$ und die Randwertabbildung Γ. Dann gilt*

(i) $T_{max}(H)$ *ist abgeschlossen*

(ii) Γ *ist surjektiv*

(iii) die Greensche-Identität:

$$(g, u)_H - (f, v)_H = u(a)^* J f(a) - u(b)^* J f(b), \quad (f, g), (u, v) \in T_{max}(H)$$

(iv) $T_{max}(H)^* = \ker \Gamma$.

IV08. **4.1.4 Definition.** Definiere $T_{min}(H) := \ker \Gamma$. ◊

Beweis von Satz 4.1.3 *(iii):* Sei $f' = JHg$ und $u' = JHv$, dann gilt

$$(u^* J f)' = (u^*)' J f + u^* J f' = [v^* H(-J)] J f + u^* J [JHg] = v^* H f - u^* H g.$$

Damit folgt mittels partiellem Integrieren

$$u^*(b) J f(b) - u^*(a) J f(a) = (f, v)_H - (g, u)_H.$$

Insbesondere

$$\ker \Gamma \subseteq T_{max}(H)^*.$$

❑

Beweis von Satz 4.1.3 *(ii):* Für jede Konstant $c \in \mathbb{C}^2$ ist $(c, 0) \in T_{max}(H)$. Damit ist $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{ran} \Gamma$ für alle $c \in \mathbb{C}^2$. Für $c \in \mathbb{C}^2$ ist

$$\left(J \int_a^x H(t)\, dt \cdot c, c \right) \in T_{max}(H).$$

Mit Bemerkung 4.0.3 und $H \geq 0$ ist für d konstant $\left(\int_a^b H \right) d = 0$ genau dann, wenn $d = 0$. Also ist $\int_a^b H(t)\, dt$ invertierbar.

Für alle $d \in \mathbb{C}^2$ gibt es also ein $c \in \mathbb{C}^2$ mit

$$J \left(\int_a^b H(t)\, dt \right) c = d.$$

Damit gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \in \operatorname{ran} \Gamma$. Aus der Linearität von Γ folgt damit die Surjektivität. ❑

IV10. **4.1.5 Lemma.** *Betrachte $R : L^2(H) \to L^2(H)$ mit*

$$(Rg)(x) := \int_a^x JH(t) g(t)\, dt.$$

Dann ist R kompakt.

Beweis. Bezeichne

$$(Rg)(x) := \begin{pmatrix} (Rg)_1(x) \\ (Rg)_2(x) \end{pmatrix}.$$

So gilt

$$|(Rg)_1(x)| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \int_a^x JHg \right| = \left| \int_a^b \mathbb{1}_{[a,x]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T JHg \right| \overset{C.S.}{\leq} \|g\|_H \cdot \left\| \mathbb{1}_{[a,x]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T J \right\|_H$$
$$= \|g\|_H \cdot \int_a^x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T JH(-J) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=h_{22}\geq 0} \leq \|g\|_H \cdot \int_a^b h_{22}\, dt.$$

Für $x > y$ gilt

$$|(Rg)_1(x) - (Rg)_1(y)| = \left| \int_a^b \mathbb{1}_{[y,x]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T JHg \right| \overset{C.S.}{\leq} \|g\|_H \cdot \left\| \mathbb{1}_{[y,x]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T J \right\|_H = \|g\|_H \cdot \int_y^x h_{22}\, dt.$$

Weil b ein L^1-Randpunkt ist, ist $\int_a^b h_{22}\, dt < \infty$. Damit ist

$$\left\{ (Rg)_1 | g \in L^2(H), \|g\|_H \leq 1 \right\}$$

gleichgradig stetig und punktweise beschränkt und besteht aus absolut stetigen Funktionen. Also ist diese Menge relativ kompakt in $C([a, b])$ nach Arzela-Asculi. Analog kann man dies für die 2. Komponente zeigen. Damit ist

$$R\left(B_1^{L^2(H)}(0) \right) \subseteq \left\{ (Rg)_1 | g \in L^2(H), \|g\|_H \leq 1 \right\} \times \left\{ (Rg)_2 | g \in L^2(H), \|g\|_H \leq 1 \right\}$$

relativ kompakt in $C([a, b], \mathbb{C}^2)$ und damit ist die Einbettung in $L^2(H)$ beschränkt. Also gehen relativ kompakte Mengen in relativ kompakte Mengen über. Somit ist R kompakt. ❑

IV11. **4.1.6 Lemma.** *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1.3 *und Lemma* 4.1.5 *gilt*

$$T_{max}(H) = R^{-1} \boxtimes \left(\mathbb{C}^2 \times \{0\} \right).$$

Beweis. Für alle $c \in \mathbb{C}^2$, $(c, 0) \in T_{max}(H)$. Weiters ist für alle $g \in L^2(H)$ $(Rg)' = JHg$ und damit $(Rg, g) \in T_{max}(H)$ Also gilt $T_{max}(H) \supseteq R^{-1} \boxtimes \left(\mathbb{C}^2 \times \{0\} \right)$.

Andererseits gilt für $(f, g) \in T_{max}(H)$

$$(f - Rg)' = f' - (Rg)' = JHg - JHg = 0.$$

Damit gilt

$$(f, g) = (Rg, g) - (c, 0).$$

❑

Beweis von Satz 4.1.3 *(i).* Damit ist $T_{max}(H)$ also Produkt einer kompakten mit endlich-dimensionalen Menge abgeschlossen. ❑

IV12. **4.1.7 Lemma.** *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1.3 *und Lemma* 4.1.5 *gilt*

$$(R^* g)(x) = - \int_x^b JHg.$$

Insbesondere gilt $(R^{-1})^* \subseteq T_{max}(H)$.

