FUNKTIONALANALYSIS

Harald Woracek

Michael Kaltenbäck

Martin Blümlinger

Ausgabe März 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Addendum zu Topologie

1.1 Vervollständigung metrischer Räume

Ein metrischer Raum heißt bekannterweise vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Wie man an vielen Stellen in der Analysis gesehen hat, ist die Vollständigkeit eine ganz starke und wichtige Eigenschaft. Man denke zum Beispiel nur an den Zwischenwertsatz für reellwertige Funktionen.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man einen beliebigen metrischen Raum stets in einen vollständigen metrischen Raum einbetten kann, so wie zum Beispiel $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eingebettet ist.

Dazu zeigen wir als erstes einen Fortsetzungssatz für gleichmäßig stetige Abbildungen mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum.

1.1.1 Satz. *Seien (X, d), (Y, d_1) metrische Räume, und sei (Y, d_1) vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X und $f : D \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, also gelte*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in D : \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(f(x), f(y)) < \epsilon .$$

- $\rightsquigarrow$ *Dann existiert genau eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ mit $F|_D = f$. Diese ist sogar gleichmäßig stetig.*

- $\rightsquigarrow$ *Ist f isometrisch, also $d_1(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für $x, y \in D$ – offensichtlich ist dann f gleichmäßig stetig – so ist auch F isometrisch.*

- $\rightsquigarrow$ *Sei nun zusätzlich (X, d) vollständig, $f(D) \subseteq Y$ dicht, f injektiv und so, dass auch $f^{-1} : f(D) \to X$ gleichmäßig stetig ist. Dann ist $F : X \to Y$ bijektiv, und die nach dem ersten Punkt existierende eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $G : Y \to X$ von $f^{-1} : f(D) \to X$ stimmt mit F^{-1} überein.*

Beweis.

f führt Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen über: Dazu sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Punkten aus D. Zu einem $\epsilon > 0$ wähle man $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall y, z \in D : \, d(y, z) < \delta \Rightarrow d_1(f(y), f(z)) < \epsilon . \tag{1.1.1}$$

Weiters wähle man $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$. Dann folgt

$$d_1\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n, m \geq N\,,$$

und wir sehen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (Y, d_1) ist.

Konstruktion von F: Sei $x \in X$ gegeben. Da D dicht in X ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus D mit $x_n \to x$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge. Wegen dem letzten Punkt hat auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaft. Da (Y, d_1) vollständig ist, existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Wir definieren

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Zunächst hängt diese Definition von der gewählten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere, gegen x konvergente Folge von Punkten aus D. Zu einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie in (1.1.1) und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \frac{\delta}{2},\ d(y_n, x) < \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N\,.$$

Dann ist $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, x) < \delta$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $d_1(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$, $n \geq N$, und daher

$$d_1\big(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\big) \leq \epsilon\,.$$

Die Existenz von $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ folgt wie die von $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erkennen wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Also ist $F(x)$ unabhängig von der gewählten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus D definiert.

F ist eine Fortsetzung von f: Zu einem $x \in D$ betrachte die konstante Folge $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt trivialerweise $x_n \to x$ sowie $f(x_n) \to f(x)$. Also folgt $F(x) = f(x)$.

F ist gleichmäßig stetig: Dazu sei $\epsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall\, y, z \in D\ :\ d(y, z) < \delta \Rightarrow d_1(f(y), f(z)) < \frac{\epsilon}{3}\,. \tag{1.1.2}$$

Seien nun $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Wähle $x_n, y_n \in D$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \frac{\delta}{3},\ d(y_n, y) < \frac{\delta}{3},\ d_1(f(x_n), F(x)) < \frac{\epsilon}{3},\ d_1(f(y_n), F(y)) < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(x_n, y_n) < \delta$ und wegen (1.1.2) $d_1(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\epsilon}{3}$. Wenden wir abermals die Dreiecksungleichung an, so erhalten wir $d_1(F(x), F(y)) < \epsilon$.

Eindeutigkeit: Sind F_1 und F_2 zwei stetige Fortsetzungen von f, so gilt also $F_1|_D = f = F_2|_D$. Da D dicht ist, folgt bereits $F_1 = F_2$.

Isometrie: Ist f isometrisch, $x, y \in X$ und $(x_n), (y_n)$ Folgen aus D mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n, y = \lim_{n\to\infty} y_n$, so folgt wegen der Stetigkeit von F und weil aus $x = \lim_{n\to\infty} x_n, y = \lim_{n\to\infty} y_n$ folgt, dass $d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$,

$$\begin{aligned} d_1(F(x), F(y)) &= d_1(F(\lim_{n\to\infty} x_n), F(\lim_{n\to\infty} y_n)) = d_1(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d_1(f(x_n), f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)\,. \end{aligned}$$

Bijektivität: Sei nun (X, d) auch vollständig, $f(D) \subseteq Y$ dicht, f injektiv und auch $f^{-1} : f(D) \to X$ gleichmäßig stetig. Nach dem ersten Punkt gibt es eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $G : Y \to X$ von $f^{-1} : f(D) \to X$. Für $x \in D$ gilt

$$G \circ F(x) = G(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}_X(x)\,.$$

Also stimmen die beiden stetigen Funktionen $G \circ F : X \to X$ und $\mathrm{id}_X : X \to X$ auf der dichten Teilmenge D von X überein. Somit gilt $G \circ F = \mathrm{id}_X$. Da auch $f(D)$ dicht in Y ist, folgt genauso $F \circ G = \mathrm{id}_Y$. Daraus schließen wir sofort die Bijektivität von F und auf $F^{-1} = G$.

❑

Wir kommen nun zu dem Konzept der Vervollständigung.

1.1.2 Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Paar bestehend aus einem metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und einer Abbildung $\iota : X \to \hat{X}$ heißt eine *Vervollständigung* von (X, d), wenn gilt:

($\mathbf{V_{met}1}$) $(\hat{X}, \hat{d})$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

($\mathbf{V_{met}2}$) ι ist isometrisch, also gilt $\hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$, $x, y \in X$.

($\mathbf{V_{met}3}$) $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, wobei der Abschluss bezüglich $\hat{d}$ zu verstehen ist.

Zwei Vervollständigungen $\langle(\hat{X}_1, \hat{d}_1), \iota_1\rangle$ und $\langle(\hat{X}_2, \hat{d}_2), \iota_2\rangle$ von (X, d) heißen *äquivalent*, wenn es ein isometrisches $\varphi : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ gibt mit $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$, also mit

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\iota_2"] & \\ \hat{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"'] & & \hat{X}_2 \end{tikzcd} \tag{1.1.3}$$

Bedingung ($\mathrm{V_{met}}2$) bedingt insbesondere, dass ι injektiv ist. Die Bedingung ($\mathrm{V_{met}}3$) besagt nur, dass $\hat{X}$ nicht „unnötig groß“ ist. Hat man einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine isometrische Abbildung $\iota : X \to \tilde{X}$, so erhält man eine Vervollständigung von X indem man $\hat{X} := \overline{\iota(X)}$, $\hat{d} := \tilde{d}|_{\hat{X} \times \hat{X}}$, und die gleiche Abbildung ι betrachtet.

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass, falls überhaupt eine Vervollständigung existiert, diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

1.1.3 Korollar. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind je zwei Vervollständigungen von (X, d) isomorph.*

Beweis. Seien $\langle(\hat{X}_1, \hat{d}_1), \iota_1\rangle$ und $\langle(\hat{X}_2, \hat{d}_2), \iota_2\rangle$ zwei Vervollständigungen von (X, d).

Nun sind die Abbildungen $\iota_2 \circ \iota_1^{-1} : \iota_1(X)\ (\subseteq \hat{X}_1) \to \iota_2(X)\ (\subseteq \hat{X}_2)$ und $(\iota_2 \circ \iota_1^{-1})^{-1} = \iota_1 \circ \iota_2^{-1} : \iota_2(X)\ (\subseteq \hat{X}_2) \to \iota_1(X)\ (\subseteq \hat{X}_1)$ beide isometrisch und daher insbesondere gleichmäßig stetig.

Nach Satz 1.1.1 existiert eine eindeutige isometrische Fortsetzung $\varphi : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ von $\iota_2 \circ \iota_1^{-1}$, die bijektiv ist und deren Inverse gerade die isometrische Fortsetzung von $\iota_1 \circ \iota_2^{-1}$ ist.

❑

Man beachte, dass man eine „bessere“ Eindeutigkeitsaussage als Korollar 1.1.3 nicht erhalten kann, denn ist $\langle(\hat{X},\hat{d}),\iota\rangle$ eine Vervollständigung von (X,d), und ist $(\tilde{X},\tilde{d})$ ein metrischer Raum so, dass es eine isometrische Bijektion f von $(\hat{X},\hat{d})$ auf $(\tilde{X},\tilde{d})$ gibt, so ist $\langle(\tilde{X},\tilde{d}),f\circ\iota\rangle$ offensichtlich ebenfalls eine Vervollständigung von (X,d).

Es ist nun eine wesentliche Aussage, dass es zu jedem metrischen Raum tatsächlich eine Vervollständigung gibt.

1.1.4 Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine Vervollständigung $\langle(\hat{X},\hat{d}),\iota\rangle$ von (X,d).*

Beweis.

Definition von $\hat{X}$ und ι: Betrachte die Menge $\mathfrak{X}$ aller Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n\in X$. Auf $\mathfrak{X}$ definieren wir eine Relation durch

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(x_n')_{n\in\mathbb{N}} \;:\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_n')=0\,.$$

Diese Relation ist klarerweise reflexiv und symmetrisch. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man leicht, dass sie auch transitiv ist. Insgesamt haben wir also eine Äquivalenzrelation.

Setze $\hat{X}:=\mathfrak{X}/_\sim$, und definiere

$$\iota:\begin{cases} X & \to & \hat{X},\\ x & \mapsto & (x_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim\,,\text{ wobei } x_n:=x,\ n\in\mathbb{N}\,.\end{cases}$$

Also ist die Menge X in $\hat{X}$ eingebettet, indem man einen Punkt $x\in X$ mit der Folge „konstant gleich x“ identifiziert.

Definition von $\hat{d}$: Wendet man die Dreiecksungleichung für $|.|$ oben und für d zweimal nach unten an, so erhält man für $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in X^2$

$$\begin{aligned}\big|d(a_1,b_1)-d(a_2,b_2)\big| &\leq \big|d(a_1,b_1)-d(a_2,b_1)\big|+\big|d(a_2,b_1)-d(a_2,b_2)\big|\\ &\leq d(a_1,a_2)+d(b_1,b_2)\,.\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{X}$, dann folgt aus der Ungleichung (1.1.4), dass die Folge $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist. Also existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\in\mathbb{R}$.

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$, also $d(x_n,x_n'),d(y_n,y_n')\to 0$, folgt wieder mit (1.1.4)

$$\lim_{n\to\infty}\big(d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')\big)=0\,.$$

Es ist daher eine Funktion $\hat{d}:\hat{X}\times\hat{X}\to\mathbb{R}$ durch

$$\hat{d}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim\big):=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n),\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim\in\hat{X}$$

wohldefiniert.

$\hat{d}$ ist Metrik: Aus der Definition von $\hat{d}$ ist klar, dass $\hat{d}(\hat{x},\hat{y})\geq 0$ und $\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=$

$\hat{d}(\hat{y}, \hat{x})$ für alle $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$. Seien $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, und wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ derart, dass $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim$ und $\hat{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \,,$$

womit

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\Leftrightarrow\; \hat{x} = \hat{y} \,.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \hat{X}$ gegeben, und wähle entsprechende Repräsentanten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{x},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{y},\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{z}$. Dann gilt $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und daher auch

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{d}(\hat{z}, \hat{y}) \,.$$

$(\hat{X}, \hat{d})$ *ist eine Vervollständigung von* (X, d)*:* Dass ι isometrisch ist, folgt unmittelbar aus

$$\hat{d}(\iota(x), \iota(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y) \,.$$

Nun sei $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim \in \hat{X}$ gegeben. Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$, $n, m \geq N$. Dann folgt für jedes feste $m \geq N$

$$\hat{d}(\iota(x_m), \hat{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \epsilon \,.$$

Somit gilt in dem metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$

$$\lim_{n\to\infty} \iota(x_n) = \hat{x} \,, \tag{1.1.5}$$

woraus auch unmittelbar die Dichtheit von $\iota(X)$ in $\hat{X}$ folgt.

Es bleibt die Vollständigkeit von $(\hat{X}, \hat{d})$ zu zeigen. Dazu sei $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\hat{X}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wähle $y_n \in X$ mit $\hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) < \frac{1}{n}$. Aus

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) = \hat{d}(\iota(y_n), \iota(y_m)) &\leq \hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \iota(y_m)) \\ &< \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,. \end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt sofort, dass mit $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist - und zwar in X; also liegt $\hat{y} := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}/_\sim$ in $\mathfrak{X}$. Mit (1.1.5) erhalten wir

$$\hat{d}(\hat{y}, \hat{x}_n) \leq \hat{d}(\hat{y}, \iota(y_n)) + \hat{d}(\iota(y_n), \hat{x}_n) \leq \hat{d}(\hat{y}, \iota(y_n)) + \frac{1}{n} \to 0 \,,$$

und damit $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \hat{y}$. ❑

Wir wollen auch einen weniger konstruktiven Beweis der Existenz der Vervollständigung angeben.

Beweis (von Satz 1.1.4). Aus der Analysis ist bekannt, dass der Raum $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen ein Banachraum ist, wenn man ihn mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\{\, |f(x)| \;:\; x \in X \,\}$$

versieht. Sei $a \in X$ festgehalten. Die Abbildung ι auf X, die einem $x \in X$ die Funktion $y \mapsto d(y,x) - d(y,a)$ zuweist, ist wegen (Dreiecksungleichung)

$$|\, d(y,x) - d(y,a)\,| \leq d(x,a) \quad \text{für alle} \quad y \in X$$

eine Abbildung nach $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ hinein, also $\iota : X \to \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Wegen

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &= |d(x_1,x_1) - d(x_1,a) - d(x_1,x_2) + d(x_1,a)| \\ &= |\iota(x_1)(x_1) - \iota(x_2)(x_1)| \leq \|\iota(x_1) - \iota(x_2)\|_\infty \\ &= \sup_{y \in X} |d(y,x_1) - d(y,a) - d(y,x_2) + d(y,a)| \leq d(x_1,x_2) \end{aligned}$$

ist ι eine Isometrie. Nun sei $\hat{X}$ der Abschluss von $\iota(X)$ in $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ bezüglich der von $\|.\|_\infty$ erzeugten Metrik d_∞. Ist nun $\hat{d}$ die Einschränkung von d_∞ auf $\hat{X}$, so ist $\langle(\hat{X},\hat{d}),\iota\rangle$ offenbar eine Vervollständigung von (X,d).

❏

1.2 Initiale Topologie

Mit dem Konzept Basis und Subbasis können wir auf einer gegebenen Menge ausgezeichnete Topologien definieren, die gewisse Eigenschaften haben.

1.2.1 Satz. *Seien X eine Menge, $(Y_i,\mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft*

(IN_1) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X derart, dass alle Abbildungen $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i), i \in I$, stetig sind.*

Diese Topologie heißt initiale Topologie *bezüglich der f_i. Für sie gilt*

(IN_2) *$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$,*

und

(IN_3) *Ist $(Y,\mathcal{O})$ ein beliebiger topologischer Raum und $f : Y \to X$, so ist $f : (Y,\mathcal{O}) \to (X,\mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen*

$$f_i \circ f : (Y,\mathcal{O}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i), i \in I\,,$$

stetig sind.

Beweis. Ist $\mathcal{T}'$ eine beliebige Topologie auf X, so ist $f_i : (X,\mathcal{T}') \to (X_i,\mathcal{T}_i)$ genau dann stetig, wenn $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$. Also sind alle f_i genau dann stetig, wenn

$$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'\,. \tag{1.2.1}$$

Die Topologie $\mathcal{T}$ mit der linken Seite hier als Subbasis, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$, ist die gröbste Topologie, die (1.2.1) erfüllt. Damit ist aber auch $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie derart, dass alle f_i stetig sind. Also gilt (IN_1) sowie auch (IN_2).

Sei $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie der $f_i, i \in I$, ist. Im Falle der Stetigkeit von f sind auch alle $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle $f_i \circ f$ stetig, also gelte $(f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{O}$. Dann folgt $f^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{O}$ und damit

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{O}\,.$$

Da $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, folgt leicht, dass f stetig ist. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ hat also die Eigenschaft (IN_3).

❑

1.2.2 Bemerkung. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ ist in der Tat die einzige Topologie $\mathcal{T}'$ mit der Eigenschaft (IN_3). Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft (IN_3).

Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (IN_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$, dass alle $f_i \circ \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind. Aus (IN_1) folgt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Für $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ sind andererseits alle Abbildungen $f_i \circ \mathrm{id}_X = f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Mit (IN_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$, und daher $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Insgesamt ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. //

1.2.3 Lemma. *Mit der Notation aus Satz 1.2.1 sei $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in X. Dieses konvergiert bzgl. $\mathcal{T}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\big(f_i(x_j)\big)_{j \in J}$ für alle $i \in I$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Konvergiert $(x_j)_{j \in J}$ gegen x bzgl. $\mathcal{T}$, so folgt aus der Stetigkeit der f_i, dass $\big(f_i(x_j)\big)_{j \in J}$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.

Gelte umgekehrt, dass $\big(f_i(x_j)\big)_{j \in J}$ gegen $f_i(x)$ für alle $i \in I$ konvergiert. Für ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit oBdA. $U \neq X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ folgt aus der Tatsache, dass $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist (vgl. (IN_2) aus Satz 1.2.1), dass

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \dots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O\,,$$

wobei $i_1, \dots, i_m \in I$, $O_1 \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots, O_m \in \mathcal{T}_{i_m}$. Also folgt $f_{i_k}(x) \in O_k, k = 1, \dots, m$, und laut Voraussetzung gibt es Indizes $j_1, \dots, j_m, \in J$ so, dass $j \succeq j_k \Rightarrow f_{i_k}(x_j) \in O_k$, $k = 1, \dots, m$. Ist nun $j_0 \in J$ derart, dass $j_0 \succeq j_k$, $k = 1, \dots, m$, so folgt für $j \succeq j_0$ jedenfalls $f_{i_k}(x_j) \in O_k$, $k = 1, \dots, m$, und daher

$$x_j \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \dots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O \subseteq U\,.$$

❑

Die Konstruktion der initialen Topologie ist assoziativ.

1.2.4 Korollar. *Seien X, X_i, $i \in I$, Mengen, und seien $(X_{ik}, \mathcal{T}_{ik})$, $i \in I$, $k \in I_i$, topologische Räume. Weiters seien Abbildungen $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, und*

$g_{ik} : X_i \to X_{ik}$, $i \in I$, $k \in I_i$, gegeben.

$$
\begin{tikzcd}
 & & (X_{ik}, \mathcal{T}_{ik}) \\
 & X_i \arrow[ur, "g_{ik}"] \arrow[dr, "g_{il}"] & \vdots \\
 & & (X_{il}, \mathcal{T}_{il}) \\
X \arrow[uur, "f_i"] \arrow[ddr, "f_j"'] \arrow[uuurr, dashed, bend left, "g_{ik}\circ f_i"] \arrow[urr, dashed, "g_{il}\circ f_i"'] \arrow[drr, dashed, "g_{jk}\circ f_j"] \arrow[dddrr, dashed, bend right, "g_{jl}\circ f_j"'] & \vdots & \\
 & & (X_{jk}, \mathcal{T}_{jk}) \\
 & X_j \arrow[ur, "g_{jk}"] \arrow[dr, "g_{jl}"] & \vdots \\
 & & (X_{jl}, \mathcal{T}_{jl})
\end{tikzcd}
$$

Bezeichne

- ⇝ *für jedes $i \in I$ mit $\mathcal{T}_i$ die initiale Topologie auf X_i bezüglich der Familie*

$$g_{ik} : X_i \to (X_{ik}, \mathcal{T}_{ik}), \quad k \in I_i\,,$$

- ⇝ *mit $\mathcal{T}_1$ die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie*

$$f_i : X \to (X_i, \mathcal{T}_i), \quad i \in I\,,$$

- ⇝ *mit $\mathcal{T}_2$ die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie*

$$g_{ik} \circ f_i : X \to (X_{ik}, \mathcal{T}_{ik}), \quad i \in I,\ k \in I_i\,.$$

Dann gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis. Ist $\mathcal{T}$ irgendeine Topologie auf X, so ist wegen (IN_3) angewandt auf die $(X_i, \mathcal{T}_i)$ die Tatsache, dass alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, stetig sind, dazu äquivalent, dass alle Abbildungen $g_{ij} \circ f_i : X \to X_{ij}$, $i \in I, j \in J_i$, stetig sind.

Also stimmt die gröbste aller Topologien, die die erste Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das $\mathcal{T}_1$ – mit der gröbsten aller Topologien, die die zweite Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das $\mathcal{T}_2$ – überein.

❑

1.2.5 Beispiel. Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X \subseteq Y$. Weiters sei $\iota : X \to Y$ die kanonische Einbettung, $\iota(x) = x$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildung ι heißt die *Spurtopologie* von $\mathcal{T}$ auf X und wird bezeichnet als $\mathcal{T}|_X$. Man spricht von $(X, \mathcal{T}|_X)$ als einem *Teilraum* von $(Y, \mathcal{T})$. Wegen Satz 1.2.1 ist

$$\iota^{-1}(\mathcal{T}) = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

eine Subbasis für $\mathcal{T}|_X$. Nun ist diese Menge schon eine Topologie, also gilt

$$\mathcal{T}|_X = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}\,.$$

Damit erhält man auch, dass das System $\mathfrak{A}|_X$ der in $(X, \mathcal{T}|_X)$ abgeschlossenen Mengen gegeben ist durch

$$\mathfrak{A}|_X = \{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\}\,, \tag{1.2.2}$$

und dass der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}|_X(x)$ eines Elementes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$ genau

$$\mathfrak{U}|_X(x) = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}(x)\}$$

ist. Erfüllt $(Y, \mathcal{T})$ das Axiom $(T2)$, so folgt somit, dass auch $(X, \mathcal{T}|_X)$ dieses Axiom erfüllt.

Weiters folgt aus (1.2.2) für $A \subseteq X$

$$\overline{A}^{\mathcal{T}|_X} = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap X\,, \tag{1.2.3}$$

und aus (IN_3) folgt, dass für $f : Z \to X\ (\subseteq Y)$ die Abbildung $f : (Z, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T}|_X)$ genau dann stetig ist, wenn $f : (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{T})$ stetig ist.

Ist $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X und $x \in X$, so erkennt man aus der letzten Behauptung von Satz 1.2.1, dass $(x_j)_{j\in J}$ genau dann gegen x bzgl. $\mathcal{T}$ konvergiert, wenn $(x_j)_{j\in J}$ bzgl. $\mathcal{T}|_X$ gegen x konvergiert.

Ist schließlich $X \subseteq Z \subseteq Y$, so gilt wegen Korollar 1.2.4

$$\mathcal{T}|_X = (\mathcal{T}|_Z)|_X\,. \tag{1.2.4}$$

//

1.2.6 Beispiel. Sei (Y, d) ein metrischer Raum, und sei $X \subseteq Y$ versehen mit der Einschränkung von $d|_{X\times X}$. Klarerweise ist $(X, d|_{X\times X})$ ein metrischer Raum.

Die von $d|_{X\times X}$ auf X erzeugte Topologie ist genau die Spurtopologie der Topologie, die von $\mathcal{T}(d)$ auf X induziert wird:

Ist $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O \cap X$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$. Daraus folgt, dass die ϵ-Kugel $U_\epsilon(x) \cap X$ um x bezüglich $d|_{X\times X}$ in $O \cap X$ enthalten ist. Also ist jede Menge aus $\mathcal{T}(d)|_X$ offen bezüglich $d|_{X\times X}$.

Ist umgekehrt $P \in \mathcal{T}(d|_{X\times X})$, so wähle man für jedes $x \in P$ ein $\epsilon_x > 0$ derart, dass die ϵ_x-Kugel $X \cap U_{\epsilon_x}(x)$ in X in P enthalten ist. Es folgt

$$P = \bigcup_{x\in P} \big(X \cap U_{\epsilon_x}(x)\big) = X \cap \bigcup_{x\in P} U_{\epsilon_x}(x)\,.$$

Somit ist P der Schnitt einer in Y offenen Menge und X, also $P \in \mathcal{T}(d)|_X$. //

1.2.7 Definition. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\pi_i : X \to X_i$ der kanonischen Projektionen

$$\pi_i\big((x_k)_{k\in I}\big) = x_i$$

heißt die *Produkttopologie* der $\mathcal{T}_i$ auf X und wird bezeichnet mit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

Für ein $O \subseteq X_i$ gilt

$$\pi_i^{-1}(O) = \prod_{k\in I} O_k$$

wobei $O_k = X_k, k \neq i$, und $O_i = O$ ist. Wieder mit (IN_2) erhält man daraus, dass die Mengen der Gestalt

$$\prod_{k\in I} O_k\,,$$

wobei $O_k \in \mathcal{T}_k, k \in I$, und für alle $k \in I$ bis auf endlich viele $O_k = X_k$ gilt, eine Basis für $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

Ist $i \in I$ fest, so gilt klarerweise $\pi_i(\prod_{k\in I} O_k) = O_i$. Also ist das Bild unter π_i einer jeden Menge aus dieser Basis offen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Da jede offene Menge in $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ Vereinigung von Basismengen ist, folgt

1.2.8 Proposition. *Die kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ bilden offene Menge in $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ auf offene Mengen in $\mathcal{T}_i$ ab, also sind sie* offene Abbildungen.

Weiters sieht man leicht mit Hilfe der oben konstruierten Basis für die Produkttopologie, dass für einen Punkt $(x_i)_{i\in I} \in X$ die Mengen

$$\prod_{i\in I} U_i \,,$$

wobei $U_i \in \mathfrak{U}(x_i), i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele i, eine Umgebungsbasis bezüglich $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

Aus Lemma 1.2.3 folgt, dass für ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ und einen Punkt x aus $\prod_{i\in I} X_i$, also $x_j = (\xi_{j,i})_{i\in I}$ und $x = (\xi_i)_{i\in I}$ mit $\xi_{j,i}, \xi_i \in X_i$,

$$x_j \overset{j\in J}{\longrightarrow} x \Leftrightarrow \forall i \in I: \ \xi_{j,i} \overset{j\in J}{\longrightarrow} \xi_i \,. \tag{1.2.5}$$

Es folgt daraus, dass für abgeschlossene $A_i \subseteq X_i$, $i \in I$, das Produkt $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ ebenfalls abgeschlossen ist. Alternativ kann man das auch daraus erkennen, dass

$$\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$$

als Durchschnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen selber wieder abgeschlossen ist.

1.2.9 Bemerkung. Wendet man diese Konstruktion der Produkttopologie etwa auf zwei Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ an, indem wir $I = \{1, 2\}$ setzen, so bilden insbesondere die Mengen der Bauart $O_1 \times O_2$ mit offenen $O_1 \subseteq X_1, O_2 \subseteq X_2$ eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Außerdem sind alle Mengen $A_1 \times A_2$ für abgeschlossene $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2$, abgeschlossen. //

1.2.10 Beispiel. Seien (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) zwei metrische Räume, und sei $d : Y_1 \times Y_2 \to \mathbb{R}$ definiert als $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Wir wissen schon, dass d eine Metrik auf $Y_1 \times Y_2$ ist, und dass $U_\epsilon\big((x_1, x_2)\big) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2)$.

Die von dieser Metrik erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ stimmt mit der Produkttopologie von $\mathcal{T}(d_1)$ und $\mathcal{T}(d_2)$ überein. Um das einzusehen sei $O \subseteq Y_1 \times Y_2$. Diese Menge liegt in $\mathcal{T}(d)$ genau dann, wenn

$$\forall (x_1, x_2) \in O \ : \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon\big((x_1, x_2)\big) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2) \subseteq O \,,$$

was aber äquivalent zu

$$\forall (x_1, x_2) \in O \ : \exists O_1 \in \mathcal{T}(d_1), O_2 \in \mathcal{T}(d_2) : (x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subseteq O$$

ist. Da die Mengen der Form $O_1 \times O_2$ eine Basis von $\mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$ darstellen, bedeutet das genau $O \in \mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$. //

1.3 Der Satz von Tychonoff

1.3.1 Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume, und sei $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$. Dann ist $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, kompakt sind.*

Dieser Satz ist einer der ganz wichtigen Sätze in der Topologie. Er wird an vielen Stellen in entscheidender Weise eingehen. Wir wollen bemerken, dass die wesentliche Implikation jene ist, die von der Kompaktheit der einzelnen Räume auf die des Produktes schließt. Die Umkehrung ist ganz elementar.

Es gibt verschiedene Zugänge, um diesen Satz zu beweisen. Wir wählen hier jenen über den Begriff des Filters, den wir kurz wiederholen wollen:

Ist X eine nichtleere Menge, dann heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Filter, wenn $\emptyset \notin \mathfrak{F} \neq \emptyset$, wenn $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ und wenn $F_2 \supseteq F_1, F_1 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$.

Sei X eine Menge. Betrachte die Menge aller Filter auf X. Dies ist eine gewisse Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Da die Potenzmenge jeder Menge mit der mengentheoretischen Inklusion geordnet ist, ist auch die Menge aller Filter auf X in dieser Weise eine geordnete Menge. Explizit gesagt gilt $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ genau dann, wenn jedes Element von $\mathfrak{F}_1$ auch zu $\mathfrak{F}_2$ gehört. In diesem Fall sagt man auch, dass $\mathfrak{F}_2$ *feiner* als $\mathfrak{F}_1$ ist oder, dass $\mathfrak{F}_1$ *gröber* als $\mathfrak{F}_2$ ist.

1.3.2 Definition. Sei X eine Menge. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X heißt *Ultrafilter*, wenn er ein maximales Element bezüglich der mengentheoretischen Inklusion in der Menge aller Filter auf X ist.

1.3.3 Lemma. *Sei X eine Menge, und $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathfrak{F}_1$ mit $\mathfrak{F}_1 \supseteq \mathfrak{F}$.*

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn anwenden, und zwar auf die Menge aller Filter auf X, die feiner als $\mathfrak{F}$ sind. Diese Menge ist nichtleer und als Teilmenge der Menge aller Filter bezüglich der mengentheoretischen Inklusion geordnet.

Ist $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$ eine totalgeordnete Menge von Filtern $\mathfrak{F}_i$ mit $\mathfrak{F}_i \supseteq \mathfrak{F}$, so enthält $\tilde{\mathfrak{F}} := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ die leere Menge nicht. Wegen $I \neq \emptyset$ und $\mathfrak{F}_i \supseteq \mathfrak{F}$ gilt auch $\tilde{\mathfrak{F}} \supseteq \mathfrak{F}$, womit insbesondere $\tilde{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$. Für $F_1, F_2 \in \tilde{\mathfrak{F}}$ existieren $i_1, i_2 \in I$ mit $F_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$ und $F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$. Dabei gilt $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{i_2}$ oder $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1}$. Im ersten Fall sind F_1, F_2 beide Elemente des Filters $\mathfrak{F}_{i_2}$, und daher ist auch $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Im zweiten Fall erhält man genauso $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Schließlich sei $F_1 \in \tilde{\mathfrak{F}}$, und $F_2 \supseteq F_1$ gegeben. Ist $i \in I$ derart, dass $F_1 \in \mathfrak{F}_i$, so gilt auch $F_2 \in \mathfrak{F}_i \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. Also stellt sich $\tilde{\mathfrak{F}}$ als Filter heraus.

Nach dem Lemma von Zorn existiert in der Menge aller Filter auf X, die feiner als $\mathfrak{F}$ sind, ein maximales Element. Es verbleibt zu bemerken, dass ein maximales Element in der Menge aller Filter auf X, die feiner als $\mathfrak{F}$ sind, auch maximal in der Menge aller Filter ist.

❑

1.3.4 Lemma. *Seien X und Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ist $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X, so ist*

$$f(\mathfrak{F}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\}$$

ein Filter auf Y, der $\{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ enthält. Ist $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter, so auch $f(\mathfrak{F})$.

Beweis. Es gilt $Y \in f(\mathfrak{F})$, da $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{F}$. Wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathfrak{F}$ gilt auch $\emptyset \notin f(\mathfrak{F})$. Sind $B_1, B_2 \in f(\mathfrak{F})$, daher $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$, so folgt $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$ und somit $B_1 \cap B_2 \in f(\mathfrak{F})$. Ist schließlich $B_2 \supseteq B_1 \in f(\mathfrak{F})$, so folgt $f^{-1}(B_2) \supseteq f^{-1}(B_1) \in \mathfrak{F}$ und somit $f^{-1}(B_2) \in \mathfrak{F}$, bzw. $B_2 \in f(\mathfrak{F})$. Also ist $f(\mathfrak{F})$ ein Filter, der wegen $f^{-1}(f(F)) \supseteq F \in \mathfrak{F}$ für $F \in \mathfrak{F}$ alle Bilder $f(F)$ enthält.

Ist $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter und ist $f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{G}$ für einen Filter $\mathfrak{G}$, so folgt $f(F) \cap G \neq \emptyset$ und infolge $F \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathfrak{F}, G \in \mathfrak{G}$. Damit erkennt man leicht, dass

$$\{H \subseteq X : \exists F \in \mathfrak{F},\ G \in \mathfrak{G} : F \cap f^{-1}(G) \subseteq H\}$$

ein Filter ist, der offenbar $\mathfrak{F}$ und $f^{-1}(\mathfrak{G})$ umfasst. Wegen der Maximalität muss dieser mit $\mathfrak{F}$ übereinstimmen, und daher $f^{-1}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{G} \subseteq f(\mathfrak{F})$.

❏

In einem topologischen Raum sind uns gewisse Filter schon begegnet, nämlich die Umgebungsfilter

$$\mathfrak{U}(x) := \big\{U \subseteq X : U \text{ ist Umgebung von } x\big\}.$$

1.3.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X heißt *konvergent gegen* x, wenn $\mathfrak{F}$ feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ von x.

In unserem Zusammenhang ist es entscheidend, dass sich Kompaktheit mit Hilfe des Begriffes der Filterkonvergenz charakterisieren lässt.

1.3.6 Proposition. *Für einen topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:*

(i) *$(X, \mathcal{T})$ ist kompakt.*

(ii) *Zu jedem Filter auf X gibt es einen in X konvergenten feineren Filter.*

(iii) *Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. Gelte (i), und sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf X. Wegen der Filtereigenschaft hat das Mengensystem $\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, also ist der Durchschnitt von endlich vielen Mengen daraus nichtleer. Damit muss $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F} \neq \emptyset$, da sonst der Übergang zu den Komplementen einen Widerspruch zur Kompaktheit ergäbe. Für ein x aus diesem Schnitt folgt $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $F \in \mathfrak{F}$. Somit ist

$$\mathfrak{G} := \{G \subseteq X : \exists U \in \mathfrak{U}(x),\ F \in \mathfrak{F} : U \cap F \subseteq G\}$$

ein Filter, der sicher $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ sowie $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{U}(x)$ erfüllt, womit $\mathfrak{G} \to x$.

Gilt (ii), und ist $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf X, so stimmt jede konvergente Verfeinerung von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}$ überein; also gilt (iii).

Gelte nun (iii), und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Gäbe es keine endliche Teilüberdeckung, so hätte das aus abgeschlossenen Mengen bestehende Mengensystem $\mathcal{M} := \{O^c : O \in \mathcal{V}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Insbesondere wäre damit

$$\mathfrak{G} := \{G \subseteq X : \exists n \in \mathbb{N}; M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M} : M_1 \cap \dots \cap M_n \subseteq G\}$$

ein Filter auf X. Ist nun $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{G}(\supseteq \mathcal{M})$ gemäß Lemma 1.3.3 ein Ultrafilter, und ist x ein gemäß Voraussetzung existierender Grenzwert davon, also $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}(x)$, so folgt insbesondere $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ $(\subseteq \mathfrak{F})$ und alle $M \in \mathcal{M}$ $(\subseteq \mathfrak{F})$, und in Folge der Widerspruch

$$x \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \left(\bigcup_{O \in \mathcal{V}} O \right)^c = \emptyset .$$

❑

Nach diesen Vorbereitungen ist der Beweis des Satzes von Tychonoff nicht mehr schwierig.

Beweis (von Satz 1.3.1). Wir setzen

$$X := \prod_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i ,$$

und bezeichnen mit $\pi_i : X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Da $\mathcal{T}$ die Produkttopologie ist, ist $\pi_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stets stetig.

Setzt man voraus, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, so ist jeder Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ als stetiges Bild eines kompakten Raumes ebenfalls kompakt.

Für die Umkehrung sei nun vorausgesetzt, dass $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für jedes $i \in I$ kompakt ist. Sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf X. Für jedes $i \in I$ folgt aus Lemma 1.3.4, dass $\pi_i(\mathfrak{F})$ ein Ultrafilter auf X_i ist.

Nach Proposition 1.3.6 konvergiert $\pi_i(\mathfrak{F})$ gegen einen Punkt $x_i \in X_i$. Setzen wir $x := (x_i)_{i \in I}$ $(\in X)$, so wollen wir zeigen, dass $\mathfrak{F}$ gegen x konvergiert.

Betrachte eine Menge der Gestalt $U = \prod_{i \in I} U_i$ wobei $U_i \in \mathfrak{U}(x_i)$, $i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$. Da $\pi_i(\mathfrak{F})$ gegen x_i konvergiert, gilt $U_i \in \pi_i(\mathfrak{F})$ für alle $i \in I$, und daher $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathfrak{F}$. Sind $i_1, \ldots, i_n \in I$ jene Indizes mit $U_i \neq X_i$, dann folgt $U = \bigcap_{k=1}^n \pi_i^{-1}(U_{i_k}) \in \mathfrak{F}$.

Da die Mengen U von dieser Gestalt eine Umgebungsbasis von x bezüglich der Produkttopologie bilden, folgt $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{F}$.

❑

1.4 Finale Topologie

1.4.1 Satz. *Sei X eine Menge, seien $(Y_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, topologische Räume und $f_i : Y_i \to X, i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft:*

(FI_1) *$\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie auf X derart, dass alle Abbildungen $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$, $i \in I$, stetig sind.*

Diese Topologie heißt finale Topologie *bezüglich der f_i. Sie ist gegeben durch*

(FI_2) *$\mathcal{T} = \{O \subseteq X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I\}$,*

und erfüllt:

(FI_3) *Ist* $(Y,\mathcal{O})$ *ein topologischer Raum und* $f : X \to Y$*, so ist* $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{O})$ *stetig genau dann, wenn alle Abbildungen*

$$f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (Y,\mathcal{O}), \quad i \in I\,,$$

stetig sind.

Beweis. Wir betrachten die durch (FI_2) definierte Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Es gilt

$$f_i^{-1}(O_1 \cap \ldots \cap O_n) = f_i^{-1}(O_1) \cap \ldots \cap f_i^{-1}(O_n)$$

und

$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} O_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(O_j)\,.$$

Sind also $O_1,\ldots,O_n \in \mathcal{T}$ bzw. $O_j \in \mathcal{T}, j \in J$, so folgt, da die $\mathcal{T}_i$ Topologien sind, $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$ und $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ ist also abgeschlossen und endlichen Durchschnitten und unter beliebigen Vereinigungen. Wegen $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f_i^{-1}(X) = Y_i$ enthält $\mathcal{T}$ auch die Mengen $\emptyset$ und X, wodurch sich $\mathcal{T}$ als Topologie erweist.

Definitionsgemäß gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_i$, womit alle $f_i : (Y_i,\mathcal{T}_i) \to (X,\mathcal{T})$ stetig sind. Ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X derart, dass alle f_i stetig sind, so folgt $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $O \in \mathcal{T}'$, also $O \in \mathcal{T}$. Also gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, und $\mathcal{T}$ erfüllt (FI_1). Klarerweise gibt es höchstens eine Topologie mit der Eigenschaft (FI_1).

Sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie bezüglich der f_i, und sei $f : X \to Y$. Ist f stetig, so ist auch $f \circ f_i : (Y_i,\mathcal{T}_i) \to (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{O})$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Sei umgekehrt $f \circ f_i$ stetig für alle i. Dann gilt

$$f_i^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O})) = (f \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}_i, \quad i \in I\,,$$

und wir erhalten $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$, womit f stetig ist.

❑

1.4.2 Bemerkung. Die finale Topologie ist die einzige Topologie auf X, die (FI_3) erfüllt. Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft (FI_3).

Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (FI_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$, dass alle $\mathrm{id}_X \circ f_i : (Y_i,\mathcal{T}_i) \to (X,\mathcal{T}')$ stetig sind. Aus (FI_1) folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Für $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ sind andererseits alle Abbildungen $\mathrm{id}_X \circ f_i = f_i : (Y_i,\mathcal{T}_i) \to (X,\mathcal{T})$ stetig. Mit (FI_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$, und daher $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Insgesamt ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. //

1.4.3 Beispiel. Sei $(Y,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Weiters sei $\pi : Y \to Y/_\sim$ die kanonische Projektion, $\pi(x) = [x]_\sim$. Die finale Topologie auf $Y/_\sim$ bezüglich π heißt *Quotiententopologie* und wird bezeichnet als $\mathcal{T}/_\sim$.

Ein $A \subseteq Y$ heißt *gesättigt* bezüglich $\sim$, wenn $x \in A$ die Inklusion $[x]_\sim \subseteq A$ nach sich zieht. Also ist A genau dann gesättigt, wenn aus $x \in A, y \in Y$ mit $\pi(x) = \pi(y)$ immer $y \in A$ folgt, was offenbar nichts anderes als $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ bedeutet.

Somit sind alle Mengen der Bauart $\pi^{-1}(B)$ mit $B \subseteq Y/_\sim$ gesättigt, und $A \mapsto \pi(A)$ stellt eine bijektive Abbildung von allen gesättigten Teilmengen von Y auf alle Teilmengen von $Y/_\sim$ dar, wobei $B \mapsto \pi^{-1}(B)$ ihre Umkehrung ist.

Eine Menge $P \subseteq Y/_\sim$ ist per definitionem genau dann offen in $(Y/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$, wenn $\pi^{-1}(P)$ offen in $(Y, \mathcal{T})$ ist. Insbesondere ist $O \mapsto \pi(O)$ eine Bijektion von allen gesättigten offenen Teilmengen von Y auf $\mathcal{T}/_\sim$. Entsprechendes gilt für abgeschlossene Mengen. //

Jede Abbildung $f : X \to Y$ induziert auf X die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)\,.$$

Für $y \in [x]_\sim \in X/_\sim$ folgt $f(x) = f(y)$. Also ist durch $g([x]_\sim) := f(x)$ eindeutig eine Funktion $g : X/_\sim \to f(X)$ definiert, welche offenbar $g(\pi(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt. Insbesondere ist $g : X/_\sim \to f(X)$ surjektiv. Weil $g([x]_\sim) = g([y]_\sim)$ die Beziehung $f(x) = f(y)$ und daher $[x]_\sim = [y]_\sim$ impliziert, ist $g : X/_\sim \to f(X)$ sogar bijektiv, und erfüllt $f = \iota \circ g \circ \pi$, wobei $\iota : f(X) \to Y$ die Einbettungsabbildung bezeichnet.

1.4.4 Proposition. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ eine stetige Abbildung. Mit obiger Notation ist $g : (X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) *g ist ein Homöomorphismus von $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ auf $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(*ii*) *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte offene Menge $O \subseteq X$ ist $f(O)$ offen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(*iii*) *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f(A)$ abgeschlossen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

Beweis. Mit f ist auch $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Somit können wir $Y = f(X)$ und infolge $\iota = \mathrm{id}_Y$ annehmen.

Die Stetigkeit von g folgt unmittelbar aus Satz 1.4.1, (FI_3), da $X/_\sim$ die finale Topologie $\mathcal{T}/_\sim$ bzgl. π trägt und da $g \circ \pi = f$ stetig ist.

Die Funktion g ist nun genau dann ein Homöomorphismus, wenn zusätzlich g^{-1} stetig ist, also wenn $g(P) \in \mathcal{V}$ für alle $P \in \mathcal{T}/_\sim$. Nach Beispiel 1.4.3 durchläuft $\pi^{-1}(P)$ aber alle offenen und gesättigten Teilmengen von X. Zudem gilt

$$g(P) = g \circ \pi(\pi^{-1}(P)) = f(\pi^{-1}(P))\,,$$

woraus man sofort die Äquivalenz von (*i*) und (*ii*) erkennt. Die Äquivalenz von (*i*) und (*iii*) zeigt man entsprechend.