Beweis. Analog zur Kompaktheit von R kann man zeigen, dass die Abbildung $S : g \mapsto - \int_x^b JHg$ ein kompakter und daher beschränkter Operator in $L^2(H)$ ist. Für $v \in L^2(H)$ folgt mit Fubini

$$(Sg, v) - (g, Rv) = \int_a^b v^* H(t) \left(- \int_t^b JHg \right) dt - \int_a^b \left(\int_a^t JHv \right)^* H(t) g\, dt$$
$$= \int_a^b \int_a^b v^* H(t)(-J) \mathbb{1}_{[t,b)}(s) H(s) g(s)\, ds\, dt - \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{[a,t]}(s) v(s) H(s) J H(t) g(t)\, ds\, dt = 0.$$

Damit ist $R^* = S$.

Weites gilt $(R^* g)' = JHg$. Also ist $(R^* g, g) \in T_{max}$ und damit $(R^{-1})^* \subseteq T_{max}(H)$. ❑

Beweis von Satz 4.1.3 *(iv).* Es fehlt zu zeigen $T_{max}^* \subseteq \ker \Gamma$.

Mit $R^{-1} \subseteq T_{max}(H)$ folgt

$$T_{max}(H)^* \subseteq (R^{-1})^* \subseteq T_{max}(H).$$

Sei $(f, g) \in T_{max}(H)^*$, so ist $(f, g) \in T_{max}(H)$ und damit gilt mit der Green'schen Identität

$$0 = (f, v)_H - (g, u)_H = u(b)^* J f(b) - u(a)^* J f(a) = \Gamma((u, v))^* \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \Gamma((f, g)), \quad \forall (u, v) \in T_{max}(H).$$

Weil Γ surjektiv ist und die Matrix $\begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ invertierbar, folgt $\Gamma(f, g) = 0$.

❑

4.2 T_{max} im Limit-point-case (Lpc)

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass a, aber nicht b, ein L^1-Randpunkt ist.

Wir werden in diesem Abschnitt analoge Aussagen zum Lcc zeigen. Der Unterschied besteht darin, dass im Gegensatz zum Lcc, im Lpc der Grenzwert

$$f(b) = \liminf_{x \to b} f(x), \quad (f, g) \in T_{max}(H)$$

nicht notwendigerweise existieren muss. Wir haben als Randwertabbildung also nur mehr

$$\Gamma : \begin{cases} T_{max}(H) & \to & \mathbb{C}^2 \\ (f, g) & \mapsto & f(a) \end{cases}.$$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Eigenschaften (i)-(iv) aus Satz 4.1.3, teils adaptiert, auch für den Lpc gelten.

IV17. **4.2.1 Satz.** *Sei $H \in L^1_{loc}([a, b))$ ein Hamiltonian im Lpc. Betrachte den Raum $L^2(H)$, die maximale Relation $T_{max}(H)$ und die Randwertabbildung Γ. Es gilt*

(i) $T_{max}(H)$ ist abgeschlossen

(ii) Γ ist surjektiv

(iii) die Greensche-Identität:

$$(g, u)_H - (f, v)_H = u(a)^* J f(a), \quad (f, g), (u, v) \in T_{max}(H)$$

(iv) $T_{max}(H)^* = \ker \Gamma$.

Die Esssenz im Beweis ist zu zeigen, dass die Werte $u(x)^* J f(x)$ für $x \to b$ gegen Null streben.

Wir betrachtn die lineare Relation

$$T_0 := \{(f, g) \in T_{max}(H) : \operatorname{supp} f \subseteq (a, b) \text{ kompakt}\}.$$

IV18. **4.2.2 Lemma.** *Sei $[a', b'] \subseteq (a, b)$.*

(i) Ist $(f, g) \in T_0$ und $\operatorname{supp} f \subseteq [a', b']$, so gilt

$$\operatorname{supp} Hg \subseteq [a', b'] \quad \textit{und} \quad \int_{a'}^{b'} H(x) g(x)\, dx = 0. \tag{4.2.1}$$ C4

(ii) Ist $g \in L^2(H)$ und gilt (4.2.1), so existiert $f \in L^2(H)$ mit

$$(f, g) \in T_0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp} f \subseteq [a', b'].$$

Beweis. Für $(f, g) \in T_0$ gilt $f' = JHg$, also ist $\operatorname{supp} Hg \subseteq \operatorname{supp} f$. Weiters ist $f(a) = 0$ wegen $\operatorname{supp} f \subseteq [a', b']$ und damit

$$f(x) = \int_{a'}^{x} f'(t)\, dt = \int_{a'}^{x} JH(t)g(t)\, dt.$$

Für $x = c$, mit $b' < c < b$ folgt damit

$$0 = f(c) = \int_{a'}^{c} JH(t)g(t)\, dt = \int_{a'}^{b'} JH(t)g(t)\, dt.$$

Ist umgekehrt $g \in L^2(H)$ mit (4.2.1) gegeben, so setze

$$f(x) := \int_{a'}^{x} JH(t)g(t)\, dt, \quad x \in [a, b).$$

❑

IV19. **4.2.3 Proposition.** *Es gilt*

$$T_0 \subseteq T_0^* = T_{max}(H).$$

Insbesondere ist $T_{max}(H)$ abgeschlossen und $T_{max}(H)^* = \operatorname{clo} T_0 \subseteq T_{max}(H)$.

Beweis. Wir zeigen $T_{max}(H) \subseteq T_0^*$. Dazu sei $(f, g) \in T_{max}(H)$, $(u, v) \in T_0$ und sei $[a', b'] \subseteq (a, b)$ mit $\operatorname{supp} u \subseteq [a', b']$.

Die Green'sche Identität für $H|_{[a',b']}$ liefert

$$(g, u)_{L^2(H)} - (f, v)_{L^2(H)} = \underbrace{u(a')^*}_{=0} Jf(a') - \underbrace{u(b')^*}_{=0} Jf(b') = 0,$$

Also ist $(f, g) \in T_0^*$.

Umgekehrt sei $(f, g) \in T_0^*$. Sei $u : (a, b) \to \mathbb{C}^2$ eine Lösung der Differentialgleichung $u' = JHg$ und sei $[a', b'] \subseteq (a, b)$. Für eine beliebige Funktion ψ mit (4.2.1) sei φ wie in Lemma 4.2.2 (ii) konstruiert mit $(\varphi, \psi) \in T_0$ und $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [a', b']$. Dann gilt

$$(\psi, f)_{L^2(H)} - (\varphi, g)_{L^2(H)} = 0$$

Mit

$$g^*H = g^*H^* = (Hg)^* = (-Ju')^* = u'^*(-J)^* = u'^*J, \text{ bzw.} \varphi(a') = \varphi(b') = 0$$

folgt somit

$$\int_{a'}^{b'} f(x)^*H(x)\psi(x)\, dx = \int_{a'}^{b'} g(x)^*H(x)\phi(x)\, dx = \int_{a'}^{b'} u'(x)^*J\phi(x)\, dx$$
$$= -\int_{a'}^{b'} u(x)^*J\phi'(x)\, dx + \underbrace{[u(x)^*J\phi(x)]\Big|_{a'}^{b'}}_{=0} = \int_{a'}^{b'} u(x)^*H(x)\psi(x)\, dx.$$

Also ist

$$(f - u)\mathbb{1}_{[a',b']} \perp \psi, \quad \text{im } L^2(H).$$

Betrachte den Raum $L^2\left(H|_{[a',b']}\right)$. Dann ist $\mathbb{C}^2 \subseteq L^2\left(H|_{[a',b']}\right)$ und

$$(\mathbb{C}^2)^\perp = \left\{\psi \in L^2\left(H|_{[a',b']}\right) : \int_{a'}^{b'} H(x)\psi(x)\, dx = 0\right\}.$$

Es folgt

$$\left\{\psi \in L^2\left(H|_{[a',b']}\right) : \int_{a'}^{b'} H(x)\psi(x)\, dx = 0\right\}^\perp = \mathbb{C}^2$$

und wir schließen

$$(f - g)\mathbb{1}_{[a',b']} = \gamma = konstant, \quad \text{im } L^2\left(H|_{[a',b']}\right).$$

Die Funktion $\mathbb{1}_{[a',b']}(\gamma + u)$ ist ein absolut stetiger Repräsentant von $f\mathbb{1}_{[a',b']}$ und es gilt

$$[\mathbb{1}_{[a',b']}(\gamma + u)]' = JHg, \quad x \in (a', b') \text{ f.ü.},$$

also haben wir

$$(\mathbb{1}_{[a',b']}f, \mathbb{1}_{[a',b']}g) \in T_{max}\left(L^2\left(H|_{[a',b']}\right)\right).$$

Sei nun $[a',b']$ so, dass (a',b') nicht H-indivisible ist und sei $[a'',b''] \supseteq [a',b']$. Wegen

$$(\mathbb{1}_{[a',b']}f, \mathbb{1}_{[a',b']}g) \in T_{max}\left(L^2\left(H|_{[a',b']}\right)\right) \text{ und } (\mathbb{1}_{[a'',b'']}f, \mathbb{1}_{[a'',b'']}g) \in T_{max}\left(L^2\left(H|_{[a'',b'']}\right)\right).$$

gibt es absolut stetige Repräsentanten $f_{a',}$ und $f_{a'',b''}$ mit

$$f'_{a',b'}(x) = JHg(x), \quad x \in (a',b') \text{ f.ü., bzw. } f'_{a'',b''}(x) = JHg(x), \quad x \in (a'',b'') \text{ f.ü..}$$

Da (a',b') nicht indivisible ist, folgt $f_{a'',b''}|_{(a',b')} = f_{a',b'}$. Schöpft man das Intervall (a,b) nun mit solchen Intervallen $[a'',b'']$ aus, so erhält man einen absolut stetigen Repräsentanten $f_{a,b}$ von f im $L^2(H)$ mit $f'_{a,b} = JHg$. Wir sehen, dass $(f_{a,b}, g) = (f,g) \in T_{max}(H)$ und damit $T_0^* \subseteq T_{max}(H)$.

Die Inklusion $T_0 \subseteq T_{max}(H)$ geht trivial aus der Definition von T_0 hervor, also gilt

$$T_0 \subseteq T_{max}(H) = T_0^*.$$

Als Adjungierte einer Relation ist $T_{max}(H)$ abgeschlossen. Weiters folgt damit

$$T_{max}(H)^* = T_0^{**} = \overline{T_0} \subseteq T_{max}(H).$$

❑

Als nächstes zeigen wir, dass Γ surjektiv ist.

IV20. **4.2.4 Lemma.** *Sei $\gamma \in \mathbb{C}^2$. Dann existiert $(f,g) \in T_{max}(H)$ mit $f(a) = \gamma$ und $\sup \operatorname{supp} f < b$. Insbesondere ist Γ surjektiv.*

Beweis. Wähle $b' \in (a,b)$ so, dass (a,b') nicht indivisible ist. Wir zeigen, dass dann die Matrix $\int_a^{b'} H(x)\,dx$ invertierbar ist. Angenommen es gäbe ein $0 \neq c \in \mathbb{C}^2$ mit $\int_a^{b'} H(x)\,dx \cdot c = 0$. Dann folgt

$$0 = \int_a^{b'} \underbrace{(H(x)c,c)_{\mathbb{C}^2}}_{\geq 0}\,dx,$$

also $(H(x)c,c)_{\mathbb{C}^2} = 0$ für fast alle $x \in (a,b')$. Nun ist $H(x) \geq 0$ und daher ist $[\alpha,\beta] := (H(x)\alpha,\beta)$ ein positiv semidefinites Skalarprodukt in $\mathbb{C}^2$. Nach der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung folgt

$$|[c,d]| \leq [c,c]^{\frac{1}{2}}[d,d]^{\frac{1}{2}} = 0, \quad d \in \mathbb{C}^2.$$

Also ist $H(x)c = 0$. Es folgt, dass (a,b') indivisible ist und damit im Widerspruch zur Annahme steht.