❑

Kapitel 2

Topologische Vektorräume

2.1 Topologische Vektorräume; stetige lineare Abbildungen

In der Funktionalanalysis beschäftigt man sich unter anderem mit der Theorie der topologischen Vektorräume – das sind Vektorräume, die zusätzlich mit einer „vernünftigen“ Topologie versehen sind – sowie dem Studium der (oft stetigen und/oder linearen) Abbildungen zwischen solchen.

Viele Begriffsbildungen und Sätze der Funktionalanalysis lassen sich als Verallgemeinerung von Begriffen und Aussagen der linearen Algebra und Geometrie auffassen oder sind aus solchen motiviert. Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall spielt jedoch die Topologie eine wesentlich prominentere Rolle. Das ist hauptsächlich deshalb der Fall, weil es auf einem endlichdimensionalen Vektorraum genau eine „vernünftige“ Topologie gibt, vgl. Satz 2.2.1. Auf einem unendlichdimensionalen Vektorraum dagegen gibt es viele verschiedene Topologien. Diese Tatsache macht die Funktionalanalysis zu einem Zusammenspiel von linearer Algebra, Geometrie und Topologie. Eine wesentliche Rolle spielt auch die Maßtheorie, und das nicht nur für die theoretischen Aspekte. Sie ist auch Quelle vielfältiger Beispiele und Anwendungen.

Als erstes wollen wir klarmachen, was wir unter einer „vernünftigen“ Topologie auf einem Vektorraum verstehen. Das Mindeste, das man sich wohl erwarten wird, ist, dass die algebraischen Operationen stetig sind.

Um eine größere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden wir uns im gesamten Skriptum, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, immer auf Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen beschränken. Fast alle Ergebnisse gelten aber genauso für Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Zudem wollen wir im Folgenden für einen Vektorraum X und $A, B \subseteq X, x \in X$ mit $A + B$ immer die Menge

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

bezeichnen bzw. mit $x + A$ die Menge $\{x + a : a \in A\}$, für die klarerweise auch $x + A = A + x = \{x\} + A = A + \{x\}$ gilt.

2.1.1 Definition. Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Wir sagen, $(X, \mathcal{T})$ ist ein *topologischer Vektorraum*, wenn gilt:

(TV1) Die Abbildung

$$+ : \begin{cases} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{cases}$$

ist stetig, wobei X mit der Topologie $\mathcal{T}$ und $X \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ versehen ist.

(TV2) Die Skalarmultiplikation

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{C} \times X & \to & X \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{cases}$$

ist stetig, wobei $\mathbb{C}$ mit der üblichen (von der euklidischen Metrik $|x-y|$ induzierten) Topologie $\mathcal{E}$ und $\mathbb{C} \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ versehen ist.

Wir wollen weiters immer fordern, dass die Topologie $\mathcal{T}$ Hausdorff ist, also das zweite Trennungsaxiom ($T2$) gilt; vgl. Bemerkung 2.1.10.

2.1.2 Beispiel. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und bezeichne $\mathcal{T}$ die von der Norm induzierte Topologie. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. In der Tat gilt wegen

$$\|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\| \le \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|$$

$U_\epsilon^X(x_1) + U_\epsilon^X(x_2) \subseteq U_{2\epsilon}(x_1 + x_2)$, womit die Addition stetig ist. Aus

$$\begin{aligned} \|\alpha x - \beta y\| &\le \|\alpha(x - y)\| + \|(\alpha - \beta)y\| \\ &\le |\alpha|\|x - y\| + |\alpha - \beta|\|y\| \end{aligned}$$

folgt $U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \cdot U_\epsilon^X(x) \subseteq U_{\epsilon(|\alpha|+\|x\|+\epsilon)}^X(\alpha x)$ und damit die Stetigkeit der Skalarmultiplikation. Hier und auch später steht $U_\epsilon(x)$ bzw. $K_\epsilon(x)$ für die offene bzw. abgeschlossene ϵ-Kugel um x in dem betrefflichen metrischen Raum. Schließlich bemerke man, dass jeder metrische Raum Hausdorff ist.

Wir wollen anmerken, dass bei weitem nicht alle interessanten topologischen Vektorräume normierte Räume sind. //

2.1.3 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, und seien $a \in X$ sowie $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Dann gilt:*

(i) Die Abbildungen

$$T_a : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & a + x \end{cases} \qquad M_\lambda : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & \lambda x \end{cases}$$

sind Homöomorphismen. Man bezeichnet T_a auch als Translation.

(ii) Die Abbildung

$$S_a : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & X \\ \lambda & \mapsto & \lambda a \end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. Wir wollen nur die Aussagen für T_a beweisen. Die anderen Abbildungen sind analog zu behandeln. T_a lässt sich als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen $x\ (\in X) \mapsto (a,x)\ (\in X^2)$ und $(a,x) \mapsto a + x\ (\in X)$ betrachten, und ist somit selber stetig. Wegen $T_a \circ T_{-a} = T_{-a} \circ T_a = \mathrm{id}_X$ gilt $T_a^{-1} = T_{-a}$, womit diese Abbildung auch stetig ist.

❑

2.1.4 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ist $\mathfrak{V}(0)$ der Umgebungsfilter von 0 (bzw. eine Umgebungsbasis von 0), so ist*

$$x + \lambda \cdot \mathfrak{V}(0) := \{x + \lambda V : V \in \mathfrak{V}(0)\}$$

der Umgebungsfilter von x (bzw. eine Umgebungsbasis von x). Die offenen Umgebungen von x sind dabei genau die Mengen der Form $x + \lambda U$, wobei U eine offene Nullumgebung ist.

Beweis. Da M_λ und T_x Homöomorphismen sind, bildet $T_x \circ M_\lambda$ den Umgebungsfilter von 0 (eine Umgebungsbasis von 0) auf den Umgebungsfilter von $T_x \circ M_\lambda(0) = x$ (eine Umgebungsbasis von $T_x \circ M_\lambda(0) = x$) ab. Dabei werden die offenen Umgebungen genau auf die offenen Umgebungen abgebildet.

❑

2.1.5 Definition. Die Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt

(*i*) *absorbierend*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $t > 0$ gibt mit $tx \in A$.

(*ii*) *symmetrisch*, wenn gilt $-A = A$, wobei $-A := \{-x : x \in A\}$.

(*iii*) *kreisförmig*, wenn für alle $x \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$, auch $\lambda x \in A$ gilt.

(*iv*) *konvex*, wenn für alle $x, y \in A$ und $t \in [0,1]$ auch

$$tx + (1-t)y \in A$$

gilt, also wenn die Menge A mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

2.1.6 Bemerkung. Kreisförmige Mengen sind offenbar symmetrisch. Nichtleere kreisförmige Mengen enthalten immer die Null. Eine kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ hat genau eine der folgenden Bauweisen ($\eta > 0$)

$$\emptyset,\ \{0\},\ U_\eta^{\mathbb{C}}(0),\ K_\eta^{\mathbb{C}}(0),\ \mathbb{C}\,.$$

Damit eine Teilmenge A von X konvex ist, reicht es offenbar, dass $tx + (1-t)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und alle $t \in (0,1)$. Konvexe Mengen A mit $0 \in A$ erfüllen zudem $tx = tx + (1-t)0 \in A$ für alle $x \in A$ und $t \in [0,1]$. //

2.1.7 Lemma. *In einem topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ gilt:*

(*i*) *Der Abschluss einer konvexen (symmetrischen, kreisförmigen) Menge bzw. eines linearen Unterraumes ist konvex (symmetrisch, kreisförmig) bzw. wieder ein linearer Unterraum.*

(*ii*) *Das Innere einer konvexen bzw. symmetrischen Menge ist konvex bzw. symmetrisch. Das Innere einer kreisförmigen Menge ist kreisförmig, falls* 0 *im Inneren liegt.*

Beweis. Um (i) zu sehen, betrachte eine beliebige Menge A und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wegen der Stetigkeit der Vektorraumoperationen gilt

$$\alpha\overline{A} + \beta\overline{A} \subseteq \overline{(\alpha A + \beta A)}\,.$$

Mit geeigneter Wahl von α und β ($\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $\alpha + \beta = 1$ im konvexen Fall; $\alpha = -1$, $\beta = 0$ im symmetrischen Fall; $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq 1$, $\beta = 0$ im kreisförmigen Fall; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig im Fall eines linearen Unterraumes) folgt $\alpha\overline{A} + \beta\overline{A} \subseteq \overline{(\alpha A + \beta A)} \subseteq \overline{A}$ und damit die entsprechenden Aussagen.

Für (ii) sei zuerst eine konvexe Menge A und $x, y \in A^\circ$, $t \in (0,1)$, gegeben. Dann folgt $tx + (1-t)y \in tx + (1-t)A^\circ$. Letztere Menge ist wegen $1-t \neq 0$ offen und wegen der Konvexität von A in A enthalten, wodurch $tx + (1-t)y \in A^\circ$. Die Behauptung für symmetrische bzw. kreisförmige Mengen wird analog bewiesen, wobei der 0 ihre Sonderrolle zukommt, weil M_λ aus Lemma 2.1.3 nur für $\lambda \neq 0$ ein Homöomorphismus ist.

❑

2.1.8 Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Vektorraum, und sei* U *eine Umgebung der Null. Dann gilt:*

(*i*) U *ist absorbierend.*

(*ii*) *Zu jedem* $n \in \mathbb{N}$ *existiert eine symmetrische Nullumgebung* V *mit*

$$\underbrace{V + V + \ldots + V}_{n\text{-}mal} \subseteq U\,.$$

(*iii*) *Es gibt eine kreisförmige offene Nullumgebung* W *mit* $W \subseteq U$.

(*iv*) *Ist* U *zusätzlich konvex, dann gibt es eine kreisförmige, offene und konvexe Nullumgebung* B *mit* $B \subseteq U$.

Beweis.
`ad`(i): Ist $x \in X$ gegeben, so gilt $S_x(0) = 0 \cdot x = 0 \in U$. Also ist nach Lemma 2.1.3, (ii), $S_x(t) = tx \in U$ für hinreichend kleine Werte von t.

`ad`(ii): Wegen $0 + 0 = 0$ und der Stetigkeit von $+$ bei $(0,0)$ existieren Nullumgebungen W_1, W_2 mit $W_1 + W_2 \subseteq U$. Mit W_i ist auch $-W_i$ eine Nullumgebung, und daher gilt

$$V_2 := W_1 \cap W_2 \cap (-W_1) \cap (-W_2) \in \mathfrak{U}(0) \text{ und } -V_2 = V_2 \text{ sowie } V_2 + V_2 \subseteq U\,.$$

Wendet man diese Überlegung wiederum auf V_2 an, so erhält man eine symmetrische Nullumgebung V_4 mit $V_4 + V_4 + V_4 + V_4 \subseteq U$, und mit $V_3 := V_4$ wegen $0 \in V_3$ auch $V_3 + V_3 + V_3 \subseteq V_4 + V_4 + V_4 + V_4 \subseteq U$. Verfährt man induktiv weiter, so folgt die Behauptung.

`ad`(iii): Sei U eine Umgebung der 0.Wegen $0 \cdot 0 = 0$ kann man wegen der Stetigkeit der skalaren Multiplikation $\delta > 0$ und $V \in \mathfrak{U}(0)$ offen so wählen, dass $\alpha V \subseteq U$ für alle $|\alpha| < \delta$. Für

$$W := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$$

ist $W \in \mathfrak{U}(0)$ offen, $W \subseteq U$, und $\gamma W \subseteq W$ für $|\gamma| \leq 1$.

`ad`(iv): Sei U eine konvexe Nullumgebung. Wähle W wie in (iii) und setze

$$A := \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U .$$

Für $|\alpha| = 1$ gilt $\alpha^{-1}W = W$, womit $W \subseteq \alpha U$. Es folgt $W \subseteq A$, was $A \in \mathfrak{U}(0)$ nach sich zieht. Klarerweise gilt $A \subseteq U$, und als Durchschnitt konvexer Mengen ist A konvex. Um die Kreisförmigkeit von A zu zeigen, sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \leq 1$ gegeben, und schreibe $\gamma = r\beta$ mit $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$. Dann gilt

$$\gamma A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U .$$

Da die Menge U konvex ist und 0 enthält, gilt $rU \subseteq U$ für $r \in [0,1]$, womit $\gamma A \subseteq A$. Schließlich ist $B := A^\circ$ die gesuchte Menge.

❑

Wir haben in der Definition eines topologischen Vektorraumes verlangt, dass die Topologie Hausdorff ist, dass also je zwei verschiedene Punkte durch disjunkte offene Mengen getrennt werden können. Insbesondere ist auch jede einelementige Menge abgeschlossen. Mit Hilfe der Stetigkeit der algebraischen Operationen erhält man daraus eine viel stärkere Trennungseigenschaft.

2.1.9 Proposition. *Sei X ein topologischer Vektorraum, K, C disjunkte Teilmengen von X, K kompakt und C abgeschlossen. Dann existiert eine offene Umgebung V der Null derart, dass*

$$\big(C + V\big) \cap \big(K + V\big) = \emptyset .$$

Beweis. Ist $K = \emptyset$, so ist für jedes V auch $K + V = \emptyset$ und die Behauptung daher trivial. Sei also $K \neq \emptyset$, und sei $x \in K$. Wegen $x \notin C$ und C abgeschlossen existiert eine symmetrische und offene Nullumgebung V_x mit $x + V_x + V_x + V_x \subseteq X \setminus C$, woraus

$$(C + V_x) \cap (x + V_x + V_x) = \emptyset \tag{2.1.1}$$

folgt. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \ldots \cup (x_n + V_{x_n}) .$$

Für $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ gilt wegen (2.1.1)

$$\begin{aligned}\big(C + V\big) \cap \big(K + V\big) &\subseteq \big(C + V\big) \cap \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n (C + V_{x_i}) \cap (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) = \emptyset .\end{aligned}$$

❑

2.1.10 Bemerkung.

(*i*) Wegen $K + V = \bigcup_{x \in K}(x + V)$ und $C + V = \bigcup_{x \in C}(x + V)$ sind diese Mengen offen und wegen $0 \in V$ auch Obermengen von K bzw. C. Also lassen sich in topologischen Vektorräumen kompakte Mengen von disjunkten abgeschlossenen Mengen durch offene Menge trennen.

(*ii*) Da einpunktige Mengen kompakt sind, lassen sich Punkte und diese Punkte nicht enthaltende abgeschlossene Mengen durch offene Menge trennen. Also gilt in topologischen Vektorräumen immer das dritte Trennungsaxiom ($T3$). Insbesondere ist der topologische Vektorraum, so wie wir ihn in Definition 2.1.1 definiert haben, regulär, also gelten die Trennungsaxiome ($T2$) und ($T3$).

(*iii*) Wie schon oben erwähnt, sind in jedem Hausdorff Raum alle einpunktigen Mengen abgeschlossen, weil sich wegen ($T2$) das Komplement jeder einpunktigen Menge als Vereinigung offener Mengen schreiben lässt.

Für topologische Räume mit der Eigenschaft, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, sagt man, dass sie das Trennungsaxiom ($T1$) erfüllen. Insbesondere folgt aus ($T2$) immer ($T1$). Im Allgemeinen gilt auf topologischen Räumen aber nicht die Umkehrung.

Erfüllt ein topologischer Raum aber das ($T3$) und das ($T1$), so folgt offenbar auch das ($T2$) und somit die Regularität.

(*iv*) Sei nun X ein Vektorraum versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$, die alle in Definition 2.1.1 geforderten Eigenschaften bis auf das ($T2$) erfüllt, also einen *im Allgemeinen nicht Hausdorffschen topologischen Vektorraum* abgibt. Man überzeugt sich dann leicht davon, dass das bisher über topologische Vektorräume Bewiesene – insbesondere Proposition 2.1.9 – auch für X richtig ist. Also kann man hier ebenfalls kompakte Mengen von disjunkten abgeschlossenen Mengen durch offene Mengen trennen. Wieder, weil alle einpunktigen Mengen kompakt sind, erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom ($T3$).

Stellt man an $(X, \mathcal{T})$ die zusätzliche Forderung, dass alle einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, also das Trennungsaxiom ($T1$) gilt, so folgt daraus wie im letzten Punkt bemerkt, dass $(X, \mathcal{T})$ schon das ($T2$) erfüllt. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum mit genau den Eigenschaften von Definition 2.1.1. Also ist die Forderung ($T2$) in Definition 2.1.1 unnötig stark, und es ergeben sich die gleichen Objekte, wenn man nur ($T1$) fordert.

Man beachte schließlich, dass in im Allgemeinen nicht Hausdorffschen topologischen Vektorräumen wegen Lemma 2.1.3 das ($T1$) schon gilt, wenn mindestens ein Punkt abgeschlossen ist.

//

Kommen wir nun zur Diskussion der strukturerhaltenden Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen, das sind stetige lineare Abbildungen.

2.1.11 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{V})$ zwei topologische Vektorräume, und sei $R : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *R ist stetig.*

(*ii*) *R ist stetig in einem Punkt von X.*

Beweis. Wir müssen von der Stetigkeit von R in einem Punkt $x_0 \in X$ auf die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt $x \in X$ schließen. Wegen

$$R(y) = R(y - x + x_0) + R(x - x_0) \quad \text{für alle} \quad y \in X\,,$$

gilt $R = T_{R(x-x_0)} R T_{x_0-x}$, wobei $T_{R(x-x_0)}$ und T_{x_0-x} Translationen wie in Lemma 2.1.3, (*i*), sind. Wegen $T_{x_0-x}(x) = x_0$ impliziert somit die Stetigkeit von R bei x_0 zusammen mit der Stetigkeit der Translationen bei allen Punkten die Stetigkeit von R bei x.

❑

Wendet man Proposition 2.1.11 auf $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ bzw. auch auf $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ mit zwei Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ an, so erhalten wir

2.1.12 Korollar. *Sei X ein Vektorraum, und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, die X zu einem topologischen Vektorraum machen. Bezeichne mit $\mathfrak{U}_1(x)$ bzw. $\mathfrak{U}_2(x)$ die Umgebungsfilter des Punktes x bezüglich $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$.*

Gibt es einen Punkt $x_0 \in X$ derart, dass $\mathfrak{U}_1(x_0) \subseteq \mathfrak{U}_2(x_0)$ bzw. $\mathfrak{U}_1(x_0) = \mathfrak{U}_2(x_0)$, so folgt schon $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

2.1.13 Bemerkung. Seien X, Y normierte Räume. Dann ist eine lineare Abbildung $R : X \to Y$ genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist. Wir bezeichnen die Menge aller *beschränkten linearen Abbildungen* von X nach Y mit $L_b(X, Y)$. Diese ist, versehen mit der *Operatornorm* $\|R\| := \sup\{\|Rx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$, ein normierter Raum. $L_b(X, Y)$ ist sogar ein Banachraum, falls Y ein Banachraum ist. //

Eine spezielle Rolle spielen *lineare Funktionale*, das sind lineare Abbildungen von X in den Skalarkörper. Für diese gilt

2.1.14 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $f : X \to \mathbb{C}$ linear, $f \neq 0$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *f ist stetig.*

(*ii*) $\ker f$ *ist abgeschlossen.*

(*iii*) $\ker f$ *ist nicht dicht in X.*

(*iv*) *Es existiert eine Nullumgebung U derart, dass $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt ist.*

Beweis. $\ker f$ ist eine Hyperebene in X, also ein linearer Unterraum mit Kodimension 1. Wegen $\overline{\ker f} \supseteq \ker f$ ist also entweder $\overline{\ker f} = \ker f$ oder $\overline{\ker f} = X$.

Damit folgt (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*). Es gilt auch (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*), denn für stetiges f ist $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen.

Für (*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) betrachte für ein stetiges f die Menge $U := f^{-1}(U_1^{\mathbb{C}}(0))$. Diese ist offen und enthält 0, also $U \in \mathfrak{U}(0)$, und $f(U) \subseteq U_1^{\mathbb{C}}(0)$ ist offenbar beschränkt.

Für $(iv) \Rightarrow (i)$ sei umgekehrt $U \in \mathfrak{U}(0)$ so, dass $f(U)$ in einer gewissen Kreisscheibe $U_r^{\mathbb{C}}(0)$ mit $0 < r < \infty$ enthalten ist. Für $\epsilon > 0$ gilt $\frac{\epsilon}{r}U \in \mathfrak{U}(0)$ und $f(\frac{\epsilon}{r}U) = \frac{\epsilon}{r}f(U) \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)$, womit sich f als stetig bei 0 herausstellt. Wegen Proposition 2.1.11 ist f überall stetig.

Wir zeigen schließlich $(iii) \Rightarrow (iv)$. Dazu sei U eine nichtleere offene Menge mit $U \cap \ker f = \emptyset$. Wegen Korollar 2.1.4 und Lemma 2.1.8 können wir annehmen, dass $U = x_0 + W$ mit einem Punkt $x_0 \in X$ und einer kreisförmigen Nullumgebung W. Wegen der Linearität von f ist auch $f(W)$ kreisförmig.

Die kreisförmigen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind aber genau die (offenen oder abgeschlossenen) Kreisscheiben mit Radius $0 \leq r < \infty$ sowie ganz $\mathbb{C}$. Angenommen $f(W) = \mathbb{C}$, dann gibt es $y \in W$ mit $f(y) = -f(x_0)$. Damit hätten wir den Widerspruch $x_0 + y \in (x_0 + W) \cap \ker f$. Also bildet f die Nullumgebung W in eine gewisse Kugel $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ mit $r < \infty$ ab.

❑

2.1.15 Bemerkung. Im Allgemeinen ist nicht jedes lineare Funktional auch stetig. Es ist aber jedes lineare Funktional $f \neq 0$ auf einem topologischem Vektorraum offen, bildet also offene Mengen auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ab. Um das einzusehen sei $y \in X$ so, dass $f(y) \neq 0$.

Ist nun $O \subseteq X$ offen und $f(x) \in f(O)$ mit $x \in O$, so gibt es wegen der Stetigkeit der Abbildung $\lambda \mapsto x + \lambda y$ bei $\lambda = 0$ ein $\epsilon > 0$ derart, dass $x + \lambda y \in O$ für alle $\lambda \in \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \epsilon\}$.

Es folgt $f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y) \in f(O)$ für alle $|\lambda| < \epsilon$. Also ist die ganze offene Kreisscheibe mit Radius $\epsilon|f(y)| > 0$ um $f(x)$ in $f(O)$. //

Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum X bezeichnen wir mit X^* die Menge aller linearen Abbildungen von X in den Skalarkörper $\mathbb{C}$, und sprechen vom *algebraischen Dualraum* von X. Entsprechend ist der algebraischen Dualraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums definiert.

2.1.16 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann bezeichnen wir mit $(X, \mathcal{T})'$ die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von X in den Skalarkörper $\mathbb{C}$, und sprechen vom *topologischen Dualraum*[†] von $(X, \mathcal{T})$.

Ist aus dem Zusammenhang klar, auf welche Topologie $\mathcal{T}$ wir uns beziehen, dann schreiben wir auch kürzer X' und sprechen einfach vom *Dualraum*.

Die Untersuchung des Zusammenspiels zwischen dem Raum X und dem Raum X' nimmt eine wesentliche Rolle in der Funktionalanalysis ein. Auch wir werden uns oft damit beschäftigen.

2.1.17 Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und X' sein Dualraum.

(i) Da eine Linearkombination zweier stetiger $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen wieder stetig ist, muss X' jedenfalls ein Unterraum von X^* sein. Im Allgemeinen muss X' aber nicht mit X^* übereinstimmen. Es gibt Beispiele, bei denen diese Dualräume aber doch gleich sind, zB. im Fall $\dim X < \infty$, siehe Korollar 2.2.3.

[†]In vielen Lehrbücher über Funktionalanalyis – darunter auch [R1] und [C] aus denen ein Großteil dieser Vorlesung entnommen wurde – wird genau die umgekehrte Bezeichnungsweise verwendet. Dort ist X' der algebraische Dualraum und X^* der topologische Dualraum. Leider ist in dieser Beziehung die Notation in der Fachliteratur sehr uneinheitlich.

Ad hoc kann man auch nicht sagen, um wieviel größer X' im Vergleich zu $\{0\}$ ist. Tatsächlich gibt es auch Beispiele von topologischen Vektorräumen mit $X' = \{0\}$. Also gilt im Allgemeinen nur

$$\{0\} \subseteq X' \subseteq X^*.$$

(ii) X' trägt von vornherein keine ausgezeichnete Topologie. Wir werden später verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, X' zu einem topologischen Vektorraum zu machen.

Ist X ein normierter Raum, so kennen wir bereits eine kanonische Möglichkeit auf X' eine Topologie zu definieren. Denn dann ist ja $X' = L_b(X, \mathbb{C})$, und daher, versehen mit der Operatornorm, sogar ein Banachraum, vgl. Bemerkung 2.1.13.

//

2.2 Endlichdimensionale Topologische Vektorräume

Zunächst bemerke, dass man auf $\mathbb{C}^n$ die *euklidische Norm*

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n\ ,$$

hat. Mit dieser ist $\mathbb{C}^n$ ein Banachraum, und die induzierte Topologie (die *euklidische Topologie*) ist gerade die Produkttopologie der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{C}$.

2.2.1 Satz. *Sei X ein topologischer Vektorraum. Für einen n-dimensionalen ($n \in \mathbb{N}$) linearen Unterraum Y von X gilt:*

(i) *Jeder Isomorphismus von $\mathbb{C}^n$ auf Y ist auch ein Homöomorphismus (von $(\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$ auf Y mit der Spurtopologie von X).*

(ii) *Y ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis $(1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, \dots, 0, 1)^T$ im $\mathbb{C}^n$. Für ein lineares $\phi : \mathbb{C}^n \to X$ gilt

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(e_i)\,.$$

Weiters hängen die Koordinaten β_i eines Vektors $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ wegen $|\beta_i| \leq \|x\|_2$ stetig von x ab. Da die algebraischen Operationen in X stetig sind, hängt auch $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(e_i)$ stetig von x ab. Also ϕ ist stetig.

Sei nun $\phi : \mathbb{C}^n \to Y$ linear und bijektiv. Als Bild der kompakten Teilmenge $K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 = 1\}$ von $\mathbb{C}^n$ unter einer stetigen Funktion ist $\phi(K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0))$ kompakt, und da X das $(T2)$ erfüllt, auch abgeschlossen in X. Wegen $\ker \phi = \{0\}$ gilt $0 \in X \setminus \phi(K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0))$. Wähle $V \in \mathfrak{U}(0)$ kreisförmig und offen mit $V \subseteq X \setminus \phi(K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0))$.

Die Menge $\phi^{-1}(V \cap Y)$ $(\subseteq \mathbb{C}^n)$ ist wegen der Linearität von ϕ auch kreisförmig und erfüllt

$$\phi^{-1}(V \cap Y) \cap K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0) = \phi^{-1}(V \cap Y \cap \phi(K_1^{\mathbb{C}^n}(0) \setminus U_1^{\mathbb{C}^n}(0))) = \emptyset\,.$$

Zusammen mit der Kreisförmigkeit von $\phi^{-1}(V \cap Y)$ folgt daraus $\|z\|_2 < 1$ für alle $z \in \phi^{-1}(V \cap Y)$, womit $\phi^{-1}(V \cap Y) \subseteq U_1^{\mathbb{C}^n}(0)$.

Um die Stetigkeit von $\phi^{-1} : Y \to \mathbb{C}^n$ bei 0 zu zeigen, sei $\epsilon > 0$. Für die bezüglich der Spurtopologie in Y offene Nullumgebung $\epsilon(V \cap Y)$ gilt

$$\phi^{-1}(\epsilon(V \cap Y)) = \epsilon\phi^{-1}(V \cap Y) \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}^n}(0)\,.$$

Also ist ϕ^{-1} stetig an der Stelle 0, und wegen der Linearität daher überall stetig; vgl. Proposition 2.1.11.

Für den Beweis von (ii), wähle eine lineare Bijektion $\phi : \mathbb{C}^n \to Y$ und wähle V wie im Beweis zu (i). Sei $p \in \overline{Y}$. Weil V absorbierend ist, gibt es zunächst ein $t > 0$ mit $tp \in V$ bzw. $p \in \frac{1}{t}V$.

Da $\frac{1}{t}V$ offen ist, ist für jede Umgebung U von p auch $U \cap \frac{1}{t}V$ eine Umgebung von p, woraus wegen $p \in \overline{Y}$ immer $U \cap \frac{1}{t}V \cap Y \neq \emptyset$ gilt. Also gilt auch $p \in \overline{Y \cap (\frac{1}{t}V)}$. Wegen

$$Y \cap (\frac{1}{t}V) = \frac{1}{t}(Y \cap V) = \phi\big(\frac{1}{t}\phi^{-1}(V \cap Y)\big) \subseteq \phi(\frac{1}{t}U_1^{\mathbb{C}^n}(0)) \subseteq \phi\big(K_{\frac{1}{t}}^{\mathbb{C}^n}(0)\big)\,,$$

liegt p auch im Abschluss der rechten Seite. Als Bild einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ unter einer stetigen Funktion ist die rechte Seite aber ohnehin kompakt und damit abgeschlossen. Wir schließen daher auf

$$p \in \phi\big(K_{\frac{1}{t}}^{\mathbb{C}^n}(0)\big) \subseteq Y\,,$$

und damit auf $Y = \overline{Y}$.

❏

2.2.2 Korollar. *Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum X – insbesondere auf $\mathbb{C}^n$ – gibt es genau eine Topologie, die diesen zu einem topologischen Vektorraum macht. Damit sind auch alle Normen auf X – insbesondere auf $\mathbb{C}^n$ – äquivalent.*

Beweis. Sei X ein Vektorraum mit $n := \dim X < \infty$ und $\phi : \mathbb{C}^n \to X$ linear und bijektiv. Man überprüft mit Hilfe der Linearität von ϕ leicht, dass $\phi(\mathcal{T}(\|.\|_2))$ den Raum X zu einem topologischen Vektorraum macht. Diese Topologie wird von der Norm $\|\phi^{-1}(.)\|_2$ auf X erzeugt.

Ist andererseits $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, welche X zu einem topologischen Vektorraum macht, so ist ϕ gemäß Satz 2.2.1 ein Homöomorphismus, wenn wir $\mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{T}(\|.\|_2)$ und X mit $\mathcal{T}$ versehen, womit $\mathcal{T} = \phi(\mathcal{T}(\|.\|_2))$. Wird dabei $\mathcal{T}$ von der Norm $\|.\|$ auf X erzeugt, so sind ϕ und ϕ^{-1} beschränkt, wenn $\mathbb{C}^n$ mit $\|.\|_2$ und X mit $\|.\|$ versehen wird. Also gibt es $c, d > 0$ derart, dass $\|\phi(\xi)\| \leq c \cdot \|\xi\|_2$ für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$ und $\|\phi^{-1}(x)\|_2 \leq d \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$. Setzen wir $\xi = \phi^{-1}(x)$ so erhalten wir

$$\frac{1}{c} \cdot \|x\| \leq \|\phi^{-1}(x)\|_2 \leq d \cdot \|x\|, \quad x \in X\,,$$

womit $\|\phi^{-1}(.)\|_2$ und $\|.\|$ auf X äquivalent sind.

❑

2.2.3 Korollar. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Vektorraum mit* $\dim X < \infty$. *Dann gilt* $\dim X' = \dim X$ *und* $X' = X^*$.

Beweis. Für eine lineare Bijektion $\phi : \mathbb{C}^n \to X$ mit $n = \dim X$ – wegen Satz 2.2.1 ist ϕ gleichzeitig ein Homöomorphismus – ist $f \mapsto f \circ \phi$ eine lineare Bijektion von X' auf $(\mathbb{C}^n)'$. Da jedes Element von $(\mathbb{C}^n)^*$ eindeutig durch $x \mapsto (x, y)$ für ein eindeutiges $y \in \mathbb{C}^n$ dargestellt werden kann (vgl. auch Proposition 3.2.5), und da $x \mapsto (x, y)$ wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung stetig bzgl. $\|.\|_2$ ist, gilt $(\mathbb{C}^n)' = (\mathbb{C}^n)^*$. Es folgt $\dim X' = \dim(\mathbb{C}^n)^* = n = \dim X$. Wegen $\dim X^* = n$ gilt auch $X^* = X'$.

❑

Im Beweis von Satz 2.2.1 spielt die Kompaktheit der Einheitssphäre $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 = 1\}$ im $\mathbb{C}^n$ eine wesentliche Rolle. Diese wird durch den Satz von Heine-Borel gewährleistet, der auch zeigt, dass die ganze abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{\mathbb{C}^n} := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 \leq 1\}$ bezüglich der euklidischen Topologie kompakt ist. Wir wollen nun beweisen, dass die Existenz einer kompakten Nullumgebung bereits endlichdimensionale topologische Vektorräume charakterisiert.

2.2.4 Proposition. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Vektorraum. Dann existiert eine kompakte Umgebung der Null genau dann, wenn* $\dim X < \infty$.

Beweis. Eine lineare Bijektion $\phi : \mathbb{C}^n \to X$ mit $n = \dim X < \infty$ ist gemäß Satz 2.2.1 ist ϕ ein Homöomorphismus, wodurch $\phi(K_1^{\mathbb{C}^n})$ eine kompakte Nullumgebung abgibt.

Umgekehrt sei angenommen, dass $V \in \mathfrak{U}(0)$ kompakt ist. Wähle $W \in \mathfrak{U}(0)$ offen und kreisförmig mit $W \subseteq V$. Wegen $\bigcup_{x \in V}(x + \frac{1}{2}W) \supseteq V$ und wegen der Kompaktheit von V gibt es endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in V$ derart, dass

$$\bigcup_{k=1}^{n}(x_k + \frac{1}{2}W) \supseteq V \supseteq W\,.$$

Setzen wir $Y := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, so folgt

$$W \subseteq Y + \frac{1}{2}W \subseteq Y + \frac{1}{2}\big(Y + \frac{1}{2}W\big) = Y + \frac{1}{4}W \subseteq \dots \subseteq Y + \frac{1}{2^k}W \subseteq \dots$$

also $W \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}}(Y + \frac{1}{2^k}W)$.

Zudem enthält jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ eine Menge der Form $\frac{1}{2^k}W$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$. Um das einzusehen, sei $U' \in \mathfrak{U}(0)$ offen und kreisförmig mit $U' \subseteq U$. Dann ist U' als Nullumgebung absorbierend, was zusammen mit ihrer Kreisförmigkeit

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} 2^k\, U' = X \supseteq V$$

bedingt, wobei $2^k\, U' \subseteq 2^{k+1}\, U'$. Wegen der Kompaktheit gilt für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$, dass $2^k\, U' \supseteq V \supseteq W$ und infolge $U \supseteq U' \supseteq \frac{1}{2^k}W$.

Für $w \in W$ und beliebiges $U \in \mathfrak{U}(0)$ folgt mit einem $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^k}W \subseteq U$, wegen $w \in W \subseteq Y + \frac{1}{2^k}W$

$$(w+U) \cap Y \supseteq (w + \frac{1}{2^k}W) \cap Y \neq \emptyset .$$

Wir erhalten $w \in \overline{Y}$. Da Y endlichdimensional ist, gilt $Y = \overline{Y}$, und es folgt $W \subseteq Y$. Da W absorbierend ist, gilt schließlich $X = Y$.

❑

2.3 Einige Beispiele

2.3.1 Beispiel. Als erstes und auch durchaus fundamentales Beispiel wollen wir die aus der Maßtheorie bekannten *L^p-Räume* anführen.

Sei Ω eine Menge versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und μ ein positives Maß auf Ω. Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnet $L^p(\mu)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen von μ-f.ü. gleichen) messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, für die gilt

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Dann ist $\|.\|_p : L^p(\mu) \to [0, \infty)$ eine Norm und $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ ein Banachraum.

Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bezeichne $\|f\|_\infty$ das *essentielle Supremum* von $|f|$,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf \big\{ \alpha \in \mathbb{R} : \mu(\ (|f|)^{-1}(\alpha, \infty] \ ) = 0 \big\} ,$$

und $L^\infty(\mu)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen μ-f.ü. gleicher) messbarer Funktionen f mit $\|f\|_\infty < \infty$. Wieder ist $\|.\|_\infty$ eine Norm und $(L^\infty(\mu), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum.

Der Dualraum des Raumes $L^p(\mu)$ kann explizit bestimmt werden, vgl. Vorlesung Analysis 3 bzw. Maßtheorie. Sei $1 < p < \infty$, und sei $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung Φ, die jedem $g \in L^q(\mu)$ das lineare Funktional

$$\Phi(g)f := \int_\Omega fg \, d\mu, \ \ f \in L^p(\mu) ,$$

zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $L^q(\mu)$ auf $L^p(\mu)'$. Im Falle $p = 1$ gilt das unter der zusätzlichen Annahme, dass μ ein σ-endliches Maß ist.

Der Dualraum von $L^\infty(\mu)$ ist von wesentlich komplizierterer Gestalt. Er kann identifiziert werden mit gewissen endlich-additiven Mengenfunktionen auf Ω, vgl. [DS]. //

2.3.2 Beispiel. Zwei spezielle Situationen der in Beispiel 2.3.1 betrachteten Räume treten häufig auf.

(*i*) Ist Ω eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$, und ist μ das Lebesgue-Maß auf Ω, so schreibt man auch $L^p(\Omega)$ für $L^p(\mu)$, z.B. $L^p(\mathbb{R}^2)$ oder $L^p(0,1) := L^p([0,1])$ o.ä.

(*ii*) Ist Ω eine Menge und μ das Zählmaß auf Ω, so schreibt man auch $\ell^p(\Omega)$ für $L^p(\mu)$. Zum Beispiel ist $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ die Menge aller komplexen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\,,$$

versehen mit der Norm $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

//

2.3.3 Beispiel. Bezeichne mit c_0 den Raum aller komplexen Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist c_0 ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞. Der Dualraum von c_0 kann mit ℓ^1 identifiziert werden, nämlich mit Hilfe der Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \ell^1 & \to & c_0' \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \Big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n a_n\Big) \end{cases}$$

Wegen der σ-Endlichkeit des Zählmaßes auf $\mathbb{N}$ sind nach Beispiel 2.3.1 auch die Räume ℓ^∞ und $(\ell^1)'$ vermöge der Abbildung $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n c_n)$ isometrisch isomorph. //

2.3.4 Beispiel. Sei M eine Menge und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : M \to X$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $R > 0$ derart gibt, dass $\|f(x)\| \leq R$ für alle $x \in X$. Die Menge aller beschränkten Funktionen von M nach X bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(M,X)$. Versehen mit den punktweise definierten Operationen wird $\mathfrak{B}(M,X)$ zu einem Vektorraum. Für $f \in \mathfrak{B}(M,X)$ bezeichne

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in M} \|f(x)\|$$

die *Supremumsnorm* von f. Dann ist $(\mathfrak{B}(M,X), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum.

Man verwechsle diese Terminologie nicht mit der Bezeichnung „beschränkt" im Kontext linearer Abbildungen. Leider wird hier das gleiche Wort für unterschiedliche Dinge verwendet. Eine von Null verschiedene lineare Abbildung ist in dem gerade definierten Sinne niemals beschränkt. //

2.3.5 Beispiel. Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum und bezeichne $C(K)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$. Weiters sei wieder

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|,\ \ f \in C(K)\,,$$

die Supremumsnorm. Wegen der Kompaktheit von K gilt $\|f\|_\infty := \max_{x\in K} |f(x)| < +\infty$. $(C(K), \|.\|_\infty)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{B}(K,\mathbb{C})$ und als solcher ein Banachraum. //

2.3.6 Beispiel. Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Bezeichne mit $C_{00}(L)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : L \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Dabei verstehen wir unter dem *Träger* $\operatorname{supp} f$ einer Funktion f die Menge $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in L : f(x) \neq 0\}}$. Wieder ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in L} |f(x)|,\ \ f \in C_{00}(L)\,,$$

eine Norm und stimmt mit $\max_{x\in L}|f(x)|$ überein. Für nicht kompakte L ist $(C_{00}(L), \|.\|_\infty)$ jedoch nicht vollständig. //

2.3.7 Beispiel. Sei wieder L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Bezeichne mit $C_0(L)$ den Raum aller stetigen Funktionen auf L, die im Unendlichen verschwinden, für die also Folgendes gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq L$ derart, dass $|f(x)| < \epsilon$ für alle $x \notin K$.

Ist $f \in C_0(L)$, so nimmt $|f|$ in L ein Maximum an, wir können also $C_0(L)$ mit der Supremumsnorm versehen. $C_0(L)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{B}(L, \mathbb{C})$ und als solcher ein Banachraum. //

2.3.8 Beispiel. Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Die Menge aller komplexwertigen regulären Borelmaße auf L sei bezeichnet mit $M_{reg}(L)$; siehe Bemerkung 7.1.3. Versieht man $M_{reg}(L)$ mit

$$\|\mu\| := |\mu|(L)\,,$$

wobei $|\mu|$ die Totalvariation (vgl. Bemerkung 7.1.3) von μ bedeutet, so erhält man einen Banachraum $(M_{reg}(L), \|.\|)$, den *Raum der komplexen Borelmaße auf* L. //

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung immer wieder den folgenden tiefliegenden Satz verwenden, ihn aber hier nicht beweisen. Der Beweis kann in der Fachliteratur nachgelesen werden, siehe [R2, Theorem 2.14, Theorem 6.19].

2.3.9 Satz (Darstellungssatz von Riesz-Markov)**.** *Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C_0(L)' \cong M_{reg}(L)$. Genauer ist die Abbildung $\Phi : M_{reg}(L) \to C_0(L)'$, die einem regulären komplexen Borelmaß μ das durch*

$$\Phi(\mu)f := \int_L f\,d\mu,\ \ f \in C_0(L)\,,$$

definierte lineare Funktional $\Phi(\mu)$ zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $M_{reg}(L)$ auf $C_0(L)'$.

Betrachtet man den Raum $C_0(L)_\mathbb{R}$ aller reellwertigen, stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, als Banachraum über $\mathbb{R}$, so lässt sich sein Dualraum entsprechend mit dem Raum aller signierten Borelmaße mit Werten in $\mathbb{R}$ auf L identifizieren.

2.3.10 Beispiel. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und bezeichne mit $C^\infty(\Omega)$ die Menge aller beliebig oft stetig-differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Wähle eine Folge $K_i, i \in \mathbb{N}$, kompakter Mengen mit $K_i \subseteq K_{i+1}^\circ$ derart, dass $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$, und definiere

$$p_N(f) := \max\left\{|f^{(k)}(x)| : x \in K_N, k < N\right\}.$$

Dann ist

$$d(f,g) := \max_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\,\frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)},\ \ f,g \in C^\infty(\Omega)$$

eine Metrik auf $C^\infty(\Omega)$. Man kann zeigen, dass $C^\infty(\Omega)$ mit dieser Metrik d ein vollständiger metrischer Raum ist, der mit der von d induzierten Topologie einen topologischen Vektorraum abgibt. Diese Metrik wird nicht von einer Norm induziert. //

2.3.11 Beispiel. Sei $0 < p < 1$ und bezeichne mit $L^p(0,1)$ jene Lebesgue-messbaren Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{C}$, für die gilt

$$\Delta f := \int_{(0,1)} |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty .$$

Man kann nun zeigen, dass $d(f,g) := \Delta(f-g)$ eine Metrik auf $L^p(0,1)$ definiert, wobei $L^p(0,1)$ bezüglich dieser Metrik vollständig ist. Weiters kann man zeigen, dass es keine Norm auf $L^p(0,1)$ gibt, welche die von dieser Metrik kommende Topologie induziert. Weiters ist $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$, mit dieser Topologie ein topologischer Vektorraum, der einige recht pathologische Eigenschaften hat, wie etwa $L^p(0,1)' = \{0\}$. //

2.4 Unterräume, Faktorräume, Produkträume

Als erstes beschäftigen wir uns mit initialen Konstruktionen.

2.4.1 Proposition. *Sei X ein Vektorraum, seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Vektorräume, und seien $R_i : X \to X_i$, $i \in I$ Abbildungen. Sei vorausgesetzt, dass jede Abbildung R_i linear ist, und dass $\bigcap_{i\in I} \ker R_i = \{0\}$. Dann wird X mit der initialen Topologie bezüglich der Familie R_i, $i \in I$, ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. Wegen der Linearität von R_i kommutieren folgende zwei Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "+"] \arrow[d, "R_i \times R_i"'] & X \arrow[d, "R_i"] \\ X_i \times X_i \arrow[r, "+"] & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \times X \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times R_i"'] & X \arrow[d, "R_i"] \\ \mathbb{C} \times X_i \arrow[r, "\cdot"] & X_i \end{tikzcd}$$

Da die Abbildung $R_i \times R_i$ sowie die Addition auf X_i stetig sind, folgt mit der universellen Eigenschaft der initialen Topologie, dass auch die Addition auf X stetig ist. Genauso erhält man aus dem zweiten Diagramm die Stetigkeit der skalaren Multiplikation.

Wir müssen noch die Trennungseigenschaft Hausdorff zeigen. Nach Bemerkung 2.1.10, (ii), reicht es nachzuweisen, dass einpunktige Mengen abgeschlossen sind. Voraussetzungsgemäß gilt $\bigcap_{i\in I} \ker R_i = \{0\}$, womit $\{0\}$ Schnitt von abgeschlossenen Mengen ist, weil die R_i ja alle stetig sind. Da $t \mapsto t + x$ für jedes $x \in X$ ein Homöomorphismus ist, ist auch $\{x\}$ abgeschlossen.

❑

2.4.2 Korollar.

(i) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und sei Y ein linearer Unterraum von X. Dann ist Y, versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}_Y$ von $(X, \mathcal{T})$, ebenfalls ein topologischer Vektorraum.*

(ii) *Sind* $(X_i, \mathcal{T}_i)$*,* $i \in I$*, topologische Vektorräume, so ist* $X := \prod X_i$ *versehen mit der Produkttopologie* $\mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ *ebenfalls ein topologischer Vektorraum.*

❑

2.4.3 Bemerkung. Läßt man in Proposition 2.4.1 die Voraussetzung $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$ weg, so verliert man nur die Trennungseigenschaft Hausdorff. Die Voraussetzung der Linearität der Abbildungen R_i dagegen ist wesentlich. Die initiale Topologie bezüglich einer beliebigen Familie von Abbildungen in topologische Vektorräume muss im Allgemeinen die algebraischen Operationen nicht stetig machen.

Tatsächlich kann man ein zur initialen Topologie analoges Konzept aufbauen, indem man nicht die gröbste Topologie auf X betrachtet bezüglich derer alle R_i stetig sind, sondern die gröbste Topologie, die die algebraischen Operationen stetig macht und bezüglich derer alle R_i stetig sind. Man zeigt dann analog, dass eine solche stets existiert, und entsprechende Eigenschaften hat. //

Als nächstes diskutieren wir Unterräume und Produkträume von normierten Räumen.

2.4.4 Proposition. *Sei* $(X, \|.\|_X)$ *ein normierter Raum und* Y *ein linearer Unterraum von* X*.*

(i) *Die Abbildung*

$$\|.\|_Y : \begin{cases} Y & \to & [0, \infty) \\ y & \mapsto & \|y\|_X \end{cases}$$

ist eine Norm auf Y*. Die von* $\|.\|_Y$ *auf* Y *induzierte Topologie ist die Spurtopologie der von* $\|.\|_X$ *auf* X *induzierten Topologie.*

(ii) *Für einen Banachraum* $(X, \|.\|_X)$ *ist* Y *genau dann abgeschlossen in* X*, wenn* $(Y, \|.\|_Y)$ *vollständig ist.*

Beweis. Klarerweise erfüllt $\|.\|_Y$ die Axiome für eine Norm. Die ϵ-Kugeln $\{y \in Y : \|y - y_0\|_Y < \epsilon\}$ bilden eine Umgebungsbasis von y_0 in $(Y, \|.\|_Y)$. Die Kugeln $\{x \in X : \|x - y_0\|_X < \epsilon\}$ eine von y_0 in $(X, \|.\|_X)$. Nun gilt

$$\big\{y \in Y : \|y - y_0\|_Y < \epsilon\big\} = \big\{x \in X : \|x - y_0\|_X < \epsilon\big\} \cap Y .$$

Um die zweite Aussage einzusehen, sei eine Cauchy-Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(Y, \|.\|_Y)$ gegeben. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine solche in $(X, \|.\|_X)$. Ist $(X, \|.\|_X)$ vollständig, so gibt es ein $x \in X$ mit $y_n \to x$ bzgl. $\|.\|_X$. Da Y abgeschlossen ist, ist $x \in Y$ und auch $y_n \to x$ bzgl. $\|.\|_Y$.

Ist umgekehrt $(Y, \|.\|_Y)$ vollständig und gilt $y_n \to x$ für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Y und einem $x \in X$, so ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar eine Cauchy-Folge in $(Y, \|.\|_Y)$ und daher in Y konvergent gegen ein $y \in Y$. Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte in X folgt $x = y \in Y$.

❑

2.4.5 Proposition. *Seien* X *und* Y *normierte Räume.*

(*i*) *Versieht man* $X \times Y$ *mit der* Summennorm

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|,\ (x,y) \in X \times Y\,, \tag{2.4.1}$$

oder mit der Maximumsnorm

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\},\ (x,y) \in X \times Y\,, \tag{2.4.2}$$

so sind $(X \times Y, \|.\|)$ *und* $(X \times Y, \|.\|_\infty)$ *normierte Räume. Die beiden Normen sind äquivalent, und die von ihnen induzierte Topologie ist gleich der Produkttopologie.*

(*ii*) *Sind* X *und* Y *Banachräume, so auch* $X \times Y$*.*

Beweis. Dass die Gleichungen (2.4.1) und (2.4.2) Normen definieren, ist offensichtlich. Diese sind äquivalent, denn

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \le \|x\| + \|y\| \le 2 \cdot \max\{\|x\|, \|y\|\}\,.$$

Daher induzieren sie auch dieselbe Topologie. Nun gilt $U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x_0, y_0) = U_\epsilon^{\|\cdot\|}(x_0) \times U_\epsilon^{\|\cdot\|}(y_0)$, also ist die von $\|.\|_\infty$ induzierte Topologie gleich der Produkttopologie.

Ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $X \times Y$, so sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in X bzw. Y. Sie haben also Grenzwerte x bzw. y, und daher gilt auch $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

❑

Hat man unendlich viele Faktoren, so ist die Situation bei normierten Räumen tatsächlich komplizierter. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen. Schließlich wollen wir auch Faktorräume diskutieren.

2.4.6 Proposition. *Sei* X *ein topologischer Vektorraum und* N *ein abgeschlossener linearer Unterraum. Der Faktorraum* X/N *sei mit der finalen Topologie von der kanonischen Projektion* $\pi : X \to X/N$ *versehen. Dann ist* X/N *ein topologischer Vektorraum. Die Projektion* π *ist offen; sie bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab.*

Beweis. Für ein offenes $O \subseteq X$ ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = O + N = \bigcup_{x\in N} (x + O)$$

offen, also ist $\pi(O)$ offen in X/N.

Seien $x+N, y+N \in X/N$, und W eine offene Umgebung von $(x+y)+N$ in X/N. Wegen der Stetigkeit von $+$ können wir offene Umgebungen $x+V_1, y+V_2$ von x bzw. y in X so wählen, dass $(x+V_1) + (y+V_2) \subseteq \pi^{-1}(W)$. Dann sind $\pi(x+V_1), \pi(y+V_2)$ offene Umgebungen von $x+N$ bzw. $y+N$, wobei $\pi(x+V_1) + \pi(y+V_2) \subseteq W$. Somit ist die Addition in X/N stetig. Analog zeigt man, dass auch die skalare Multiplikation stetig ist.

Wegen der Abgeschlossenheit von N und wegen $\pi^{-1}(\pi(N)) = N$ ist die einpunktige Menge $\{0+N\}$ in X/N abgeschlossen. In Bemerkung 2.1.10 haben wir gesehen, dass damit die Topologie auf X/N automatisch Hausdorff ist.

❑

2.4.7 Korollar. *Sei X ein topologischer Vektorraum, N, F lineare Unterräume. Ist N abgeschlossen und F endlichdimensional, so ist auch $N+F$ abgeschlossen.*

Beweis. Betrachte X/N, dann ist $\pi(F)$ ein endlichdimensionaler Unterraum und wegen Satz 2.2.1 abgeschlossen in X/N. Also ist $N + F = \pi^{-1}(\pi(F))$ abgeschlossen in X.

❑

2.4.8 Bemerkung. Die finale Topologie einer Familie von linearen Abbildungen von topologischen Vektorräumen in einen Vektorraum X muss diesen im Allgemeinen nicht zu einem topologischen Vektorraum machen. //

2.4.9 Proposition. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und N ein abgeschlossener linearer Unterraum.*

(*i*) *Mit $d(x,N) = \inf\big\{\|x-z\| : z \in N\big\} = \inf\big\{\|x+z\| : z \in N\big\}$ für $x \in X$ bildet die durch*
$$\|x + N\|_{X/N} := d(x,N)$$
definierte Abbildung $\|.\|_{X/N}$ eine Norm – die sogenannte Faktorraumnorm *– auf X/N. Diese Norm induziert die finale Topologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : X \to X/N$.*

(*ii*) *Ist $(X, \|.\|)$ Banachraum, dann ist auch $(X/N, \|.\|_{X/N})$ ein solcher.*

Beweis.
`ad`(*i*)`:` $\|.\|_{X/N}$ ist tatsächlich eine Norm, denn für $x, y \in X$, $z_1, z_2, \in N$, gilt
$$\|(x+y) + N\|_{X/N} \le \|x + y + (z_1 + z_2)\| \le \|x + z_1\| + \|y + z_2\|\,.$$
Da z_1, z_2 beliebig waren, folgt
$$\|(x+y) + N\|_{X/N} \le \|x + N\|_{X/N} + \|y + N\|_{X/N}\,.$$
Weiters gilt
$$\|\lambda x + z\| = |\lambda| \cdot \|x + \lambda^{-1} z\| \quad \text{für} \quad x \in X, z \in N, \lambda \ne 0\,.$$
Wegen $\lambda^{-1}N = N$ folgt $\|\lambda x + N\|_{X/N} = |\lambda| \cdot \|x + N\|_{X/N}$. Offensichtlich gilt $0 \le \|N\|_{X/N} = \|0 + N\|_{X/N} \le \|0\| = 0$.

Ist $\|x + N\|_{X/N} = 0$, so gibt es eine Folge $z_n \in N$ mit $\|x + z_n\| \to 0$, also $-x \in \overline{N}$. Da N abgeschlossen ist, folgt $x \in N$.

Wir zeigen als nächstes, dass die Norm $\|.\|_{X/N}$ die finale Topologie bezüglich π induziert. Da $\pi : (X, \mathcal{T}_{\|.\|}) \to (X/N, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ stetig, offen und surjektiv ist, bildet π den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_X(0)$ bzgl. $(X, \mathcal{T}_{\|.\|})$ auf den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_{X/N}(0)$ bzgl. $(X/N, \mathcal{T}_{\text{fin}})$ ab. Eine Basis von $\mathfrak{U}_X(0)$ ist durch die Kugeln $U_r^X(0)$, $r > 0$, gegeben. Daher ist $\{\pi(U_r^X(0)) : r > 0\}$ eine Basis von $\mathfrak{U}_{X/N}(0)$.

Für $x \in X$ gilt aber $\|x + N\|_{X/N} = \inf\big\{\|x + z\| : z \in N\big\} < r$ genau dann, wenn es ein $z \in N$ derart gibt, dass $\|x + z\| < r$. Somit gilt
$$\pi(\underbrace{\{x \in X : \|x\| < r\}}_{=U_r^X(0)}) = \underbrace{\{x + N \in X/N : \|x + N\|_{X/N} < r\}}_{=U_r^{X/N}(0)}\,. \tag{2.4.3}$$

Somit haben die finale Topologie und die von $\|.\|_{X/N}$ auf X/N induzierte Topologie die gleichen Nullumgebungen. Da beide X/N zu einem topologischen Vektorraum machen, folgt deren Gleichheit.

`ad`(ii): Sei nun zusätzlich vorausgesetzt, dass X vollständig ist, und sei eine Cauchy-Folge $(x_n + N)_{n\in\mathbb{N}}$ in X/N gegeben. Wähle eine Teilfolge $(x_n + N)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|(x_{n_{k+1}} + N) - (x_{n_k} + N)\|_{X/N} < 2^{-k}$.

Wir definieren nun rekursiv für alle $k \in \mathbb{N}$ Repräsentanten $y_k \in x_{n_k} + N$ derart, dass $\|y_{k+1} - y_k\| < 2^{-k}$. Dazu setze $y_1 = x_{n_1}$. Sind $y_1, \dots, y_k \in X$ mit besagten Eigenschaften, so folgt aus

$$\begin{aligned} 2^{-k} &> \|(x_{n_k} + N) - (x_{n_{k+1}} + N)\|_{X/N} \\ &= \|(y_k - x_{n_{k+1}}) + N\|_{X/N} = \inf\{\|(y_k - x_{n_{k+1}}) + z\| : z \in N\} \end{aligned}$$

die Existenz eines $z \in N$ mit $\|(y_k - x_{n_{k+1}}) + z\| < 2^{-k}$. Setzen wir $y_{k+1} = x_{n_{k+1}} - z$, so ist die geforderte Ungleichung erfüllt. Wegen $(l \le m)$

$$\|y_m - y_l\| = \|\sum_{k=l}^{m-1}(y_{k+1} - y_k)\| \le \sum_{k=l}^{m-1}\|y_{k+1} - y_k\| < \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{l-1}}$$

ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Somit existiert ein $y \in X$ so, dass $y_k \to y$. Wegen der Stetigkeit von π folgt $x_{n_k} + N = \pi(y_k) \to \pi(y)$. Da $(x_n + N)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, schließt man daraus leicht, dass auch $x_n + N \to \pi(y)$. ❑

2.5 Vervollständigung normierter Räume

Es ist eine wichtige Tatsache, dass man jeden normierten Raum vervollständigen kann, ihn also in einen Banachraum dicht einbetten kann.

Die Rolle, die in der Diskussion metrischer Räume die gleichmäßig stetigen Abbildungen gespielt haben, kommt in der Situation normierter Räume den beschränkten linearen Operatoren zu. Um einen zu Satz 1.1.1 analogen Fortsetzungssatz für beschränkte lineare Operatoren herzuleiten, brauchen wir folgendes Lemma.

2.5.1 Lemma. *Seien $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ normierte Räume. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X und $T : D \to Y$ linear und beschränkt, also $T \in L_b(D, Y)$. Ist $F : X \to Y$ eine stetige Fortsetzung von T, so ist F automatisch linear und beschränkt mit gleicher Abbildungsnorm, also $\|F\| = \|T\|$.*

Beweis. Betrachte die stetigen Abbildungen $(x, y) \mapsto F(x + y)$ und $(x, y) \mapsto F(x) + F(y)$ von $X \times X$ nach Y. Diese stimmen auf der in $X \times X$ (versehen etwa mit der Summennorm) dichten Menge $D \times D$ überein. Daher stimmen sie überall überein. Genauso zeigt man, dass $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in X$ gilt. Also ist F linear.

Auch die Abbildungen $\phi_1 : x \mapsto \|Fx\|$ und $\phi_2 : x \mapsto \|T\| \cdot \|x\|$ von X nach $\mathbb{R}$ sind stetig, genauso wie $\phi_3 : x \mapsto \max(\phi_1(x), \phi_2(x))$. Auf der dichten Teilmenge D gilt $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ und daher $\phi_2(x) = \phi_3(x)$. Also stimmen ϕ_2 und ϕ_3 auf D und daher auch auf ganz X überein. Das bedeutet $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$

bzw. $\|Fx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, womit $F \in L_b(X,Y)$ und $\|F\| \leq \|T\|$. Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen $F|_D = T$.

❑

2.5.2 Satz. *Seien $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ normierte Räume, und sei $(Y, \|.\|)$ vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X und $T \in L_b(D,Y)$.*

- $\rightsquigarrow$ *Dann existiert genau eine lineare und beschränkte Abbildung $F : X \to Y$ mit $F|_D = T$. Diese hat dieselbe Norm wie T.*
- $\rightsquigarrow$ *Ist T linear und isometrisch, also* $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in D$, so ist auch F isometrisch.*
- $\rightsquigarrow$ *Ist auch $(X, \|.\|)$ vollständig, $T(D) \subseteq Y$ dicht, T injektiv und so, dass $T^{-1} : T(D) \to X$ ebenfalls beschränkt ist, so ist $F : X \to Y$ bijektiv und die nach dem ersten Punkt existierende eindeutige beschränkte Fortsetzung $G : Y \to X$ von $T^{-1} : T(D) \to X$ stimmt mit F^{-1} überein.*

Beweis. Da für lineare Abbildungen aus der Beschränktheit die gleichmäßige Stetigkeit folgt (und umgekehrt), folgt die erste Aussage sofort aus Satz 1.1.1 und Lemma 2.5.1.

Die zweite Behauptung folgt auch aus Satz 1.1.1, wenn man bedenkt, dass wegen $d(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\|$ und $\|Tx\| = d(0, Tx)$ für lineare Abbildungen der Begriff isometrisch bzgl. der Norm und isometrisch bzgl. der von der Norm induzierten Metrik dasselbe bedeutet.

Auch die dritte Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.1.1.

❑

2.5.3 Bemerkung. Mit fast dem selben Beweis zeigt man, dass Lemma 2.5.1 und Satz 2.5.2 auch für konjugiert lineare Abbildungen gilt. //

Manchmal ist es praktisch, eine etwas abstraktere Formulierung von Satz 2.5.2 zu verwenden.

2.5.4 Korollar. *Seien $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ normierte Räume, und sei $(Y, \|.\|)$ vollständig. Weiters sei $D \subseteq X$ ein dichter linearer Unterraum von X. Dann ist die Einschränkungsabbildung $\phi : F \mapsto F|_D$ ein isometrischer Isomorphismus von $L_b(X,Y)$ auf $L_b(D,Y)$.*

Beweis. Die Einschränkungsabbildung ϕ ist injektiv, da D dicht in X ist. Die Aussage, dass ϕ surjektiv ist, bedeutet gerade, dass sich jeder Operator $T \in L_b(D,Y)$ zu einem Operator in $L_b(X,Y)$ fortsetzen lässt. Die Aussage, dass ϕ isometrisch ist, bedeutet gerade, dass die Fortsetzung die gleiche Norm wie T hat.

❑

Wir kommen nun zu Vervollständigungen. Das Konzept ist ganz analog wie bei metrischen Räumen.

*Insbesondere ist T dann beschränkt.

2.5.5 Definition. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Ein Paar bestehend aus einem normierten Raum $(\hat{X}, \|.\|)$ und einer Abbildung $\iota : X \to \hat{X}$ heißt eine *Vervollständigung* von $(X, \|.\|)$, wenn gilt:

(V$_{\mathbf{nor}}$1) $(\hat{X}, \|.\|)$ ist ein Banachraum.

(V$_{\mathbf{nor}}$2) ι ist linear und isometrisch, also gilt $\|\iota(x)\| = \|x\|$, $x \in X$.

(V$_{\mathbf{nor}}$3) $\iota(X)$ ist dicht in $\hat{X}$; also stimmt der Abschluss von $\iota(X)$ in $(\hat{X}, \|.\|)$ mit $\hat{X}$ überein.

Zwei Vervollständigungen $\langle(\hat{X}_1, \|.\|_1), \iota_1\rangle$ und $\langle(\hat{X}_2, \|.\|_2), \iota_2\rangle$ von $(X, \|.\|)$ heißen *isomorph*, wenn es einen isometrischen Isomorphismus $\varphi : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ derart gibt, dass $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$ gilt, also dass das Diagramm (1.1.3) zutrifft.

Wir diskutieren wieder zuerst die Eindeutigkeit einer Vervollständigung. Dies erhalten wir einfach aus Satz 2.5.2.

2.5.6 Korollar. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann sind je zwei Vervollständigungen von $(X, \|.\|)$ isomorph.*

Beweis. Seien $((\hat{X}_1, \|.\|_1), \iota_1)$ und $((\hat{X}_2, \|.\|_2), \iota_2)$ Vervollständigungen von $(X, \|.\|)$. Weiters bezeichne d (d_1,d_2) die von $\|.\|$ $(\|.\|_1,\|.\|_2)$ erzeugte Metrik. Man sieht unmittelbar, dass dann $((\hat{X}_1, d_1), \iota_1)$ und $((\hat{X}_2, d_2), \iota_2)$ Vervollständigungen von (X, d) im Sinne metrischer Vervollständigungen sind.

Nach Korollar 1.1.3 gibt es eine isometrische Bijektion $\varphi : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ (im Sinne von Metrik) mit $\varphi \circ \iota_1 = \iota_2$. Da dabei ι_1 injektiv ist, gilt $\varphi|_{\iota_1(X)} = \iota_2 \circ \iota_1^{-1}$ als Abbildung von $\iota_1(X)$ nach $\hat{X}_2$. Da $\iota_1(X) \subseteq \hat{X}_1$ dicht ist, folgt aus der Linearität von $\iota_2 \circ \iota_1^{-1}$ mit Lemma 2.5.1, dass φ auch linear ist.

❑

Aus den gleichen Gründen wie bei metrischen Räumen ist klar, dass wir keine bessere Eindeutigkeitsaussage erwarten können. Nun kommen wir zur Existenz von Vervollständigungen.

2.5.7 Satz. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann existiert eine Vervollständigung $\langle(\hat{X}, \|.\|), \iota\rangle$ von $(X, \|.\|)$.*

Beweis.

Definition von $\hat{X}$ und ι: Sei d die von der Norm $\|.\|$ auf X induzierte Metrik, also $d(x, y) := \|x - y\|$, und sei $\langle(\hat{X}, \hat{d}), \iota\rangle$ eine Vervollständigung des metrischen Raumes (X, d).

Definition einer Addition $\hat{+}$ auf $\hat{X}$: Bezeichne die auf X gegebene Addition mit $+ : X \times X \to X$. Weiters seien alle auftretenden direkten Produkte metrischer Räume (X_1, d_1) und (X_2, d_2) mit der Summenmetrik $d_\Sigma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ versehen, und wir erinnern uns, dass die von dieser Metrik induzierte Toplogie gerade die Produkttopologie der von den Metriken d_1 und d_2 induzierten Topologien ist.

Betrachte die Abbildung

$$f : \begin{cases} \iota(X) \times \iota(X) & \to & \hat{X} \\ (\hat{x}, \hat{y}) & \mapsto & \iota(\iota^{-1}(\hat{x}) + \iota^{-1}(\hat{y})) \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{d}\big(f(\hat{x},\hat{y}), f(\hat{x}',\hat{y}')\big) &= \hat{d}\big(\iota(\iota^{-1}(\hat{x})+\iota^{-1}(\hat{y})), \iota(\iota^{-1}(\hat{x}')+\iota^{-1}(\hat{y}'))\big) \\
&= d\big(\iota^{-1}(\hat{x})+\iota^{-1}(\hat{y}), \iota^{-1}(\hat{x}')+\iota^{-1}(\hat{y}')\big) \\
&= \big\|(\iota^{-1}(\hat{x})+\iota^{-1}(\hat{y})) - (\iota^{-1}(\hat{x}')+\iota^{-1}(\hat{y}'))\big\| \\
&\leq \big\|\iota^{-1}(\hat{x})-\iota^{-1}(\hat{x}')\big\| + \big\|\iota^{-1}(\hat{y})-\iota^{-1}(\hat{y}')\big\| \\
&= d(\iota^{-1}(\hat{x}),\iota^{-1}(\hat{x}')) + d(\iota^{-1}(\hat{y}),\iota^{-1}(\hat{y}')) \\
&= \hat{d}(\hat{x},\hat{x}') + \hat{d}(\hat{y},\hat{y}') = d_\Sigma\big((\hat{x},\hat{y}),(\hat{x}',\hat{y}')\big)\,.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass f gleichmäßig stetig ist. Nun ist $\iota(X)$ dicht in $\hat{X}$, und daher auch $\iota(X)\times\iota(X)$ dicht in $\hat{X}\times\hat{X}$. Da $\hat{X}$ vollständig ist, existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{+}:\hat{X}\times\hat{X}\to\hat{X}$.

Definition einer skalaren Multiplikation $\hat{\cdot}$ *auf* $\hat{X}$*:* Bezeichne die auf X gegebene skalare Multiplikation mit $\cdot:\mathbb{C}\times X\to X$. Für jedes $\lambda\in\mathbb{C}$ betrachte die Abbildung

$$m_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \iota(X) & \to & \hat{X} \\ \hat{x} & \mapsto & \iota\big(\lambda\cdot\iota^{-1}(\hat{x})\big) \end{array} \right.$$

Für $\hat{x},\hat{y}\in\iota(X)$ gilt

$$\hat{d}\big(m_\lambda(\hat{x}), m_\lambda(\hat{y})\big) = d\big(\lambda\cdot\iota^{-1}(\hat{x}), \lambda\cdot\iota^{-1}(\hat{y})\big) = |\lambda|\,\big\|\iota^{-1}(\hat{x})-\iota^{-1}(\hat{y})\big\|\,.$$

Also ist m_λ gleichmäßig stetig und hat somit eine eine stetige Fortsetzung

$$\hat{m}_\lambda : \hat{X}\to\hat{X}.$$

Somit ist eine Funktion $\hat{\cdot}:\mathbb{C}\times\hat{X}\to\hat{X}$ wohldefiniert durch

$$\lambda\hat{\cdot}\hat{x} := \hat{m}_\lambda(\hat{x})\,.$$

$\hat{X}$ *ist Vektorraum und* ι *linear:* Seien $x,y\in X$, $\lambda\in\mathbb{C}$, dann gilt nach der Definition von $\hat{+}$ und $\hat{\cdot}$ als Fortsetzungen von f bzw. m_λ,

$$\iota(x)\hat{+}\iota(y) = f(\iota(x),\iota(y)) = \iota(x+y),\ \ \lambda\hat{\cdot}\iota(x) = m_\lambda(\iota(x)) = \iota(\lambda\cdot x)\,. \tag{2.5.1}$$

Die algebraischen Rechenregeln übertragen sich nun von X auf $\hat{X}$ durch Stetigkeit, indem man die Gültigkeit der Vektorraumaxiome von der dichten Teilmenge $\iota(X)$ auf den ganzen Raum $\hat{X}$ hochzieht. Wir wollen das am Beispiel des Distributivgesetzes genauer ausführen.

Für festes λ sind die Abbildungen $(\hat{x},\hat{y})\mapsto\lambda\hat{\cdot}(\hat{x}\hat{+}\hat{y}) = \hat{m}_\lambda(\hat{x}\hat{+}\hat{y})$ und $(\hat{x},\hat{y})\mapsto(\lambda\hat{\cdot}\hat{x})\hat{+}(\lambda\hat{\cdot}\hat{y}) = \hat{m}_\lambda(\hat{x})\hat{+}\hat{m}_\lambda(\hat{y})$ als Zusammensetzungen stetiger Funktionen selber stetig auf $\hat{X}\times\hat{X}$. Auf der dichten Teilmenge $\iota(X)\times\iota(X)$ stimmen sie wegen (2.5.1) und der Tatsache, dass das Distributivgesetz für X gilt, überein. Also stimmen sie auf ganz $\hat{X}\times\hat{X}$ überein.

Die Beziehung (2.5.1) besagt schließlich nichts anderes, als dass ι linear ist.

Definition der Norm $\|.\|$ *auf* $\hat{X}$*:* Durch $\|\hat{x}\| := \hat{d}(\hat{x},\iota(0))$ ist eine stetige nichtnegative Funktion $\|.\|:\hat{X}\to\mathbb{R}$ definiert. Da $\iota(0)$ das Nullelement des Vektorraumes $\hat{X}$ ist, haben wir $\|\hat{x}\|>0$ für $\hat{x}\neq\hat{0}$. Es gilt

$$\|\iota(x)\| = \hat{d}(\iota(x),\iota(0)) = d(x,0) = \|x\| \quad \text{für alle} \quad x\in X\,. \tag{2.5.2}$$

Wir sehen, dass $\|.\|$ auf der dichten Teilmenge $\iota(X)$ die Eigenschaften

$$\|\hat{x}\hat{+}\hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|, \ \|\lambda\hat{x}\| = |\lambda|\|\hat{x}\|$$

hat. Wegen der Stetigkeit übertragen sich diese auf ganz $\hat{X}$, womit sich $\|.\|$ als Norm herausstellt.

Wegen (2.5.2) ist ι isometrisch bzgl. der Normen. Deshalb stimmt auf $\iota(X)\times\iota(X)$ die von $\|.\|$ auf $\hat{X}$ induzierte Metrik mit $\hat{d}$ überein. Wieder aus Dichtheits- bzw. Stetigkeitsgründen gilt dann $\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \|\hat{x}-\hat{y}\|$ für alle $(\hat{x},\hat{y}) \in \hat{X}\times\hat{X}$. Schließlich ist $(\hat{X},\|.\|)$ damit ein Banachraum.

❑

2.5.8 Beispiel. Sind auf einem Vektorraum X zwei nicht-äquivalente Normen gegeben, so können Vervollständigungen bezüglich dieser gänzlich unterschiedlich aussehen. Betrachte zum Beispiel den Vektorraum aller Polynome $\mathbb{C}[x]$ und die beiden Normen

$$\|p\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |p(x)|, \ \|.\|_2 := \left(\int_0^1 |p(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad p \in \mathbb{C}[x]\,.$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $(\langle C([0,1]),\|.\|_\infty),\iota)$ eine Vervollständigung von $(\mathbb{C}[x],\|.\|_\infty)$. Jedoch ist $(\langle L^2([0,1]),\|.\|_2),\iota)$ eine Vervollständigung von $(\mathbb{C}[x],\|.\|_2)$. Dabei bezeichnet ι jeweils die natürliche Abbildung von $\mathbb{C}[x]$ in $C([0,1])$ bzw. $L^2([0,1])$. //

2.5.9 Beispiel.

(i) Sei L ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $(C_0(L),\|.\|_\infty)$ die Vervollständigung von $(C_{00}(L),\|.\|_\infty)$

(ii) Betrachte den lokalkompakten Hausdorff-Raum $\mathbb{R}^n$ und auf diesem das Lebesgue-Maß. Dann können wir auf $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ auch die L^p-Norm betrachten. Alle diese Normen geben verschiedene Topologien auf $C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Man kann zeigen, dass $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|.\|_p$, $1\leq p<\infty$, dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. Anders ausgedrückt, kann man also sagen, dass $L^p(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $(C_{00}(\mathbb{R}^n),\|.\|_p)$ ist.

//

Kapitel 3

Hilberträume

3.1 Räume mit innerem Produkt

3.1.1 Definition. Sei H ein Vektorraum. Eine Abbildung $(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt*, oder auch *Skalarprodukt*, wenn gilt

(IP1) $(x,x) > 0$ für alle $x \in H \setminus \{0\}$.

(IP2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ für alle $x,y \in H$.

(IP3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ für alle $x,y,z \in H$, und $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y \in H$.

Ein inneres Produkt ist also eine positiv definite Sesquilinearform.
Einige unmittelbare Folgerungen aus diesen Axiomen sind:

$\rightsquigarrow$ $(0,y) = 0$, $y \in H$.

$\rightsquigarrow$ Für jedes $y \in H$ ist die Abbildung

$$f_y : \begin{cases} H & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x,y) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

linear.

$\rightsquigarrow$ Es gilt $(z, x+y) = (z,x) + (z,y)$ für alle $x,y,z \in H$, und $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x,y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y \in H$.

Da stets $(x,x) \geq 0$ ist, können wir eine Abbildung $\|.\| : H \to [0,\infty)$ definieren als

$$\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad x \in H\,.$$

Dann gilt $\|x\| > 0$ für $x \in H \setminus \{0\}$ und

$$\|\alpha x\| = (\alpha x, \alpha x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} \cdot (x,x)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\| \;\; \text{für} \;\; \alpha \in \mathbb{C},\, x \in H\,.$$

3.1.2 Proposition. *Sei H ein Vektorraum und sei $(.,.)$ ein inneres Produkt auf H. Dann gelten für $x,y \in H$:*

(i) Schwarzsche Ungleichung*: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, wobei aus der Gleichheit die lineare Abhängigkeit von x und y folgt.*

(*ii*) Dreiecksungleichung*:* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(*iii*) Parallelogrammregel*:* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(*iv*) Polarisationsformel*:* $4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$.

(*v*) Satz von Pythagoras*: Ist* $(x,y)=0$*, so gilt* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(*vi*) *Es ist* $(x,y)=0$ *genau dann, wenn* $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis.
`ad`(*i*)**:** Setze $A := \|x\|^2$, $B := |(x,y)|$, $C := \|y\|^2$, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ so, dass $\alpha(y,x) = B$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} &0 \leq (x - t\alpha y, x - t\alpha y) = (x,x) - t\alpha(y,x) - t\overline{\alpha}(x,y) + t^2(y,y) \\ &\quad = A - 2tB + t^2 C\,. \end{aligned}$$

Ist $C = 0$, so muss auch $B = 0$ sein. Außerdem bedingt $C = 0$ die Gleichung $y = 0$, womit x und y linear abhängig sind. Anderenfalls gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$A - 2tB + t^2 C = C(t - \frac{B}{C})^2 - \frac{B^2}{C} + A \geq 0.$$

Für $t = \frac{B}{C}$ erhalten wir $AC - B^2 \geq 0$. Außerdem folgt aus $AC - B^2 = 0$, dass $(x - t\alpha y, x - t\alpha y) = A - 2tB + t^2 C = 0$, für diesen Wert von t; also gilt $x = \frac{B}{C}\alpha\, y$.

`ad`(*ii*)**:** Es gilt

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + &\underbrace{(x,y) + (y,x)}_{=2\,\mathrm{Re}(x,y) \leq 2|(x,y)|} + (y,y) \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 &= (\|x\| + \|y\|)^2\,. \end{aligned}$$

`ad`(*iii*)**:** Durch Addieren der Gleichungen

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = (x,x) \pm (x,y) \pm (y,x) + (y,y)$$

folgt $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(x,x) + 2(y,y)$.

`ad`(*iv*)**:** Die Polarisationsformel ergibt sich durch Addition folgender vier Gleichungen:

$$\pm\|x \pm y\|^2 = \pm(x \pm y, x \pm y) = \pm(x,x) + (x,y) + (y,x) \pm (y,y)\,,$$

$$\pm i\|x \pm iy\|^2 = i \pm (x \pm iy, x \pm iy) = \pm i(x,x) + (x,y) - (y,x) \pm i(y,y)\,.$$

`ad`(*v*)**:** Wegen

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2, \tag{3.1.2}$$

impliziert $(x,y) = 0$ stets $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

`ad`(*vi*)**:** Ist $(x,y) = 0$, so ist auch $(\lambda x, y) = 0, \lambda \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\|\lambda x + y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2\,.$$

Gilt umgekehrt $\|y\|^2 \leq \|y + \lambda x\|^2$ für jedes λ, so folgt aus (3.1.2)

$$|\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda(x,y)) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so gewählt, dass $\alpha(x,y) = -|(x,y)|$. Die obige Beziehung mit $\lambda := t\alpha$, $t > 0$, ergibt dann

$$t^2\|x\|^2 \geq 2t|(x,y)| \geq 0 \quad \text{für alle} \quad t > 0 .$$

Dividiert man durch t, und bildet den Limes $t \to 0$, so folgt $|(x,y)| = 0$. ❑

3.1.3 Bemerkung. Beim Beweis der Polarisationsformel wurde nur verwendet, dass $(.,.)$ sesquilinear ist. Der selbe Beweis zeigt also, dass allgemein für eine Sesquilinearform $[.,.]$ auf einem Vektorraum X über $\mathbb{C}$ für alle $x, y \in X$

$$4[x,y] = [x+y,x+y] - [x-y,x-y] + i[x+iy,x+iy] - i[x-iy,x-iy] . \quad (3.1.3)$$

//

Wir erkennen aus Proposition 3.1.2 insbesondere, dass $\|.\| : H \to [0,\infty)$ eine Norm auf H ist. Jeder Vektorraum mit innerem Produkt ist also in natürlicher Weise auch ein normierter Raum. Wenn wir von topologischen oder metrischen Eigenschaften eines Raumes H mit innerem Produkt sprechen, so beziehen wir uns, wenn nicht explizit anders gesagt, immer auf die Topologie bzw. Metrik, die von dieser Norm induziert wird.

Eine wichtige Folgerung aus der Schwarzschen Ungleichung ist folgende Aussage. Um Paare vom Skalarprodukt unterscheiden zu können, schreiben wir im Folgenden $(x;y)$ für geordnete Paare.

3.1.4 Korollar. *Sei $H \times H$ mit einer Norm versehen, welche die Produkttopologie induziert, etwa mit der Summennorm*

$$\|(x;y)\| := \|x\| + \|y\|, \ (x;y) \in H \times H .$$

Für jedes $r > 0$ ist die Abbildung

$$(.,.)|_{K_r(0)\times K_r(0)} : K_r(0) \times K_r(0) \to \mathbb{C}$$

gleichmäßig stetig. Die Abbildung $(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ ist stetig und infolge für jedes feste $y \in H$ auch die Abbildung $f_y : x \mapsto (x,y)$ aus (3.1.1), also $f_y \in H'$.

Beweis. Seien $(x_1;y_1), (x_2;y_2) \in K_r(0) \times K_r(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| &\leq |(x_1,y_1-y_2)| + |(x_1-x_2,y_2)| \qquad (3.1.4) \\ &\leq \|x_1\| \cdot \|y_1-y_2\| + \|x_1-x_2\| \cdot \|y_2\| \\ &\leq r\big(\|y_1-y_2\| + \|x_1-x_2\|\big) . \end{aligned}$$

Also ist $(.,.)|_{K_r(0)\times K_r(0)}$ gleichmäßig stetig bezüglich der Summennorm. Wegen

$$K_r(0) \supseteq U_r(0), \ \bigcup_{r>0} U_r(0) \times U_r(0) = H \times H ,$$

sowie der Tatsache, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Stetigkeit von $(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$. Insbesondere ist die Abbildung f_y stetig. ❑

3.1.5 Bemerkung. Man beachte, dass wegen

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \leq \|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x\|, \|y\|)$$

die Normen $\max(\|x\|, \|y\|)$, $\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ sowie $\|x\| + \|y\|$ auf dem Vektorraum $H \times H$ äquivalent sind. Sie erzeugen also die selbe Topologie.

Andererseits wird durch $((x_1; x_2), (y_1; y_2)) := (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ ein inneres Produkt auf $H \times H$ definiert. Man zeigt unschwer, dass die von diesem Produkt induzierte Norm gerade $\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ ist. //

Genauso wie im Kontext der normierten oder metrischen Räume die vollständigen besonders interessant sind, spielen auch unter allen Räume mit innerem Produkt die vollständigen eine ausgezeichnete Rolle.

3.1.6 Definition. Sei H ein Raum mit innerem Produkt. Ist H vollständig, also ist $(H, \|.\|)$ ein Banachraum, so heißt H ein *Hilbertraum*.

Als erstes wollen wir uns überlegen, dass jeder Raum mit innerem Produkt dicht in einen Hilbertraum eingebettet werden kann.

3.1.7 Definition. Sei H ein Raum mit innerem Produkt $(.,.)$. Ein Paar $(\hat{H}, (.,.))$ bestehend aus einem Raum $\hat{H}$ mit innerem Produkt $(.,.)$ zusammen mit einer Abbildung $\iota : H \to \hat{H}$, heißt eine *Hilbertraum Vervollständigung* von $(H, (.,.))$, wenn gilt:

($\mathbf{V_{Hil}1}$) $(\hat{H}, (.,.))$ ist ein Hilbertraum.

($\mathbf{V_{Hil}2}$) ι ist linear und isometrisch, also $(\iota x, \iota y) = (x, y)$, $x, y \in H$.

($\mathbf{V_{Hil}3}$) $\overline{\iota(H)} = \hat{H}$, wobei der Abschluss bezüglich der Norm des Hilbertraumes $\hat{H}$ zu verstehen ist.

Zwei Vervollständigungen $\langle(\hat{H}_1, (.,.)_1), \iota_1\rangle$ und $\langle(\hat{H}_2, (.,.)_2), \iota_2\rangle$ von $(H, (.,.))$ heißen *isomorph*, wenn es einen isometrischen Isomorphismus $\varphi : \hat{H}_1 \to \hat{H}_2$ gibt mit $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$.

3.1.8 Proposition. *Sei H ein Raum mit innerem Produkt $(.,.)$. Dann besitzt $(H, (.,.))$ eine, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte, Hilbertraum Vervollständigung.*

Beweis. Sei $\|.\|$ die von $(.,.)$ auf H induzierte Norm, und bezeichne mit $\langle(\hat{H}, \|.\|), \iota\rangle$ die bis auf Isomorphie eindeutige Vervollständigung des normierten Raumes $(H, \|.\|)$.

Wir definieren auf $\hat{H} \times \hat{H}$ eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion durch

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right), \quad x, y \in \hat{H}\,.$$

Da das Skalarmultiplizieren, das Addieren und die Normfunktion stetig sind, ist auch $\langle .,.\rangle : \hat{H} \times \hat{H} \to \mathbb{C}$ stetig.

Man sieht sofort, dass $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Außerdem gilt wegen der Polarisationsformel, der Linearität von ι und der Sesquilinearität von $(.,.)$ für feste $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und jedes feste $y \in \iota(H)$ auf der dichten Teilmenge $\iota(H) \times \iota(H) \subseteq \hat{H} \times \hat{H}$

$$\begin{aligned}\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle &= (\iota^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2), \iota^{-1}(y)) \\ &= \alpha(\iota^{-1}(x_1), \iota^{-1}(y)) + \beta(\iota^{-1}(x_2), \iota^{-1}(y)) = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle\,.\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit gilt diese Gleichheit auch auf $\hat{H} \times \hat{H}$. Halten wir nun $x_1, x_2 \in \hat{H} \times \hat{H}$ fest und betrachten obige Gleichheit für variables y, so gilt die Gleichheit zunächst auf $\iota(H)$ und wieder wegen der Dichtheit und der Stetigkeit auf ganz $\hat{H}$.

Also ist $\langle .,. \rangle$ linear im ersten Argument und wegen $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ auch konjugiert linear im zweiten Argument.

Schließlich prüft man unmittelbar nach, dass $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ für $x \in \hat{H}$, womit sich $(\hat{H}, \langle .,. \rangle)$ als ein Hilbertraum herausstellt.

Sind $\langle (H_1, (.,.)_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (H_2, (.,.)_2), \iota_2 \rangle$ zwei Hilbertraum Vervollständigungen von $(H, (.,.))$, so sind $\langle (H_1, \|.\|_1), \iota_1 \rangle$ und $\langle (H_2, \|.\|_2), \iota_2 \rangle$ zwei Vervollständigungen des normierten Raumes $(H, \|.\|)$. Daher existiert ein isometrischer Isomorphismus φ zwischen den normierten Räumen H_1 und H_2 mit $\iota_2 = \varphi \circ \iota_1$. Wegen der Polarisationsformel ist dieser auch isometrisch bezüglich der inneren Produkte $(.,.)_1$ und $(.,.)_2$.

❑

Das wohl fundamentalste Beispiel für einen Hilbertraum ist der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.

3.1.9 Beispiel. Sei μ ein positives Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann ist

$$(f, g) := \int_\Omega f\overline{g}\, d\mu\,,$$

ein Skalarprodukt am Raum $L^2(\mu) := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Die von $(.,.)$ induzierte Norm ist gerade die L^2-Norm

$$\|f\| = \Big(\int_\Omega |f|^2\, d\mu \Big)^{\frac{1}{2}}, \ f \in L^2(\mu)\,.$$

Insbesondere ist $(L^2(\mu), (.,.))$ ein Hilbertraum. Man spricht vom Raum der *quadratisch integrierbaren Funktionen.* //

3.1.10 Beispiel. Ist in Beispiel 3.1.9 Ω eine Menge A, die σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ und ist μ das Zählmaß auf A, so schreiben wir anstelle von $L^2(d\mu)$ meist $\ell^2(A)$, und sprechen vom Hilbertraum der *quadratisch summierbaren A-Tupel*. Schreibt man die Funktionen $\xi : A \to \mathbb{C}$ als Tupel $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha\in A}$, wobei $\xi_\alpha = \xi(\alpha)$, so folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz leicht, dass

$$\ell^2(A) = \big\{ (\xi_\alpha)_{\alpha\in A} : \sum_{\alpha\in A} |\xi_\alpha|^2 < \infty \big\}\,,$$

wobei $\sum_{\alpha\in A} |\xi_\alpha|^2 = \sup_{I\in\mathcal{E}(A)} \sum_{\alpha\in I} |\xi_\alpha|^2$. Dabei bezeichnet $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A. Man erkennt leicht, dass die Endlichkeit dieser Summe bedeutet, dass $\xi_\alpha \neq 0$ für nur abzählbar viele $\alpha \in A$ und dass die entsprechende Reihe über diese abzählbar vielen α endlichen Grenzwert hat.