Sei nun $c \in \mathbb{C}^2$ jener Vektor mit

$$\left(\int_a^{b'} H(x)\,dx\right)c = J\gamma$$

und definiere

$$g(x) := \begin{cases} c, & x \in [a',b'] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f(x) := \gamma + \int_a^x JH(t)g(t)\,dt, \quad x \in [a,b).$$

Dann ist f absolut stetig, konstant für $x \in [b',b)$ und

$$f(b') = \gamma + J\int_a^{b'} H(t)c\,dt = \gamma + J(J\gamma) = 0.$$

Also ist $\operatorname{supp} f \subseteq [a,b']$. Insbesondere ist $f \in L^2(H)$. Klarerweise ist

$$f(a) = \gamma \quad \text{und} \quad (f,g) \in T_{max}(H).$$

❑

IV21. **4.2.5 Lemma.** *Seien $(f,g),(u,v)\in T_{max}(H)$. Dann existiert der Limes $\lim_{x\to b} u(x)^*Jf(x)$ und es gilt*

$$(g,u)_H-(f,v)_H=u(a)^*Jf(a)-\lim_{x\to b}u(x)^*Jf(x).$$

Beweis. Die Green'sche Identität für den Hamiltonian $H|_{[a,x]}$ gibt

$$\int_a^x u(t)^*H(t)g(t)\,dt-\int_a^x v(t)^*H(t)f(t)=u(a)^*Jf(a)-u(b)^*Jf(b).$$

Da $f,g,u,v\in L^2(H)$, gilt

$$\lim_{x\to b}\int_a^x u(t)^*H(t)g(t)\,dt=\int_a^b u(t)^*H(t)g(t)\,dt=(g,u)_{L^2(H)},\lim_{x\to b}\int_a^x v(t)^*H(t)f(t)\,dt=\int_a^b v(t)^*H(t)f(t)\,dt=(f,v)_{L^2(H)}.$$

❑

Die nächste Aussage ist eine wesentliche Abschätzung der Eigenfunktionen für $x\to b$.

IV22. **4.2.6 Lemma.** *Sei $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und $(f,zf)\in T_{max}(H)$, d.h., $f\in\ker(T_{max}(H)-z)$, mit $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$. Dann gilt*

$$|f_i(x)-f_i(y)|\le\sqrt{6}\,|z|\left(\int_y^x\operatorname{tr}H\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_H\,,i=1,2,\quad a\le y<x<b.$$

Beweis. Die Matrix H ist positiv semidefinit. Wir können sie also anschreiben als

$$H(x)=\operatorname{tr}H(x)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha(x)&\beta(x)\\\beta(x)&1-\alpha(x)\end{pmatrix}}_{=:H_0(x)}\tag{4.2.2}$$ C9

mit $\alpha(x)\in[0,1],\beta^2(x)\le\alpha(x)(1-\alpha(x))$. Die Matrix H_0 ist ebenfalls positiv semidefinit und hat zusätzlich $\operatorname{tr}H_0=1$. Bezeichne mit $\delta(x)$ den kleineren EW von $H_0(x)$. Damit gilt $\delta(x)\in[0,1]$ und $1-\delta(x)$ ist der zweite EW. Somit ist $\delta(x)\le\frac{1}{2}$.

Aus (4.2.2) folgt unmittelbar $|\beta(x)|\le\sqrt{\alpha(x)(1-\alpha(x))}$. Somit gilt

$$\left(\sqrt{\alpha(1-\alpha)}-|\beta|\right)^2\le\left(\sqrt{\alpha(1-\alpha)}-|\beta|\right)\left(\sqrt{\alpha(1-\alpha)}+|\beta|\right)=\alpha(1-\alpha)-\beta^2=\det H_0=\delta(1-\delta)\le\delta.$$

Also ist $0\le\sqrt{\alpha(1-\alpha)}-|\beta|\le\sqrt{\delta}$.

Wir schreiben $H_0=H_1+H_2$ mit

$$H_1:=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&1-\alpha\end{pmatrix},\ \gamma:=\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\operatorname{sgn}\beta,\qquad H_2:=\begin{pmatrix}0&\eta\\\eta&0\end{pmatrix},\ \eta:=\beta-\gamma.$$

Somit ist $\det H_1=0$ und JH_2 ist diagonal. Damit zerfällt das kanonische System von H_2 in zwei getrennte Gleichungen.

Wegen $\alpha\ge0$ und $\det H_1=0$ erfüllt H_1 das Hauptminoranten-Kriterium für positiv semidefinite Matrizen. Also ist $H_1\ge0$. Weiters gilt $H_0-H_2=H_1\ge0$ und damit $H_2\le H_0$. Weiters gilt

$$2H_0-H_1=\begin{pmatrix}2\alpha&2\beta\\2\beta&2(1-\alpha)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&1-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&2\beta-\gamma\\2\beta-\gamma&1-\alpha\end{pmatrix}.$$

Mit

$$(2\beta-\gamma)^2=4\beta^2-4\beta\gamma+\gamma^2=4|\beta|(|\beta|-(\operatorname{sgn}\beta)\gamma)+\gamma^2=4|\beta|\underbrace{\left(|\beta|-\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)}_{\le0}+\gamma^2\le\gamma^2=\alpha(1-\alpha).$$

Damit ist $2H_0-H_1\ge0$ und somit $H_1\le2H_0$. Weiters ist

$$H_0+H_2=H_2+H_1\ge0\quad\text{und damit}\quad H_0\ge-H_2.$$

Damit folgt insgesamt

$$\pm H_2 \leq H_0, \quad 0 \leq H_1 \leq 2H_0.$$

Betrachte nun die Diff-Gl.