Das innere Produkt lässt sich als

$$(\xi, \eta) = \sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha \overline{\eta_\alpha}, \quad \xi = (\xi_\alpha)_{\alpha\in A}, \eta = (\eta_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell^2(A)\,,$$

schreiben, wobei $\sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha \overline{\eta_\alpha}$ unbedingt konvergiert. Insbesondere gilt $(\xi, \delta_\alpha) = \xi_\alpha$, wobei δ_α jenes Element aus $\ell^2(A)$ bezeichnet, für das $\delta_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ gilt.

Schließlich ist noch wichtig, dass für $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell^2(A)$ das Netz

$$(\sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha \delta_\alpha)_{I \in \mathcal{E}(A)} ,$$

gegen ξ bzgl. $\|.\|$ konvergiert, wobei $\mathcal{E}(A)$ $(\subseteq \mathcal{P}(A))$ versehen mit $\subseteq$ als gerichtete Menge betrachtet wird. Also gilt

$$\sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha \delta_\alpha = \xi .$$

Um das einzusehen, wähle $\epsilon > 0$ und sei $I_0 \in \mathcal{E}(A)$ so, dass

$$\sum_{\alpha \in A} |\xi_\alpha|^2 < \epsilon + \sum_{\alpha \in I} |\xi_\alpha|^2$$

für $I = I_0$. Offenbar gilt diese Ungleichung auch für alle $I \supseteq I_0$. Für solche I folgt dann

$$\begin{aligned} \|\xi - \sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha \delta_\alpha\|^2 &= \int_A |\xi - \sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha \delta_\alpha|^2 \, d\mu \\ &= \int_{A \setminus I} |\xi|^2 \, d\mu = \sum_{\alpha \in A} |\xi_\alpha|^2 - \sum_{\alpha \in I} |\xi_\alpha|^2 < \epsilon . \end{aligned}$$

//

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $A := \{1, \dots, n\}$, so hat man $\ell^2(A) = \mathbb{C}^n$ und

$$(\xi, \eta) := \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\eta_j}, \ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n ,$$

also das übliche euklidische Skalarprodukt.

3.2 Orthogonalität

Die Geometrie eines Raumes mit innerem Produkt ist reichhaltiger als die eines allgemeinen normierten Raumes; zum Beispiel gilt ja die Parallelogrammregel. Nun charakterisiert diese Regel sogar Räume mit innerem Produkt. Ein fundamentales Konzept in Räumen mit innerem Produkt, welches in allgemeinen normierten Räumen nicht existiert, ist das der Orthogonalität.

3.2.1 Definition. Sei H ein Vektorraum mit innerem Produkt $(.,.)$. Zwei Elemente $x, y \in H$ heißen *orthogonal*, wenn $(x, y) = 0$ gilt. Man schreibt in diesem Fall $x \perp y$.

Ist $E \subseteq H$ eine Teilmenge, so heißt

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y, \text{ für alle } y \in E\}$$

das *orthogonale Komplement* von E.

$\rightsquigarrow$ Für $E \subseteq H$ kann man $E^\perp$ auch anschreiben als

$$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{y\}^\perp = \bigcap_{y \in E} \ker f_y \,.$$

Da jedes Funktional f_y stetig und linear ist, ist $E^\perp$ stets ein abgeschlossener linearer Unterraum von H.

$\rightsquigarrow$ Aus $E \subseteq F \subseteq H$ folgt offenbar $H \supseteq E^\perp \supseteq F^\perp \supseteq \{0\}$.

$\rightsquigarrow$ Es gilt

$$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \ker f_y = \bigcap_{y \in \overline{E}} \ker f_y = \overline{E}^\perp \,. \tag{3.2.1}$$

In der Tat folgt die Inklusion „$\supseteq$" aus dem vorherigen Punkt. Die umgekehrte Inklusion gilt, da aus $x \in \ker f_y$ für alle $y \in E$ wegen der Stetigkeit von $y \mapsto (x, y)$ sicherlich $f_y(x) = (x, y) = 0$ für alle $y \in \overline{E}$ folgt.

$\rightsquigarrow$ Seien M_i, $i \in I$, Teilmengen von H. Dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} M_i^\perp = \Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big)^\perp = \Big(\operatorname{span}(\bigcup_{i \in I} M_i)\Big)^\perp \,. \tag{3.2.2}$$

3.2.2 Definition. Sind M und N lineare Unterräume eines linearen Raumes X, so schreiben wir $X = M \dot{+} N$, wenn gilt $M + N = X$, $M \cap N = \{0\}$. Man spricht in diesem Fall von einer *direkten Summe*.

Ist auf X ein inneres Produkt gegeben und gilt zusätzlich $M \perp N$, so schreibt man $X = M \oplus N$ und spricht von einer *orthogonalen Summe*.

Für einen Vektorraum X sei an das Konzept einer *Projektion* aus der Linearen Algebra erinnert. Das ist eine lineare Abbildung $P : X \to X$, für die $P^2 = P$ gilt. Es gelten folgende Eigenschaften:

$\rightsquigarrow$ Ist P eine Projektion, so ist auch $I - P$ eine Projektion.

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$, $\ker P = \operatorname{ran}(I - P)$.

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{ran} P \dot{+} \ker P = X$.

$\rightsquigarrow$ Sind A, B Unterräume von X mit $A \dot{+} B = X$, so gibt es eine eindeutige Projektion P mit $A = \operatorname{ran} P$, $B = \ker P$. Wir sehen also, dass die Projektionen auf X genau den Zerlegungen des Raumes X in eine direkte Summe entsprechen.

Ist auf X ein inneres Produkt gegeben, so heißt P eine *orthogonale Projektion*, wenn $\ker P \perp \operatorname{ran} P$.

$\rightsquigarrow$ Für eine orthogonale Projektion P gilt wegen $Px \perp (I - P)y$ für $x, y \in H$ stets

$$(Px, y) = (Px, Py) = (x, Py), \;\; (x, y) = (Px, Py) + ((I - P)x, (I - P)y) \,.$$

$\rightsquigarrow$ Eine Projektion P ist genau dann orthogonal, wenn

$$(Px, y) = (x, Py) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X \,. \tag{3.2.3}$$

- $\rightsquigarrow$ Ist P eine orthogonale Projektion, so ist auch $I - P$ orthogonal.

- $\rightsquigarrow$ Orthogonale Projektionen sind stetig. Tatsächlich gilt für eine orthogonale Projektion P

$$\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 = \|x\|^2 ,$$

  und daher $\|P\| \leq 1$. Für $x \in \operatorname{ran} P$ gilt stets $Px = x$. Ist $P \neq 0$, so hat man also sogar $\|P\| = 1$.

- $\rightsquigarrow$ Für eine orthogonale Projektion P gilt offenbar $X = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$. Infolge gilt $(\operatorname{ran} P)^\perp = \ker P$ und $(\ker P)^\perp = \operatorname{ran} P$, womit sich $\operatorname{ran} P$ und $\ker P$ auch als abgeschlossene Unterräume herausstellen.

- $\rightsquigarrow$ Sind A, B Unterräume von X mit $A \oplus B = X$, so ist die Projektion P mit $A = \operatorname{ran} P$, $B = \ker P$, orthogonal. Man nennt P auch die *orthogonale Projektion von X auf A*. Wir sehen also, dass die orthogonalen Projektionen auf X genau den Zerlegungen des Raumes X in eine orthogonale Summe entsprechen.

3.2.3 Satz. *Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt:*

(i) *Sei $E \subseteq H$ eine nichtleere, konvexe, und abgeschlossene Teilmenge von H. Dann gibt es zu jedem $x \in H$ ein eindeutiges Element $p_E(x) \in E$ mit minimalen Abstand zu x, daher*

$$\|x - p_E(x)\| = d(x, E) := \inf\{\|y - x\| : y \in E\} .$$

Insbesondere ist dieses Infimum ein Minimum.

(ii) *Die Abbildung $p_E : H \to E$ $(\subseteq H)$ ist stetig mit $p_E|_E = \mathrm{id}_E$.*

(iii) *Sei M ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann gilt*

$$H = M \oplus M^\perp,$$

und die dazugehörige orthogonale Projektion P_M mit $\operatorname{ran} P_M = M$ und $\ker P_M = M^\perp$ stimmt mit p_M überein.

Beweis.
`ad`(i): Setze $d := d(x, E)$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgendeine Folge von Elementen aus E mit $\|y_n - x\| \to d$. Da E konvex ist, gilt stets $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in E$, und daher

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 \geq 4d^2 .$$

Nach der Parallelogrammregel gilt

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 \to 4d^2, \; m, n \to \infty .$$

Also folgt $\|y_n + y_m - 2x\|^2 \to 4d^2$ und $\|y_n - y_m\|^2 \to 0$. Wir sehen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, die wegen der Vollständigkeit von H gegen ein $y \in H$ konvergiert. Da E abgeschlossen ist, gilt $y \in E$. Klarerweise ist $\|y - x\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $z, y \in E$ mit $\|z - x\| = \|y - x\| = d$ gegeben. Dann ist $\frac{1}{2}(z + y) \in E$, also $\|z + y - 2x\|^2 \geq 4d^2$, und $\|z + y - 2x\|^2 + \|z - y\|^2 = 2\|z - x\|^2 + 2\|y - x\|^2 = 4d^2$. Es folgt $\|z - y\| = 0$, also $z = y =: p_E(x)$.

`ad`(ii): Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in H folgt wegen

$$d(x,E) \le \|p_E(x_n) - x\| \le \|p_E(x_n) - x_n\| + \|x_n - x\| = d(x_n, E) + \|x_n - x\|$$

und wegen der Stetigkeit von $x \mapsto d(x,E)$, dass $\|p_E(x_n) - x\| \to d(x,E)$. Nach dem ersten Beweisteil folgt $p_E(x) = \lim_{n\to\infty} p_E(x_n)$. Für $x \in E$ gilt offensichtlich $p_E(x) = x$.

`ad`(iii): Für $x \in M \cap M^\perp$ gilt $(x,x) = 0$ und damit $M \cap M^\perp = \{0\}$. Um $M + M^\perp = H$ zu zeigen, sei $x \in H$ gegeben. Nach dem ersten Beweisteil gilt für jedes feste $m \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|x - p_M(x)\| = d(x,M) \le \|x - p_M(x) + \lambda m\|,$$

weil ja $\lambda m - p_M(x) \in M$. Mit Proposition 3.1.2, (vi), folgt $m \perp (x - p_M(x))$. Da $m \in M$ beliebig war, folgt $x - p_M(x) \in M^\perp$ und $x = p_M(x) + (x - p_M(x)) \in M + M^\perp$.

❑

3.2.4 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum. Ist M ein linearer Unterraum, so gilt $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.*

Beweis. Für $x \in M$ gilt $x \perp M^\perp$, also $x \in M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$. Aus der Abgeschlossenheit von $M^{\perp\perp}$ folgt $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$. Wegen $\overline{M}^\perp = M^\perp$ gilt

$$\overline{M} \dot{+} M^\perp = H = M^\perp \dot{+} M^{\perp\perp}.$$

Wir schließen, dass $\overline{M}$ kein echter Unterraum von $M^{\perp\perp}$ sein kann.

❑

Satz 3.2.3 impliziert auch, dass sich der Dualraum eines Hilbertraumes in besonders einfacher Weise beschreiben lässt. Das ist die Aussage des folgenden *Darstellungssatzes von Riesz-Fischer*. Man verwechsle diese elementare Aussage nicht mit dem tiefliegenden Satz 2.3.9, welcher auch von seiner Natur her anders geartet ist. Leider werden diese beiden Sätze in der Literatur mit dem gleichen Namen bedacht.

Sei H ein Raum mit innerem Produkt $(.,.)$. Für $y \in H$ bezeichne f_y wieder das Funktional $f_y(x) := (x,y)$, $x \in H$. Wir haben schon gesehen, dass stets $f_y \in H'$ gilt. Aus Satz 3.2.3 folgt nun, dass bereits jedes stetige lineare Funktional von dieser Form ist.

3.2.5 Proposition. *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ y & \mapsto & f_y \end{array} \right.$$

eine isometrische und konjugiert-lineare Bijektion von H auf H'.

Beweis. Wie wir bereits gesehen haben, ist für jedes $y \in H$ die Abbildung f_y ein stetiges lineares Funktional. Die Schwarzsche Ungleichung zeigt weiters, dass stets $|f_y(x)| = |(x,y)| \le \|y\|\|x\|$, dass also $\|f_y\| \le \|y\|$. Wegen $|f_y(y)| = (y,y) = \|y\|^2$ gilt sogar $\|f_y\| = \|y\|$. Als isometrische Abbildung ist Φ

natürlich auch injektiv. Die Tatsache, dass Φ konjugiert-linear ist, ist klar aus den Eigenschaften eines Skalarproduktes.

Der wesentliche Schritt ist zu zeigen, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $f \in H'$ gegeben. Ist $f = 0$, so wähle $y = 0$. Sei also $f \neq 0$ und damit $\ker f \neq H$. Da f stetig ist, ist $\ker f$ abgeschlossen, und wir erhalten

$$\ker f \oplus (\ker f)^{\perp} = H\,.$$

Insbesondere existiert $z \in H$, $z \neq 0$, mit $z \perp \ker f$. Da stets $f(x)z - f(z)x \in \ker f$ gilt, folgt

$$f(x)(z,z) - f(z)(x,z) = 0\,,$$

und somit

$$f(x) = \Big(x, \frac{\overline{f(z)}z}{(z,z)}\Big) \quad \text{für alle} \quad x \in H\,.$$

❑

Sei H ein Raum mit innerem Produkt $(.,.)$. Eine Abbildung $[.,.] : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform*, wenn

$$[x+y,z] = [x,z] + [y,z],\ \ [x,y+z] = [x,y] + [x,z] \quad \text{für} \quad x,y \in H\,,$$

$$[\alpha x,y] = \alpha[x,y],\ \ [x,\alpha y] = \overline{\alpha}[x,y] \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x,y \in H\,.$$

Eine Sesquilinearform $[.,.]$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$|[x,y]| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{für alle} \quad x,y \in H\,. \tag{3.2.4}$$

Mit $\|[.,.]\|$ bezeichnen wir das kleinstmögliche $C \geq 0$, für das (3.2.4) zutrifft.

Beispiele beschränkter Sesquilinearformen erhält man mit Hilfe beschränkter linearer Operatoren: Sei $G \in L_b(H) := L_b(H,H)$, und betrachte die Abbildung $[x,y] := (Gx,y)$. Diese ist klarerweise eine Sesquilinearform und es gilt

$$|[x,y]| = |(Gx,y)| \leq \|Gx\|\|y\| \leq \|G\|\|y\|\|x\| \quad \text{für alle} \quad x,y \in H\,.$$

Aus dem nun folgenden Satz 3.2.6, dem sogenannten Satz von Lax-Milgram[†], erkennen wir, dass auf einem Hilbertraum jede beschränkte Sesquilinearform von dieser Gestalt ist.

3.2.6 Satz (*Lax-Milgram*)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Ist $[.,.] : H \times H \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform, so existiert ein eindeutiger Operator $G \in L_b(H)$ mit*

$$[x,y] = (Gx,y) \quad \textit{für alle} \quad x,y \in H\,,$$

wobei $\|G\| = \|[.,.]\|$.

Beweis. Sei $[.,.]$ eine beschränkte Sesquilinearform, und sei C eine beliebige Konstante, für die (3.2.4) gilt. Für $x \in H$ betrachte die Abbildung

$$L_x : \begin{cases} H & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \overline{[x,y]} \end{cases}$$

Dann ist L_x linear und erfüllt $|L_x(y)| = |[x,y]| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$, also $\|L_x\| \leq C\|x\|$. Wie man aus der Definition sieht, gilt $L_{x_1+x_2} = L_{x_1} + L_{x_2}$ und $L_{\alpha x} = \overline{\alpha} L_x$.

[†]In der angewandten Funktionalanalysis ist ein weiterführenderes Resultat gleichen Namens bekannt, welches wir in Bemerkung 6.6.11 erwähnen wollen.

Also ist die Abbildung $\Psi : x \mapsto L_x$ eine konjugiert lineare Abbildung von H in H', und erfüllt $\|\Psi x\| \leq C\|x\|$.

Sei Φ wie in Proposition 3.2.5, und definiere $G := \Phi^{-1} \circ \Psi$. Dann ist $G : H \to H$ linear und erfüllt $\|Gx\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in H$. Also ist $G \in L_b(H)$, wobei $\|G\| \leq C$. Weiters haben wir nach den Definitionen von L_x, Ψ und Φ

$$(Gx, y) = \overline{(y, Gx)} = \overline{\Phi(Gx)(y)} = \overline{\Psi(x)(y)} = \overline{L_x(y)} = [x, y] \quad \text{für} \quad x, y \in H\,.$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt die Beziehung (3.2.4) mit der Konstanten $\|G\|$. Außerdem gilt $\|G\| \leq C$ für jedes $C \geq 0$, für das auch (3.2.4) gilt. Also ist $\|G\|$ tatsächlich die kleinstmögliche Konstante $\|[.,.]\|$, die man in (3.2.4) verwenden kann.

Die Eindeutigkeit gilt, da aus $(Gx, y) = (\tilde{G}x, y)$ bzw. $((G - \tilde{G})x, y) = 0$ für alle $x, y \in H$ zunächst $(G - \tilde{G})x \in H^\perp = \{0\}$ für alle $x \in H$ und damit $G = \tilde{G}$ folgt.

❑

Der Operator G in Satz 3.2.6 heißt auch der *Gram-Operator* der Sesquilinearform $[.,.]$ bezüglich $(.,.)$.

3.3 Orthonormalsysteme

3.3.1 Definition. Sei H ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $M \subseteq H$ heißt *Orthonormalsystem* oder kurz *ONS*, wenn für alle $u, v \in M$

$$(u, v) = \begin{cases} 1 & , \quad u = v \\ 0 & , \quad u \neq v \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem M heißt *Orthonormalbasis* oder kurz *ONB*, wenn es kein echt größeres Orthonormalsystem gibt, wenn also für jedes Orthonormalsystem $\tilde{M}$ mit $\tilde{M} \supseteq M$ bereits $\tilde{M} = M$ gilt. Eine Orthonormalbasis nennt man auch ein *vollständiges Orthonormalsystem*.

Man beachte, dass ein Orthonormalsystem stets linear unabhängig ist, da aus $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0$ immer

$$\lambda_l = \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, u_l\Big) = 0 \quad \text{für} \quad l = 1, \dots, n\,,$$

folgt. Obwohl der Begriff Orthonormalbasis an den Begriff Basis eines Vektorraumes erinnert, sind Orthonormalbasen nur für endlichdimensionale Hilberträume tatsächlich Vektorraumbasen.

In der linearen Algebra kann eine Basis eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes dazu verwendet werden, zu zeigen, dass jeder Vektorraum X isomorph zu einem Vektorraum von ganz spezieller Gestalt ist, nämlich zu dem Vektorraum aller Tupel $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ mit der Eigenschaft, dass alle bis auf endlich viele x_i gleich Null sind. Hier ist I die Mächtigkeit einer Basis von X. Genauso können wir den Begriff der Orthonormalbasis verwenden um zu zeigen, dass jeder Hilbertraum isomorph zu gewissen Hilberträumen spezieller Gestalt ist. Es wird sich herausstellen, dass diese „Prototypen“ die Hilberträume $\ell^2(A)$ sind.

Als erstes wollen wir zeigen, dass es stets Orthonormalbasen gibt.

3.3.2 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum und sei M ein Orthonormalsystem. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\tilde{M}$ mit $\tilde{M} \supseteq M$. Insbesondere existieren also Orthonormalbasen.*

Beweis. Betrachte die Menge $\mathcal{M}$ aller Orthonormalsysteme N mit $N \supseteq M$. Diese ist mit der mengentheoretischen Inklusion geordnet. Wir überprüfen die Voraussetzung des Lemmas von Zorn.

Zunächst ist $\mathcal{M}$ nicht leer, denn $M \in \mathcal{M}$. Ist $\mathcal{N}$ eine totalgeordnete nicht leere Teilmenge von $\mathcal{M}$, so betrachten wir $\tilde{N} := \bigcup_{N\in\mathcal{N}} N$. Sind $u_1, u_2 \in \tilde{N}$, so existieren $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ mit $u_1 \in N_1$ und $u_2 \in N_2$. Da $\mathcal{N}$ totalgeordnet ist, gilt entweder $N_1 \subseteq N_2$ oder $N_2 \subseteq N_1$. Im ersten Fall gehören u_1 und u_2 beide zu N_2, woraus $(u_1, u_2) = 0$ oder $(u_1, u_2) = 1$ folgt, je nachdem ob $u_1 \neq u_2$ oder $u_1 = u_2$. Im zweiten Fall schließt man genauso. Also ist $\tilde{N}$ ein Orthonormalsystem. Offenbar ist $\tilde{N}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$.

Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\tilde{M}$ in $\mathcal{M}$. Klarerweise ist $\tilde{M}$ auch maximal in der Menge aller Orthonormalsysteme.

❑

3.3.3 Satz. *Sei H ein Hilbertraum, $M = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein nicht leeres Orthonormalsystem mit $e_\alpha \neq e_\beta$ für $\alpha \neq \beta$, und setze $E := \overline{\operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}}$. Für $x \in H$ definiere*

$$\hat{x} : \begin{cases} A & \to & \mathbb{C} \\ \alpha & \mapsto & (x, e_\alpha)_H \end{cases}$$

Dann

(i) gilt $\hat{x} \in \ell^2(A)$ für alle $x \in H$;

(ii) ist die Abbildung $\hat{} : x \mapsto \hat{x}$ eine lineare und surjektive Abbildung von H auf $\ell^2(A)$ mit Abbildungsnorm eins; insbesondere gilt

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} \leq \|x\|_H,\ x \in H\,; \tag{3.3.1}$$

(iii) gilt $\hat{} = \hat{}|_E \circ P_E$, wobei P_E die orthogonale Projektion von H auf E ist;

(iv) gilt $\ker(\hat{}) = E^\perp$ und die Einschränkung $\hat{}|_E$ von $\hat{}$ auf E ist eine lineare und isometrische Bijektion von E auf $\ell^2(A)$, wobei

$$(\hat{}|_E)^{-1}\big((\xi_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = \sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha e_\alpha,\ (\xi_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell^2(A)\,; \tag{3.3.2}$$

(v) gilt

$$P_E x = \sum_{\alpha\in A} \hat{x}(\alpha) e_\alpha,\ x \in H\,, \tag{3.3.3}$$

wobei diese Summe als Grenzwert des Netzes $(\sum_{\alpha\in I} \hat{x}(\alpha)e_\alpha)_{I\in\mathcal{E}(A)}$ zu interpretieren ist, wobei $\mathcal{E}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ die Menge aller endlichen Teilmengen gerichtet durch $\subseteq$ ist.

Beweis. Die Menge $D := \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ist eine dichte Teilmenge des Hilbertraumes E. Die Abbildung $\hat{}|_D : D \to \ell^2(A)$ bildet ein Element $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{\alpha_k} \in D$ auf $\hat{x}$ ab, wobei

$$\hat{x}(\alpha) = \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{\alpha_k}, e_\alpha\Big) = \begin{cases} \lambda_k & , \alpha = \alpha_k,\ k = 1, \dots, n\,, \\ 0 & , \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|x\|_H^2 &= \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{\alpha_k}, \sum_{l=1}^n \lambda_l e_{\alpha_l}\Big)_H \\ &= \sum_{k,l=1}^n \lambda_k \overline{\lambda_l} \big(e_{\alpha_k}, e_{\alpha_l}\big)_H = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2(A)}^2 .\end{aligned}$$

Also ist $\hat{}|_D$ isometrisch.

Für $x = e_\beta$ folgt aus (3.3.4), dass $\hat{e}_\beta = (\alpha \mapsto \delta_{\alpha\beta}) = \delta_\beta$. Insbesondere ist das Bild von D unter $\hat{}|_D$ die lineare Hülle aller $\delta_\beta,\ \beta \in A$ in $\ell^2(A)$ und damit genau die Menge aller Elemente $(\xi_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell^2(A)$, für die alle bis auf endlich viele ξ_α gleich Null sind. Diese Menge ist dicht in $\ell^2(A)$, vgl. Beispiel 3.1.10. Nach Satz 2.5.2 besitzt $\hat{}|_D$ eine bijektive und isometrische Fortsetzung $F : E \to \ell^2(A)$.

Sei $\alpha \in A$ festgehalten. Für jedes $x \in E$ gilt

$$(x, e_\alpha)_H = (Fx, Fe_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx, \hat{e}_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx, \delta_\alpha)_{\ell^2(A)} = (Fx)(\alpha).$$

Also ist $Fx = \hat{x}$ für alle $x \in E$.

Wegen $e_\alpha = P_E e_\alpha \in E$ gilt für jedes $x \in H$

$$\widehat{P_E x}(\alpha) = (P_E x, e_\alpha)_H = (x, e_\alpha)_H = \hat{x}(\alpha),$$

und damit $\widehat{P_E x} = \hat{x}$. Insbesondere haben wir damit (i) und auch (iii) gezeigt.

Aus (iii) folgt auch die Linearität von $\hat{}$ sowie $\|\hat{}\| \le 1$. Da $\hat{}|_E = F$ isometrisch ist, schließen wir von (iii) auch auf (iv). Wegen $\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} = \|x\|_H$ für $x \in E$ gilt sogar $\|\hat{}\| = 1$.

In Beispiel 3.1.10 haben wir festgestellt, dass für jedes $(\xi_\alpha)_{\alpha\in A} \in \ell^2(A)$

$$\sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha \delta_\alpha = (\xi_\alpha)_{\alpha\in A} .$$

Wenden wir darauf $(\hat{}|_E)^{-1}$ an, so folgt wegen $\hat{e}_\alpha = \delta_\alpha$ auch (3.3.2). Wenden wir (3.3.2) auf $(\xi_\alpha)_{\alpha\in A} = \widehat{P_E x} = \hat{x}$ an, so folgt auch (3.3.3).

❑

Die Zahlen $\hat{x}(\alpha)$ in Satz 3.3.3 nennt man die *Fourier-Koeffizienten* von x bezüglich des Orthonormalsystems M. Die Ungleichung in (3.3.1) heißt auch *Besselsche Ungleichung*. Die Summe in (3.3.3) kann auch als klassische H-wertige Reihe interpretiert werden, wenn man nur über die $\alpha \in A$ summiert, für die $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ gilt. In der Tat, sind das wegen (3.3.1) nur immer höchstens abzählbar viele.

3.3.4 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum und $M = \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist eine Orthonormalbasis.*

(ii) *$D := \operatorname{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ist dicht in H.*

(iii) *$\|\hat{x}\|_{\ell^2(A)} = \|x\|_H$ für alle $x \in H$.*

(iv) *$(\hat{x}, \hat{y})_{\ell^2(A)} = (x, y)_H$ für alle $x, y \in H$.*

(*v*) *Für alle $x \in H$ gilt*

$$x = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \,. \tag{3.3.5}$$

Beweis. Ist D nicht dicht in H ist, so folgt $E := \overline{D} \neq H$. Wegen Satz 3.2.3, (ii), gilt daher $E^\perp \neq \{0\}$. Für jedes $u \in E^\perp$ mit $\|u\| = 1$ ist $M \cup \{u\}$ ein Orthonormalsystem, welches M echt umfasst. Somit gilt $(i) \Rightarrow (ii)$.

Ist M keine Orthonormalbasis, so existiert ein Orthonormalsystem $\tilde{M} \supsetneq M$. Jedes $u \in \tilde{M} \setminus M$ erfüllt $0 \neq u \perp M$, womit $0 \neq u \in E^\perp$ und daher $E \neq H$. Also gilt auch $(ii) \Rightarrow (i)$.

D ist genau dann dicht, wenn $E = H$. Nach Satz 3.3.3 ist die Abbildung $\hat{}$ genau dann auf ganz H isometrisch, wenn $E = H$. Also gilt $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt unmittelbar aus der Polarisationsformel.

Ist M eine Orthonormalbasis, also $E = H$, so gilt $P_E = I$. Die Darstellung (3.3.5) folgt dann aus (3.3.3). Umgekehrt folgt aus (3.3.5), dass $E = \overline{D} = H$. ❑

Die Beziehung (iii) heißt auch *Parsevalsche Gleichung*, und die Reihe in (3.3.5) nennt man die *Fourierreihe* bezüglich der Orthonormalbasis M.

Als Vorbereitung für die kommenden Beispiele wollen wir mit $\frac{1}{2\pi}\lambda$ das normierte Lebesgue-Maß auf $[0, 2\pi)$ bezeichnen, wobei $[0, 2\pi)$ mit der σ-Algebra aller in diesem Intervall enthaltenen Borelmengen aus $\mathfrak{B}$ versehen ist. Bekannterweise ist

$$\psi : \begin{cases} [0, 2\pi) & \to \quad \mathbb{T}\ (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \\ \quad t & \mapsto \quad e^{it} \end{cases}$$

eine in beide Richtungen messbare Bijektion, wenn wir $\mathbb{T}$ mit der σ-Algebra aller in $\mathbb{T}$ enthaltenen Borelmengen aus $\mathfrak{B}_2$ versehen.

Das normierte Bogenmaß μ auf $\mathbb{T}$ ist das normierte Oberflächenmaß und stimmt mit $(\frac{1}{2\pi}\lambda)^\psi$ überein, wobei $(\frac{1}{2\pi}\lambda)^\psi(B) = (\frac{1}{2\pi}\lambda)(\psi^{-1}(B)) = \frac{\lambda(\psi^{-1}(B))}{2\pi}$. Somit ist

$$\Psi : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}, \mu) & \to \quad L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda) \\ \quad f & \mapsto \quad f \circ \psi \end{cases}$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dabei gilt $\Psi(z \mapsto z^m) = (t \mapsto e^{imt})$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Weiters ist $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ offenbar der Raum aller komplexwertigen, auf $[0, 2\pi]$ stetig fortsetzbaren Funktionen mit an 0 und 2π übereinstimmenden Werten. Somit gilt offenbar $C_{00}(0, 2\pi) \subseteq \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$, wenn man sich die Funktionen f aus $C_{00}(0, 2\pi)$ auf $[0, 2\pi)$ durch $f(0) = 0$ stetig fortgesetzt denkt.

Die lineare Hülle in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ aller Funktionen der Bauart $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, ergibt die Menge aller trigonometrischen Polynome $\mathbb{T} \ni z \mapsto p(z)$. Diese sind nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ bzgl. der Supremumsnorm, weil die trigonometrischen Polynome eine unter Konjugieren abgeschlossene, 1 enthaltende und Punkte trennende Algebra abgeben. Da $\Psi : C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \to \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ auch isometrisch bzgl. der jeweiligen Supremumsnormen ist, muss auch die lineare Hülle aller Funktionen $[0, 2\pi) \ni t \mapsto e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, dicht in $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ sein.

Da $C_{00}(0, 2\pi)$ $(\subseteq \Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C})))$ dicht bzgl. $\|.\|_2$ in $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ liegt, muss auch $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$ diese Eigenschaft haben. Wegen $\|.\|_2 \leq \|.\|_\infty$ auf $\Psi(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}))$

ist sogar die lineare Hülle aller Funktionen $[0, 2\pi) \ni t \mapsto e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, dicht in $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ bzgl. $\|.\|_2$.

Wenden wir wieder Ψ^{-1} an, so sehen wir, dass auch der Raum der trigonometrischen Polynome in $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ dicht liegt.

3.3.5 Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Menge $M := \{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist. Die Tatsache, dass M ein Orthonormalsystem ist, folgt aus

$$\int_{\mathbb{T}} z^n \overline{z^m}\, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} (e^{it})^n \overline{(e^{it})^m}\, d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 1 & , n = m \\ 0 & , n \neq m \end{cases}$$

Oben haben wir gesehen, dass $\operatorname{span} M$ dicht in $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist, womit M gemäß Korollar 3.3.4 eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ist. //

Klarerweise bleiben alle Ergebnisse über Orthonormalsysteme bei isometrischen Isomorphismen erhalten, weshalb sich die Aussagen von Beispiel 3.3.5 auch in den $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ transportieren lassen. Tut man dies, so erhält man gerade die klassische L^2-Theorie der *Fourierreihen*. Wegen ihrer großen historischen Bedeutung, und da gerade solche speziellen Reihenentwicklungen in vielen Anwendungen auftreten, wollen wir dies explizit formulieren.

3.3.6 Beispiel. Die Menge $M := \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$. Ist für $f \in L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\lambda)$ eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definert als

$$\phi_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\,,$$

so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\phi_n|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e^{inx} = f(x)\,,$$

wobei die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e^{inx}$ im Sinne der L^2-Norm zu verstehen ist.

Schreibt man $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ und fasst entsprechende Terme in der Fourierreihe zusammen, so erhält man ihre, vielleicht bekanntere, Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

mit

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Die Konvergenz der Reihe ist wieder im Sinne der L^2-Norm zu verstehen. //

Um Orthonormalsysteme zu konstruieren, verwendet man das *Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt*. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des Hilbertraumes H. Dann definiert man induktiv

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}\,,$$

$$v_n := x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i, \; e_n := \frac{v_n}{\|v_n\|} .$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem ist, und dass für alle N

$$\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_N\} .$$

Ist $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H, so erhält man auf dieser Art also eine Orthonormalbasis von H.

3.3.7 Beispiel. Betrachte den Hilbertraum $L^2(-1,1)$. Dann ist die Menge $\{1, x, x^2, \ldots\}$ eine linear unabhängige Menge, und $\operatorname{span}\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist dicht in H. Mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens erhalten wir also eine Orthonormalbasis $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ von $L^2(-1,1)$. Tatsächlich ergibt sich

$$b_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \, P_n(x), \; n \in \mathbb{N}_0 ,$$

wobei P_n das n-te *Legendre-Polynom*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \big[(x^2 - 1)^n \big]$$

bezeichnet. //

3.3.8 Beispiel. Betrachte die Menge

$$H^2 := \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \, a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \Big\} .$$

Da für eine quadratisch summierbare Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mindestens 1 ist, ist H^2 ein Vektorraum bestehend aus Funktionen auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = U_1^{\mathbb{C}}(0)$. Versieht man H^2 mit dem inneren Produkt

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \Big) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} ,$$

so ist die Abbildung $\Phi : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein isometrischer Isomorphismus von H^2 auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Damit wird also H^2 ein Hilbertraum, man spricht vom *Hardy-Raum am Einheitskreis*.

Für $z_0 \in \mathbb{D}$, setze $K_{z_0}(z) := \frac{1}{1 - \overline{z_0} z}$. Dann gilt $K_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0^n} z^n$, also ist $K_{z_0} \in H^2$. Weiters sehen wir, dass

$$(f, K_{z_0})_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{(\overline{z_0^n})} = f(z_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2, \quad z_0 \in \mathbb{D} .$$

Es ist also jedes *Punktauswertungsfunktional*

$$\chi_{z_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} H^2 & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(z_0) \end{array} \right.$$

stetig. //

Kapitel 4

Vollständigkeit

Die Gültigkeit vieler wichtiger Sätze der Analysis hängt wesentlich davon ab, dass die betrachteten Systeme vollständig sind. Als Beispiel seien nur die „unvollständigen Systeme“ der rationalen Zahlen genannt oder das Riemannsche Integral. Beide sind denkbar unpraktisch im Vergleich zu ihren „vollständigen“ Äquivalenten, den reellen Zahlen und dem Lebesgue-Integral. Wir wollen in diesem Kapitel die Auswirkungen der Vollständigkeit im Kontext der normierten Räume untersuchen.

4.1 Der Satz von Baire

Die Grundlage für alle Sätze dieses Kapitels bildet der folgende

4.1.1 Satz (von Baire)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $V_n, n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.*

Beweis. Eine Teilmenge von X ist genau dann dicht, wenn sie mit jeder nichtleeren offenen Menge nichtleeren Schnitt hat. Sei eine nichtleere offene Teilmenge W von X gegeben. Wir müssen also zeigen, dass $W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$ ist. Bezeichne wieder $U_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Wir konstruieren induktiv Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 < r_n < \frac{1}{n}$ und

$$\begin{array}{ccccccccc} & & V_1 & & V_2 & & V_3 & & \\ & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \\ W & \supseteq & K_{r_1}(x_1) & \supseteq & K_{r_2}(x_2) & \supseteq & K_{r_3}(x_3) & \supseteq & \cdots \end{array}$$

Da V_1 dicht ist, ist $V_1 \cap W \neq \emptyset$ und als Durchschnitt zweier offener Mengen auch offen. Also existieren $x_1 \in X, 0 < r_1 < 1$ derart, dass $K_{r_1}(x_1) \subseteq V_1 \cap W$.

Sei $n \geq 2$, und seien x_{n-1}, r_{n-1}, bereits definiert. Da V_n dicht und offen ist, ist $V_n \cap U_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \neq \emptyset$ und offen. Daher existieren $x_n \in X$ und $0 < r_n < \frac{1}{n}$ mit $K_{r_n}(x_n) \subseteq V_n \cap U_{r_{n-1}}(x_{n-1})$.

Sind $i, j \geq n$, so liegen x_i und x_j beide in $K_{r_n}(x_n)$, also ist

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{2}{n} \quad \text{für alle} \quad i, j \geq n\,.$$

Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert $x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da für $i \geq n$ sicher $x_i \in K_{r_n}(x_n)$ gilt, folgt auch $x \in K_{r_n}(x_n)$. Daher ist

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{r_n}(x_n) \subseteq W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \,,$$

insbesondere ist also $W \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.

❏

Oft ist die Signifikanz des Satzes von Baire das folgende Korollar.

4.1.2 Korollar. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien $V_n, n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen von X. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.* ❏

4.1.3 Bemerkung. Geht man im Satz von Baire zu den Komplementen über, so erhält man wegen $\overline{A_n^c} = (A_n^\circ)^c$ folgende Umformulierung.

Ist $A_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren, so hat auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ leeres Inneres. //

4.1.4 Bemerkung. Der Satz von Baire wird oft auch *Baire'scher Kategoriensatz* genannt. Das hat folgenden Grund.

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Kann M als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen geschrieben werden, so heißt sie *von 1. Kategorie in X*. Dabei nennen wir eine Menge $E \subseteq X$ *nirgends dicht*, wenn $\overline{E}$ keine nichtleeren offenen Mengen enthält, also $(\overline{E})^\circ = \emptyset$. Mengen von 1. Kategorie werden auch *mager* genannt. Ist die Menge M nicht von 1. Kategorie in X, so heißt sie *von 2. Kategorie in X*.

Geht man in Satz 4.1.1 zu den Komplementen über, so erhält man, dass jeder vollständige metrische Raum in sich selbst von 2. Kategorie ist. //

4.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann heißt M eine *G_δ-Menge*, wenn M als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen dargestellt werden kann.

4.2.1 Satz (von Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $R_i : X \to Y,\ i \in I$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen.*

(*i*) *Es existiert eine Konstante $C \in [0, +\infty)$ mit $\|R_i\| \leq C$ für alle $i \in I$.*

(*ii*) *Es existiert eine dichte G_δ-Menge $M \subseteq X$ mit $\sup_{i\in I} \|R_i x\| = \infty$ für alle $x \in M$.*

Beweis. Setze

$$V_n := \bigcup_{i\in I} \big\{x \in X : \|R_i x\| > n\big\},\ n \in \mathbb{N} .$$

Aus der Stetigkeit der R_i folgt die der Funktionen $x \mapsto \|R_i x\|$, womit die V_n als Vereinigung offener Mengen offen sind. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Eine der Mengen V_n ist nicht dicht in X: In diesem Fall gibt es dann $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ und $r > 0$ derart, dass $K_r(x_0) \cap V_N = \emptyset$. Also gilt

$$\|R_i(x_0 + x)\| \leq N, \quad \text{für alle } \ i \in I, \ x \in K_r(0) .$$

Wir erhalten

$$\|R_i x\| \leq \|R_i(x_0 + x)\| + \|R_i x_0\| \leq 2N, \quad \text{für alle } \ x \in K_r(0) ,$$

und daher $\|R_i\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R_i x\| \leq \frac{2N}{r}$.

2. Jede der Mengen V_n ist dicht in X: Nach dem Satz von Baire ist auch $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht. Offenbar ist diese Menge eine G_δ-Menge. Für jedes $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ gilt aber $\sup_{i \in I} \|R_i x\| = \infty$.

❑

Der Satz von Banach-Steinhaus wird oft in der folgenden Form angewendet.

4.2.2 Korollar (Principle of uniform boundedness bzw. *Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit*)**.** *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $R_i : X \to Y$, $i \in I$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Ist die Familie $\{R_i : i \in I\}$ punktweise beschränkt, also gilt für jedes feste $x \in X$*

$$\sup_{i \in I} \|R_i x\| = C_x < +\infty ,$$

so ist die Familie gleichmäßig beschränkt, also

$$\sup_{i \in I} \|R_i\| = C < +\infty .$$

Beweis. Wäre $\{R_i : i \in I\}$ nicht gleichmäßig beschränkt, so existierte sogar eine dichte G_δ-Menge von Punkten x mit $\sup_{i \in I} \|R_i x\| = \infty$.

❑

Folgende Aussage ist nur für Folgen $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und nicht für allgemeine Netze von beschränkten Operatoren richtig.

4.2.3 Korollar. *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $R_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge beschränkter linearer Operatoren. Existiert für jedes $x \in X$ der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} R_n x \in Y$, so ist die durch*

$$R : \begin{cases} X & \to \quad Y \\ x & \mapsto \quad \lim_{n \to \infty} R_n x \end{cases}$$

definierte Abbildung linear und beschränkt.

Beweis. Dass R linear ist, folgt aus der Linearität des Grenzwertes. Aus der Konvergenz der Folge $(R_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_n x\| < \infty$ für jedes $x \in X$. Damit gilt nach dem Satz von Banach-Steinhaus $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|R_n\| =: C < \infty$. Es folgt

$$\|Rx\| = \lim_{n \to \infty} \|R_n x\| \leq C\|x\| .$$

❑

4.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f eine *offene Abbildung*, wenn für jede in X offene Menge O auch $f(O)$ in Y offen ist.

4.3.1 Satz (von der offenen Abbildung)**.** *Seien X und Y Banachräume und $R : X \to Y$ eine surjektive und beschränkte lineare Abbildung. Dann ist R offen.*

Im Beweis verwenden wir die folgende Umformulierung der Eigenschaft einer Abbildung offen zu sein.

4.3.2 Lemma. *Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist T genau dann offen, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $T(U_1^X(0)) \supseteq U_\delta^Y(0)$.*

Beweis. Ist T offen, so ist $T(U_1^X(0))$ eine offene Menge, die das Element $T(0) = 0$ enthält. Daher gibt es eine gewisse Kugel $U_\delta^Y(0)$, welche in $T(U_1^X(0))$ enthalten ist.

Umgekehrt sei angenommen, dass $T(U_1^X(0)) \supseteq U_\delta^Y(0)$ mit einem $\delta > 0$, und sei eine offene Menge $O \subseteq X$ gegeben. Ist $O = \emptyset$, so ist trivialerweise $T(O) = \emptyset$ offen. Anderenfalls sei $y \in T(O)$ gegeben, und wähle $x \in O$ mit $T(x) = y$. Da O offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $U_r^X(x) \subseteq O$. Nun gilt $U_r^X(x) = x + rU_1^X(0)$, und daher

$$T(O) \supseteq T(U_r^X(x)) = T(x) + rT(U_1^X(0)) \supseteq y + rU_\delta^Y(0) = U_{r\delta}^Y(y)\,.$$

Da $y \in T(O)$ beliebig war, ist $T(O)$ offen. ❑

Ein weiterer Beweisteil ist folgendes Lemma.

4.3.3 Lemma. *Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $T : X \to Y$ eine beschränkte lineare Abbildung. Wenn $\overline{T(U_1^X(0))} \supseteq U_1^Y(0)$, so gilt schon $T(U_1^X(0)) \supseteq U_1^Y(0)$.*

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt $\overline{T(U_1^X(0))} \supseteq \overline{U_1^Y(0)} = K_1^Y(0)$. Durch Normieren sieht man, dass es damit insbesondere zu jedem $y \in Y$ und $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ gibt mit

$$\|x\| \leq \|y\| \quad \text{und} \quad \|y - Tx\| < \epsilon\,.$$

Sei $y_1 \in U_1^Y(0)$ gegeben. Wähle eine Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n < 1 - \|y_1\|$, und $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| \leq \|y_1\|$ sowie $\|y_1 - Tx_1\| < \epsilon_1$.