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = zJH \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = z(\operatorname{tr} H)\left[JH_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + JH_2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\right] = z(\operatorname{tr} H)\left[\begin{pmatrix} -\gamma f_1 - (1-\alpha) f_2 \\ \alpha f_1 + \gamma f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\eta f_1 \\ \eta f_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= z(\operatorname{tr} H)\left[\underbrace{\left(\operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha} f_1 + \sqrt{1-\alpha} f_2\right)}_{=:\varphi}\begin{pmatrix} -\sqrt{1-\alpha} \\ \operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\right].$$

Damit können wir nun abschätzen

$$|f_1(x) - f_1(y)|^2 = \left|\int_y^x f_1'(t)\, dt\right|^2 = |z|^2 \left|\int_y^x \left(-\varphi(t)\sqrt{1-\alpha(t)} - \eta(t) f_1(t)\right)(\operatorname{tr} H(t))\, dt\right|^2$$

$$\overset{C.S.\ \text{im}\ L^2(\operatorname{tr} H dt)}{\leq} |z|^2 \left(\int_y^x \operatorname{tr} H\right)\left(\int_y^x \left|-\varphi\sqrt{1-\alpha} - \eta f_1\right|^2 (\operatorname{tr} H)\, dt\right)$$

Mit $AM \leq QM$ bzw. $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ für $a, b > 0$ folgt

$$\leq 2_{,}|z|^2 \left(\int_y^x \operatorname{tr} H\right)\left(\int_y^x \varphi^2 \underbrace{(1-\alpha)}_{\leq 1}(\operatorname{tr} H)\, dt + \int_y^x \eta^2 f_1^2 (\operatorname{tr} H)\, dt\right). \tag{4.2.3}$$ $\boxed{*}$

Weiters gilt

$$|\varphi|^2 = \left(\operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha} f_1 + \sqrt{\alpha(1-\alpha)} f_2\right)\left(\operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha}\overline{f}_1 + \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\overline{f}_2\right)$$

$$= \alpha\, |f|_1^2 + (1-\alpha)\, |f|_2^2 \cdot \operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha}\sqrt{1-\alpha}\left(f_1\overline{f}_2 + \overline{f}_1 f_2\right) = \overline{f}_1 (\alpha f_1 + \gamma f_2) + \overline{f}_2 (\gamma f_1 + (1-\alpha) f_2)$$

$$= (\overline{f}_1, \overline{f}_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f^* H_1 f \leq f^* 2H_0 f.$$

Nun gilt $\eta^2 = \left(|\beta| - \sqrt{\alpha(-\alpha)}\right)^2 \leq \delta$. Und weil δ der kleinere EW von H_0 ist, folgt $\delta I \leq H_0$, also $\delta f_1^2 \leq \delta f^* f \leq f^* H f$. Mit diesem Wissen folgt

$$(4.2.3) \leq 2_{,}|z|^2 \left(\int_y^x \operatorname{tr} H\right)\left(\int_y^x \varphi^2 (\operatorname{tr} H)\, dt + \int_y^x \delta f_1^2 (\operatorname{tr} H)\, dt\right)$$

$$\leq 2_{,}|z|^2 \left(\int_y^x \operatorname{tr} H\right)\left(2\int_y^x f^* H_0 f \operatorname{tr} H\, dt + \int_y^x f^* H f (\operatorname{tr} H)\, dt\right) = 6\,|z|^2\, \|f\|_H^2 \int_y^x \operatorname{tr} H\, dt.$$

Die Abschätzung für f_2 erhält man analog mit $\left|\operatorname{sgn}\beta\sqrt{\alpha}\right|^2 \leq 1$. ❑

IV23. **4.2.7 Lemma.** *Seien $z, w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und $(f, zf), (u, wu) \in T_{max}(H)$. Dann ist*

$$\lim_{x\to b} u(x)^* J f(x) = 0.$$

Beweis. Weil $u(x)^* J f(x)$ ein Skalarprodukt auf dem Span von f, u ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to b} h(x)^* J h(x) = 0$$

für $h \in \operatorname{span}\{u, f\}$.

Sei $h = \sigma f + \tau u$ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$.

(1) Wir zeigen

$$\liminf_{x\to b}\left[h(x)^* H_1(x) h(x) \cdot \int_a^x \operatorname{tr} H\right] = 0.$$

Angenommen, dies gilt nicht. So gibt es $\varepsilon > 0, a' \in (a, b)$ mit

$$h(x)^* H_1(x) h(x) \int_a^x \operatorname{tr} H \geq \varepsilon, \quad x \in [a', b).$$

Daraus folgt

$$\|h\|^2_{H_1 \cdot trH} = \int_a^b h^*(t) H_1(t) h(t) \operatorname{tr} H(t)\, dt \geq \int_{a'}^b h^*(t) H_1(t) h(t) \operatorname{tr} H(t)\, dt \geq \varepsilon \int_{a'}^b \frac{\operatorname{tr} H(t)}{\int_a^x \operatorname{tr} H(s)\, ds}\, dt$$

Substitution $\int_a^x \operatorname{tr} H = u$, so ist die obere Grenze ∞ wegen limit Poit cases. somit erhalten wir

$$= \varepsilon \int_{r'}^{\infty} \frac{1}{u} z\, du = \infty$$

Wegen $\operatorname{tr} H \cdot H_1 \leq 2H_0 \operatorname{tr} H = 2H$ ist jedes $h \in L^2(H)$ in $L^2(\operatorname{tr} HH_1)$. Dies steht im Widerspruch zu $\|h\|^2_{H_1 \cdot \operatorname{tr} H} = \infty$.

(2) Sei $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ und $\varphi := \operatorname{sgn} \beta \sqrt{\alpha} h_1 + \sqrt{1-\alpha} h_2$ mit $|\varphi|^2 = h^* H_1 h$. Wir wissen

$$\liminf_{x \to b} |\varphi(x)|^2 \int_a^x \operatorname{tr} H = 0.$$

und

$$|f_i(x)| \leq |f_i(a)| + \sqrt{6}\, |z| \left(\int_a^x \operatorname{tr} H \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_H$$

$$|u_i(x)| \leq |f_i(a)| + \sqrt{6}\, |w| \left(\int_a^x \operatorname{tr} H \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_H .$$

Nachdem $\left(\int_a^x \operatorname{tr} H \right)^{\frac{1}{2}} = \chi$ in beiden vorkommt, bekommen wir mit der Dreiecks-Ungleichung

$$|h_i(x)| \leq (|\sigma|\, |f_i(a)| + |\tau|\, |u_i(a)|) + \chi \left(|\sigma|\ \sqrt{\sigma}\, |z|\, \|f\|_H + |\tau|\ \sqrt{6}\, |w|\, \|u\|_H \right)$$

$$\overset{x \text{ hinreichend groß}}{\leq} \chi \left[|\sigma| \left(|f_i(a)| + \sqrt{6}\, |z|\, \|f\|_H \right) + |\tau| \left(|u_i(a)| + \sqrt{6}\, |w|\, \|u\|_H \right) \right]$$

Damit gilt für große x

$$\|h_i(x)\| \leq C\chi.$$

Betrachte

$$h^* Jh = h_1 \overline{h}_2 - h_2 \overline{h}_1 = 2i \operatorname{Im}(h_1 \overline{h}_2)$$

und für $\alpha > 0$

$$\operatorname{Im} \frac{\varphi \cdot \overline{h}_2}{\sqrt{\alpha}} = \operatorname{Im} \left(\operatorname{sgn} \beta h_1 \overline{h}_2 + \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} |h_2|^2 \right) = \operatorname{sgn} \beta \operatorname{Im}(h_1 \overline{h_2})$$

für $\alpha < 1$ gilt

$$\operatorname{Im} \frac{\varphi \cdot \overline{h}_1}{\sqrt{1-\alpha}} = \operatorname{Im} \left(\operatorname{sgn} \beta \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} |h_1|^2 + h_2 \overline{h}_1 \right) = -\operatorname{Im}(h_1 \overline{h}_2).$$

Damit erhalten wir

$$|h^* Jh| = 2 \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{Im}(\varphi \overline{h}_2), & \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \operatorname{Im}(\varphi \overline{h}_1) \end{cases} \leq \begin{cases} 2\sqrt{2}\, |\varphi|\, |h_2|, & \alpha \geq \frac{1}{2} \\ 2\sqrt{2}\, |\varphi|\, |h_1|, & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \leq 2\sqrt{2}\, |\varphi|\, C\chi.$$

Damit folgt $\liminf_{x \to b} |h^* Jh| = 0$.

(4) Nun gilt $(h, \sigma z f + \tau w u) = \sigma(f, zf) + \tau(u, wu) \in T_{max}(H)$. Nach Lemma 4.2.5 existiert also der Grenzwert $x \to b$ und damit gilt

$$\lim_{x \to b} u(x)^* J f(x) = 0.$$

❑

Beweis von Satz 4.2.1. Wir haben schon gezeigt, dass T_{max} abgeschlossen ist und Γ surjektiv ist.

1. Wir zeigen $T_{max}^* \subseteq \ker\Gamma$. Sei $(f,g) \in T_{max}^*$ und sei $\gamma \in \mathbb{C}^2$, $(u,v) \in T_{max}$ mit $u(a) = \gamma$ und zusätzlich $\sup\operatorname{supp} u < b$.

   Damit gilt
   $$0 = (g,u)_H - (f,v)_H = \underbrace{u(a)^* Jf(a)}_{=\gamma^* Jf(a)} - \underbrace{\lim_{x\to b} u(x)^* Jf(x)}_{=0}$$
   Da γ beliebig war, folgt $f(a) = 0$. Also ist $(f,g) \in \ker\Gamma$.

2. Sei $(f,g) \in T_{max}^*$ und $(u,v) \in T_{max}$. Dann gilt $f(a) = 0$ und
   $$0 = (g,u)_H - (f,v)_H = \underbrace{u(a)^* Jf(a)}_{=0} - \lim_{x\to b} u(x)^* Jf(x),$$
   also ist $\lim_{x\to b} u(x)^* Jf(x) = 0$.

3. Die Neumannsche Formel

   Wegen $T_{max}(H)^* \subseteq T_{max}(H) = T_{max}(H)^{**}$, ist $T_{max}(H)^*$ symmetrisch.