Startend mit y_1 und x_1 konstruieren wir nun induktiv Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Y bzw. X. Sind für $n \geq 1$ die Elemente y_n und x_n bereits definiert, so setzen wir $y_{n+1} := y_n - Tx_n$ und wählen $x_{n+1} \in X$ mit $\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\|$ und $\|y_{n+1} - Tx_{n+1}\| < \epsilon_{n+1}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \epsilon_n\,,$$

und daher

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n < 1\,.$$

Da X vollständig ist, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent. Klarerweise liegt ihr Grenzwert x in $U_1^X(0)$. Wegen $y_n \to 0$ erhalten wir

$$Tx = T\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} Tx_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n+1}) = y_1 ,$$

also ist $y_1 \in T(U_1^X(0))$.

❑

Beweis (von Satz 4.3.1). Aus $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k^X(0)$ und aus der Surjektivität von R folgt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R(U_k^X(0)) = R(X) = Y$. Wir erhalten

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{R(U_k^X(0))}^c \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R(U_k^X(0))^c = \emptyset .$$

Da Y vollständig ist, gibt es wegen dem Satz von Baire ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $\overline{R(U_k^X(0))}^c$ nicht dicht ist, also $W \cap \overline{R(U_k^X(0))}^c = \emptyset$ bzw. $W \subseteq \overline{R(U_k^X(0))}$ für ein offenes $W \neq \emptyset$, $W \subseteq Y$.

Wegen $-W \subseteq -\overline{R(U_k^X(0))} = \overline{-R(U_k^X(0))} = \overline{R(U_k^X(0))}$, wegen der Stetigkeit der Addition und wegen $U_k^X(0) + U_k^X(0) \subseteq U_{2k}^X(0)$ folgt

$$W - W \subseteq \overline{R(U_k^X(0))} + \overline{R(U_k^X(0))} \subseteq \overline{R(U_{2k}^X(0))} .$$

Da $W - W$ eine offene Nullumgebung ist, muss es ein $\eta > 0$ geben mit $U_\eta^Y(0) \subseteq W - W \subseteq \overline{R(U_{2k}^X(0))}$. Nun wenden wir Lemma 4.3.3 mit $T = \frac{2k}{\eta} R$ an und erhalten $U_{\frac{\eta}{2k}}^Y(0) \subseteq R(U_1^X(0))$. Nach Lemma 4.3.2 ist R offen.

❑

Eine später öfters verwendete Folgerung ist:

4.3.4 Korollar. *Seien X, Y Banachräume und $R : X \to Y$ eine bijektive lineare Abbildung. Ist R stetig, so ist auch die Inverse R^{-1} stetig.*

Beweis. R besitzt eine Inverse, die klarerweise linear ist. Nach Satz 4.3.1 ist R offen und damit R^{-1} stetig.

❑

4.3.5 Bemerkung. Seien X, Y normierte Räume und $R : X \to Y$ linear. Die Tatsache, dass R injektiv ist zusammen mit der Beschränktheit von $R^{-1} : R(X) \to X$, ist dann äquivalent zur Existenz eines reellen $a > 0$ mit

$$a\|x\| \leq \|Rx\| \quad \text{für alle} \quad x \in X , \tag{4.3.1}$$

wie man leicht mit Hilfe der Substitution $x = R^{-1}y$ erkennt. In diesem Fall ist die Abbildungsnorm von $R^{-1} : R(X) \to X$ kleiner oder gleich $\frac{1}{a}$. //

4.3.6 Lemma. *Ist $R : X \to Y$ linear und beschränkt und gilt* (4.3.1)*, so ist $R(X)$ genau dann ein Banachraum, wenn X ein solcher ist. In dem Fall ist $R(X)$ abgeschlossen in Y.*

Beweis. In der Tat folgt aus der Beschränktheit von R zusammen mit (4.3.1), dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X diese in X genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(Rx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y ist und dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen ein x genau dann konvergiert, wenn $(Rx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $R(X)$ gegen ein y konvergiert.

Da vollständige Teilmengen metrischer Räume immer abgeschlossen sind, erhalten wir auch die letzte Behauptung.

❑

4.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$, dann heißt

$$\operatorname{graph} f := \big\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\big\}$$

der *Graph* von f. Ganz im Allgemeinen gilt die folgende Feststellung.

4.4.1 Lemma. *Seien X, Y topologische Räume, Y Hausdorff, und sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist der Graph von f abgeschlossen in $X \times Y$.*

Beweis. Sei Ω das Komplement des Graphen von f in $X \times Y$. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$, also $f(x_0) \neq y_0$. Wähle disjunkte Umgebungen V, W in Y von y_0 beziehungsweise $f(x_0)$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0 in X mit $f(U) \subseteq W$. Also liegt die Umgebung $U \times V$ von (x_0, y_0) ganz in Ω.

❑

Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Man kann dazu leicht Gegenbeispiele konstruieren. Es ist eine interessante Tatsache, dass für lineare Abbildungen zwischen Banachräumen die Umkehrung doch stimmt.

4.4.2 Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Banachräume und sei $R : X \to Y$ linear. Ist der Graph von R abgeschlossen in $X \times Y$, so ist R stetig.*

Beweis. Der Graph G von R ist ein abgeschlossener linearer Unterraum des Banachraumes $X \times Y$ mit der Summennorm $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$, also selbst ein Banachraum. Betrachte die Projektion auf die erste Komponente

$$\pi_1 : \begin{cases} X \times Y & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x \end{cases}$$

Dann ist π_1 stetig und linear. Also ist auch $\pi_1|_G$ stetig und linear. Nun ist $\pi_1|_G$ injektiv, denn $(x, Rx), (y, Ry) \in G$ und $x = y$ impliziert $Rx = Ry$. Weiters ist $\pi_1|_G$ surjektiv, denn für jedes $x \in X$ ist $(x, Rx) \in G$. Nach Korollar 4.3.4 ist $(\pi_1|_G)^{-1} : X \to G$ stetig.

Sei $\pi_2 : X \times Y \to Y$ die Projektion auf die zweite Komponente. Genauso wie π_1 ist π_2 stetig und linear. Der Operator R lässt sich nun schreiben als

$$R = \pi_2 \circ (\pi_1|_G)^{-1} .$$

❑

4.4.3 Bemerkung. Seien X, Y metrische Räume, und $F : X \to Y$. Dann ist $\operatorname{graph} F$ genau dann abgeschlossen, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$, für die die beiden Limiten $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, $y := \lim_{n\to\infty} F(x_n)$ existieren, gilt $y = F(x)$.

Man beachte den Unterschied zur Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Die Abildung F ist genau dann stetig, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$, für die der Limes $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert, existiert auch $y := \lim_{n\to\infty} F(x_n)$ und es gilt $y = F(x)$. //

Wir geben eine oft nützliche Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen. Eine Menge M von linearen Funktionalen heißt dabei *punktetrennend*[†], wenn $\bigcap_{f\in M} \ker f = \{0\}$. Man beachte, dass wegen der Linearität der Funktionale aus M, die Menge M genau dann punktetrennend ist, wenn

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists\, f \in M : \ f(x) \neq f(y)\,.$$

4.4.4 Korollar. *Seien X, Y Banachräume, sei $R : X \to Y$ linear, und sei $M \subseteq Y'$ eine punktetrennende Menge von stetigen, linearen Funktionalen auf Y. Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in X$, mit $\|x_n\| \to 0$, dass $f(Rx_n) \to 0$ für alle $f \in M$, was zur Stetigkeit von $f \circ R$ für alle $f \in M$ äquivalent ist, so ist R beschränkt.*

Beweis. Gelte $x_n \to x$ und $Rx_n \to y$. Für $f \in M$ gilt gemäß Voraussetzung $f(R(x_n - x)) \to 0$, womit $f(y) = \lim_{n\to\infty} f(Rx_n) = f(Rx)$. Da M punktetrennend ist, folgt $y = Rx$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist R stetig. ❑

[†]Man verwechsle diesen Begriff nicht mit der Terminologie einer punktetrennenden Algebra, wie sie beim Satz von Stone-Weierstraß auftritt.

Kapitel 5

Lokalkonvexe Vektorräume

In diesem Kapitel werden wir uns mit topologischen Vektorräumen beschäftigen, die einer zusätzlichen geometrischen Bedingung genügen. Es stellt sich heraus, dass diese für viele „gute“ Eigenschaften verantwortlich zeichnet. Insbesondere sichert sie, dass es hinreichend viele stetige lineare Funktionale gibt, um von Eigenschaften des Dualraumes Rückschlüsse auf Eigenschaften des Ausgangsraumes zu ziehen.

5.0.1 Definition. Ein topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ heißt *lokalkonvex*, wenn es eine Umgebungsbasis der Null gibt, die aus konvexen Mengen besteht.

5.0.2 Beispiel.

(i) Alle normierten Räume sind lokalkonvex. In der Tat bilden die ϵ-Kugeln $U_\epsilon(0) = \{x \in X : \|x\| < \epsilon\}$ eine Umgebungsbasis der Null. Zudem sind diese wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t \cdot \|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $t \in [0, 1]$ konvex.

(ii) Der Raum $C^\infty(\Omega)$ aus Beispiel 2.3.10 ist lokalkonvex. Wie schon einmal festgehalten, wird seine Topologie aber nicht von einer Norm induziert.

(iii) Sei $0 < p < 1$, dann ist der Raum $L^p(0, 1)$ aus Beispiel 2.3.11 nicht lokalkonvex.

//

5.0.3 Bemerkung.

(i) In einem lokalkonvexen Vektorraum gibt es gemäß Lemma 2.1.8 sogar eine Umgebungsbasis der Null bestehend aus konvexen, offenen und kreisförmigen Mengen.

(ii) Sei X ein Vektorraum, $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie lokalkonvexer Vektorräume, und seien $R_i : X \to X_i$, $i \in I$, lineare Abbildungen mit $\bigcap_{i \in I} \ker R_i = \{0\}$ bzw. äquivalent dazu

$$\forall\, x, y \in X,\ x \neq y\ \exists i \in I :\ R_i(x) \neq R_i(y)\,.$$

Dann ist X mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bezüglich der Familie von Abbildungen

$$R_i : X \to (X_i, \mathcal{T}_i),\ i \in I\,,$$

ein lokalkonvexer Vektorraum.

Um dies zu sehen, sei zunächst daran erinnert, dass die Mengen der Bauart $R_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap R_{i_m}^{-1}(O_{i_m})$ mit $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$ und $O_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1}, \ldots, O_{i_m} \in \mathcal{T}_{i_m}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ abgeben.

Daraus erkennt man leicht, dass für Nullumgebungsbasen $\mathfrak{V}_i(0)$ von $(X_i, \mathcal{T}_i)$ die Menge der Mengen der Bauart

$$\bigcap_{k=1}^{n} R_{i_k}^{-1}(V_{i_k})\,, \tag{5.0.1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $i_k \in I$ und $V_{i_k} \in \mathfrak{V}_{i_k}(0)$ für $k = 1, \ldots, n$, eine Nullumgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$ ist. Sind nun alle Mengen aus allen $\mathfrak{V}_i(0)$ konvex, so folgt aus der Linearität der R_i unmittelbar, dass diese Nullumgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$ auch aus konvexen Mengen besteht.

Wir erhalten insbesondere, dass Unterräume und direkte Produkte lokalkonvexer Vektorräume wieder lokalkonvex sind.

(iii) Sei M ein abgeschlossener linearer Unterraum eines lokalkonvexen Vektorraumes X, und betrachte X/M versehen mit der finalen Topologie bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : X \to X/M$, vgl. Proposition 2.4.6. Dann ist X/M ein lokalkonvexer Vektorraum.

Um dies zu sehen, sei U eine Nullumgebung in X/M. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in X. Wähle eine konvexe Nullumgebung V in X mit $V \subseteq \pi^{-1}(U)$. Dann ist $\pi(V)$ konvex, eine Nullumgebung in X/M, und enthalten in U.

//

5.1 Seminormen, Minkowski–Funktionale

Wir werden zeigen, dass die Topologie eines lokalkonvexen Raumes, obwohl sie nicht notwendigerweise von einer Norm kommen muss, doch in recht ähnlicher Weise erzeugt werden kann.

5.1.1 Definition. Sei X ein Vektorraum, $p : X \to [0, \infty)$. Dann heißt p eine *Seminorm*, wenn gilt:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$.

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $x \in X, \alpha \in \mathbb{C}$.

Klarerweise ist jede Norm auf X auch eine Seminorm. Umgekehrt ist eine Seminorm $p : X \to [0, \infty)$ eine Norm genau dann, wenn $p(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

5.1.2 Lemma. *Sei p eine Seminorm auf X und $N(p) := \{x \in X : p(x) = 0\}$. Dann gilt:*

(*i*) $p(0) = 0$.

(*ii*) Dreiecksungleichung nach unten: $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p(y - x)$.

(*iii*) $N(p)$ *ist ein linearer Unterraum von* X.

(*iv*) *Mit* $X_p := X/N(p)$ *ist die Funktion* $\|.\|_p : X_p \to [0, \infty)$, *die der Restklasse* $x + N(p)$ *die Zahl* $p(x)$ *zuweist, wohldefiniert und eine Norm.*

Beweis.
`ad`(i): Es gilt $0 = 0 \cdot x$, also folgt $p(0) = p(0 \cdot x) = |0|p(x) = 0$.

`ad`(ii): Es ist $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, also $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Genauso erhält man $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$. Nun gilt $p(x - y) = p[(-1)(y - x)] = p(y - x)$, also folgt ($ii$).

`ad`(iii): Seien $x, y \in X$ mit $p(x) = p(y) = 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann folgt $0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) = 0$.

`ad`(iv): Wegen (ii) ist $\|x + N(p)\|_p$ wohldefiniert. Die Eigenschaft Seminorm zu sein überträgt sich unmittelbar von p auf $\|.\|_p$. Außerdem ist $\|x + N(p)\|_p = p(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in N(p)$ bzw. $x + N(p) = 0 + N(p)$.

❑

5.1.3 Definition. Sei X ein Vektorraum und M eine Familie von Seminormen auf X. Dann heißt M *separierend*, wenn $\bigcap_{p \in M} N(p) = \{0\}$.

5.1.4 Satz. *Sei* X *ein Vektorraum und sei* M *eine separierende Familie von Seminormen auf* X. *Für* $p \in M$ *seien* $N(p)$ *und* $\|.\|_p : X_p \to [0, \infty)$ *definiert wie in Lemma 5.1.2, sodass also* $(X_p, \|.\|_p)$ *ein normierter Raum ist. Weiters bezeichne mit* $\pi_p : X \to X_p$ *die kanonische Projektion, und mit* $\mathcal{T}_M$ *die initiale Topologie auf* X *bezüglich der Abbildungen* π_p, $p \in M$, *wobei die* X_p *mit der von* $\|.\|_p$ *erzeugten Topologie versehen sind.*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \vdots \\
 & \pi_{p_\alpha} & (X_{p_\alpha}, \|\cdot\|_{p_\alpha}) \\
X & & (X_{p_\beta}, \|\cdot\|_{p_\beta}) \\
 & \pi_{p_\beta} & \vdots \\
 & \pi_{p_\gamma} & (X_{p_\gamma}, \|\cdot\|_{p_\gamma}) \\
 & & \vdots
\end{array}
$$

Dann ist $(X, \mathcal{T}_M)$ *ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Nullumgebungsbasis von* $(X, \mathcal{T}_M)$ *bestehend aus konvexen Mengen ist gegeben durch*

$$\mathfrak{V}(0) := \left\{ \bigcap_{k=1}^{m} V(p_k, \epsilon_k) : m \in \mathbb{N}, p_1, \ldots, p_m \in M, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m > 0 \right\}, \qquad (5.1.1)$$

wobei $V(p, \epsilon) := \{x \in X : p(x) < \epsilon\}$. *Schließlich konvergiert ein Netz* $(x_j)_{j \in J}$ *in* X *bzgl.* $\mathcal{T}_M$ *gegen ein* $x \in X$ *genau dann, wenn* $p(x_j - x) \xrightarrow{j \in J} 0$ *für alle* $p \in M$.

Beweis. Die Abbildungen π_p sind linear, und $\bigcap_{p\in M} \ker \pi_p = \bigcap_{p\in M} N(p) = \{0\}$. Nach Proposition 2.4.1 ist $(X, \mathcal{T}_M)$ ein topologischer Vektorraum, welcher gemäß Bemerkung 5.0.3, (ii) lokalkonvex ist.

Eine Umgebungsbasis der Null im normierten Raum $(X_p, \|.\|_p)$ ist gegeben durch die Kugeln $U_\epsilon^{X_p}(0) := \{x \in X_p : \|x\|_p < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Daher ist

$$\Big\{ \bigcap_{k=1}^{m} \pi_{p_k}^{-1}\big(U_{\epsilon_k}^{X_{p_k}}(0)\big) : m \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_m \in M, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m > 0 \Big\}$$

eine Nullumgebungsbasis in $(X, \mathcal{T}_M)$, vgl. (5.0.1), (ii). Wegen $\pi_p^{-1}(U_\epsilon^{X_p}(0)) = V(p, \epsilon)$ ist das gerade das im Satz angegebenen System $\mathfrak{V}(0)$ von Teilmengen von X.

Da $\mathcal{T}_M$ die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen π_p ist, konvergiert ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\pi_p(x_j) \to \pi_p(x), j \in J$ für alle $p \in M$. Da X_p ein normierter Raum ist, wobei $\|x + N(p)\|_p = p(x)$, ist letzteres zu $p(x_j - x) \xrightarrow{j\in J} 0$ für alle $p \in M$ äquivalent.

❑

5.1.5 Beispiel. Ist $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, so ist die Familie $\{\|.\|\}$ eine separierende Familie von Seminormen. Die im Sinne von Satz 5.1.4 induzierte Topologie ist die Normtopologie. //

5.1.6 Bemerkung. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, seien $(X_i, \|.\|_i)$, $i \in I$, normierte Räume und seien $R_i : X \to X_i$, $i \in I$, lineare Abbildungen mit $\bigcap_{i\in I} \ker R_i = \{0\}$. Versehen wir X mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bezüglich der Familie R_i, $i \in I$, von Abbildungen, so ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum; vgl. Bemerkung 5.0.3. Da für eine beliebige Topologie $\mathcal{O}$ auf X die Stetigkeit von $R_i : (X, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}(\|.\|_i))$ zu der von $R_i : (X, \mathcal{O}) \to (R_i(X), \mathcal{T}(\|.\|_i|_{R_i(X)}))$ äquivalent ist, bleibt $\mathcal{T}$ unverändert, wenn wir von X_i zu $R_i(X)$ übergehen. Also können wir die Abbildungen $R_i : X \to X_i$, $i \in I$, als surjektiv voraussetzen.

Für $i \in I$ ist dann $p_i(x) := \|R_i(x)\|_i$ eine Seminorm auf X. Mit der Notation aus Lemma 5.1.2 gilt offenbar $N(p_i) = \ker R_i$ sowie

$$\|x + N(p_i)\|_{p_i} = p_i(x) = \|R_i(x)\|_i, \quad x \in X\,.$$

Insbesondere ist durch $R_i/_{N(p_i)}(x + N(p_i)) = R_i x$ eine isometrische Abbildung $R_i/_{N(p_i)} : X/_{N(p_i)} \to X_i$ wohldefiniert. Man erkennt unschwer, dass diese Abbildung auch linear und wegen der Surjektivität von R_i sogar bijektiv ist. Also ist $R_i/_{N(p_i)} : X/_{N(p_i)} \to X_i$ ein Homöomorphismus, welcher $R_i = (R_i/_{N(p_i)}) \circ \pi_{p_i}$ erfüllt.

$$\begin{tikzcd}
 & (X/_{N(p_i)}, \|.\|_{p_i}) \arrow[r, "R_i/_{N(p_i)}"'] & (X_i, \|.\|_i) \\
X \arrow[ur, "\pi_{p_i}"] \arrow[dr, "\pi_{p_j}"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "R_i"] \arrow[drr, dashed, bend right, "R_j"'] & \vdots & \\
 & (X/_{N(p_j)}, \|.\|_{p_j}) \arrow[r, "R_j/_{N(p_j)}"] & (X_j, \|.\|_j)
\end{tikzcd}$$

Folglich ist für eine beliebige Topologie $\mathcal{O}$ auf X die Abbildung $R_i : (X, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}(\|.\|_i))$ genau dann stetig, wenn die Abbildung $\pi_{p_i} : (X, \mathcal{O}) \to (X/_{N(p_i)}, \mathcal{T}(\|.\|_{p_i}))$ stetig ist. Vergleichen wir das mit Satz 5.1.4, so erkennen wir, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$, wobei $M := \{p_i : i \in I\}$ wegen $\bigcap_{i\in I} N(p_i) = \bigcap_{i\in I} \ker R_i = \{0\}$ separierend ist. //

5.1.7 Bemerkung. Hat man eine Familie M von Seminormen auf X gegeben, so zeigt man unschwer, dass alle Seminormen aus M bzgl. $\mathcal{T}_M$ stetig sind. Man könnte nun auch die initiale Topologie bezüglich der Familie M als Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ betrachten. Diese Topologie ist gröber als $\mathcal{T}_M$, macht X im Allgemeinen aber nicht zu einem topologischen Vektorraum, vgl. Bemerkung 2.4.3. //

Es ist eine nichttriviale Tatsache, dass jeder lokalkonvexe Vektorraum durch die in Satz 5.1.4 angegebene Konstruktion entsteht. Um diese Aussage nachzuweisen, benötigen wir den Begriff des Minkowski–Funktionals. Man beachte im Folgenden, dass nichtleere, absorbierende Teilmengen immer 0 enthalten.

5.1.8 Definition. Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X. Wir definieren eine Abbildung $\mu_A : X \to [0, \infty)$ als

$$\mu_A(x) := \inf \big\{ t > 0 : \frac{1}{t} x \in A \big\} .$$

Die Abbildung μ_A heißt das *Minkowski–Funktional* von A.

5.1.9 Lemma. *Sei A eine nichtleere, absorbierende Teilmenge eines Vektorraumes X.*

(i) *Es gilt $A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$.*

(ii) *Es gilt $\mu_A(0) = 0$ sowie*

$$\mu_{\frac{1}{r}A}(x) = \mu_A(rx) = r\mu_A(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X, r > 0 .$$

(iii) *Ist A zusätzlich konvex, so gilt*

$$\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X .$$

(iv) *Ist A kreisförmig, dann gilt*

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{C} .$$

(v) *Für konvexes A gilt $\big\{x \in X : \mu_A(x) < 1\big\} \subseteq A$.*

(vi) *Ist A konvex und offen bezüglich irgendeiner Topologie auf X, die X zu einem topologischen Vektorraum macht, so gilt sogar*

$$\big\{x \in X : \mu_A(x) < 1\big\} = A .$$

(vii) *Für ein konvexes und kreisförmiges A ist μ_A eine Seminorm.*

Beweis.

`ad`(i): Für $x \in A$ ist $1^{-1}x = x \in A$, also $\mu_A(x) \leq 1$.

`ad`(ii): $\mu_A(0) = 0$ folgt unmittelbar wegen $0 \in A$. Die behauptete Gleichung folgt aus

$$\underbrace{\inf\big\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in \frac{1}{r}A\big\}}_{=\mu_{\frac{1}{r}A}(x)} = \underbrace{\inf\big\{t > 0 : \frac{1}{t}(rx) \in A\big\}}_{=\mu_A(rx)} = \inf\big\{t > 0 : \frac{r}{t}x \in A\big\}$$

$$= \inf\big\{rs > 0 : \frac{1}{s}x \in A\big\} = \underbrace{\inf r\big\{s > 0 : \frac{1}{s}x \in A\big\}}_{=r\mu_A(x)}.$$

`ad`(iii): Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $t \leq \mu_A(x)+\epsilon$, und $s \leq \mu_A(y)+\epsilon$ mit $t^{-1}x, s^{-1}y \in A$. Damit ist auch

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s} \in A\,,$$

also $\mu_A(x+y) \leq s+t \leq \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

`ad`(iv): Wegen $\mu_A(0 \cdot x) = 0 = 0 \cdot \mu_A(x)$ können wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Die Beziehung $\mu_A(\lambda x) = |\lambda|\mu_A(x)$ ist dann wegen (ii) äquivalent zu $\mu_A(\frac{\lambda}{|\lambda|}x) = \mu_A(x)$. Diese Gleichheit gilt, da für kreisförmiges A die Tatsachen $t^{-1} \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|}x \in A$ und $t^{-1}x \in A$ äquivalent sind.

`ad`(v): Ist $\mu_A(x) < 1$, so folgt $t^{-1}x \in A$ für ein $t \in (0,1)$. Da A konvex ist und die Null enthält, folgt $x = t \cdot (t^{-1}x) + (1-t)0 \in A$.

`ad`(vi): Sei A konvex und offen bezüglich irgendeiner Topologie auf X, die X zu einem topologischen Vektorraum macht. Für $x \in A$ gilt, da A offen und die skalare Multiplikation stetig ist, $(1-\delta, 1+\delta) \cdot x \subseteq A$ für ein gewisses $\delta \in (0,1)$. Wegen (i) gilt daher

$$(1-\delta, 1+\delta) \cdot \mu_A(x) = \mu_A\left((1-\delta, 1+\delta) \cdot x\right) \subseteq [0,1]\,,$$

womit $\mu_A(x) < 1$ sein muss. Also gilt $A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus (v).

`ad`(vii): Dieser Punkt folgt aus (ii), (iii).

❑

Als Hauptsatz über lokalkonvexe Vektorräume gilt

5.1.10 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, und sei $\mathfrak{W}$ eine Umgebungsbasis der Null, die aus konvexen und kreisförmigen Mengen besteht. Dann ist die Familie*

$$M := \big\{\mu_W : W \in \mathfrak{W}\big\}$$

der Minkowski-Funktionale eine separierende Familie von Seminormen auf X und es gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$.

Beweis. Da $\mathcal{T}$ Hausdorff ist, existiert zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ mit $x \notin U$. Daher gibt es auch ein $W \in \mathfrak{W}$ mit $x \notin W$. Aus Lemma 5.1.9, (v), folgt $\mu_W(x) \geq 1$. Zusammen mit Lemma 5.1.9, (vii), folgt, dass M eine separierende Familie von Seminormen ist.

Um $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ nachzuweisen, reicht es gemäß Korollar 2.1.12 zu zeigen, dass $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0) = \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(0)$. Für $W \in \mathfrak{W}$ und $\epsilon > 0$ gilt wegen Lemma 5.1.9, (i) und (ii),

$$\frac{\epsilon}{2}W \subseteq \{x \in X : \frac{2}{\epsilon}\mu_W(x) \leq 1\} \subseteq \{x \in X : \mu_W(x) < \epsilon\} = V(\mu_W, \epsilon)\,.$$

Da wegen (5.1.1) endliche Schnitte von Mengen der Bauart $V(\mu_W, \epsilon)$ eine Umgebungsbasis von $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0)$ abgeben, folgt $\mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0) \subseteq \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(0)$.

Ist umgekehrt $W \in \mathfrak{W}$, so ist nach Lemma 5.1.9, (v), $V(\mu_W, 1) \subseteq W$, also $W \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_M}(0)$.

❑

5.1.11 Beispiel. Seien $(X_1, \|.\|_1)$ und $(X_2, \|.\|_2)$ normierte Räume. Ist $x \in X_1$ festgehalten, so ist die Abbildung

$$p_x : \begin{cases} L_b(X_1, X_2) & \to & [0, \infty) \\ T & \mapsto & \|T(x)\|_2 \end{cases}$$

eine Seminorm auf $L_b(X_1, X_2)$. Ist $p_x(T) = 0$ für alle $x \in X_1$, so heißt das gerade $T = 0$, womit die Familie $\{p_x : x \in X_1\}$ separierend ist. Die von $\{p_x : x \in X_1\}$ auf $L_b(X_1, X_2)$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_s$ macht also $L_b(X_1, X_2)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Sie heißt die *starke Operatortopolgie*.

Für ein Netz $(T_i)_{i\in I}$ von Operatoren $T_i \in L_b(X_1, X_2)$ gilt

$$T_i \xrightarrow{\mathcal{T}_s} T \iff T_i x \xrightarrow{\|.\|_2} Tx \quad \text{für alle} \quad x \in X_1\,.$$

In diesem Fall schreibt man auch $T_i \xrightarrow{s} T$.

Die Topologie $\mathcal{T}_s$ ist gröber als die von der Operatornorm induzierte Topologie. Tatsächlich bedeutet Konvergenz in der Operatornorm gleichmäßige Konvergenz auf der Einheitskugel von X_1, wogegen Konvergenz bezüglich $\mathcal{T}_s$ punktweise Konvergenz bedeutet. Genauer gilt

$$T_i \xrightarrow{\|\cdot\|} T \iff \forall \epsilon > 0\, \exists i_0 \in I\, \forall i \geq i_0\, \forall x \in U_1^{X_1}(0) : \; \|T_i(x) - T(x)\|_2 \leq \epsilon$$

$$T_i \xrightarrow{s} T \iff \forall x \in U_1^{X_1}(0)\, \forall \epsilon > 0\, \exists i_0 \in I\, \forall i \geq i_0 : \; \|T_i(x) - T(x)\|_2 \leq \epsilon$$

Fasst man $L_b(X_1, X_2)$ in geeigneter Weise als Unterraum des Produktes $\prod_{x\in X_1} X_2$ auf, so ist $\mathcal{T}_s$ gerade die Produkttopologie. //

5.2 Die Sätze von Hahn-Banach

Die Sätze von Hahn-Banach beschäftigen sich mit der Existenz stetiger linearer Funktionale, insbesondere mit der Fortsetzbarkeit linearer Funktionale, die zunächst nur auf einem Unterraum gegeben sind. Ist X ein Vektorraum, M ein linearer Unterraum, und ist $f : M \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional, so existieren stets lineare Funktionale $F : X \to \mathbb{C}$, die f fortsetzen, also $F|_M = f$ erfüllen.

Dazu ergänze man einfach eine Basis von M zu einer von X. Nichttrivial wird die Frage nach der Existenz von Fortsetzungen dann, wenn man zusätzliche Forderungen an f und F stellt wie z.B. Stetigkeit.

Wir arbeiten normalerweise immer über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Für den Beweis des Satzes von Hahn-Banach ist es praktisch, Vektorräume über $\mathbb{C}$ auch als Vektorräume über $\mathbb{R}$ zu betrachten.

Ist nämlich X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so ist trivialerweise X auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, nämlich mit den gleichen Operationen, wobei die skalare Multiplikation auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt wird. Ein lineares Funktional auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum X erfüllt (per definitionem) die Relationen

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{C}\,. \tag{5.2.1}$$

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ und erfüllt f die Relationen (5.2.1), wobei anstatt „für alle $\alpha \in \mathbb{C}$“ nur mehr „für alle $\alpha \in \mathbb{R}$“ gefordert wird, so nennt man f ein $\mathbb{R}$-*lineares Funktional* auf X.

5.2.1 Lemma. *Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum X gilt:*

(i) *Ist f ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf X, so ist $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, und es gilt*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \textit{für alle} \quad x \in X\,. \tag{5.2.2}$$

(ii) *Ist u ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf X, und definiert man $f : X \to \mathbb{C}$ durch die Formel* (5.2.2)*, so ist f ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional und es gilt $u = \operatorname{Re} f$.*

(iii) *Ist X normierter Raum und stehen f und u in der Beziehung* (5.2.2)*, so gilt*

$$\|f\| = \|u\| := \sup\{|u(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}\,.$$

Beweis.
`ad`(i): Ist $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

$$u(x+y) = \operatorname{Re} f(x+y) = \operatorname{Re}(f(x) + f(y)) = \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Re} f(y) = u(x) + u(y)\,,$$

$$u(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = \operatorname{Re}(\alpha f(x)) = \alpha \cdot \operatorname{Re} f(x) = \alpha u(x)\,.$$

Für jede komplexe Zahl w gilt $w = \operatorname{Re} w - i \operatorname{Re}(iw)$, also ist

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re}(if(x)) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = u(x) - iu(ix)\,.$$

`ad`(ii): Da u $\mathbb{R}$-linear ist, ist auch die durch (5.2.2) definierte Funktion f $\mathbb{R}$-linear. Weiters gilt

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x)\,,$$

woraus $f((\xi + i\eta)x) = (\xi + i\eta)f(x)$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ folgt.

`ad`(iii): Für jede komplexe Zahl gilt $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$, womit stets $|u(x)| \leq |f(x)|$ und infolge $\|u\| \leq \|f\|$. Umgekehrt, sei $x \in X$ und wähle $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$, sodass $\alpha f(x) = |f(x)|$. Aus

$$|f(x)| = f(\alpha x) = \operatorname{Re} f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \cdot \|\alpha x\| = \|u\| \cdot \|x\|\,,$$

folgt schließlich $\|f\| \leq \|u\|$.

❑

Der erste Satz vom Hahn-Banach-Typ ist eine Aussage über die beschränkte Fortsetzbarkeit von linearen Funktionalen in Vektorräumen über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$. Er ist rein algebraisch und bildet die Grundlage der folgenden Sätze.

5.2.2 Satz (Hahn-Banach, reell)**.** *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, M ein linearer Unterraum von X, und $f : M \to \mathbb{R}$ linear. Weiters sei $p : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X, \lambda \geq 0\,, \tag{5.2.3}$$

und gelte $f(x) \leq p(x)$, $x \in M$. Dann existiert ein lineares $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F|_M = f$ und

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X\,. \tag{5.2.4}$$

Beweis.

Schritt 1: Betrachte die Menge $\mathcal{M}$ aller linearen Fortsetzungen g von f auf einem linearen Unterraum $M_g \supseteq M$ von X, die $g(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M_g$ erfüllen, also alle linearen g mit

$$g : M_g \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ X \supseteq M_g \supseteq M, g|_M = f \ \text{ und } \ g(x) \leq p(x) \ \text{ für alle } \ x \in M_g\,.$$

Betrachten wir (den Graph von) g als Relation zwischen X und $\mathbb{R}$, also als Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$, so ist diese Relation sogar ein linearer Unterraum. Zudem ist $\mathcal{M}$ ($\subseteq \mathcal{P}(X \times \mathbb{R})$) mit der Halbordnung $\subseteq$ versehen.

Offenbar bedeutet $g_1 \subseteq g_2$ nicht anderes, als dass g_2 eine Fortsetzung von g_1 ist. Wir werden das Lemma von Zorn auf $\mathcal{M}$ anwenden. Dazu überprüfen wir die nötigen Voraussetzungen. Zunächst ist die Menge $\mathcal{M}$ nichtleer, denn $f \in \mathcal{M}$. Sei nun $\mathcal{N}$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ und setze

$$h := \bigcup_{g \in \mathcal{N}} g \ (\subseteq X \times \mathbb{R})\,.$$

Als Vereinigung einer total geordneten Menge von linearen Unterräumen ist auch h ein linearer Unterraum von $X \times \mathbb{R}$.

Nun enthält h kein Paar der Form $(0, \alpha)$ mit $\alpha \neq 0$, da ein solches Paar auch in einem $g \in \mathcal{N}$ enthalten wäre, was aber $g(0) = \alpha$ bedeuten würde. Wegen der Linearität kann es daher nicht sein, dass $(x, \alpha), (x, \beta) \in h$ mit $\alpha \neq \beta$. Das bedeutet, dass h der Graph einer linearen Abbildung

$$h : M_h \to \mathbb{R}$$

ist. Für $(x, \alpha) \in h$ und ein geeignetes $g \in \mathcal{N}$ mit $(x, \alpha) \in g$ gilt auch $h(x) = \alpha = g(x) \leq p(x)$. Damit liegt h in $\mathcal{M}$, und h ist offenbar eine obere Schranke von $\mathcal{N}$.

Schritt 2: Nach dem Lemma von Zorn existieren in $\mathcal{M}$ maximale Elemente. Sei F ein solches. Angenommen es wäre $M_F \neq X$. Dann wähle $x_1 \in X \setminus M_F$ und setze

$$M_1 := \operatorname{span}\{M_F, x_1\} = \big\{x + \lambda x_1 : x \in M_F, \lambda \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

Wegen

$$F(x) + F(y) = F(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(y + x_1)$$

erhalten wir

$$F(x) - p(x - x_1) \le p(y + x_1) - F(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in M_F \,.$$

Setzt man $\alpha := \sup\{F(x) - p(x - x_1) : x \in M_F\}$, so folgt daraus

$$F(y) + \alpha \le p(y + x_1) \quad \text{für alle} \quad y \in M_F \,. \tag{5.2.5}$$

Wegen der Definition von α gilt auch

$$F(x) - \alpha \le p(x - x_1) \quad \text{für alle} \quad x \in M_F \,. \tag{5.2.6}$$

Definiere ein lineares Funktional h auf M_1 $(=: M_h)$ durch

$$h(x + \lambda x_1) := F(x) + \lambda\alpha \quad \text{für} \quad x \in M_F, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Offenbar ist $h|_{M_F} = F$. Wir zeigen, dass $h(x + \lambda x_1) \le p(x + \lambda x_1)$, $x \in M_F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $\lambda = 0$ ist dies richtig, da $F \le p$.

Für $\lambda > 0$ ersetzen wir in (5.2.5) y durch $\frac{x}{\lambda}$ und multipliziere mit λ. Es folgt $h(x + \lambda x_1) \le p(x + \lambda x_1)$.

Für $\lambda < 0$ verwende (5.2.6) anstelle von (5.2.5), ersetze dort x durch $\frac{x}{-\lambda}$, und multipliziere mit $-\lambda$, um abermals $h(x + \lambda x_1) \le p(x + \lambda x_1)$ zu erhalten.

Es folgt im Widerspruch zur Maximalität von F, dass $h \in \mathcal{M}$ mit $F \subsetneq h$. Also muss $M_F = X$ gelten, und wir haben mit F eine Fortsetzung von f auf ganz X gefunden, die der Beziehung $F \le p$ genügt.

Schritt 3: Es bleibt die linke Ungleichung in (5.2.4) zu zeigen. Diese folgt aber einfach, denn aus $F \le p$ und der Linearität von F erhält man

$$-p(-x) \le -F(-x) = F(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \,.$$

❑

Mit Hilfe von Lemma 5.2.1 können wir dieses Ergebnis leicht auf den Fall eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes übertragen.

5.2.3 Satz (Hahn-Banach, komplex)**.** *Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, M ein linearer Unterraum von X, und $f : M \to \mathbb{C}$ linear. Weiters sei $p : X \to [0, \infty)$ eine Seminorm auf X, und gelte $|f(x)| \le p(x)$, $x \in M$. Dann existiert ein lineares $F : X \to \mathbb{C}$ mit $F|_M = f$ und*

$$|F(x)| \le p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \,.$$

Beweis. Für das $\mathbb{R}$-lineare Funktional $u(x) := \operatorname{Re} f(x), x \in M$ gilt

$$u(x) \le |f(x)| \le p(x) \,.$$

Als Seminorm erfüllt p insbesondere die Voraussetzungen (5.2.3). Nach Satz 5.2.2 hat u eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $U : X \to \mathbb{R}$, mit $-p(-x) \le U(x) \le p(x)$, $x \in X$. Gemäß Lemma 5.2.1 ist dann $F(x) := U(x) - iU(ix)$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional mit $U = \operatorname{Re} F$. Wieder wegen Lemma 5.2.1 haben wir

$$F(x) = U(x) - iU(ix) = u(x) - iu(ix) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in M \,,$$

also $F|_M = f$. Schließlich sei für $x \in X$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, so gewählt, dass $\lambda F(x) = |F(x)|$. Dann folgt

$$|F(x)| = F(\lambda x) = U(\lambda x) \leq p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x)\,.$$

❑

In einem normierten Raum lassen sich auch Norm-Eigenschaften mittels stetiger linearer Funktionale ausdrücken.

5.2.4 Korollar. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, $X \neq \{0\}$. Dann gilt:*

(*i*) *Ist $x_0 \in X$, so existiert $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) = \|x_0\|$. Insbesondere gilt*

$$\|x_0\| = \sup\left\{|f(x_0)| : f \in X', \|f\| = 1\right\}. \tag{5.2.7}$$

In der Tat ist dieses Supremum ein Maximum.

(*ii*) *Ist M ein linearer Unterraum von X versehen mit der Norm $\|.\|$, und ist $f : M \to \mathbb{C}$ ein bezüglich $\|.\||_M$ stetiges lineares Funktional auf M, so existiert $F \in X'$ mit $F|_M = f$ und $\|F\|_{X'} = \|f\|_{M'}$.*

Beweis.
`ad`(*i*): Wegen der Definition der Abbildungsnorm gilt immer $\geq$ in (5.2.7).

Für $x_0 \neq 0$ setze $p(x) := \|x\|$, $M := \operatorname{span}\{x_0\}$, und definiere $f : M \to \mathbb{C}$ als $f(\alpha x_0) := \alpha \cdot \|x_0\|$. Nach Satz 5.2.3 existiert $F \in X'$ mit $F|_M = f$ und $|F(x)| \leq \|x\|$, $x \in X$, also $\|F\| \leq 1$. Wegen $F(x_0) = \|x_0\|$ gilt sogar $\|F\| = 1$ und daher Gleichheit in (5.2.7).

Für $x_0 = 0$ folgt aus dem gerade erledigten Fall angewandt auf irgendein Element von $X \neq \{0\}$ ungleich Null die Existenz eines $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$, womit beide Seiten von (5.2.7) Null ergeben.

`ad`(*ii*): Setze $p(x) := \|f\|_{M'} \cdot \|x\|$ und wende Satz 5.2.3 an. Das erhaltene $F \in X'$ erfüllt $F|_M = f$, und $|F(x)| \leq \|f\|_{M'} \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, womit $\|F\|_{X'} \leq \|f\|_{M'}$. Die umgekehrte Ungleichung $\|F\|_{X'} \geq \|f\|_{M'}$ ist offensichtlich.

❑

Von großer Bedeutung ist die folgende geometrische Variante, manchmal auch *Trennungssatz von Hahn-Banach* genannt.

5.2.5 Satz (Hahn-Banach, geometrisch)**.** *Sei X ein topologischer Vektorraum, und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt, nichtleer und konvex. Dann gilt:*

(*i*) *Ist A offen, so existieren $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \textit{für alle} \quad x \in A, y \in B\,.$$

(*ii*) *Sei zusätzlich X lokalkonvex. Ist A kompakt und B abgeschlossen, so existieren $f \in X'$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \textit{für alle} \quad x \in A, y \in B\,.$$

Beweis.

`ad`(i): Seien $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ festgehalten und setze $x_0 := b_0 - a_0$ sowie

$$C := A - B + x_0 = \big\{ x - y + x_0 : x \in A, y \in B \big\} .$$

Dann ist C offen und konvex, und $0 \in C$, womit C absorbierend ist. Ist μ_C das Minkowski–Funktional von C, so erfüllt μ_C nach Lemma 5.1.9, (ii) und (iii), die Voraussetzungen (5.2.3). Wegen $A \cap B = \emptyset$ gilt $x_0 \notin C$, und nach Lemma 5.1.9, (v), daher $\mu_C(x_0) \geq 1$.

Sei $M := \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$, und definiere ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional g auf M durch $g(tx_0) := t$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0) \quad \text{für} \quad t \geq 0 ,$$

$$g(tx_0) = t < 0 \leq \mu_C(tx_0) \quad \text{für} \quad t < 0 ,$$

womit $g(x) \leq \mu_C(x)$ für alle $x \in M$. Nach Satz 5.2.2 existiert ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional $u : X \to \mathbb{R}$ mit $u|_M = g$ und $-\mu_C(-x) \leq u(x) \leq \mu_C(x)$, $x \in X$.

Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$u(a) - u(b) + 1 = u(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1 ,$$

denn $a - b + x_0 \in C$ und C ist konvex und offen, vgl. Lemma 5.1.9, (vi). Es folgt $u(a) < u(b)$ und damit $\sup u(A) \leq \inf u(B)$. Weil $u(A)$ nach Bemerkung 2.1.15 offen ist, gilt für $\gamma := \sup u(A)$

$$u(a) < \gamma \leq u(b) \quad \text{für alle} \quad a \in A, b \in B .$$

Sei nun f das $\mathbb{C}$-lineare Funktional $f(x) := u(x) - iu(ix)$. Wie wir gerade gezeigt haben, hat f die gewünschte Trennungseigenschaft. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Dazu betrachten wir die offene Nullumgebung

$$W := C \cap (-C) \cap (iC) \cap (-iC) .$$

Für $x \in W$ gilt

$$-1 \leq -\mu_C(-x) \leq u(x) \leq \mu_C(x) \leq 1,$$

$$-1 \leq -\mu_C(-ix) \leq u(ix) \leq \mu_C(ix) \leq 1 ,$$

und damit $|f(x)| \leq 2$. Nach Proposition 2.1.14 ist f stetig.

`ad`(ii): Wähle eine offene Nullumgebung V mit der Eigenschaft, dass $(A+V) \cap B = \emptyset$, vgl. Proposition 2.1.9. Da X lokalkonvex ist, können wir V sogar konvex wählen, vgl. Lemma 2.1.8. Damit ist $A + V$ offen und konvex, und wir können die bereits bewiesene Aussage (i) anwenden. Dies gibt uns $f \in X'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(y) \quad \text{für alle} \quad x \in A + V, y \in B .$$

Nun ist $\operatorname{Re} f(A)$ kompakt und daher existiert $x_0 \in A$ sodass $\operatorname{Re} f(x_0) = \max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x)$. Es folgt $\max_{x \in A} \operatorname{Re} f(x) < \gamma$, und daher finden wir γ_1, γ_2 wie verlangt.

❑

Wendet man Satz 5.2.5, (ii), auf eine einpunktige Menge $A = \{x\}$ und eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge B mit $x \notin B$ an und geht dann von f zu $-f$ über, so erkennt man, dass ein Punkt x genau dann NICHT in B liegt, wenn $\operatorname{Re} f(B) \leq \gamma < \operatorname{Re} f(x)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein $f \in X'$. Indem wir bei dieser Äquivalenz zu den negierten Aussagen übergehen, erkennt man

$$B = \bigcap_{\substack{f \in X', \gamma \in \mathbb{R} \\ B \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] ,$$

wobei $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ kurz für den reellen Halbraum $\{y \in X : \operatorname{Re} f(y) \leq \gamma\}$ steht.

Ist nun $C \subseteq X$ nur konvex, so gilt für $B := \overline{C}$ wegen der Abgeschlossenheit von $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ sicher $B \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] \Leftrightarrow C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$. Somit haben wir den ersten Teil des folgenden Resultates gezeigt.

5.2.6 Korollar. *In einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ stimmt der Abschluss einer konvexen Teilmenge $C \subseteq X$ mit dem Schnitt aller C enthaltenden reellen Halbräume $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = \{y \in X : \operatorname{Re} f(y) \leq \gamma\}$, wobei $f \in X', \gamma \in \mathbb{R}$ laufen, überein, also*

$$\overline{C} = \bigcap_{\substack{f \in X', \gamma \in \mathbb{R}, \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] . \tag{5.2.8}$$

Ist C konvexe Teilmenge mit $0 \in C$, so gilt

$$\overline{C} = \bigcap_{\substack{f \in X' \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 1]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 1] . \tag{5.2.9}$$

Ist M ein linearer Unterraum, so ist der Abschluss von M der Schnitt aller M enthaltenden Hyperebenen $f^{-1}\{0\}$, wobei $f \in X'$ läuft, also

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{f \in X', \\ M \subseteq \ker f}} \ker f . \tag{5.2.10}$$

Beweis. Ist C konvex mit $0 \in C$, so kann $C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ nur gelten, wenn $\gamma \geq 0$. Also kann man sich in (5.2.8) auf $\gamma \in [0, +\infty)$ beschränken. Wegen $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, 0] = \bigcap_{\gamma > 0} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, stimmt $\overline{C}$ sogar mit dem Schnitt über alle $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$ mit $f \in X', \gamma > 0$, sodass $C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, überein. Weil für $\gamma > 0$ schließlich $(\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = (\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma} f)^{-1}(-\infty, 1]$ gilt, folgt (5.2.9).

Ist $M \subseteq X$ ein Unterraum, so gilt sicher (5.2.8) für $M = C$, wobei $M \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma]$, also $f(M) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \gamma\}$, zu $\gamma \geq 0$ und $f(M) = \{0\}$ äquivalent ist, da $\mathbb{C}$ nur $\mathbb{C}$ als linearen Unterraum $\neq \{0\}$ hat.

❑

Als Folge von Satz 5.2.5 bzw. Korollar 5.2.6 gibt es in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen stets genügend viele stetige Funktionale, um mengentheoretische und auch topologische Eigenschaften zu beschreiben.

5.2.7 Korollar. *Für einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ gilt:*

(i) X' operiert punktetrennend auf X; zu verschiedenen $x_1, x_2 \in X$ gibt es also ein $f \in X'$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(*ii*) *Es ist* $\dim X < \infty$ *genau dann, wenn* $\dim X' < \infty$. *In diesem Fall stimmen die Dimensionen von* X *und* X' *überein.*

(*iii*) *Sei* $M \subseteq X$ *ein linearer, nicht notwendigerweise abgeschlossener, Unterraum von* X *und* f *ein bezüglich der Spurtopologie* $\mathcal{T}|_M$ *stetiges lineares Funktional auf* M. *Dann existiert* $F \in X'$ *mit* $F|_M = f$.

Beweis.
`ad`(i): Setzt man in Satz 5.2.5, (ii), $A = \{x_1\}$ und $B = \{x_2\}$, so erfüllt das erhaltene f sicher $f(x_1) \neq f(x_2)$.

`ad`(ii): Sei X unendlichdimensional und wähle eine aufsteigende Folge von Unterräumen Y_n von X mit $\dim Y_n = n$ und Vektoren $y_n \in Y_n \setminus Y_{n-1}$. Nach Satz 2.2.1 ist Y_n abgeschlossen, und daher gibt es gemäß (5.2.10) $f_n \in X'$, sodass $f_n(Y_{n-1}) = \{0\}$, $f_n(y_n) \neq 0$. Die f_n können nicht linear abhängig sein. Also ist $\dim X' = \infty$. Die Umkehrung folgt aus Korollar 2.2.3.

`ad`(iii): Ist $f = 0$, so wähle $F = 0$. Für $f \neq 0$ sei $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = 1$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\ker f = \overline{\ker f}^{\mathcal{T}|_M} = \overline{\ker f} \cap M$, also $x_0 \notin \overline{\ker f}$.

Wegen (5.2.10) existiert $F \in X'$ mit $F(x_0) \neq 0$, $F(\ker f) = \{0\}$. Indem wir durch $F(x_0)$ dividieren, können wir sogar $F(x_0) = 1$ annehmen. Für $x \in M$ gilt wegen $f(x_0) = 1$ stets $x - f(x)x_0 \in \ker f$, womit wegen $F(x_0) = 1$

$$F(x) - f(x) = F(x) - f(x)F(x_0) = F(x - f(x)x_0) = 0\,,$$

also $F|_M = f$. ❑

Die folgende Anwendung des Satzes von Hahn-Banach ist oft nützlich.

5.2.8 Proposition. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und* M *ein endlichdimensionaler Unterraum von* X. *Dann existiert ein abgeschlossener Unterraum* N *von* X *mit* $X = M \dot{+} N$. *Die zu dieser Zerlegung gehörige Projektion* $P : X \to X$ *mit* $\operatorname{ran} P = M$ *und* $\ker P = N$ *ist stetig.*

Beweis. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von M. Jedes $x \in M$ schreibt sich in eindeutiger Weise als

$$x = \alpha_1(x)e_1 + \ldots + \alpha_n(x)e_n\,.$$

Die Funktionen $\alpha_i : M \to \mathbb{C}$ sind stetige lineare Funktionale auf M, denn $(M, \mathcal{T}|_M)$ ist nach Satz 2.2.1 isomorph zu $\mathbb{C}^n$ versehen mit der euklidischen Topologie. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\beta_i \in X'$ mit $\beta_i|_M = \alpha_i$. Setzen wir für $x \in X$

$$Px := \beta_1(x)e_1 + \ldots + \beta_n(x)e_n\,,$$

so ist $P : X \to X$ eine stetige, lineare Abbildung mit $\operatorname{ran} P = M$ und $P^2 = P$. Insbesondere ist P eine Projektion, womit

$$X = \underbrace{\operatorname{ran} P}_{=M} \dot{+} \underbrace{\ker P}_{=:N}\,.$$

Wegen der Stetigkeit von P ist $N = \ker P = \bigcap_{i=1}^n \ker \beta_i$ abgeschlossen. ❑

5.3 Die schwache Topologie $\sigma(X,Y)$

Sei X ein Vektorraum. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, sodass $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist, so ist $(X,\mathcal{T})'$ ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^*. Umgekehrt kann man sich fragen, ob es zu einem punktetrennenden linearen Unterraum $Y \subseteq X^*$ eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum mit $(X,\mathcal{T})' = Y$ ist ?

5.3.1 Definition. Sei X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^*. Die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen $f : X \to \mathbb{C}$, $f \in Y$, heißt die von Y auf X erzeugte *schwache Topologie* und wird mit $\sigma(X,Y)$ bezeichnet.

Da $(\mathbb{C}, |.|)$ ein normierter Raum ist, folgt unmittelbar aus Bemerkung 5.0.3, (ii), und Beispiel 5.0.2, dass $(X,\sigma(X,Y))$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum ist. Weil $\{U_\epsilon^{\mathbb{C}}(0) : \epsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis von $(\mathbb{C}, |.|)$ ist, folgt aus Bemerkung 5.0.3, (ii), auch, dass alle Mengen der Bauart

$$\{x \in X : |f_j(x)| < \epsilon_j,\ j = 1,\dots,m\} \tag{5.3.1}$$

für $m \in \mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_m \in Y$ und $\epsilon_1,\dots,\epsilon_m > 0$ eine Nullumgebungsbasis von $(X,\sigma(X,Y))$ abgeben.

5.3.2 Bemerkung. Für einen punktetrennenden Unterrraum $Y \subseteq X^*$ sind wir bei der Bildung der schwachen Topologie $\sigma(X,Y)$ in einem Spezialfall von Bemerkung 5.1.6, wenn wir $I = Y$, $X_i = \mathbb{C}$, $\|.\|_i = |.|$ und $R_i = f$ für $i = f \in Y$ setzen. Insbesondere gilt $\sigma(X,Y) = \mathcal{T}_M$, wobei $M := \{|f(.)| : f \in Y\}$ und $\mathcal{T}_M$ gemäß Satz 5.1.4 konstruiert ist. //

5.3.3 Satz. *Sei X ein Vektorraum und sei Y ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes X^*. Dann gilt $(X,\sigma(X,Y))' = Y$.*

Im Beweis dieses Satzes verwenden wir die folgende Aussage.

5.3.4 Lemma. *Sei X ein Vektorraum, und seien $f, f_1,\dots,f_n \in X^*$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f \in \operatorname{span}\{f_1,\dots,f_n\}$.

(ii) *Es existiert $\gamma < \infty$, sodass $|f(x)| \leq \gamma \max_{k=1,\dots,n} |f_k(x)|, x \in X$.*

(iii) $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f$.

Beweis. Offenbar gilt $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Sei vorausgesetzt, dass $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f$. Betrachte die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} X & \to & \mathbb{C}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x),\dots,f_n(x))^T \end{cases},$$

für die offenbar $\ker\phi = \bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f$ gilt. Auf dem Unterraum $\phi(X)$ von $\mathbb{C}^n$ ist durch $G(\phi(x)) = f(x)$ eine lineare Abbildung G wohldefiniert, da für $\phi(y) = \phi(x)$ wegen $x - y \in \ker\phi \subseteq \ker f$ auch $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$. Setzen wir G auf $\mathbb{C}^n$ linear fort, so erhalten wir eine lineare Abbildung $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit $G \circ \phi = f$, also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^n \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$G \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \,.$$

Dann gilt für jedes $x \in X$

$$f(x) = G(\phi(x)) = G(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)\,,$$

womit $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

❑

Beweis (von Satz 5.3.3). Aus der Definition von $\sigma(X, Y)$ ist klar, dass jedes $f \in Y$ stetig bezüglich $\sigma(X, Y)$ ist. Umgekehrt sei $f \in (X, \sigma(X, Y))'$ gegeben. Gemäß Proposition 2.1.14 existiert eine Nullumgebung W von $(X, \sigma(X, Y))$, sodass $|f(x)| \leq c,\ x \in W$ für ein $c > 0$. Um $f \in Y$ zu zeigen, können wir f durch $\frac{1}{c} f$ ersetzen, und damit $c = 1$ annehmen. Da die Mengen der Bauart (5.3.1) eine Nullumgebungsbasis abgeben, existieren $f_1, \dots, f_n \in Y$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$, sodass f auf der Menge

$$U := \{x \in X : |f_j(x)| < \epsilon_j,\ j = 1, \dots, n\}$$

durch 1 beschränkt ist. Für jedes $\delta > \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$ liegt der Vektor $\frac{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}}{\delta} \cdot x$ in U und daher

$$\left| f\Big(\frac{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}}{\delta} \cdot x \Big) \right| \leq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Da $\delta > \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$ beliebig war, folgt

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}} \cdot \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\} \ \text{ für alle } \ x \in X\,.$$

Nach Lemma 5.3.4 ist $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq Y$.

❑

5.3.5 Korollar. *Sei X ein Vektorraum und Y_1, Y_2 punktetrennende lineare Unterräume des algebraischen Dualraumes X^*. Dann gilt $\sigma(X, Y_1) \subseteq \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 \subseteq Y_2$. Insbesondere gilt $\sigma(X, Y_1) = \sigma(X, Y_2)$ genau dann, wenn $Y_1 = Y_2$.* ❑

5.3.6 Bemerkung. Offenbar ist $\sigma(X,Y)$ die gröbste Topologie auf X, sodass X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird, dessen Dualraum gleich Y ist. Außer im Fall $\dim X < \infty$ (vgl. Korollar 2.2.2) wird sie im Allgemeinen aber nicht die einzige solche sein, vgl. Bemerkung 5.5.1. //

5.3.7 Beispiel. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann ist $X' := (X, \mathcal{T})'$ wegen Korollar 5.2.7, (i), ein punktetrennender Unterraum von X^*. Wir können also die schwache Topologie $\sigma(X, X')$, für die wegen Satz 5.3.3 die Beziehung $(X, \sigma(X, X'))' = X'$ gilt, betrachten. Gemäß Bemerkung 5.3.6 gilt $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}$, wobei außer im Fall $\dim X < \infty$ im Allgemeinen keine Gleichheit vorherrscht, vgl. Bemerkung 5.5.1.

Man bezeichnet die Topologie $\sigma(X, X')$ auch als *die schwache Topologie* oder *w-Topologie* von $(X, \mathcal{T})$. //

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ echt gröber als $\mathcal{T}$, so heißt das, dass es Mengen $A \subseteq X$ gibt mit $\overline{A}^{\mathcal{T}} \subsetneq \overline{A}^{\sigma(X,X')}$. Es ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, dass dies bei konvexen Mengen niemals passieren kann.

5.3.8 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Ist $A \subseteq X$ konvex, so gilt $\overline{A}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\sigma(X,X')}$.*

Beweis. Wegen $(X, \mathcal{T})' = (X, \sigma(X, X'))'$ folgt aus (5.2.8)

$$\overline{A}^{\mathcal{T}} = \bigcap_{\substack{f \in (X,\mathcal{T})', \gamma \in \mathbb{R}, \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty,\gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = \bigcap_{\substack{f \in (X,\sigma(X,X'))', \gamma \in \mathbb{R}, \\ C \subseteq (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty,\gamma]}} (\operatorname{Re} f)^{-1}(-\infty, \gamma] = \overline{A}^{\sigma(X,X')}.$$

❑

5.3.9 Proposition. *Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $R : X \to Y$ ist genau dann beschränkt, wenn $R : (X, \mathcal{T}(\|.\|_X)) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ stetig ist.*

Beweis. Die Stetigkeit von $R : (X, \mathcal{T}(\|.\|_X)) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ ist nach Satz 1.2.1 äquivalent zur Stetigkeit von $f \circ R$ für alle $f \in Y'$. Nach dem Korollar 4.4.4 des Satzes vom abgeschlossenen Graphen impliziert das die Beschränktheit von R. Die Umkehrung gilt, da die Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist.

❑

Wir wollen noch ein Beispiel von schwachen Topologien angeben.

5.3.10 Beispiel. Seien $(X_1, \|.\|_1)$ und $(X_2, \|.\|_2)$ normierte Räume, und betrachte den linearen Raum $X := L_b(X_1, X_2)$. Dann ist die lineare Hülle von

$$\{T \mapsto \varphi(T(x)) : x \in X_1, \varphi \in X_2'\}$$

ein punktetrennender linearer Unterraum des algebraischen Dualraumes von X. Die so erhaltene schwache Topologie auf $L_b(X_1, X_2)$ heißt die *schwache Operatortopologie* und wird auch mit $\mathcal{T}_w$ bezeichnet. Für ein Netz $(T_i)_{i \in I}$ von Operatoren $T_i \in L_b(X_1, X_2)$ gilt

$$T_i \xrightarrow{\mathcal{T}_w} T \iff \forall\, x \in X_1, \varphi \in X_2' \Rightarrow \varphi(T_i x) \xrightarrow{\mathbb{C}} \varphi(Tx)$$

In diesem Fall schreibt man auch $T_i \stackrel{w}{\to} T$. Offenbar ist $\mathcal{T}_w$ gröber als die starke Operatortopologie $\mathcal{T}_s$, vgl. Beispiel 5.1.11. Bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{\|.\|}$ die von der Operatornorm induzierte Topologie, so haben wir also

$$\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_s \subseteq \mathcal{T}_{\|.\|} .$$

Außer für $\dim X < \infty$ – $\dim X < \infty$ gilt genau dann, wenn $\dim X_1 < \infty$ und $\dim X_2 < \infty$ – gilt im Allgemeinem in keiner dieser Inklusionen das Gleichheitszeichen. //

5.4 Duale Paare, Annihilatoren, Bipolarsatz

Wir haben bei der Diskussion von Hilberträumen gesehen, dass die Orthogonalität eine wichtige Begriffsbildung ist. Wir wollen nun darangehen, soviel wie möglich davon in einem allgemeineren Kontext zu entwickeln.

5.4.1 Bemerkung. Sei X ein Vektorraum und Y ein linearer Unterraum von X^*, und betrachte die lineare Abbildung $\iota : X \to Y^*$ definiert durch $\iota(x)(y) = y(x)$. Weil $\iota(x) = 0$ zu $y(x) = 0$ für alle $y \in Y$ äquivalent ist, ist ι genau dann injektiv, wenn Y punktetrennender Teilraum von X^* ist. Der Unterraum $\iota(X)$ von Y^* ist auf jeden Fall punktetrennend, da aus $\iota(x)(y) = y(x) = 0$ für alle $x \in X$ sicherlich $y = 0$ folgt.

Also können wir auf Y die Topologie $\sigma(Y, \iota(X))$ betrachten, wofür wir auch $\sigma(Y, X)$ schreiben wollen. Somit ist auch $(Y, \sigma(Y, X))$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Wegen Satz 5.3.3 gilt dabei $(Y, \sigma(Y, X))' = \iota(X)$.

Ist X schon mit einer Topologie $\mathcal{T}$ derart versehen, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist, so ist $X' := (X, \mathcal{T})'$ ein Unterraum von X^*. Die Topologie $\sigma(X', X)$ auf X' nennen wir die *schwach-* Topologie* (*w^*-Topologie*) auf X'. //

Ist X ein Vektorraum und Y ein punktetrennender Teilraum von X^*, so wollen wir im Folgenden immer von einem *dualen Paar* (X, Y) sprechen. Da sich X vermöge ι mit dem Raum $\iota(X) \subseteq Y^*$ identifizieren lässt, sind X und Y quasi gleichberechtigt. Das drückt man auch dadurch aus, dass man für $x \in X$ und $y \in Y$

$$\langle x, y\rangle := y(x)$$

setzt. Offenbar ist die Abbildung $\langle ., .\rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ bilinear. Da Y punktetrennend ist, gilt für ein $x \in X$, dass

$$(\forall y \in Y \, : \langle x, y\rangle = 0) \Rightarrow \; x = 0 .$$

Da $\iota(X)$ ein punktetrennender linearer Unterraum von Y^*, gilt für ein $y \in Y$, dass

$$(\forall x \in X \, : \langle x, y\rangle = 0) \Rightarrow \; y = 0 .$$

Insbesondere ist die Bilinearform $\langle ., .\rangle$ nicht-ausgeartet.

5.4.2 Bemerkung. Man kann auch mit zwei Vektorräumen X und Y sowie einer bilinearen Abbildung $\langle ., .\rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ starten, die nicht-ausgeartet ist, also aus $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in X$ folgt $y = 0$ und aus $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in Y$

folgt $x = 0$. Hier setzen wir zunächst nicht voraus, dass Y ein punktetrennender linearer Unterraum von X^* ist.

Betrachten wir nun für ein $y \in Y$ das lineare Funktional $x \mapsto \langle x, y\rangle$ auf X, so wird dieses Funktional wegen der nicht Ausgeartetheit eindeutig durch y bestimmt. Also ist die Abbildung $y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$ eine injektive und offenbar lineare Abbildung von Y nach X^*. Somit können wir nun doch wieder Y als linearen Unterraum von X^* betrachten, der wegen der nicht Ausgeartetheit auch wieder punktetrennend ist. Genauso können wir X als punktetrennenden linearen Unterraum von Y^* ansehen.

Die schwachen Topologien $\sigma(X, Y)$ auf X bzw. $\sigma(Y, X)$ auf Y sind dann die gröbsten Topologien auf X bzw. Y, sodass alle Abbildungen $x \mapsto \langle x, y\rangle$ bzw. $y \mapsto \langle x, y\rangle$ stetig sind.

Zusammenfassend ist es nur eine Geschmackssache, ob man einen Vektorraum X und einen punktetrennenden linearen Unterraum Y von X^* oder das Paar (X, Y), versehen mit einer bilinearen, nicht-ausgearteten Abbildung $\langle ., .\rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ betrachtet. //

5.4.3 Definition. Sei (X, Y) ein duales Paar. Für $M \subseteq X$ bzw. $N \subseteq Y$ bezeichne

$$M^\circ := \big\{y \in Y : \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq 1,\ x \in M\big\},\ {}^\circ N := \big\{x \in X : \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq 1,\ y \in N\big\},$$

$$M^\perp := \big\{y \in Y : \langle x, y\rangle = 0,\ x \in M\big\},\ {}^\perp N := \big\{x \in X : \langle x, y\rangle = 0,\ y \in N\big\}.$$

Dann heißt M° bzw. ${}^\circ N$ die zu M bzw. N *polare Menge*, und $M^\perp$ bzw. ${}^\perp N$ der *Annihilator* von M bzw. N bezüglich dem Paar (X, Y).

Man überzeugt sich leicht, dass man obige Mengen auch folgendermaßen schreiben kann.

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} \ker \iota(x),\ {}^\perp N = \bigcap_{y \in N} \ker y\,, \tag{5.4.1}$$

$$M^\circ = \bigcap_{x \in M} (\mathrm{Re}\,\iota(x))^{-1}(-\infty, 1],\ {}^\circ N = \bigcap_{y \in N} (\mathrm{Re}\,y)^{-1}(-\infty, 1]\,. \tag{5.4.2}$$

5.4.4 Lemma. *Für $M, M_1, M_2 \subseteq X$ und $N, N_1, N_2 \subseteq Y$ gilt:*

(i) *$M^\perp$ ist ein $\sigma(Y, X)$-abgeschlossener Unterraum von Y und ${}^\perp N$ ein $\sigma(X, Y)$-abgeschlossener Unterraum von X.*

(ii) *M° ist konvex, enthält die Null und ist $\sigma(Y, X)$-abgeschlossene Teilmenge von Y; ${}^\circ N$ ist konvex, enthält die Null und ist $\sigma(X, Y)$-abgeschlossene Teilmenge von X.*

(iii) *Ist M bzw. N kreisförmig, so gilt*

$$M^\circ = \big\{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq 1,\ x \in M\big\},$$

bzw.

$${}^\circ N = \big\{x \in X : |\langle x, y\rangle| \leq 1,\ y \in N\big\}.$$

Dabei sind M° und ${}^\circ N$ ebenfalls kreisförmig.

(*iv*) *Ist M bzw. N ein linearer Unterraum, so gilt $M^\circ = M^\perp$ bzw. ${}^\circ N = {}^\perp N$.*

(*v*) $(M_1 \cup M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$ *und* $(M_1 \cup M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$.
${}^\circ(N_1 \cup N_2) = {}^\circ N_1 \cap {}^\circ N_2$ *und* ${}^\perp(N_1 \cup N_2) = {}^\perp N_1 \cap {}^\perp N_2$.

(*vi*) *Aus $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X$ folgt $M_2^\circ \subseteq M_1^\circ \subseteq Y$ und $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp \subseteq Y$.*
Aus $N_1 \subseteq N_2 \subseteq Y$ folgt ${}^\circ N_2 \subseteq {}^\circ N_1 \subseteq X$ und ${}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1 \subseteq X$.

(*vii*) $(\lambda \cdot M)^\circ = \frac{1}{\lambda} \cdot M^\circ$, $(\lambda \cdot M)^\perp = M^\perp$ *und* ${}^\circ(\lambda \cdot N) = \frac{1}{\lambda} \cdot {}^\circ N$, ${}^\perp(\lambda \cdot N) = {}^\perp N$ *für alle* $\lambda \in (0, +\infty)$.

Beweis. (*i*) und (*ii*): Es gilt $\iota(x) \in (Y, \sigma(Y, X))'$ und $y \in (X, \sigma(X, Y))'$. Also ist $M^\perp$ (${}^\perp N$) wegen (5.4.1) Durchschnitt von $\sigma(Y, X)$-abgeschlossenen ($\sigma(X, Y)$-abgeschlossenen) Unterräumen, und M° (${}^\circ N$) ist der Durchschnitt von konvexen, Null enthaltenden und $\sigma(Y, X)$-abgeschlossenen ($\sigma(X, Y)$-abgeschlossenen) Teilmengen von Y (X).

(*iii*) und (*iv*): Ist M kreisförmig (ein Unterraum) und $y \in Y$, so ist $\langle M, y\rangle$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ kreisförmig (ein Unterraum), womit $\mathrm{Re}\langle M, y\rangle \leq 1$ zu $|\langle M, y\rangle| \leq 1$ ($\langle M, y\rangle = \{0\}$) äquivalent ist. In dem Fall erkennt man auch sofort die Kreisförmigkeit von M°. Entsprechend zeigt man die Aussage für ${}^\circ N$.

(*v*), (*vi*), (*vii*) weist man elementar nach.

❑

5.4.5 Beispiel. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und X' sein Dualraum. Bezüglich der Dualität (X, X') liegt wegen Lemma 5.4.4 ein f aus X' in $K_1^X(0)^\circ$ genau dann, wenn $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in K_1^X(0)$. Das ist aber zu $\|f\| \leq 1$ äquivalent. Also gilt $K_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0)$. Da $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in U_1^X(0)$ auch $\|f\| \leq 1$ bedeutet, gilt $U_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0)$.

Bezüglich der Dualität (X, X') wollen wir auch ${}^\circ K_1^{X'}(0) = K_1^X(0)$ nachweisen. Wieder wegen Lemma 5.4.4 gilt nämlich $x \in {}^\circ K_1^{X'}(0)$ genau dann, wenn $|f(x)| \leq 1$ alle $f \in K_1^{X'}(0)$. Wegen (5.2.7) bedeutet das genau $\|x\| \leq 1$. //

Wir benötigen den Begriff der konvexen Hülle.

5.4.6 Definition. Sei X ein Vektorraum, $E \subseteq X$. Die *konvexe Hülle* von E ist der Durchschnitt aller E enthaltenden konvexen Mengen. Wir bezeichnen sie mit $\mathrm{co}(E)$.

Es ist leicht einzusehen, dass $\mathrm{co}(E)$ die kleinste konvexe Obermenge von E in X ist, und dass

$$\mathrm{co}(E) = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j : k \in \mathbb{N}; x_1, \dots, x_k \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1], \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \right\}.$$

Falls E endlich und X ein topologischer Vektorraum ist, so erkennt man aus dieser Darstellung, dass $\mathrm{co}(E)$ stetiges Bild einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (n ist die Mächtigkeit von E) und somit selber kompakt ist.

5.4.7 Satz (Bipolarsatz)**.** *Sei (X, Y) ein duales Paar, und seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Dann gilt*

$${}^\circ(M^\circ) = \overline{\mathrm{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)}, \; ({}^\circ N)^\circ = \overline{\mathrm{co}(N \cup \{0\})}^{\sigma(Y,X)},$$

$${}^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{span}\, M}^{\sigma(X,Y)}, \; ({}^\perp N)^\perp = \overline{\mathrm{span}\, N}^{\sigma(Y,X)}.$$

Beweis. Für ${}^\circ(M^\circ) = \overline{\mathrm{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)}$ wollen wir Korollar 5.2.6 auf die konvexe und 0 enthaltende Menge $C := \mathrm{co}(M \cup \{0\})$ und die Topologie $\mathcal{T} = \sigma(X,Y)$ anwenden. Wegen (5.2.9) erhält man

$$\overline{C}^{\sigma(X,Y)} = \bigcap_{\substack{y \in Y \\ C \subseteq (\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1]}} (\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1] = {}^\circ\{y \in Y : C \subseteq (\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1]\}\,.$$

Da die Mengen $(\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1]$ konvex sind und die Null enthalten, gilt $\mathrm{co}(M \cup \{0\}) = C \subseteq (\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1]$ genau dann, wenn $M \subseteq (\mathrm{Re}\, y)^{-1}(-\infty,1]$, bzw. genau dann, wenn $\mathrm{Re}\langle M, y\rangle \leq 1$, also wenn $y \in M^\circ$. Somit gilt $\overline{\mathrm{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X,Y)} = {}^\circ(M^\circ)$. Entsprechend wird $({}^\circ N)^\circ = \overline{\mathrm{co}(N \cup \{0\})}^{\sigma(Y,X)}$ gezeigt.

Da $\mathrm{span}\, M$ konvex ist und die Null enthält, folgt aus dem schon gezeigten $\overline{\mathrm{span}\, M}^{\sigma(X,Y)} = {}^\circ(\mathrm{span}\, M^\circ)$. Wegen Lemma 5.4.4, (i) und (iv), gilt ${}^\circ((\mathrm{span}\, M)^\circ) = {}^\circ((\mathrm{span}\, M)^\perp) = {}^\perp((\mathrm{span}\, M)^\perp)$. Wegen der Linearität gilt aber $(\mathrm{span}\, M)^\perp = M^\perp$. Entsprechend zeigt man $\overline{\mathrm{span}\, N}^{\sigma(Y,X)} = ({}^\perp N)^\perp$.

❑

5.4.8 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und M ein linearer Unterraum von X. Dann gelten folgende Aussagen, wobei die auftretenden Annihilatoren bzgl. dem Paar (X, X') gebildet werden.*

(*i*) *Die Abbildung*

$$\sigma : \begin{cases} X'/M^\perp & \to \quad M' \\ x' + M^\perp & \mapsto \quad x'|_M \end{cases}$$

ist wohldefiniert und stellt eine lineare Bijektion dar.

(*ii*) *Für einen abgeschlossenen Unterraum M von X ist die Abbildung*

$$\tau : \begin{cases} (X/M)' & \to \quad M^\perp \\ f & \mapsto \quad f \circ \pi \end{cases}$$

eine lineare Bijektion, wobei $\pi : X \to X/M$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Wird $\mathcal{T}$ von einer Norm $\|.\|$ auf X erzeugt, so sind σ und τ isometrisch, wenn man X' mit der Abbildungsnorm und die auftretenden Faktorräume mit der entsprechenden Faktorraumnorm versieht, vgl. Proposition 2.4.9.

Beweis.
`ad`(i): Für $x' \in X'$, $m' \in M^\perp$ und $y \in M$ gilt $x'(y) = (x' + m')(y)$, womit σ wohldefiniert ist. Als Einschränkung einer linearen und stetigen Funktion ist $\sigma(x' + M^\perp)$ selber linear und stetig.

Jedes $f \in M'$ hat gemäß Korollar 5.2.7, (iv), eine Fortsetzung $x' \in X'$; also $\sigma(x' + M^\perp) = x'|_M = f$. Somit ist σ surjektiv. Wegen

$$\sigma(x' + M^\perp) = \sigma(y' + M^\perp) \Leftrightarrow (x' - y')|_M = 0 \Leftrightarrow x' - y' \in M^\perp$$

ist σ auch injektiv.

Betrachte nun die Situation, dass X normiert ist. Als Einschränkung der beschränkten Abbildung x' gilt für $\sigma(x'+M^\perp)$ sicher $\|\sigma(x'+M^\perp)\| \leq \|x'\|$ und daher

$$\|\sigma(x'+M^\perp)\| \leq \inf\{\|x'+m'\| : m' \in M^\perp\} = \|x'+M^\perp\| . \tag{5.4.3}$$

Nach Korollar 5.2.4, (ii), existiert eine Fortsetzung $y' \in X'$ von $\sigma(x'+M^\perp) = x'|_M$ mit $\|y'\| = \|x'|_M\|$. Es folgt $y' = x' + m'$ für ein bestimmtes $m' \in M^\perp$, und damit gilt sogar Gleichheit in (5.4.3).

`ad`(ii): Für $f \in (X/M)'$ gilt klarerweise $f \circ \pi \in X'$, und für $m \in M$ gilt $(f \circ \pi)m = 0$, womit tatsächlich $\tau(f) \in M^\perp$. Wegen der Surjektivität von π ist τ injektiv. Schließlich ist für $x' \in M^\perp$ durch $x + M \mapsto x'(x)$ eine lineare Abbildung $f : X/M \to \mathbb{C}$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "x'"] & \\ X/M \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

wohldefiniert. Da X/M die finale Topologie trägt, ist f stetig, vgl. Satz 1.4.1, (FI_3). Also gilt $f \in (X/M)'$ mit $\tau(f) = x'$, und wir schließen, dass τ auch surjektiv ist.

Betrachte die Situation, dass X normiert ist. Für die offene Einheitskugel von X gilt $\pi(U_1^X(0)) = U_1^{X/M}(0)$, vgl. (2.4.3). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\tau(f)\| = \|f \circ \pi\| &= \sup\left\{|f(\pi(x))| : x \in U_1^X(0)\right\} \\ &= \sup\left\{|f(y)| : y \in \pi(U_1^X(0))\right\} = \|f\| . \end{aligned}$$

❑

5.4.9 Korollar. *In der Situation von Proposition 5.4.8, (ii), ist X/M genau dann endlichdimensional, wenn $M^\perp$ es ist. In diesem Fall gilt* $\dim(X/M) = \dim M^\perp$.

Beweis. Diese Aussage erhält man unmittelbar aus Korollar 5.2.7 und Proposition 5.4.8.

❑

5.5 Topologien auf $(X, \|.\|)'$, Satz von Banach-Alaoglu

Gemäß Beispiel 5.3.7 ist ein normierter Raum $(X, \|.\|)$ neben der Normtopologie $\mathcal{T}_{\|.\|}$ auch mit der schwachen Topologie $\sigma(X, X')$ versehen, wobei $X' := (X, \|.\|)'$. Wie aus Beispiel 5.3.7 bekannt gilt dabei $(X, \sigma(X, X'))' = X'$.

5.5.1 Bemerkung. Um den Unterschied von $\mathcal{T}_{\|.\|}$ und $\sigma(X, X')$ klarer zu machen, sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Dieses Netz konvergiert bzgl. $\mathcal{T}_{\|.\|}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\lim_{i\in I} \|x_i - x\| = 0$.

Da $\sigma(X, X')$ die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $f : X \to \mathbb{C}$, $f \in X'$, ist, konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ genau dann schwach gegen $x \in X$ (also bzgl. der schwachen Topologie), wenn $\lim_{i\in I} f(x_i) = f(x)$ für alle $f \in X'$. Anstatt mit der bekannten Tatsache, dass $\sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}_{\|.\|}$ zu argumentieren, vgl. Beispiel 5.3.7, kann man, um von $\lim_{i\in I} \|x_i - x\| = 0$ auf $\lim_{i\in I} f(x_i) = f(x)$ für alle $f \in X'$ zu schließen, einfach die Abschätzung $|f(x_i - x)| \leq \|f\| \, \|x_i - x\|$ verwenden.

Eine Nullumgebung $\bigcap_{i=1}^n V(|f_i|, \epsilon_i)$ mit $f_1, \dots, f_n \in X'$ und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ bzgl. $\sigma(X, X')$ enthält den linearen Unterraum $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i$. Dieser hat Kodimension höchstens n. Ist $\dim X = \infty$, so enthält also jede $\sigma(X, X')$-Nullumgebung einen nichttrivialen linearen Unterraum von X. Eine Norm-Kugel $\{x \in X : \|x\| < r\}$ enthält sicher keinen solchen. Somit ist $\sigma(X, X')$ echt gröber als $\mathcal{T}_{\|.\|}$, obwohl $(X, \sigma(X, X'))' = X' = (X, \|.\|)'$. Im Falle $\dim X < \infty$ stimmen diese Topologien klarerweise überein, vgl. Korollar 2.2.2. //

Ehe wir die schwachen Topologien auf dem Dualraum $X' = (X, \|.\|)' = L_b(X, \mathbb{C})$ eines normierten Raumes $(X, \|.\|)$ diskutieren, bringen wir folgendes Lemma.

5.5.2 Lemma. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, und bezeichne ι die Abbildung, die einem $x \in X$ das Punktauswertungsfunktional $(f \mapsto f(x)) \in (X')^*$ zuordnet. Dann bildet ι sogar in den topologischen* Bidualraum *X'' hinein ab, wobei $X'' = (X', \|.\|_{X'})'$ der Dualraum von X' versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|_{X'}$ ist.*

Die sogenannte kanonische Einbettung *$\iota : X \to X''$ ist linear und isometrisch, wenn man X'' mit der Abbildungsnorm $\|.\|_{X''}$ versieht.*

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$|\iota(x)(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_X \cdot \|f\|_{X'} \quad \text{für alle} \quad f \in X', x \in X \,,$$

womit $\iota(x)$ beschränkt ist und daher in X'' liegt. Offenbar ist ι linear. Die Isometrieeigenschaft folgt aus (5.2.7), da für $x \in X$

$$\begin{aligned} \|\iota(x)\|_{X''} &= \sup \big\{ |\iota(x)f| : \, f \in X', \|f\|_{X'} = 1 \big\} \\ &= \sup \big\{ |f(x)| : \, f \in X', \|f\|_{X'} = 1 \big\} = \|x\|_X \,. \end{aligned}$$

❑

5.5.3 Bemerkung. Insbesondere ist $\iota : X \to \iota(X)$ eine lineare Bijektion. Da $\sigma(X, X')$ die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$, $f \in X'$, und $\sigma(X'', X')|_{\iota(X)}$ wegen Korollar 1.2.4 die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $\iota(X) \ni \iota(x) \mapsto \iota(x)(f) = f(x) \in \mathbb{C}$, $f \in X'$, ist, stellt $\iota : (X, \sigma(X, X')) \to (\iota(X), \sigma(X'', X')|_{\iota(X)})$ sogar einen Homöomorphismus dar. //

5.5.4 Definition. Ein normierter Raum $(X, \|.\|)$ heißt *reflexiv*, falls $X'' = \iota(X)$.

Der Banachraum $(X', \|.\|_{X'})$ lässt sich nun mit (zumindest) drei interessanten Topologien versehen. Die Normtopologie $\mathcal{T}_{\|.\|_{X'}}$, die schwache Topologie

$\sigma(X', X'')$ – gebildet wie in Beispiel 5.3.7 aber ausgehend von $(X', \mathcal{T}_{\|.\|_{X'}})$ anstatt von $(X, \mathcal{T}_{\|.\|})$, und die schwach-* Topologie $\sigma(X', X) := \sigma(X', \iota(X))$, welche für $Y = X'$ mit der Topologie $\sigma(Y, X)$ aus Bemerkung 5.4.1 übereinstimmt.

Aus Beispiel 5.3.7 und aus der Tatsache, dass $\iota(X) \subseteq X''$, zusammen mit Korollar 5.3.5 folgt

$$\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', X'') \subseteq \mathcal{T}_{\|.\|_{X'}} .$$

Aus Korollar 5.3.5 erkennen wir auch, dass $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$ genau dann gilt, wenn X reflexiv ist. In Bemerkung 5.5.1 haben wir gesehen, dass $\sigma(X', X'') = \mathcal{T}_{\|.\|_{X'}}$ genau dann gilt, wenn $\dim X' < \infty$. Wegen Korollar 5.2.7, (iii), ist das gleichbedeutend zu $\dim X < \infty$.

Für die entsprechenden Dualräume gilt $(X', \sigma(X', X))' = \iota(X)$ und $(X', \mathcal{T}_{\|.\|_{X'}})' = X'' = (X', \sigma(X', X''))'$, vgl. Satz 5.3.3.

Wegen $X' = L_b(X, \mathbb{C})$ haben wir auf X' auch noch die schwache und die starke Operatortopologie $\mathcal{T}_s, \mathcal{T}_w$, vgl. Beispiel 5.3.10 und Beispiel 5.1.11. Man sieht aber unschwer, dass hier $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_w = \sigma(X', X)$.

Als Folgerung des Bipolarsatzes gilt

5.5.5 Satz (von Goldstine). *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, bezeichne mit $K_1^X(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel von X und mit $K_1^{X''}(0)$ jene von X''. Weiters sei $\iota_{X\to X''}$ die kanonische Einbettung von X in X'' und $\iota_{X'\to X'''}$ jene von X' in X'''. Dann gilt*

$$\overline{\iota_{X\to X''}(K_1^X(0))}^{\sigma(X'', \iota_{X'\to X'''}(X'))} = K_1^{X''}(0) .$$

Beweis. Wegen $\iota_{X\to X''}(x)(f) = f(x)$ für $x \in X, f \in X'$ gilt

$$\begin{aligned} {}^\circ\iota_{X\to X''}(K_1^X(0)) &= \{f \in X' : \operatorname{Re} \iota_{X\to X''}(x)(f) \le 1 \ \forall x \in X, \|x\| \le 1\} \\ &= K_1^X(0)^\circ = K_1^{X'}(0) , \end{aligned}$$

wobei ${}^\circ\iota_{X\to X''}(K_1^X(0))$ die polare Menge zu $\iota_{X\to X''}(K_1^X(0))$ $(\subseteq X'')$ bzgl. der Dualität (X', X'') und $K_1^X(0)^\circ$ die polare Menge zu $K_1^X(0)$ in X' bzgl. der Dualität (X, X') ist. Aus dem Bipolarsatz, Satz 5.4.7, angewandt auf die Dualität (X', X'') folgt daher

$$\overline{\iota_{X\to X''}(K_1^X(0))}^{\sigma(X'', \iota_{X'\to X'''}(X'))} = \left({}^\circ\iota_{X\to X''}(K_1^X(0))\right)^\circ = K_1^{X'}(0)^\circ = K_1^{X''}(0) .$$

❑

Der Satz von Banach-Alaoglu – eigentlich ein Korollar des Satzes von Tychonoff – beschreibt die folgende wichtige Kompaktheitseigenschaft der schwach-* Topologie.

5.5.6 Satz (von Banach-Alaoglu). *Für einen normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist die bezüglich der Abbildungsnorm abgeschlossene Einheitskugel um die Null in X'*

$$K_1^{X'}(0) := \{f \in X' : \|f\| \le 1\}$$

kompakt bezüglich der schwach- Topologie $\sigma(X', X)$.*

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir in Erinnerung rufen, was das Produkt einer Familie von Mengen eigentlich ist. Für nichtleere Mengen I und M_i, $i \in I$, ist das Produkt der M_i, $i \in I$, mengentheoretisch definiert als

$$\prod_{i\in I} M_i := \Big\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i : \ f(i) \in M_i \Big\} ,$$

also die Menge aller Funktionen definiert auf I, deren Wert an der Stelle i in der Menge M_i liegt. Die kanonische Projektion $\pi_i : \prod_{j\in I} M_j \to M_i$ ist definiert als

$$\pi_i(f) := f(i), \ f \in \prod_{j\in I} M_j .$$

Sind speziell alle Mengen M_i gleich, $M_i = M$, $i \in I$, so ist also $\prod_{i\in I} M$ die Menge aller Funktionen von I nach M.