   Sei $(f,g), (u,v) \in T_{max}$. Wähle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Dann existieren mit der Neumannschen Formel für $T = T_{max}(H)^*$, $(f_0, g_0) \in T_{max}^*$, $h_z \in \ker(T_{max} - z)$, $h_{\overline{z}} \in \ker(T_{max} - \overline{z})$ mit
   $$(f,g) = (f_0, g_0) + (h_z, zh_z) + (h_{\overline{z}}, \overline{z}h_{\overline{z}})$$
   und analog
   $$(u,v) = (u_0, v_0) + (l_z, zl_z) + (l_{\overline{z}}, \overline{z}l_{\overline{z}}).$$
   Weiters gilt
   $$\lim_{x\to b} u_0(x)^* Jf_0(x) = 0 = \lim u_0(x)^* Jh_z(x) = \lim u_0(x)^* Jh_{\overline{z}}(x)$$
   und
   $$\lim_{x\to b} u_0(x)^* Jf_0(x) = 0 = \lim l_z(x)^* jf_0(x) = \lim l_{\overline{z}}(x)^* Jf_0(x).$$
   Nach Lemma 4.2.7 gilt
   $$\lim l_z(x)^* h_z(x) = 0$$
   und analog für die andern Grenzwerte. Damit gilt insgesamt $\lim_{x\to b} u^* Jf = 0$ und damit
   $$(g,u)_{L^2(H)} - (f,v)_{L^2(H)} = u(a)^* Jf(a).$$

4. Wegen der Green'schen Identität gilt klarerweise $\ker\Gamma \subseteq T_{max}(H)^*$.

❑

4.3 Neuman'sche Formel

4.3.1 Definition. Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $T \subseteq \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ eine lineare Relation. Analog zu linearen Abbildungen definieren wir
$$T^* := \{(f,g) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H} | \forall (u,v) \in T : (f,v)_H - (g,u)_H = 0\}$$
und
$$\operatorname{ran} T := \{g \in \mathcal{H} | \exists f \in \mathcal{H} : (f,g) \in T\}, \quad \operatorname{dom} T := \{f \in \mathcal{H} | \exists g \in \mathcal{H} : (f,g) \in T\},$$
$$\ker T := \{f \in \mathcal{H} | (f,0) \in T\}, \quad \operatorname{mul} T := \{g \in \mathcal{H} | (0,g) \in T\}.$$
Sei
$$T - z := \{(f, g - zf) | (f,g) \in T\}$$
Es gilt
$$\operatorname{ran}(T - z)^\perp = \ker(T^* - \overline{z}), \quad T^{**} = \operatorname{clo}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} T.$$
T heißt *symmetrisch*, falls $T \subseteq T^*$. ◊

4.3.2 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein HR und $T \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine symmetrische abgeschlossene lineare Relation. Dann ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\operatorname{ran}(T - z)$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(f, g) \in T$. Aus der Symmetrie folgt

$$(f, g)_{\mathcal{H}} = (g, f)_{\mathcal{H}} = \overline{(f, g)_{\mathcal{H}}}.$$

Damit folgt $(f, g)_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}$. Mit C.S. gilt

$$\|g - zf\| \cdot \|f\| \geq |(g - zf, f)_{\mathcal{H}}| \geq |\operatorname{Im}(g - zf, f)_{\mathcal{H}}| = |\operatorname{Im}(g, f)_{\mathcal{H}} - \operatorname{Im}(zf, f)_{\mathcal{H}}| = |\operatorname{Im} z| \, \|f\|_{\mathcal{H}}$$

Also gilt

$$\|g - zf\| \geq |\operatorname{Im} z| \cdot \|f\| \, .$$

Sei $h \in \operatorname{clo} \operatorname{ran}(T - z) = \operatorname{clo}\{g - zf | (f, g) \in T\}$. Wähle $(f_n, g_n) \in T$ mit $(g_n - zf_n) \to h$, dann ist diese Folge eine CF. Aus der obigen Ungleichung folgt f_n ist CF und damit existiert der GW f. Es gilt $g_n \to h + zf$. Weil T abgeschlossen ist, folgt damit $(f, h + zf) \in T$ und damit $(f, h) \in T - z$. ❑

4.3.3 Lemma (Neumann Formel)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein HR und $T \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine symmetrische abgeschlossene lineare Relation. So gilt*

$$T^* = T + \{f \in \mathcal{H} | (f, zf) \in T^*\} + \{f \in \mathcal{H} | (f, \overline{z}f) \in T^*\}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Inklusion $\supseteq$ ist klar.

Für die andere Richtung betrachte

$$\mathcal{H} = \operatorname{ran}(T - z) \oplus \underbrace{\operatorname{ran}(T - z)^{\perp}}_{\ker(T^* - \overline{z})} .$$

Sei $(f, g) \in T^*$. So gibt es $(f_0, g_0) \in T \subseteq T^*$ und $h_{\overline{z}} \in \ker(T^* - \overline{z})$ mit

$$g - zf = (g_0 - zf_0) + h_{\overline{z}} \underbrace{(\overline{z} - z)}_{= -2 \operatorname{Im} z \neq 0} .$$

Weiters ist $(h_{\overline{z}}, 0) \in T^* - \overline{z}$ und damit $(h_{\overline{z}}, \overline{z}h_{\overline{z}}) \in T^*$. Somit gilt

$$(f - f_0 - h_{\overline{z}}, g - g_0 - \overline{z}h_{\overline{z}}) = (f, g) - (f_0, g_0) - (h_{\overline{z}}, \overline{z}h_{\overline{z}}) \in T^*.$$

Weiters ist

$$g - g_0 - \overline{z}h_{\overline{z}} = z \underbrace{(f - f_0 - h_{\overline{z}})}_{=: h_z}$$

und somit folgt aus $(h_z, zh_z) \in T^*$ schon $(h_z, 0) \in T^* - z$ und damit $h_z \in \ker(T^* - z)$. Also gilt

$$(f, g) = (f_0, g_0) + (h_{\overline{z}}, \overline{z}h_{\overline{z}}) + (h_z, zh_z).$$

❑

Kapitel 5

Letzte Worte zum Weyl-Koeffizienten

Wir haben die Gleichung
$$y' = zJHy$$
In kanonischer Weise bekommen wir $L^2(H)$ und $T_{max}(H)$ und $\Gamma(H)$. Weiters lässt sich $T_{min} := \ker \Gamma(H) = T_{max}^*$ karakterisieren durch 0 Randbedingungen. Falls es nur einen L^1-Randpunkt gibt ist die Dim zwischen tmin und Tmax 2 und damit gibt es eine ein-parametrische Schar an s.a. Fortsetzungen von T_{min}.

Sei A ein s.a. Wir interessieren uns für das Spektrum $\sigma(A(H))$ bzw. unitäre Equivalenz zu Multiplikationsoperator in einem L^2-Raum.

Dann gilt:

5.0.1 Satz. *Es gibt ein positives Maß μ mit $U : L^2(H) \to L^2(H)$ mit $U \circ T_{max}(H) = M_t \circ U$ und U ist eine partielle Isometrie mit $\ker U = \operatorname{mul} T_{min}(H)$.*

Folgerung ist, das das Spekrum einfach ist, d.h. nicht entartete EW.

Der Weyl hat sich gefagt, wie man dieses μ findet.

Das μ_H welches man aus dem Weyl-K q_H bekommt mittles der Reiman Stilt- Umformung.

Andere Pespektive::

Betrachte die DG $y' = zJHy$ mit den RanB $y_+(a) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $y_-(a) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Also sind $y_\pm$ gute KAnditen für $\ker(T_{max}(H) - z)$. Aber es gibt genau ein $m(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $y_+ - m(z)y_- \in \ker(T_{max}(H) - z)$. Dieser Koeffizient ist der Weyl-Koeffizient.

5.0.2 Satz. $m(z) = q_H(z)$.

Beweis. Aus dem Operator-argungen das $\dim T_{max} = \dim T_{min} + 2$ ist $\dim \ker(T_{max} - z) = 1$ also ist $m(z)$ eindeutig.

Zeige:
$$[(1, -q_H(z))W(t,z)]^T = W(t,z)^T \begin{pmatrix}1\\-q_H(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_{11}(t,z)\\w_{12}(t,z)\end{pmatrix} - q_H(z)\begin{pmatrix}w_{21}(t,z)\\w_{22}(t,z)\end{pmatrix} =: \chi(z) \in L^2(H).$$
Wir wissen
$$q_H(z) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{w_{11}(t,z)}{w_{21}(t,z)}}_{=:Q_t(z)}.$$
Sei $c \in (a,b)$. Dann konvergiert
$$\begin{pmatrix}w_{11}(t,z)\\w_{12}(t,z)\end{pmatrix} - Q_c(z)\begin{pmatrix}w_{21}(t,z)\\w_{22}(t,z)\end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix}w_{11}(t,z)\\w_{12}(t,z)\end{pmatrix}}_{y_+} - q_H(z)\underbrace{\begin{pmatrix}w_{21}(t,z)\\w_{22}(t,z)\end{pmatrix}}_{y_-} = \chi(z)$$
lokal gleichmäßig. Dann gilt $(y_\pm, zy_\pm) \in (T_{max}(H|_{(a,c)}))$. Also ist auch
$$(\underbrace{y_+ - Q_c(z)y_-}_{=:\chi_c(z)}, z\,[y_+ - Q_c(z)y_-]) \in (T_{max}(H|_{(a,c)})).$$

Mit der Green'schen Identität folgt

$$(z\chi_c(z), \chi_c(z))_{H|} - (\chi_c(z), z\chi_c(z)_{H|} = \chi_c(z)(a)^* J\chi_c(z)(a) - \chi_c(z)(c)^* J\chi_c(z)(c)$$

$$= \underbrace{(1, -\overline{Q_c(z)})J\begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}}_{Q_c(z)-\overline{Q_c(z)}} - (1, -\overline{Q_c(z)})W(c,z)^{*T}JW(c,z)^T\begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}$$

$$= (z-\overline{z})\int_a^c \begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}^* W(t,z)^{*T}H(t)W(t,z)\begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}\,dt = \begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}^*\left[J - W(c,z)^{*T}JW(c,z)^T\right]\begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}$$

Betrachte

$$\chi_c(z)(c) = \begin{pmatrix}w_{11(c,z)}\\w_{12}(c,z)\end{pmatrix} - \frac{w_{11}(c,z)}{w_{21}(c,z)}\begin{pmatrix}w_{21(c,z)}\\w_{22}(c,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\chi_c(z)(b)^* J\chi_c(z)(b) = 0$$

und damit

$$\int_a^c \begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}^* W(t,z)^{*T}H(t)W(t,z)\begin{pmatrix}1\\-Q_c(z)\end{pmatrix}\,dt = \int_a^c \chi_c(z)^* H\chi_c(z) = \frac{Q_c(z)-\overline{Q_c(z)}}{z-\overline{z}} \geq \int_a^{c'} \chi_c(z)^* H\chi_c(z).$$

$c' \in (a,c)$ betrachte $c \to b$. Dann

$$\int_a^{c'} \chi_c(z)^* H\chi_c(z) \to \int_a^{c'} \chi(z)^* H\chi(z)$$

und

$$\frac{Q_c(z)-\overline{Q_c(z)}}{z-\overline{z}} \to \frac{q_H(z)-\overline{q_H(z)}}{z-\overline{z}}.$$

Damit folgt

$$\int_a^b \chi(z)^* H\chi(z) \leq \frac{\operatorname{Im} q_H(z)}{\operatorname{Im} z}$$

Also sind wir im $L^2(H)$.

❑

Man kann zeigen

5.0.3 Proposition. *Es gilt*

$$\int_a^b \chi(w)^* H\chi(z) = \frac{q_H(z)-\overline{q_H(w)}}{z-\overline{w}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\frac{1}{t-\overline{w}}\,d\mu_H(t).$$

Betrachte

$$\begin{cases} \operatorname{clo}\{\chi(z)\} & \to & L^2(\mu_H) \\ \chi(z) & \mapsto & \frac{1}{t-z} \end{cases}$$

ist isometrisch.