Beweis (von Satz 5.5.6). Betrachte $\mathbb{C}$ als topologischen Raum mit der, vom üblichen Betrag $|.|$ induzierten, euklidischen Topologie. Bezeichne mit $\mathcal{V}$ die entsprechende Produkttopologie auf $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$, also sei $\mathcal{V}$ die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen

$$\pi_y : \prod_{x\in X} \mathbb{C} \to (\mathbb{C}, |.|) \quad \text{für alle} \quad y \in X .$$

Nun haben wir $X' \subseteq \prod_{x\in X} \mathbb{C}$. Die Spurtopologie $\mathcal{V}|_{X'}$ ist die initiale Topologie bezüglich der einelementigen Familie $\{\iota_{X'}\}$ bestehend aus der Einbettungsabbildung

$$\iota_{X'} : \left\{ \begin{array}{ccc} X' & \to & \left(\prod_{x\in X} \mathbb{C}, \mathcal{V}\right) \\ f & \mapsto & f \end{array} \right.$$

Die schwach-* Topologie auf X' ist die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen

$$\iota(x) : X' \to (\mathbb{C}, |.|), \ x \in X .$$

Nun gilt

$$\iota(x)f = f(x) = \pi_x(f) = (\pi_x \circ \iota_{X'})(f) \quad \text{für alle} \quad x \in X, f \in X' ;$$

wir sind also in der Situation

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbb{C},|.|) \\
X' \arrow[r, "\iota_{X'}"] \arrow[urr, dashed, bend left, "\iota(y)"] \arrow[drr, dashed, bend right, "\iota(z)"'] & \prod_{x\in X} \mathbb{C} \arrow[ur, "\pi_y"] \arrow[dr, "\pi_z"'] & \vdots \\
 & & (\mathbb{C},|.|)
\end{tikzcd}$$

Korollar 1.2.4 gibt nun $\sigma(X', X) = \mathcal{V}|_{X'}$.

Betrachte für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $y, z \in X$ die bezüglich $\mathcal{V}$ stetige Abbildung

$$h_{\alpha,\beta,y,z} = \alpha\pi_y + \beta\pi_z - \pi_{\alpha y+\beta z} \ : \prod_{x\in X} \mathbb{C} \to \mathbb{C} .$$

Ein Element $f \in \prod_{x\in X} \mathbb{C}$ wird unter $h_{\alpha,\beta,y,z}$ genau dann auf Null abgebildet, wenn $\alpha f(y) + \beta f(z) - f(\alpha y + \beta z) = 0$ ist. Somit ist

$$\bigcap_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{C}\\ y,z\in X}} h^{-1}_{\alpha,\beta,y,z}(\{0\}) = L(X,\mathbb{C})\,, \tag{5.5.1}$$

die Menge aller linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$. Eine lineare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ gehört genau dann zur Einheitskugel $K_1^{X'}(0)$, wenn $|f(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Wegen $f(x) = \pi_x(f)$ haben wir daher

$$K_1^{X'}(0) = \bigcap_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{C}\\ y,z\in X}} h^{-1}_{\alpha,\beta,y,z}(\{0\}) \cap \prod_{x\in X} \big\{w \in \mathbb{C} :\, |w| \leq \|x\|\big\}\,.$$

Wegen der Stetigkeit der $h_{\alpha,\beta,y,z}$ ist der erste Durchschnitt abgeschlossen. Wegen dem Satz von Tychonoff ist das Produkt kompakt. Also ist $K_1^{X'}(0)$ eine kompakte Teilmenge von $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$ bezüglich der Produkttopologie $\mathcal{V}$, und daher auch eine kompakte Teilmenge von X' bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{V}|_{X'}$.

❑

5.6 Mackey Topologie

Satz 5.5.6 lässt sich mit geringem Aufwand zu folgender Version verallgemeinern.

5.6.1 Satz (von Banach-Alaoglu)**.** *Für einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathcal{T})$ und eine Nullumgebung U in X ist die polare Menge $U^\circ \subseteq X'$ kompakt bezüglich der schwach-* Topologie $\sigma(X', X)$.*

Beweis. Wir können den Beweis von Satz 5.5.6 bis inklusive (5.5.1) wörtlich übernehmen. Insbesondere fassen wir X' als Teilmenge von $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$ auf. Dabei gilt $\sigma(X', X) = \mathcal{V}|_{X'}$, wobei $\mathcal{V}$ die Produkttopologie auf $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$ bezeichnet. Die Menge $X^* = L(X,\mathbb{C})$ aller linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$ ist als Teilmenge von $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$ bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossen.

Die Menge $\{f \in \prod_{x\in X} \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in U\} = \bigcap_{x\in U} \pi_x^{-1}\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$ ist ebenfalls bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossen in $\prod_{x\in X} \mathbb{C}$. Also ist es auch $\{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in U\} = \{f \in \prod_{x\in X} \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in U\} \cap X^*$.

Ist $V \subseteq U$ eine kreisförmige Nullumgebung gemäß Lemma 2.1.8, so folgt wegen Lemma 5.4.4 und Proposition 2.1.14

$$\begin{aligned}\{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in U\} &\subseteq \{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in V\}\\ &= \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1,\ x \in V\} \subseteq X'\,,\end{aligned}$$

womit $\{f \in X^* : \operatorname{Re} f(x) \leq 1,\ x \in U\} = U^\circ$.

Bezeichnet μ_V das Minkowski-Funktional zur Menge V, so gilt $\frac{1}{2\mu_V(x)}x \in V$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$ nach Lemma 5.1.9, (v). Also folgt

$$U^\circ \subseteq \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1,\ x \in V\} \subseteq \prod_{x\in X} \big\{w \in \mathbb{C} :\, |w| \leq 2\mu_V(x)\big\}\,.$$

Damit ist U° eine bezüglich $\mathcal{V}$ abgeschlossene Teilmenge einer bezüglich $\mathcal{V}$ kompakten Menge und infolge selber kompakt bezüglich $\mathcal{V}|_{X'} = \sigma(X', X)$.

❑

5.6.2 Beispiel. Ist X ein Vektorraum und $Y \subseteq X^*$ ein punktetrennender linearer Unterraum, so lassen sich auf X weitere Topologien definieren, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum machen. Dazu sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ derart, dass für jedes $M \in \mathcal{M}$

$$p_M(x) := \sup\{|f(x)| : f \in M\} < +\infty \quad \text{für alle} \quad x \in X\,. \tag{5.6.1}$$

Man beachte, dass für $\sigma(Y, X)$-kompakte M der Ausdruck $p_M(x)$ immer endlich ist, da $\{|f(x)| : f \in M\}$ stetiges Bild einer kompakten Menge und somit kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Es ist unschwer zu überprüfen, dass jedes $p_M : X \to [0, +\infty)$ dann eine Seminorm abgibt. Für $x \in X$ gilt dabei $p_M(x) = 0$ für alle $M \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn $x \in {}^\perp(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M)$. Also ist die Familie p_M, $M \in \mathcal{M}$, separierend genau dann, wenn ${}^\perp(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M) = \{0\}$ bzw. wenn $\operatorname{span} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ dicht in Y bezüglich $\sigma(Y, X)$ ist; vgl. Satz 5.4.7.

In dem Fall erzeugt p_M, $M \in \mathcal{M}$, nach Satz 5.1.4 eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht. Dabei ist $\{x \in X : p_M(x) \leq 1\}$ für jedes $M \in \mathcal{M}$ eine Nullumgebung bzgl. $\mathcal{T}$. Wegen $|f(\{x \in X : p_M(x) \leq 1\})| \leq 1$ für alle $f \in M$ ist jedes Funktional aus $\operatorname{span} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ stetig; vgl. Proposition 2.1.14. Also gilt

$$\operatorname{span} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \subseteq (X, \mathcal{T})'\,. \tag{5.6.2}$$

Für kreisförmige M folgt aus Lemma 5.4.4, dass $\{x \in X : p_M(x) \leq 1\} = {}^\circ M$. Demnach und wegen (5.1.1) bildet

$$\Big\{{}^\circ(\frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1) \cap \cdots \cap {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n) : n \in \mathbb{N},\, M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M},\, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0\Big\} \tag{5.6.3}$$

eine Nullumgebungsbasis von $(X, \mathcal{T})$, wenn wir voraussetzen, dass alle $M \in \mathcal{M}$ kreisförmig sind. //

5.6.3 Satz (von Mackey-Arens). *Sei X ein Vektorraum und $Y \subseteq X^*$ ein punktetrennender Teilraum. Für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht, gilt $(X, \mathcal{T})' = Y$ genau dann, wenn $\mathcal{T}$ im Sinne von Satz 5.1.4 von einer Familie p_M, $M \in \mathcal{M}$, von Seminormen erzeugt wird, wobei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ aus kreisförmigen, konvexen und bezüglich $\sigma(Y, X)$ kompakten Mengen besteht mit* $\operatorname{span} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = Y$ *und p_M wie in* (5.6.1) *definiert ist.*

Im Fall, dass $\mathcal{M}$ aus allen kreisförmigen, konvexen und bezüglich $\sigma(Y, X)$ kompakten Mengen besteht, ist die von p_M, $M \in \mathcal{M}$, erzeugte Topologie – man bezeichnet diese mit $\tau(X, Y)$ und nennt sie Mackey-Topologie *– die feinste aller Topologien $\mathcal{T}$ auf X, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum machen und $(X, \mathcal{T})' = Y$ erfüllen.*

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ wie in der Aussage des Satzes. Nach (5.6.2) gilt dann $Y \subseteq (X, \mathcal{T})' =: X'$. Für $f \in X'$ gibt es nach Proposition 2.1.14

eine Nullumgebung U mit $|f(u)| \leq 1$ für alle $u \in U$. Nach (5.6.3) können wir annehmen, dass

$$U = {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1) \cap \cdots \cap {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n) = {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1 \cup \cdots \cup \frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n)\,,$$

wobei $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}$ und $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$. Für $j = 1, \ldots, n$ sind mit den Mengen M_j auch die Mengen $\frac{1}{\epsilon_j} \cdot M_j$ kreisförmig, konvex und bezüglich $\sigma(Y, X)$ kompakt. Also ist die konvexe Hülle

$$\begin{aligned} M := {} & \mathrm{co}(\frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1 \cup \cdots \cup \frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n) \\ = {} & \Big\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_j \in \frac{1}{\epsilon_j} \cdot M_j,\, \lambda_j \in [0,1],\, j = 1, \ldots, n,\, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Big\} \subseteq Y \end{aligned}$$

stetiges Bild der kompakten Menge

$$\Big\{ \lambda \in [0,1]^n : \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Big\} \times \frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1 \times \cdots \times \frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n$$

und infolge selber kompakt bezüglich $\sigma(Y, X)$. Wir erkennen auch, dass diese konvexe Hülle kreisförmig und klarerweise konvex ist.

Weil $\sigma(Y, X)$ und $\sigma(X', X)|_Y$ zwei initiale Topologien auf Y sind, welche von den gleichen Funktionen erzeugt werden, stimmen sie überein. M $(\subseteq Y \subseteq X')$ ist bezüglich dieser Topologie kompakt und somit auch kompakt bezüglich $\sigma(X', X)$. Wenden wir den Bipolarsatz, Satz 5.4.7, auf das duale Paar X, X' an, so folgt

$$f \in U^\circ = ({}^\circ M)^\circ = \overline{\mathrm{co}(M \cup \{0\})}^{\sigma(X',X)} = M \subseteq Y\,,$$

womit auch $X' \subseteq Y$ gezeigt ist.

Gelte umgekehrt $(X, \mathcal{T})' = Y$. Die Menge $\mathcal{V}(0)$ aller bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossenen, konvexen und kreisförmigen Nullumgebungen bildet eine Nullumgebungsbasis; siehe Lemma 2.1.8 und Bemerkung 2.1.10. Nach Satz 5.3.8 sind alle Mengen aus $\mathcal{V}(0)$ auch abgeschlossen bezüglich $\sigma(X, X') = \sigma(X, Y)$. Das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{V^\circ : V \in \mathcal{V}(0)\} \subseteq \mathcal{P}(Y) \tag{5.6.4}$$

besteht dann wegen Lemma 5.4.4 aus konvexen, kreisförmigen und wegen Satz 5.6.1 auch aus $\sigma(Y, X)$-kompakten Teilmengen von Y. Da es zu jedem $f \in X' = Y$ ein $V \in \mathcal{V}(0)$ gibt mit $|f(u)| \leq 1$ für alle $u \in V$, folgt $\mathrm{span} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = Y$.

Für jedes $V \in \mathcal{V}(0)$ gilt ${}^\circ(V^\circ) = V$; vgl. Satz 5.4.7. Nach (5.6.3) ist V damit Nullumgebung bezüglich der von p_M, $M \in \mathcal{M}$, induzierten Topologie. Ist umgekehrt $U = {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_1} \cdot M_1) \cap \cdots \cap {}^\circ(\frac{1}{\epsilon_n} \cdot M_n)$ eine Nullumgebung bezüglich der von p_M, $M \in \mathcal{M}$, induzierten Topologie, wobei $M_j = V_j^\circ$ mit $V_j \in \mathcal{V}(0)$, so folgt

$$U = \epsilon_1 V_1 \cap \cdots \cap \epsilon_n V_n \in \mathcal{V}\,.$$

Wegen Korollar 2.1.12 stimmen $\mathcal{T}$ und die von p_M, $M \in \mathcal{M}$, induzierte Topologie überein.

Schließlich folgt wegen (5.6.3) aus Korollar 2.1.12, dass die von p_M, $M \in \mathcal{M}$, induzierten Topologie umso feiner ist, desto größer $\mathcal{M}$ ist. Insbesondere ist

$\tau(X, Y)$ tatsächlich die feinste aller Topologien, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum machen und $(X, \mathcal{T})' = Y$ erfüllen.

❑

5.6.4 Bemerkung. Wir erkennen aus dem zweiten Teil des Beweises von Satz 5.6.3, dass es für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X, welche X zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht und $(X, \mathcal{T})' = Y$ erfüllt, ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ bestehend aus kreisförmigen, konvexen und bezüglich $\sigma(Y, X)$ kompakten Mengen derart gibt, dass $\{^\circ M : M \in \mathcal{M}\}$ eine Nullumgebungsbasis abgibt. //

5.6.5 Proposition. *Ist $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, so stimmt $\mathcal{T}(\|.\|)$ mit $\tau(X, X')$ wobei, wobei $X' = (X, \mathcal{T}(\|.\|))'$.*

Beweis. Wegen $X' = (X, \mathcal{T}(\|.\|))'$ folgt $\mathcal{T}(\|.\|) \subseteq \tau(X, X')$ sofort aus Satz 5.6.3. Ist umgekehrt $M \subseteq X'$ bzgl. $\sigma(X', X)$ kompakt, also schwach-* kompakt, so ist M beschränkt, also $M \subseteq K_r^{X'}(0)$ für ein hinreichend großes $r > 0$; siehe Lemma 5.7.1. Es folgt $^\circ M \supseteq {}^\circ K_r^{X'}(0) = K_{\frac{1}{r}}^{X}(0)$; vgl. Beispiel 5.4.5. Da die Mengen der Bauart $^\circ M$ eine Nullumgebungsbasis bzgl. $\tau(X, X')$ abgeben, erhalten wir auch $\mathcal{T}(\|.\|) \supseteq \tau(X, X')$.

❑

5.7 Metrisierbarkeit

5.7.1 Lemma. *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum.*

- *Ist X sogar ein Banachraum und ist $K \subseteq X'$ kompakt bezüglich der schwach-* Topologie, so ist K beschränkt bezüglich der Abbildungsnorm auf X', also gibt es ein $C > 0$ derart, dass $\|f\| \leq C$ für alle $f \in K$.*
- *Ist $K \subseteq X$ kompakt bezüglich der schwachen Topologie, so ist K bezüglich der Norm auf X beschränkt.*

Beweis. Die schwach-* kompakte Menge $K \subseteq X' = L_b(X, \mathbb{C})$ ist punktweise beschränkt. In der Tat ist für $x \in X$ die Menge $\{f(x) : f \in K\}$ Bild der kompakten Menge $(K, \sigma(X', X)|_K)$ unter der bezüglich $\sigma(X', X)|_K$ stetigen Abbildung $K \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ und somit beschränkt. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit, Korollar 4.2.2, welchen wir anwenden können weil X ein Banachraum ist, folgt die Beschränktheit von K bezüglich der Abbildungsnorm auf X'.

Ist $K \subseteq X$ kompakt bezüglich der schwachen Topologie, so ist $\iota(K) \subseteq X''$ schwach-* kompakt, da für die kanonische Einbettung $\iota : X \to X''$ die Abbildung $\iota : (X, \sigma(X, X')) \to (\iota(X), \sigma(X'', X')|_{\iota(X)})$ ein Homöomorphismus ist; vgl. Bemerkung 5.5.3. Nach dem schon Bewiesenen ist daher $\iota(K)$ und infolge auch K beschränkt.

❑

5.7.2 Proposition. *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $K \subseteq X'$ kompakt bezüglich der schwach-* Topologie. Ist X separabel, enthält also X eine abzählbar dichte Teilmenge M, so ist der topologische Raum $(K, \sigma(X', X)|_K)$ metrisierbar, also gilt $\sigma(X', X)|_K = \mathcal{T}(d)$ für eine Metrik d auf K.*

Beweis. Für $f \in K$ gilt immer $|f(m)| \le C$ für alle $m \in M \cap U_1^X(0)$, wobei $C > 0$ gemäß Lemma 5.7.1 zu wählen ist. Schreiben wir $M \cap U_1^X(0)$ als $M \cap U_1^X(0) = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$, so ist

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(m_n) - g(m_n)|$$

für alle $f, g \in K$ konvergent. Da M dicht ist, folgt aus $d(f,g) = 0$, dass $f - g \in (M \cap U_1^X(0))^\perp = \operatorname{span}(M \cap U_1^X(0))^\perp = \{0\}$, da $\operatorname{span}(M \cap U_1^X(0))$ dicht in X ist. Man überprüft nun leicht, dass d eine Metrik auf K abgibt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Abbildungen $(f,g) \mapsto f(m_n)$, $(f,g) \mapsto g(m_n)$ und infolge auch $(f,g) \mapsto \frac{1}{2^n}|f(m_n) - g(m_n)|$ als Funktionen von $(K, \sigma(X', X)|_K) \times (K, \sigma(X', X)|_K)$ nach $\mathbb{C}$ stetig. Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist somit $(f,g) \mapsto d(f,g)$ stetig, was auch die Stetigkeit von $K \ni g \mapsto d(f,g)$ für festes $f \in K$ nach sich zieht, wenn K mit $\sigma(X', X)|_K$ versehen ist.

Daraus folgt $\{g \in K : d(f,g) < \epsilon\} \in \sigma(X', X)|_K$ für $f \in K$ und $\epsilon > 0$. Also ist die von d auf K erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ gröber als $\sigma(X', X)|_K$. Da $(K, \sigma(X', X)|_K)$ aber kompakt und $\mathcal{T}(d)$ Hausdorff ist, folgt sogar $\mathcal{T}(d) = \sigma(X', X)|_K$.

❑

In der Situation von Proposition 5.7.2 ist K damit *folgenkompakt*, womit bezüglich der schwach-* Topologie jede Folge in K eine konvergente Teilfolge und nicht nur ein konvergentes Teilnetz hat.

Genau diese Tatsache wollen wir auch für schwach-kompakte Teilmengen von X nachweisen.

5.7.3 Proposition. *Ist $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $K \subseteq X$ kompakt bezüglich $\sigma(X, X')$, so gibt es zu jeder Folge in K eine bezüglich $\sigma(X, X')$ konvergente Teilfolge. Also ist K auch* folgenkompakt.

Beweis. Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ist $M = \{\sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j)x_j : n \in \mathbb{N}, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Q}$ für $j = 1, \dots, n\}$ eine abzählbare und dichte Teilmenge von $Y := \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|.\|} = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(X,X')}$; vgl. Satz 5.3.8. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der $\sigma(X, X')$-kompakten Menge $K \cap Y \subsetneq Y$. Aus Proposition 5.4.8 folgert man leicht, dass $\sigma(X, X')|_Y = \sigma(Y, Y')$.

Durch Normierung der Vektoren aus M erhalten wir eine abzählbare und dichte Teilmenge $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $K_1^Y(0) \setminus U_1^Y(0)$. Wir wählen gemäß Korollar 5.2.4 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in Y'$ mit $\|f_n\| = 1 = f_n(y_n)$. Für $y \in Y$ mit $\|y\| = 1$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein von ϵ abhängiges $n \in \mathbb{N}$ mit $\|y_n - y\| < \epsilon$, woraus

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(y)| \ge |f_n(y)| = |f_n(y_n) - f_n(y_n - y)| \ge |f_n(y_n)| - |f_n(y_n - y)| > 1 - \epsilon$$

folgt. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(y)| = 1$. Durch Normierung folgt in der Tat

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(y)| = \|y\| \tag{5.7.1}$$

für beliebige $y \in Y$. Insbesondere ist

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|\,.$$

für $x, y \in K \cap Y$ konvergent. Aus $d(x, y) = 0$ folgt $f_n(x - y) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen (5.7.1) sogar $x = y$. Man überprüft nun leicht, dass d eine Metrik auf $K \cap Y$ abgibt.

Ähnlich wie im Beweis von Proposition 5.7.2 sind für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $(x, y) \mapsto f_n(x)$, $(x, y) \mapsto f_n(y)$ und infolge auch $(x, y) \mapsto \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ als Funktionen von $(K \cap Y, \sigma(Y, Y')_{K\cap Y}) \times (K \cap Y, \sigma(Y, Y')_{K\cap Y})$ nach $\mathbb{C}$ stetig. K ist gemäß Lemma 5.7.1 bezüglich $\|.\|$ beschränkt, woraus folgt, dass d gleichmäßiger Grenzwert der stetige Funktionen $(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$ für $N \to \infty$ und infolge selber stetig ist. Das zieht auch die Stetigkeit von $K \cap Y \ni x \mapsto d(x, y)$ für festes $y \in K \cap Y$ nach sich, wenn $K \cap Y$ mit $\sigma(Y, Y')_{K\cap Y}$ versehen ist.

Daraus folgt $\{x \in K \cap Y : d(x, y) < \epsilon\} \in \sigma(Y, Y')_{K\cap Y}$ für $y \in K \cap Y$ und $\epsilon > 0$. Also ist die von d auf $K \cap Y$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ gröber als $\sigma(Y, Y')_{K\cap Y}$. Da letztere Topologie kompakt und $\mathcal{T}(d)$ Hausdorff ist, folgt sogar $\mathcal{T}(d) = \sigma(Y, Y')_{K\cap Y} = \sigma(X, X')_{K\cap Y}$. Weil somit $K \cap Y$ kompakt bezüglich einer metrischen Topologie ist, hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

❑

Es gilt auch die Umkehrung von Proposition 5.7.3. In der Tat ist eine Teilmenge von einem normierten Raum genau dann schwach kompakt, wenn sie schwach folgenkompakt ist.

5.8 Der Satz von Dunford-Pettis

In diesem Abschnitt betrachten wir den Banachraum $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_1$, wobei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß μ ist. Kurz wollen wir $L^1(\mu)$ dafür schreiben. Bekannterweise lässt sich der topologische Dualraum von $L^1(\mu)$ isometrisch isomorph mit $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) =: L^\infty(\mu)$, versehen mit $\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\} = 0\}$, identifizieren, indem wir ein $g \in L^\infty(\mu)$ als Funktional

$$\phi_g : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \;\; \text{definiert durch} \;\; \phi_g(f) = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu$$

betrachten. Wir wollen nun charakterisieren, wann eine Teilmenge $K \subseteq L^1(\mu)$ bezüglich $\sigma(L^1(\mu), L^1(\mu)')$ kompakt, also schwach-kompakt, ist. Dazu benötigen wir folgende Begriffsbildung.

5.8.1 Definition. Eine Teilmenge $K \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ heißt *gleichgradig integrierbar*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$\sup_{f\in K} \left| \int_E f \, d\mu \right| < \epsilon$$

für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$.

5.8.2 Bemerkung. Einpunktige Mengen $K = \{f\}$ mit $f \in L^1(\mu)$ sind gleichgradig integrierbar. In der Tat gilt zunächst wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}} |f| \, d\mu = 0 \, .$$

Zu $\epsilon > 0$ gibt es somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\int_{\{x\in\Omega:|f(x)|>n\}} |f|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$. Für $\delta := \frac{\epsilon}{2n}$ und $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ folgt dann

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \le \int_{\{x\in E:|f(x)|>n\}} |f|\, d\mu + \int_{\{x\in E:|f(x)|\le n\}} |f|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2} + n\mu(E) < \epsilon\,.$$

Offenbar sind Teilmengen gleichgradig integrierbarer Teilmengen von $L^1(\mu)$ selber gleichgradig integrierbar. Zudem ist die Vereinigung von endlich vielen gleichgradig integrierbaren Teilmenge von $L^1(\mu)$ wieder gleichgradig integrierbar. Insbesondere sind alle endlichen Teilmengen von $L^1(\mu)$ gleichgradig integrierbar. //

5.8.3 Lemma. *Sei $(f_j)_{j\in J}$ ein beschränktes Netz aus $L^1(\mu)$ derart, dass $\{f_j : j \in J\}$ gleichgradig integrierbar ist. Falls $\lim_{j\in J} \int_\Omega f_j \cdot g\, d\mu$ für alle $g \in L^\infty(\mu)$ in $\mathbb{C}$ existiert, so gibt es ein $f \in L^1(\mu)$ mit*

$$\lim_{j\in J} \int_\Omega f_j \cdot g\, d\mu = \int_\Omega f \cdot g\, d\mu \tag{5.8.1}$$

für alle $g \in L^\infty(\mu)$.

Beweis. Weil μ endlich ist, gilt $\mathbb{1}_A \in L^\infty(\mu)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Voraussetzungsgemäß existiert daher

$$\nu(A) := \lim_{j\in J} \int_\Omega f_j \cdot \mathbb{1}_A\, d\mu \in \mathbb{C}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Da Grenzwerte additiv sind, gilt $\nu(\bigcup_{m=1}^n A_m) = \sum_{m=1}^n \nu(A_m)$ für $n \in \mathbb{N}$ und für paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Die Mengenfunktion $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ erfüllt wegen der vorausgesetzten gleichgradigen Integrierbarkeit, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|\nu(E)| \le \epsilon \quad \text{für alle} \quad E \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad \mu(E) < \delta\,. \tag{5.8.2}$$

Seien nun $A_m \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Zu $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie in (5.8.2). Für $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gilt dann $\mu(\bigcup_{m>n} A_m) < \delta$, womit

$$\left|\nu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) - \sum_{m=1}^n \nu(A_m)\right| = \left|\nu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) - \nu(\bigcup_{m=1}^n A_m)\right| = |\nu(\bigcup_{m>n} A_m)| \le \epsilon\,.$$

Aus der Beliebigkeit von $\epsilon > 0$ erhalten wir die σ-Additivität. Also ist ν ein komplexes Maß. Wegen (5.8.2) folgt mit der Version vom Satz von Radon-Nikodym für signierte Maße, angewandt auf den Real- und Imaginärteil von ν, die Existenz eines $f \in L^1(\mu)$ derart, dass $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ für alle $E \in \mathcal{A}$.

Also gilt (5.8.1) für Funktionen $g \in L^\infty(\mu)$ von der Bauart $g = \mathbb{1}_E$ mit $E \in \mathcal{A}$. Aus Linearitätsgründen folgt (5.8.1) für Treppenfunktionen $g \in L^\infty(\mu)$. Weil μ endlich ist, sind diese Treppenfunktionen dicht in $L^\infty(\mu)$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Aus der Beschränktheit von $\{f_j : j \in J\}$ folgt schließlich (5.8.1) für alle $g \in L^\infty(\mu)$. ❑

5.8.4 Lemma. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $L^1(\mu)$. Falls für alle $E \in \mathcal{A}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ in $\mathbb{C}$ existiert, so ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Wir halten $\epsilon > 0$ fest und setzen für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{C}_k := \{E \in \mathcal{A} : \left| \int_E f_n - f_m \, d\mu \right| \leq \epsilon \ \text{ für alle } \ m, n \geq k\} .$$

Da $\int_E f_n \, d\mu$ für alle $E \in \mathcal{A}$ konvergiert, gilt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k = \mathcal{A}$.

Aus der Konvergenz einer Folge in $L^1(\mu)$ bezüglich $\|.\|_1$ folgt die Konvergenz im Maß und daraus die punktweise Konvergenz einer Teilfolge fast überall. Infolge ist die Teilmenge $M := \{\mathbb{1}_E : E \in \mathcal{A}\}$ von $L^1(\mu)$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_1$ und daher ein vollständig metrischer Raum. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$D_k := \{\mathbb{1}_E : E \in \mathcal{C}_k\}$$

eine Teilmenge von M. Wieder weil Konvergenz bezüglich $\|.\|_1$ die punktweise Konvergenz einer Teilfolge fast überall impliziert, folgt zusammen mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass D_k in M abgeschlossen ist. Hätte jede der Mengen D_k leeres Inneres als Teilmenge von M, so wären alle Mengen $M \setminus D_k$ offen und dicht in M. Nach dem Satz von Baire, Satz 4.1.1, wäre $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (M \setminus D_k)$ nichtleer im Widerspruch zu $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k = M$.

Somit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, ein $\delta > 0$ und ein $G \in \mathcal{C}_k$ derart, dass

$$\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_G\|_1 < \delta \ \text{ impliziert } \ \mathbb{1}_E \in D_k .$$

Weil aus $A \in \mathcal{C}_k$ und $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \Delta B) = 0$ auch $B \in \mathcal{C}_k$ folgt, erhalten wir aus $\|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_G\|_1 < \delta$ sogar $E \in \mathcal{C}_k$.

Für ein beliebiges $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ folgt wegen $\|\mathbb{1}_{G \cup E} - \mathbb{1}_G\|_1 = \mu(E \setminus G) < \delta$ und $\|\mathbb{1}_{G \setminus E} - \mathbb{1}_G\|_1 = \mu(G \cap E) < \delta$ sicherlich $G \cup E, G \setminus E \in \mathcal{C}_k$. Zusammen mit $E = (G \cup E) \setminus (G \setminus E)$ erhalten wir für $m, n \geq k$

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n - f_m \, d\mu \right| &= \left| \int_{G \cup E} f_n - f_m \, d\mu - \int_{G \setminus E} f_n - f_m \, d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_{G \cup E} f_n - f_m \, d\mu \right| + \left| \int_{G \setminus E} f_n - f_m \, d\mu \right| \leq 2\epsilon . \end{aligned}$$

Wie wir in Bemerkung 5.8.2 gesehen haben, ist $\{f_1, \ldots, f_k\}$ gleichgradig integrierbar. Insbesondere gibt es ein $\eta > 0$ mit $\left| \int_E f_k \, d\mu \right| < \epsilon$ für $\mu(E) < \eta$. Gilt nun $\mu(E) < \min(\delta, \eta)$ für $E \in \mathcal{A}$, so folgt

$$\left| \int_E f_n \, d\mu \right| \leq \left| \int_E f_n - f_k \, d\mu \right| + \left| \int_E f_k \, d\mu \right| < 3\epsilon$$

für alle $n \geq k$. Also ist $\{f_n : n \geq k\}$ und infolge auch $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar; vgl. Bemerkung 5.8.2.

❑

5.8.5 Satz (*Satz von Dunford-Pettis*)**.** *Eine Teilmenge $K \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist genau dann relativ schwach kompakt, $\overline{K}^{\sigma(L^1(\mu), L^1(\mu)')}$ ist also kompakt bezüglich $\sigma(L^1(\mu), L^1(\mu)')$, wenn K beschränkt bezüglich $\|.\|_1$ und gleichgradig integrierbar ist.*

Beweis. Jedes relativ schwach kompakte $K \subseteq L^1(\mu)$ ist nach Lemma 5.7.1 beschränkt bezüglich $\|.\|_1$. Wäre K nicht gleichgradig integrierbar, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $E_n \in \mathcal{A}$ und ein $f_n \in K$ derart, dass zwar $\mu(E_n) < \frac{1}{n}$ aber $\left|\int_E f_n \, d\mu\right| \geq \epsilon$. Wegen Proposition 5.7.3 hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Insbesondere erfüllt $(f_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Lemma 5.8.4, womit $\{f_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist im Widerspruch zur Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei nun umgekehrt $K \subseteq L^1(\mu)$ beschränkt bezüglich $\|.\|_1$ und gleichgradig integrierbar. Als isometrische Abbildung bildet die kanonische Einbettung $\iota : L^1(\mu) \to L^1(\mu)''$ unser beschränktes K auf die beschränkte Teilmenge $\iota(K)$ von $L^1(\mu)''$ ab. Weil daher $\iota(K)$ in $K_r^{L^1(\mu)''}(0)$ für hinreichend großes $r > 0$ enthalten ist, folgt aus Satz 5.5.6 die schwach-* Kompaktheit von $\overline{\iota(K)}^{\sigma(L^1(\mu)'',L^1(\mu)')}$. Zu jedem F aus diesem Abschluss gibt es ein Netz $(f_j)_{j\in J}$ aus K derart, dass $(\iota(f_j))_{j\in J}$ schwach-* gegen F konvergiert, was genau

$$\lim_{j\in J} \int_\Omega f_j \cdot g \, d\mu = F(g) \quad \text{für alle} \quad g \in L^\infty(\mu)$$

bedeutet. Mit K ist auch $\{f_j : j \in J\} \subseteq K$ gleichgradig integrierbar. Aus Lemma 5.8.3 folgt daher

$$F(g) = \lim_{j\in J} \int_\Omega f_j \cdot g \, d\mu = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu = \iota(f)(g) \quad \text{für alle} \quad g \in L^\infty(\mu)$$

mit einem $f \in L^1(\mu)$, also $F = \iota(f) \in \iota(L^1(\mu))$. Wir haben somit $\overline{\iota(K)}^{\sigma(L^1(\mu)'',L^1(\mu)')} \subseteq \iota(L^1(\mu))$ gezeigt.

Weil $\iota : (L^1(\mu), \sigma(L^1(\mu), L^1(\mu)')) \to (\iota(L^1(\mu)), \sigma(L^1(\mu)'', L^1(\mu)')|_{\iota(L^1(\mu))})$ gemäß Bemerkung 5.5.3 einen Homöomorphismus abgibt, ist dann K in der schwach kompakten Menge $\iota^{-1}\Big(\overline{\iota(K)}^{\sigma(L^1(\mu)'',L^1(\mu)')}\Big)$ enthalten und infolge relativ schwach kompakt.

❑

5.9 Satz von Krein-Milman

Aus dem Satz von Hahn-Banach erhält man auch eine geometrische Aussage über kompakte konvexe Teilmengen eines lokalkonvexen Vektorraumes, nämlich, dass sie sogenannte Extremalpunkte besitzen müssen und tatsächlich in gewissem Sinne von diesen erzeugt werden.

5.9.1 Definition. Sei K eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes X. Eine nichtleere Menge $S \subseteq K$ heißt extremal, wenn aus $x, y \in K$, $0 < t < 1$ mit $tx + (1-t)y \in S$ immer $x, y \in S$ folgt. Ein Punkt $z \in K$ heißt Extremalpunkt von K, wenn $\{z\}$ eine extremale Menge ist. Die Menge aller Extremalpunkte von K bezeichnen wir mit $E(K)$.

5.9.2 Satz (von Krein-Milman). *Für einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathcal{T})$ und eine nichtleere kompakte und konvexe Teilmenge K von X ist K die abgeschlossene konvexe Hülle von $E(K)$, also gilt $K = \overline{\text{co}}(E(K))$. Insbesondere besitzt K Extremalpunkte.*

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller kompakten extremalen Teilmengen von K. Da K selbst eine solche ist, gilt $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst:

(i) Für $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}$ gilt entweder $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T = \emptyset$ oder $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \in \mathcal{P}$.

(ii) Für $S \in \mathcal{P}$, $f \in X'$, $\mu := \max\{\operatorname{Re} f(x) : x \in S\}$ und $S_f := \{x \in S : \operatorname{Re} f(x) = \mu\}$ gilt $S_f \in \mathcal{P}$.

Die Eigenschaft (i) prüft man leicht nach. Zu (ii) bemerken wir zuerst, dass S_f nicht leer und als abgeschlossene Teilmenge von S kompakt ist. Aus $z \in S_f$, $z = tx + (1-t)y$ mit $x, y \in K$, $0 < t < 1$ folgt wegen $z \in S$ zunächst $x, y \in S$, womit auch $\operatorname{Re} f(x) \leq \mu$ und $\operatorname{Re} f(y) \leq \mu$. Wegen

$$\mu = \operatorname{Re} f(z) = t \operatorname{Re} f(x) + (1-t) \operatorname{Re} f(y)$$

erhalten wir $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(y) = \mu$, also $x, y \in S_f$.

Sei $S_0 \in \mathcal{P}$ und setze $\mathcal{P}' := \{T \in \mathcal{P} : T \subseteq S_0\}$. Da die Mengen $T \in \mathcal{U}$ alle kompakt sind, folgt wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft für eine bezüglich der Inklusion totalgeordnete Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}'$, dass $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \neq \emptyset$ und nach (i) folglich $\bigcap_{T\in\mathcal{U}} T \in \mathcal{P}'$. Also hat $\mathcal{U}$ eine untere Schranke in $\mathcal{P}'$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein minimales Element $M \in \mathcal{P}'$. Wegen (ii) muss für $f \in X'$ die Funktion $\operatorname{Re} f$ auf M konstant sein. Da X' auf X nach Korollar 5.2.7, (i) punktetrennend operiert, kann M nur einen Punkt enthalten.

Wir haben also gezeigt, dass jedes $S_0 \in \mathcal{P}$ einen Extremalpunkt enthält, also $S_0 \cap E(K) \neq \emptyset$ für jedes $S_0 \in \mathcal{P}$.

Da K kompakt und konvex ist, gilt sicher $\overline{\text{co}}(E(K)) \subseteq K$, womit sich auch $\overline{\text{co}}(E(K))$ als kompakt und konvex herausstellt.

Die Existenz eines $x_0 \in K \setminus \overline{\text{co}}(E(K))$ würde nach Satz 5.2.5 die Ungleichung $\operatorname{Re} f(x_0) > \operatorname{Re} f(y)$ für alle $y \in \overline{\text{co}}(E(K))$ und infolge $K_f \cap \overline{\text{co}}(E(K)) = \emptyset$ mit einem gewissen $f \in X'$ implizieren. Im Widerspruch dazu gilt nach obiger Erkenntnis $K_f \cap E(K) \neq \emptyset$, da nach ($ii$) sicherlich $K_f \in \mathcal{P}$.

❏

Dieser Satz hat viele interessante Konsequenzen. Wir können in dieser Vorlesung darauf aber nicht weiter eingehen, bringen aber noch eine Art Umkehrung.

5.9.3 Proposition. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum, gilt $\emptyset \neq B \subseteq X$ und ist $\overline{\text{co}}(B)$ kompakt, so folgt $E(\overline{\text{co}}(B)) \subseteq \overline{B}$.*

Beweis. Für einen Extremalpunkt x von $\overline{\text{co}}(B)$ zeigen wir $x \in \overline{\overline{B}} = \overline{B}$. $(X, \mathcal{T})$ hat nach Definition 5.0.1 und Lemma 2.1.8 Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ bestehend aus offenen, kreisförmigen und konvexen Mengen. Wie in Bemerkung 2.1.10 erwähnt, ist $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum, womit auch $\{\overline{U} : U \in \mathfrak{U}\}$ eine Nullumgebungsbasis bildet. Also reicht es, für ein beliebiges $U \in \mathfrak{U}$ nachzuweisen, dass $(x + \overline{U}) \cap \overline{B} \neq \emptyset$; vgl. Korollar 2.1.4.

Wegen $\overline{B} \subseteq \overline{\text{co}}(B)$ ist auch $\overline{B}$ kompakt, wodurch aus $\overline{B} \subseteq \bigcup_{y\in\overline{B}}(y + U)$ die Existenz endlich vieler $y_1, \dots, y_m \in B$ mit $\overline{B} \subseteq \bigcup_{j=1,\dots,m}(y_j + U)$ folgt. Als in $\overline{\text{co}}(B)$ enthaltene und abgeschlossene Mengen sind die konvexen Mengen $K_j := \overline{\text{co}}((y_j + U) \cap B)$ für $j = 1, \dots, m$ wieder kompakt. Da $\text{co}(\bigcup_{j=1,\dots,m} K_j)$ als Bild der kompakten Menge $K_1 \times \dots \times K_m \times \{(\lambda_j)_{j=1}^m \in [0,1]^m : \sum_j \lambda_j = 1\}$ unter der stetigen Abbildung $(z_1, \dots, z_m, (\lambda_j)_{j=1}^m) \mapsto \sum_j \lambda_j z_j$ dargestellt werden kann, ist diese Menge auch kompakt, infolge abgeschlossen und wegen $K_j \subseteq \overline{\mathrm{co}}(B)$ auch in $\overline{\mathrm{co}}(B)$ enthalten, womit

$$\overline{\mathrm{co}}(B) = \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{j=1,\dots,m} (y_j + U) \cap B) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{j=1,\dots,m} K_j) = \mathrm{co}(\bigcup_{j=1,\dots,m} K_j) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(B)\,,$$

also $\overline{\mathrm{co}}(B) = \mathrm{co}(\bigcup_{j=1,\dots,m} K_j)$. Als Extremalpunkt dieser Menge muss x in einem $K_j = \overline{\mathrm{co}}((y_j + U) \cap B) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(y_j + U) = y_j + \overline{U}$ enthalten sein, wobei hier die Konvexität von U einfließt. Es folgt $x - y_j \in \overline{U} = -\overline{U}$ und daher $y_j \in (x + \overline{U}) \cap B$.

❑

5.10 Fixpunktsatz von Brouwer

Wir wollen in diesem Abschnitt den Fixpunktsatz von Brouwer herleiten. Dazu verwenden wir Methoden aus der Differential- und Integralrechnung, was zugegebenermaßen etwas fehl am Platz wirkt.

Im Folgenden sei S^d die *Einheitssphäre* $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^{d+1}$, wobei von hier bis zum Ende des Beweises von Satz 5.10.3 $\|.\|$ für die Euklidische Norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{d+1} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ steht.

5.10.1 Proposition. *Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $g : O \to \mathbb{R}^{d+1}$ mit offenem $O \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, sodass $g(O) \subseteq S^d$ und $g|_{S^d} = \mathrm{id}_{S^d}$.*

Beweis.

Schritt 1: Angenommen es gäbe ein stetig differenzierbares $g : O \to \mathbb{R}^{d+1}$ mit $g|_{S^d} = \mathrm{id}_{S^d}$ und $g(O) \subseteq S^d$, wobei $O \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ offen ist. Dann gibt es ein $\eta > 1$ mit $O \supseteq K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$.

Schritt 2: Für $t \geq 0$ betrachte dann die Funktion $(x \in O)$

$$h_t(x) := x + tg(x)\,,$$

welche O offenbar nach $\mathbb{R}^{d+1}$ hinein abbildet. Zudem ist h_t immer stetig differenzierbar, wobei

$$dh_t(x) = I + t\ dg(x)\,.$$

Da für $t\ \|dg(x)\| < 1$ die entsprechende Neumannsche Reihe (siehe Lemma 6.4.9) konvergiert, ist $dh_t(x)$ für solche t invertierbar. Wegen der Stetigkeit von $z \mapsto \|dg(z)\|$ auf der kompakten Menge $K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ liegt $C := \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\|$ in $[0, +\infty)$, und für $0 \leq t < \frac{1}{C}$ und $\|x\| \leq \eta$ ist $dh_t(x)$ invertierbar.

Da für ein festes $x \in K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ die Funktion $t \mapsto \det dh_t(x)$ stetig ist und auf $[0, \frac{1}{C})$ nicht verschwindet, muss sie darauf immer dasselbe Vorzeichen haben. Wegen $\det dh_0(x) = 1$ folgt $\det dh_t(x) > 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{C})$.

Schritt 3: Für $0 \leq t < \frac{1}{C}$ ist $h_t|_{K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)}$ injektiv. In der Tat, folgt aus $h_t(x) = h_t(y)$ mit $x, y \in K_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, dass

$$x - y + t(g(x) - g(y)) = h_t(x) - h_t(y) = 0\,.$$

Also $x - y = -t(g(x) - g(y))$. Andererseits ist aber

$$\|g(x) - g(y)\| = \| \int_0^1 dg(y + t(x - y))(x - y)\ dt\| \leq \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\|\ \|x - y\|,$$

und daher erhalten wir

$$\|x - y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leq t \sup_{\|z\| \leq \eta} \|dg(z)\|\ \|x - y\|\,,$$

was wegen $tC < 1$ die Beziehung $x = y$ nach sich zieht.

Schritt 4: Wir behaupten nun, dass $h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ für jedes $0 \leq t < \frac{1}{C}$. In der Tat folgt aus $\|x\| < 1$

$$\|h_t(x)\| \leq \|x\| + t\|g(x)\| < 1 + t\,,$$

also gilt $A := h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \subseteq U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$, wobei diese Teilmenge A von $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ nichtleer und wegen dem Umkehrsatz – es ist ja $dh_t(x)$ für $\|x\| \leq 1 (< \eta)$ invertierbar – offen ist. Setzen wir $B := U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \setminus h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$, so gilt $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) = A \dot{\cup} B$. Außerdem gilt

$$\overline{B} \cap A \subseteq (\mathbb{R}^{d+1} \setminus A) \cap A = \emptyset\,,$$

da $\mathbb{R}^{d+1} \setminus A$ ja abgeschlossen in $\mathbb{R}^{d+1}$ ist.

Andererseits gilt $A \subseteq h_t(K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$, wobei die rechte Menge als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt und daher in $\mathbb{R}^{d+1}$ abgeschlossen ist. Also folgt

$$\overline{A} \cap B \subseteq h_t(K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \cap B\,.$$

Ein y aus der linken Seite muss daher $y = h_t(x) \in B$ für ein $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ erfüllen. Aus $\|x\| = 1$ würde $y = h_t(x) = x + t\,\mathrm{id}\,|_{S^d}(x) = (1 + t)x \notin U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ folgen, was wegen $B \subseteq U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ unmöglich ist. Also muss $\|x\| < 1$, und daher $y = h_t(x) \in h_t(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) \cap B = A \cap B = \emptyset$, was ebenfalls unmöglich ist. Wir schließen damit auf $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Da $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ aber zusammenhängend ist, muss $U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) = A$.

Schritt 5: Nach dem bisher Gezeigten ist für jedes $t \in [0, \frac{1}{C})$ die Abbildung $h_t : U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \to U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit regulärem $dh_t(x),\ x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ – also ein Diffeomorphismus. Aus der Transformationsregel folgt

$$\lambda_{d+1}(U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dh_t(x)\ d\lambda_{d+1}(x)\,,$$

wobei man mit Hilfe der Formel zur Determinantenberechnung unmittelbar erkennt, dass

$$\det dh_t(x) = \det(I + tdg(x)) = \det dg(x)\ t^{d+1} + \beta_d(x)t^d + \cdots + \beta_1(x)t + 1\,,$$

für gewisse stetige reellwertige $\beta_j : U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \to \mathbb{R}$. Wir erhalten also

$$(1 + t)^{d+1}\lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \lambda_{d+1}(U_{1+t}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) =$$

$$t^{d+1} \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dg(x)\ d\lambda_{d+1}(x) + t^d \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \beta_d(x)\ d\lambda_{d+1}(x) + \dots$$
$$+ t \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \beta_1(x)\ d\lambda_{d+1}(x) + \lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) .$$

Diese Gleichheit muss zumindest für alle $t \in [0, \frac{1}{C})$ gelten. Da ein Polynom $p(t)$ eindeutig durch die Polynomfunktion $p|_{[0,\frac{1}{C})}$ bestimmt ist, müssen die Koeffizienten von t^{d+1} übereinstimmen. Also gilt

$$0 \neq \lambda_{d+1}(U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)) = \int_{U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)} \det dg(x)\ d\lambda_{d+1}(x) . \tag{5.10.1}$$

Schritt 6: Andererseits folgt für die stetig differenzierbare Funktion $h(x) = \|x\|^2,\ x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ aus $g(O) \subseteq S^d$ mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = d(h \circ g)(x) = dh(g(x))\ dg(x) = 2g(x)^T\ dg(x) .$$

Insbesondere kann $dg(x)$ für kein $x \in U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ regulär sein. Also gilt $\det dg(x) = 0$ im Widerspruch zu (5.10.1).

❑

5.10.2 Korollar. *Es gibt keine stetige Funktion $h : K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \to S^d$, sodass $h|_{S^d} = \mathrm{id}_{S^d}$.*

Beweis. Angenommen es gäbe eine solche Funktion schon, so könnten wir h auf ganz $\mathbb{R}^{d+1}$ fortsetzen, indem wir $h(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $\|x\| > 1$ setzen. Da

$$\mathbb{R}^{d+1} = K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \cup (\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$$

und da h auf diesen beiden abgeschlossenen Teilmengen stetig ist, folgt die Stetigkeit von h auf $\mathbb{R}^{d+1}$. Eingeschränkt auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ ist h offenbar stetig differenzierbar.

Da auf $K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ die reellen Polynome in den Variablen $(x_1, \dots, x_{d+1})^T = x$ eine nirgends verschwindende und punktetrennende Algebra in $C(K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0))$ bilden, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ derartige Polynome $p_1, \dots p_{d+1}$ gibt sodass

$$\|h_j - p_j\|_{K_2(0),\infty} < \epsilon,\ j = 1, \dots, d+1 .$$

Wählen wir $\epsilon > 0$ hinreichend klein und setzen wir

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_{d+1}(x) \end{pmatrix} ,$$

so folgt $\sup_{\|x\| \leq 2} \|h(x) - p(x)\| < \frac{1}{2}$.

Nun sei $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar derart, dass $\lambda(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$, dass $\lambda\big((-\infty, \frac{9}{4}]\big) = \{0\}$ und dass $\lambda\big([4, +\infty)\big) = \{1\}$. Man überzeugt sich leicht, dass es solche Funktionen gibt. Es gibt sogar solche, die obendrein unendlich oft differenzierbar sind. Die Funktion

$$f(x) = \lambda(\|x\|^2)h(x) + (1 - \lambda(\|x\|^2))p(x),\ x \in \mathbb{R}^{d+1}$$

mit Werten in $\mathbb{R}^{d+1}$ ist überall stetig differenzierbar, da für $x \in U_{\frac{3}{2}}^{\mathbb{R}^{d+1}}(0) \supseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ der Ausdruck $f(x)$ mit $p(x)$ übereinstimmt, und da auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ alle auftretenden Funktionen stetig differenzierbar sind.

Auf $\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ gilt zudem $f(x) = h(x) = \frac{x}{\|x\|}$, und für $x \in K_2^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ folgt

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &= \|h(x) - \big(1 - \lambda(\|x\|^2)\big)\big(h(x) - p(x)\big)\| \\ &\geq \|h(x)\| - \big(1 - \lambda(\|x\|^2)\big)\|h(x) - p(x)\| \geq 1 - \frac{1}{2} > 0\,.\end{aligned}$$

Somit gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{d+1}$. In Folge ist auch

$$g(x) = \frac{f(2x)}{\|f(2x)\|},\ x \in \mathbb{R}^{d+1}\,,$$

eine überall stetig differenzierbare Funktion mit Werten in S^d, sodass für $x \in S^d$ wegen $f(2x) = h(2x) = \frac{2x}{2\|x\|} = x$

$$g(x) = \frac{f(2x)}{\|f(2x)\|} = x\,.$$

Gemäß Proposition 5.10.1 kann es aber kein solches g geben.

❑

Wir wollen daran erinnern, dass, falls H ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum und $E \subseteq H$ abgeschlossen und konvex ist, es zu jedem $x \in H$ ein eindeutiges $r(x) \in E$ gibt, sodass $d(x, E) = \|x - r(x)\|$. Die Funktion $r : H \to E$ ist dabei stetig und stimmt auf E mit id_E überein.

5.10.3 Satz (*Fixpunktsatz von Brouwer*)**.** *Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ kompakt und konvex mit $d \geq 0$. Jede stetige Funktion $f : E \to E$ hat dann einen Fixpunkt, also gibt es ein $x \in E$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Da E insbesondere beschränkt ist, gilt $E \subseteq U_\eta^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ für ein $\eta > 0$. Betrachten wir $\frac{1}{\eta}E$ und $x \mapsto \frac{1}{\eta}f(\eta x)$ anstelle von E und f, so können wir oBdA. $E \subseteq U_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ annehmen. Indem wir nötigenfalls E als Teilmenge von $\mathbb{R}^{d+1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$ betrachten, können wir auch $d > 0$ annehmen.

Wir nehmen nun an, dass es ein stetiges $f : E \to E$ ohne Fixpunkt gibt und betrachten $\mathbb{R}^{d+1}$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt als Hilbertraum. Ist $r(x)$ definiert wie vor dem aktuellen Satz, so ist die Funktion

$$f \circ r : x \mapsto f(r(x)),\ x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)\,,$$

stetig und hat Werte in $E \subseteq K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$. Außerdem hat $f \circ r$ keinen Fixpunkt, da dieser in E liegen müsste und damit ein Fixpunkt von f wäre.

Also gilt $f(r(x)) - x \neq 0$ für alle $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$. Somit gibt es für alle $x \in K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ ein eindeutiges $\lambda(x) \in (0, +\infty)$ mit

$$f(r(x)) + \lambda(x)\big(x - f(r(x))\big) \in S^d\,.$$

$\lambda(x)$ ist die positive Lösung der Gleichung

$$\|f(r(x))\|^2 - 2\lambda\,\Big(f(r(x)), f(r(x)) - x\Big) + \lambda^2\|x - f(r(x))\|^2$$
$$= \|f(r(x)) + \lambda(x - f(r(x)))\|^2 = 1\,;$$

also

$$\lambda(x) = \frac{\Big(f(r(x)), f(r(x)) - x\Big)}{\|x - f(r(x))\|^2} + \sqrt{\frac{\Big(f(r(x)), f(r(x)) - x\Big)^2}{\|x - f(r(x))\|^4} + \frac{1 - \|f(r(x))\|^2}{\|x - f(r(x))\|^2}}\,.$$

Somit ist die Funktion $h(x) := f(r(x)) + \lambda(x)\big(x - f(r(x))\big)$ stetig. Außerdem bildet h die Menge $K_1^{\mathbb{R}^{d+1}}(0)$ nach S^d hinein ab. Dabei gilt $\lambda(x) = 1$ und damit $h(x) = x$ für $\|x\| = 1$. Gemäß Korollar 5.10.2 gibt es aber kein solches h.

❑

5.11 Fixpunktsätze von Schauder und Fan-Glicksberg-Kakutani

Als Folgerung des Brouwerschen Fixpunktsatz wollen wir zunächst den bekannten *Fixpunktsatz von Schauder* herleiten. Ehe wir diese Aussage bringen, benötigen wir noch eine Hilfsaussage.

5.11.1 Lemma. *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Weiters sei E eine nichtleere und kompakte Teilmenge von X. Dann gibt es zu jeder offenen, konvexen und kreisförmigen Nullumgebung V in X endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in E$ und stetige Funktionen $\gamma_1, \dots, \gamma_n : E \to [0,1]$ derart, dass*

$$E \subseteq \bigcup_{k=1,\dots,n} x_k + V\,, \tag{5.11.1}$$

$$\gamma_j(x) = 0, \quad \textit{falls} \;\; x \notin x_j + V, \quad \textit{für} \;\; j = 1, \dots, n, \tag{5.11.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) = 1 \quad \textit{für alle} \;\; x \in E\,. \tag{5.11.3}$$

Schließlich gilt für alle $x \in E$

$$x - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) x_k \in V\,. \tag{5.11.4}$$

Beweis. Das Minkowski-Funktional $\mu_V : X \to [0, +\infty)$ ist nach Lemma 5.1.9 eine Seminorm, wobei $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$. Wegen der Kompaktheit von E existieren $x_1, \dots, x_n \in E$ derart, dass (5.11.1) gilt. Seien $\beta, \beta_k : X \to [0, +\infty)$ für $k = 1, \dots, n$ definiert durch

$$\beta_k(x) := \max\{0, 1 - \mu_V(x - x_k)\}\,,$$

und

$$\beta(x) := \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x)\,.$$

Offenbar ist $\beta_j(x) > 0$ äquivalent zu $\mu_V(x - x_j) < 1$ und infolge zu $x \in x_j + V$. Da jedes $x \in E$ in einer der Mengen $x_k + V$ enthalten ist, gilt $\beta(x) > 0$ für alle $x \in E$. Wegen der Dreiecksungleichung nach unten und wegen $\mu_V^{-1}[0, \epsilon) = \epsilon V$ ist μ_V und damit auch alle β_j sowie β stetig. Die Funktionen $\gamma_1, \dots, \gamma_n : E \to [0,1]$ definiert durch

$$\gamma_j(x) = \frac{\beta_j(x)}{\beta(x)}, \quad x \in E\,,$$

sind dann ebenfalls stetig, wobei (5.11.2) und offenbar auch (5.11.3) gilt. Ist $x \in E$, so haben wir schließlich

$$x - \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) x_k = \sum_{k=1}^n \gamma_k(x)\big(x - x_k\big)\,.$$

Nach oben gilt $\gamma_k(x) > 0$ genau dann, wenn $\mu_V(x - x_k) < 1$, wobei es nach (5.11.1) mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu_V(x - x_k) < 1$ gibt. Damit erhalten wir

$$\mu_V\Big(x - \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) x_k\Big) \le \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) \mu_V(x - x_k) < \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) = 1\,,$$

und infolge (5.11.4) gilt.

❑

5.11.2 Satz. *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\emptyset \neq E \subseteq F \subseteq X$ mit kompaktem E und konvexem F. Jede stetige Funktion $f : F \to E$ hat dann einen Fixpunkt.*

Beweis. Zunächst sei I die Menge aller offenen, konvexen und kreisförmigen Nullumgebungen V in X, welche wir durch $V_1 \preceq V_2 :\Leftrightarrow V_1 \supseteq V_2$ offenbar zu einer gerichteten Menge machen können; vgl. Lemma 2.1.8. Zu $V \in I$ definieren wir das stetige $g_V : E \to X$ durch

$$g_V(x) := \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) x_k, \quad x \in E\,,$$

wobei $x_1, \dots, x_n \in E$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_n : E \to [0,1]$ wie in Lemma 5.11.1 sind. Wegen (5.11.4) gilt dabei $x - g_V(x) \in V$.

Für jedes $x \in E$ ist $g_V(x)$ eine Konvexkombination der Punkte $x_1, \dots, x_n \in E \subseteq F$, wodurch $g_V(E) \subseteq \operatorname{co}(\{x_1, \dots, x_n\}) =: C_V \subseteq F$. Außerdem ist C_V im endlichdimensionalen und daher abgeschlossenen Unterraum $Y = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ von X enthalten. Da Y homöomorph zu einem $\mathbb{R}^{d+1}$ ist, ist die entsprechende Kopie von $C_V = \operatorname{co}(\{x_1, \dots, x_n\})$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{d+1}$ kompakt und konvex. Die Abbildung $g_V \circ f|_{C_V} : C_V \to C_V$ ist somit stetig und hat – Y ist ja homöomorph zu $\mathbb{R}^{d+1}$ – wegen Satz 5.10.3 einen Fixpunkt $x_V \in C_V \subseteq F$, also

$$g_V \circ f(x_V) = x_V\,.$$

Wegen $f(F) \subseteq E$ ist $\big(f(x_V)\big)_{V \in I}$ ein Netz in der kompakten Menge E. Es hat also ein gegen ein $e \in E$ konvergentes Teilnetz $\big(f(x_{V(j)})\big)_{j \in J}$. Wegen $x - g_V(x) \in V$ für alle $x \in E$ gilt $f(t) - g_V \circ f(t) \in V$ für alle $t \in F$, womit

$$f(x_{V(j)}) - x_{V(j)} = f(x_{V(j)}) - g_{V(j)} \circ f(x_{V(j)}) \in V(j)\,. \tag{5.11.5}$$

Da $\big(f(x_{V(j)})\big)_{j\in J}$ ein Teilnetz von $\big(f(x_V)\big)_{V\in I}$ ist, gibt es für jedes $V \in I$ ein $j_0 \in J$, sodass $V(j) \subseteq V$ für alle $j \succeq j_0$. Da I eine Nullumgebungsbasis abgibt, erhalten wir aus (5.11.5)

$$\lim_{j\in J}\Big(f(x_{V(j)}) - x_{V(j)}\Big) = 0 \quad \text{und somit} \quad \lim_{j\in J} x_{V(j)} = \lim_{j\in J} f(x_{V(j)}) = e\,.$$

Schlussendlich folgt mit der Stetigkeit von f auf F

$$f(e) = f(\lim_{j\in J} x_{V(j)}) = \lim_{j\in J} f(x_{V(j)}) = e\,.$$

❑

Schließlich wollen wir uns dem Fixpunktsatz von Fan-Glicksberg-Kakutani zuwenden. Dieser Satz behandelt spezielle Funktionen, die eine spezielle Menge in die Potenzmenge einer Menge abbilden. Wir benötigen eine Begriffsbildung für derartige Funktionen.

5.11.3 Definition. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ heißt *oberhalbstetig*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem offenen $O \in \mathcal{O}$ mit $f(x) \subseteq O$ ein offenes $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ derart gibt, dass $f(t) \subseteq O$ für alle $t \in U$.

5.11.4 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ zwei kompakte topologische Hausdorffräume und $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ derart, dass $f(x) \subseteq Y$ für alle $x \in X$ abgeschlossen ist. Die Oberhalbstetigkeit von f ist dann äquivalent zur Abgeschlossenheit des Graphen*

$$G(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\} = \bigcup_{x\in X} \{x\} \times f(x)$$

von f als Teilmenge von $X \times Y$.

Beweis. Sei zunächst f oberhalbstetig. Aus $(x, y) \notin G(f)$ folgt $y \notin f(x)$. Da kompakte Hausdorffräume regulär sind, gibt es zwei disjunkte, offene Teilmengen $O, P \subseteq Y$ derart, dass $f(x) \subseteq O$ und $y \in P$. Wegen der Oberhalbstetigkeit gilt $f(t) \subseteq O \subseteq Y \setminus P$ für alle $t \in U$ für eine x enthaltende offene Teilmenge U von X. Wir schließen somit auf

$$(x, y) \in U \times P \quad \text{und} \quad (U \times P) \cap G(f) = \emptyset\,,$$

wodurch sich $(X\times Y)\setminus G(f)$ als offen und infolge $G(f)$ als abgeschlossen erweist.

Falls wir f als nicht oberhalbstetig voraussetzen, so gibt es ein $x \in X$ und ein offenes, $f(x)$ umfassendes $O \subseteq Y$ derart, dass es zu jeder Umgebung $U \ni x$ ein $t \in U$ mit $f(t) \cap (Y \setminus O) \neq \emptyset$ gibt. Letzteres lässt sich auch durch

$$G(f) \cap (U \times (Y \setminus O)) \neq \emptyset$$

ausdrücken. Wegen der Regularität von $(Y, \mathcal{O})$ bildet die Menge $\mathcal{V}(x)$ aller abgeschlossenen Umgebungen von x eine Filterbasis des Umgebungsfilters von x, womit auch

$$\mathcal{C} := \{G(f) \cap (U \times (Y \setminus O)) : U \in \mathcal{V}(x)\}$$

eine Filterbasis in $X \times Y$ abgibt. Wird $G(f)$ als abgeschlossen vorausgesetzt, so impliziert die endliche Durchschnittseigenschaft von $\mathcal{C}$ und die Kompaktheit von $X \times Y$, dass $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$. Jedes Element in diesem Schnitt ist von der Form $(x, y) \in G(f)$, also $y \in f(x)$, mit $y \in Y \setminus O$, was aber $f(x) \subseteq O$ widerspricht. ❑

5.11.5 Satz (*Fixpunktsatz von Fan-Glicksberg-Kakutani*)**.** *Sei X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei K eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von X. Weiters sei $f : K \to \mathcal{P}(K)$ oberhalbstetig und derart, dass $f(x)$ für alle $x \in K$ nichtleer, abgeschlossen und konvex ist.*

Dann gibt es einen Punkt $e \in K$ mit $e \in f(e)$. Man spricht von einem Fixpunkt *der mengenwertigen Abbildung f.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 5.11.2 sei I die Menge aller offenen, konvexen und kreisförmigen Nullumgebungen V in X gerichtet durch $V_1 \preceq V_2 :\Leftrightarrow V_1 \supseteq V_2$. Zu $V \in I$ seien $x_1^V, \dots, x_n^V \in K$ und $\gamma_1^V, \dots, \gamma_n^V : K \to [0, 1]$ wie in Lemma 5.11.1 angewendet auf $E := K$. Anschließend wählen wir beliebige

$$y_1^V \in f(x_1^V) \subseteq K, \dots, y_n^V \in f(x_n^V) \subseteq K$$

und definieren damit eine stetige Funktion $h_V : K \to K$ durch

$$h_V(x) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^V(x)\, y_k^V, \quad x \in K\,.$$

Gemäß Satz 5.11.2 gibt es ein $e_V \in K$ mit $h_V(e_V) = e_V$. Da K kompakt ist, gibt es ein gegen ein $e \in K$ konvergentes Teilnetz $(e_{V(j)})_{j \in J}$. Wir wollen nun $e \in f(e)$ zeigen.

Dazu sei $W \in I$. Da $f(e) + W$ eine offene Obermenge von $f(e)$ ist, gibt es wegen der vorausgesetzten Oberhalbstetigkeit ein $U \in I$ mit $f(t) \subseteq f(e) + W$ für alle $t \in (e + U) \cap K$. Sei $V_0 \in I$ mit $V_0 + V_0 \subseteq U$; vgl. Lemma 2.1.8. Für $V_0 \supseteq V \in I$ und $x \in (e + V_0) \cap K$ gilt

$$h_V(x) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, n\}, \\ \gamma_k^V(x) > 0}} \gamma_k^V(x)\, y_k^V\,,$$

wobei aus $\gamma_k^V(x) > 0$ wegen (5.11.2) folgt, dass $x_k^V - x \in V \subseteq V_0$ und infolge

$$x_k^V - e = (x_k^V - x) + (x - e) \in V_0 + V_0 \subseteq U\,,$$

womit auch $y_k^V \in f(x_k^V) \subseteq f(e) + W$. Wir erhalten aus (5.11.3) wegen der Konvexität von $f(e)$ und W

$$h_V(x) \in \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, n\}, \\ \gamma_k^V(x) > 0}} \gamma_k^V(x)\, (f(e) + W) \subseteq f(e) + W\,.$$

Wegen $e_{V(j)} \xrightarrow{j \in J} e$ gibt es ein $j_0 \in J$ mit $e_{V(j)} \in (e + V_0) \cap K$ für alle $j \succeq j_0$, wobei wir wegen der Teilnetzbedingung j_0 so wählen können, dass $j \succeq j_0$ auch die Inklusion $V(j) \subseteq V_0$ nach sich zieht. Für alle $j \succeq j_0$ gilt dann

$$e_{V(j)} = h_{V(j)}(e_{V(j)}) \in f(e) + W\,,$$

womit $e = \lim_{j \in J_{\succeq j_0}} e_{V(j)}$ im Abschluss von $f(e) + W$ liegt. Da $f(e) + \overline{W}$ als Summe einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge selber abgeschlossen ist, erhalten wir $e \in f(e) + \overline{W}$ und infolge $e - z_W \in \overline{W}$ für ein $z_W \in f(e) \subseteq K$. Wegen der Kompaktheit von $f(e)$ gibt es ein gegen ein $z \in f(e)$ konvergentes Teilnetz $(z_{W(k)})_{k \in L}$ von $(z_W)_{W \in I}$. Da auch $\{\overline{W} : W \in I\}$ eine Nullumgebungsbasis abgibt, folgt schließlich

$$e = z + (e - z) = z + \lim_{k \in L}(e - z_{W(k)}) = z \in f(e)\,.$$

❑

Kapitel 6

Elementare Operatortheorie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Vektorraum. Wenn nichts anderes explizit spezifiziert ist, verstehen wir im Folgenden (Links- bzw. Rechts-) Annihilatoren immer bezüglich dem punktetrennenden Unterraum X' von X^*, d.h. bezüglich der Dualität

$$\langle .,. \rangle : \begin{cases} X \times X' & \to & \mathbb{C} \\ (x, x') & \mapsto & x'(x) \end{cases}$$

6.1 Konjugierte Operatoren

Das folgende Korollar des Satzes von Hahn-Banach ist oft nützlich.

6.1.1 Lemma. *Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\|T\| = \sup \left\{ |\langle Tx, y' \rangle| : x \in X, \|x\| \le 1; y' \in Y', \|y'\| \le 1 \right\} \quad (\in [0, +\infty]) .$$

Auf Grund der Linearität kann man die obigen Suprema genauso nur durch alle $\|x\| < 1$, $\|y'\| < 1$ bzw. $\|x\| = \|y'\| = 1$ laufen lassen.

Beweis. Nach Korollar 5.2.4 gilt für jedes $x \in X$

$$\|Tx\| = \sup \left\{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|y'\| \le 1 \right\} ,$$

und es folgt

$$\|T\| = \sup \left\{ \|Tx\| : \|x\| \le 1 \right\} = \sup \left\{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|x\| \le 1, \ \|y'\| \le 1 \right\} .$$

❑

6.1.2 Satz. *Seien X, Y normierte Räume, und sei $T \in L_b(X, Y)$. Dann gibt es einen Operator $T' \in L_b(Y', X')$, für den gilt*

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad \textit{für alle} \quad x \in X, \ y' \in Y' . \tag{6.1.1}$$

Er ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, und es gilt $\|T'\| = \|T\|$. Der Operator T' heißt der konjugierte *(der duale) Operator von T.*

Beweis. Ist $y' \in Y'$, so definiere eine lineare Abbildung* $T'y' : X \to \mathbb{C}$ durch

$$(T'y')(x) : = y'(Tx),\ x \in X .$$

Als Zusammensetzung der stetigen Abbildungen y' und T ist auch $T'y'$ stetig. Es gilt nach Definition

$$\langle x, T'y' \rangle = (T'y')(x) = y'(Tx) = \langle Tx, y' \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in X, y' \in Y' ,$$

d.h. die Eigenschaft (6.1.1) ist erfüllt. Da X punktetrennend auf X' operiert, ist $T'y'$ durch (6.1.1) eindeutig bestimmt. Sind $y_1', y_2' \in Y'$, so gilt $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \langle x,\ T'(\alpha y_1' + \beta y_2') \rangle &= \langle Tx,\ \alpha y_1' + \beta y_2' \rangle = \alpha \langle Tx, y_1' \rangle + \beta \langle Tx,\ y_2' \rangle \\ &= \alpha \langle x, T'y_1' \rangle + \beta \langle x, T'y_2' \rangle = \langle x,\ \alpha T'y_1' + \beta T'y_2' \rangle , \end{aligned}$$

also ist $T' : Y' \to X'$ linear. Schließlich ist nach Definition der Norm auf X'

$$\|T'y'\| = \sup \left\{ |\langle x, T'y' \rangle| : \|x\| \le 1 \right\} ,$$

und wir erhalten mit Lemma 6.1.1

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ |\langle Tx, y' \rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y'\| \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle x, T'y' \rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y'\| \le 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|T'y'\| : \|y'\| \le 1 \right\} = \|T'\| . \end{aligned}$$

❑

An dieser Stelle sei bemerkt, dass T' nichts anderes ist als die Einschränkung auf Y' der Transponierten Abbildung $T^t : Y^* \to X^*$, wie sie aus der Linearen Algebra bekannt ist.

6.1.3 Lemma. *Für normierte Räume X, Y, Z, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $S, T \in L_b(X, Y)$ und $R \in L_b(Y, Z)$ gilt*

$$\mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_{X'},\ (R \circ T)' = T' \circ R',\ (\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S' . \tag{6.1.2}$$

Ist dabei die Abbldung $T : X \to Y$ bijektiv und beschränkt invertierbar, so ist auch $T' : Y' \to X'$ bijektiv und beschränkt invertierbar mit $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Beweis. Die Eigenschaften in (6.1.2) überprüft man elementar mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage in Satz 6.1.2. Ist $T : X \to Y$ bijektiv und beschränkt invertierbar, also $T^{-1} \in L_b(Y, X)$, so folgt aus $T' \circ (T^{-1})' = (T^{-1} \circ T)' = (\mathrm{id}_X)' = \mathrm{id}_{X'}$ und $(T^{-1})' \circ T' = (T \circ T^{-1})' = (\mathrm{id}_Y)' = \mathrm{id}_{Y'}$ die Bijektivität und beschränkte Invertierbarkeit von T' mit $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

❑

Ist Ω eine Menge und $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, dann bezeichne mit M_ϕ die Abbildung, die einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ die Funktion $M_\phi f := \phi \cdot f : \Omega \to \mathbb{C}$ zuweist. Man spricht von dem *Multiplikationsoperator mit Symbol ϕ* .

Natürlich werden die Eigenschaften von M_ϕ davon abhängen, welche Eigenschaften ϕ hat, und zwischen welchen Räumen man M_ϕ betrachtet.

*Hier hat T' zunächst keine tiefere Bedeutung. $T'y'$ nur der Name dieser Abbildung.

6.1.4 Beispiel. Sei Ω eine Menge versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, μ ein σ-endliches Maß auf Ω, und $\phi \in L^\infty(\mu)$. Dann bildet M_ϕ klarerweise den Raum $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ in sich selbst ab. Er ist sogar ein beschränkter Operator, denn ($f \in L^p(\mu)$)

$$\|M_\phi f\|_p = \Big(\int_\Omega |\phi f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\|\phi\|_\infty^p \int_\Omega |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \|\phi\|_\infty \cdot \|f\|_p, \; p < \infty \,,$$

$$\|M_\phi f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |\phi f| \leq \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |\phi| \cdot \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |f| = \|\phi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \,.$$

Wir sehen, dass $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Tatsächlich gilt $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Für den Fall $p = \infty$ gilt das wegen $M_\phi 1 = \phi$. Im Fall $p < \infty$ nehme man ein $\epsilon > 0$, und wähle eine Menge $\Delta \subseteq \Omega$ mit $\mu(\Delta) > 0$ und $|\phi(x)| \geq \|\phi\|_\infty - \epsilon$, $x \in \Delta$. Eine solche Menge Δ existiert nach der Definition des essentiellen Supremums. Wegen der σ-Endlichkeit von μ können wir Δ nötigenfalls kleiner machen, um auch $\mu(\Delta) < +\infty$ zu gewährleisten.

Für die Funktion $f := \mu(\Delta)^{-\frac{1}{p}} \chi_\Delta$ gilt nun

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_\Delta |\mu(\Delta)^{-\frac{1}{p}}|^p \, d\mu = 1 \,,$$

$$\|M_\phi f\|_p^p = \int_\Omega |\phi f|^p \, d\mu = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta |\phi|^p \, d\mu \geq (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^p \,.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|M_\phi\|_p \geq \|\phi\|_\infty$. //

6.1.5 Beispiel. Sei μ ein σ-endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, $\phi \in L^\infty(\mu)$, und $1 < p < \infty$. Betrachte den Multiplikationsoperator $M_\phi \in L_b(L^p(\mu))$. Bezeichnet $\Phi : L^q(\mu) \to L^p(\mu)'$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ den Isomorphismus

$$(\Phi g)f := \int_\Omega fg \, d\mu, \quad f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$$

aus Beispiel 2.3.1, so ist M_ϕ' aufgefasst als Abbildung von $L^q(\mu)$ in sich gleich $M_\phi \in L_b(L^q(\mu))$, was durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulicht wird.

$$\begin{tikzcd} L^p(\mu)' \arrow[r, "M_\phi'"] & L^p(\mu)' \\ L^q(\mu) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "M_\phi"'] & L^q(\mu) \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Um dies einzusehen, sei $g \in L^q(\mu)$ und $f \in L^p(\mu)$ gegeben. Dann gilt

$$\big(M_\phi'(\Phi g)\big)f = (\Phi g)(M_\phi f) = \int_\Omega M_\phi f \cdot g \, d\mu = \int_\Omega f \cdot M_\phi g \, d\mu = \big(\Phi(M_\phi g)\big)f \,.$$

//

6.1.6 Beispiel. Bekannterweise lässt sich der Dualraum von $(c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}),\|.\|_\infty)$ mit $(\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C}),\|.\|_1)$ identifizieren, indem man nachweist, dass

$$\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \ni (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n) \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})' \tag{6.1.3}$$

einen isometrischen Isomorphismus abgibt. Der Dualraum von $(\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C}),\|.\|_1)$ ist isometrisch isomorph zu $(\ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})\|.\|_\infty)$. Die dazugehörige Abbildung ist

$$\ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \ni (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\beta_n) \in \ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})'\,. \tag{6.1.4}$$

Der kanonischen Einbettung $\iota : c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})'' \cong \ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ entspricht dabei die natürliche Inklusion von $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ in $\ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Sei $(X,\|.\|)$ ein beliebiger Banachraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine festgehaltene, beschränkte Folge in X. Die Abbildung

$$T : \ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to X \quad \text{definiert durch} \quad T((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n$$

ist wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n$ wohldefiniert und offenbar linear. Wegen $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n \cdot x_n\| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n|$ und $\|T((\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}})\| = \|x_k\|$ für $k \in \mathbb{N}$ ist T beschränkt mit $\|T\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|$.

Identifizieren wir $\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ mit $\ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ vermöge (6.1.4), so lässt sich $T' : X' \to \ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ wegen

$$\langle(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}, T'(x')\rangle = \langle\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n, x'\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x'(x_n) = \langle(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\rangle$$

für $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})$, $x' \in X'$ explizit ausdrücken durch $T'(x') = (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Man beachte dabei, dass $T'(X') \subseteq c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ $(\subseteq \ell_\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}))$ wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. In dem Fall gilt für die Funktion $S : X' \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$, $S(x') = T'(x') = (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ unter Identifikation von $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})'$ mit $\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ vermöge (6.1.3)

$$\begin{aligned}\langle x', S'((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}})\rangle = \langle S(x'), (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x'(x_n) \\ &= \langle\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n, x'\rangle = \langle x', \iota(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n)\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung ist. Also folgt für $S' : \ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to X''$, dass $S'((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \iota(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n) \in \iota(X)$ und somit $S' = \iota \circ T$. //

6.1.7 Proposition. *Seien X, Y normierte Räume und $T \in L_b(X,Y)$. Dann gilt*

$$\ker T' = (\operatorname{ran} T)^\perp, \quad \ker T = {}^\perp(\operatorname{ran} T')\,.$$

Beweis. Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} y' \in \ker T' \iff T'y' = 0 &\iff \Big(\forall\, x \in X : \langle x, T'y'\rangle = 0\Big) \\ &\iff \Big(\forall\, x \in X : \langle Tx, y'\rangle = 0\Big) \iff y' \in (\operatorname{ran} T)^\perp \end{aligned}$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} x \in \ker T \iff Tx = 0 \iff & \Big(\forall\, y' \in Y' : \langle Tx, y'\rangle = 0\Big) \\ \iff \Big(\forall\, y' \in Y' : \langle x, T'y'\rangle = 0\Big) \iff & x \in {}^{\perp}(\operatorname{ran} T') \end{aligned}$$

❑

6.1.8 Korollar. *Seien X, Y normierte Räume und $T \in L_b(X,Y)$. Dann gilt:*

(i) $\ker T'$ $(\subseteq Y')$ *ist w^*-abgeschlossen.*

(ii) *T' ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{ran} T$ dicht in Y bezüglich der Norm oder äquivalent dazu dicht bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(Y,Y')$ ist.*

(iii) *T ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{ran} T'$ dicht in X' bezüglich der w^*-Topologie $\sigma(X',X)$ ist.*

Beweis.
`ad`(i): Als Annihilator von $\operatorname{ran} T$ ist $\ker T'$ jedenfalls $\sigma(Y',Y)$-abgeschlossen.

`ad`(ii): Wegen Satz 5.3.8 gilt $\overline{\operatorname{ran} T}^{\|\cdot\|} = \overline{\operatorname{ran} T}^{\sigma(Y,Y')}$, und wegen Satz 5.4.7 haben wir

$$\overline{\operatorname{ran} T}^{\sigma(Y,Y')} = {}^{\perp}\big((\operatorname{ran} T)^{\perp}\big) = {}^{\perp}(\ker T')\,.$$

Also gilt $\overline{\operatorname{ran} T} = Y$ genau dann, wenn $\ker T' = \{0\}$.

`ad`(iii): Wegen Satz 5.4.7 gilt $\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)} = \big({}^{\perp}\operatorname{ran} T'\big)^{\perp} = (\ker T)^{\perp}$. Aus $\ker T = \{0\}$ folgt somit $\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)} = X'$. Umgekehrt folgt aus $\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)} = X'$ wegen der $\sigma(X,X')$-Abgeschlossenheit von $\ker T$ mit Satz 5.4.7 aus dieser Gleichheit $\{0\} = {}^{\perp}(X') = {}^{\perp}(\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)}) = {}^{\perp}((\ker T)^{\perp}) = \ker T$.

❑

6.1.9 Proposition. *Sei X ein normierter Raum und M ein linearer Unterraum von X.*

(i) *Bezeichne $\iota_M : M \to X$ die kanonische Einbettungsabbildung $\iota_M(x) := x$, $x \in M$. Weiters sei $\pi_{M^\perp} : X' \to X'/M^\perp$ die kanonische Projektion, und $\sigma : X'/M^\perp \to M'$, $x' + M^\perp \mapsto x'|_M$ der Isomorphismus aus Proposition 5.4.8. Dann gilt $\iota'_M = \sigma \circ \pi_{M^\perp}$, d.h.*

$$\begin{tikzcd} X & M \arrow[l, dotted, "\iota_M"'] \\ X' \arrow[r, "\iota'_M"] \arrow[d, equal] & M' \arrow[d, bend left, "\sigma^{-1}"] \\ X' \arrow[r, "\pi_{M^\perp}"'] & X'/M^\perp \arrow[u, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

(ii) *Sei M obendrein abgeschlossen, und bezeichne $\pi_M : X \to X/M$ die kanonische Projektion $\pi_M(x) := x + M$. Weiters sei $\iota_{M^\perp} : M^\perp \to X'$ die*

kanonische Einbettungsabbildung, und $\tau : (X/M)' \to M^\perp,\ f \mapsto f \circ \pi_M$ *der Isomorphismus aus Proposition 5.4.8. Dann gilt* $\pi'_M = \iota_{M^\perp} \circ \tau$, *d.h.*

$$\begin{tikzcd}
X/M & X \arrow[l, dotted, "\pi_M"'] \\
(X/M)' \arrow[r, "\pi'_M"] \arrow[d, shift right, "\tau"'] & X' \arrow[d, equal] \\
M^\perp \arrow[r, "\iota_{M^\perp}"'] \arrow[u, shift right, "\tau^{-1}"'] & X'
\end{tikzcd}$$

Beweis.
`ad`(i): Für $m \in M$ und $x' \in X'$ gilt

$$\begin{aligned}
\iota'_M(x')\ m = \langle m, \iota'_M x' \rangle_M = \langle \iota_M m, x' \rangle_X = \langle m, x' \rangle_X = x'(m) = x'|_M(m) \\
= \big(\sigma(x' + M^\perp)\big)\ m = \big(\sigma \circ \pi_{M^\perp}(x')\big)\ m\,.
\end{aligned}$$

`ad`(ii): Für $x \in X$ und $f \in (X/M)'$ gilt

$$\begin{aligned}
\pi'_M(f)\ x = \langle x, \pi'_M f \rangle_X = \langle \pi_M x, f \rangle_{X/M} = f(\pi_M x) \\
= \tau(f)\ x = (\iota_{M^\perp} \circ \tau(f))\ x\,.
\end{aligned}$$

❑

6.2 Der Satz vom abgeschlossenen Bild

Der folgende Satz zeigt einmal mehr, dass die Vollständigkeit von Banachräumen eine ganz starke Bedingung ist.

6.2.1 Satz (vom abgeschlossenen Bild)**.** *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in L_b(X, Y)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\operatorname{ran} T$ *ist* $\|.\|_Y$*-abgeschlossen in* Y.

(ii) $\operatorname{ran} T'$ *ist* w^**-abgeschlossen in* X'.

(iii) $\operatorname{ran} T'$ *ist* $\|.\|_{X'}$*-abgeschlossen in* X'.

Dabei ist T *genau dann bijektiv, wenn* T' *bijektiv ist.*

Die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist wegen $\sigma(X', X) \subseteq \mathcal{T}(\|.\|)$ trivial.

Im Beweis benötigen wir folgendes Resultat.

6.2.2 Lemma. *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in L_b(X, Y)$. *Ist* $T' : Y' \to X'$ *injektiv und ist die Bijektion* $(T')^{-1} : \operatorname{ran} T' \to Y'$ *beschränkt, dann ist* T *surjektiv.*

Beweis. Da $(T')^{-1}$ nicht der Nulloperator ist, gilt $c := \|(T')^{-1}\| > 0$. Für $y' \in Y'$ erhalten wir

$$\|y'\| = \|(T')^{-1} T' y'\| \leq c \cdot \|T' y'\|\,. \tag{6.2.1}$$

Indem wir cT betrachten, können wir $c = 1$ annehmen. Bezüglich der Dualität (Y, Y') gilt (siehe Beispiel 5.4.5)

$$\begin{aligned} T(U_1^X(0))^\circ &= \{y' \in Y' : \operatorname{Re}\langle (Tx), y' \rangle \le 1,\ x \in U_1^X(0)\} \\ &= \{y' \in Y' : \operatorname{Re}\langle x, T'y' \rangle \le 1,\ x \in U_1^X(0)\} \\ &= \{y' \in Y' : T'y' \in U_1^X(0)^\circ\} = (T')^{-1}(K_1^{X'}(0)) \,. \end{aligned}$$

Gemäß (6.2.1) folgt aus $T'y' \in K_1^{X'}(0)$ aber $\|y'\| \le \|T'y'\| \le 1$, also $T(U_1^X(0))^\circ = (T')^{-1}(K_1^{X'}(0)) \subseteq K_1^{Y'}(0)$. Zusammen mit Satz 5.3.8 und dem Bipolarsatz, Satz 5.4.7, folgt daraus

$$\overline{T(U_1^X(0))}^{\|.\|} = \overline{T(U_1^X(0))}^{\sigma(Y,Y')} = {}^\circ(T(U_1^X(0))^\circ) \supseteq {}^\circ K_1^{Y'}(0) = K_1^Y(0) \,.$$

Wegen Lemma 4.3.3 gilt dann sogar $T(U_1^X(0)) \supseteq U_1^Y(0)$ und infolge $T(X) = Y$. ❑

Beweis (von Satz 6.2.1). Wir setzen anfangs $\ker T = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran} T}^{\|.\|} = Y$ voraus, was nach Korollar 6.1.8 zu $\ker T' = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran} T'}^{\sigma(X',X)} = X'$ äquivalent ist.

Im Fall eines $\|.\|$-abgeschlossenen $\operatorname{ran} T$ erhalten wir $\operatorname{ran} T = Y$, womit sich T als bijektiv herausstellt. Wegen des Satzes von der offenen Abbildung, Korollar 4.3.4, ist $T^{-1} : Y \to X$ beschränkt und T' gemäß Lemma 6.1.3 bijektiv, wobei $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. Trivialerweise ist dann $\operatorname{ran} T' = X'$ $w*$-abgeschlossen und infolge $\|.\|_{X'}$-abgeschlossen.

Im Fall eines $\|.\|_{X'}$-abgeschlossen $\operatorname{ran} T'$ ist $T' : Y' \to \operatorname{ran} T'$ $(\subseteq X')$ bijektiv und nach dem Satz von der offenen Abbildung $(T')^{-1} : \operatorname{ran} T' \to Y'$ beschränkt. Nach Lemma 6.2.2 ist T surjektiv und daher $\operatorname{ran} T = Y$ $\|.\|$-abgeschlossen.

Für den allgemeinen Fall betrachten wir die Räume $M := \ker T$ und $Z := \overline{\operatorname{ran} T}^{\|.\|}$. Diese sind abgeschlossene Unterräume der Banachräume X und Y und folglich auch X/M sowie Z Banachräume. Sei $S : X/M \to Z$ jener lineare Operator, der $T = \iota_Z \circ S \circ \pi_M$ erfüllt, also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_M"'] & Y \\ X/M \arrow[r, "S"'] & Z \arrow[u, "\iota_Z"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist S stetig und daher beschränkt; vgl. Satz 1.4.1, (FI_3). Außerdem ist er injektiv und hat dichtes Bild $\operatorname{ran} S = \operatorname{ran} T$ in Z. Also erfüllt S die zusätzlichen Voraussetzungen, die wir oben gemacht haben. Insbesondere ist $\operatorname{ran} S$ $\|.\|$-abgeschlossen genau dann, wenn $\operatorname{ran} S'$ $\|.\|$-abgeschlossen ist. In diesem Fall sind S und S' sogar bijektiv.

Geht man in diesem Diagramm zu den konjugierten Abbildungen über, so erhält man mit Proposition 6.1.9

$$\begin{tikzcd}
 & X' & Y' \arrow[l, "T'"'] \arrow[dd, "\iota'_Z"] \arrow[dr, "\pi_{Z^\perp}"] & \\
M^\perp \arrow[ur, "\iota_{M^\perp}"] & & & Y'/Z^\perp \arrow[dl, "\sigma"] \\
 & (X/M)' \arrow[ul, "\tau"] \arrow[uu, "\pi'_M"] & Z' \arrow[l, "S'"] &
\end{tikzcd} \tag{6.2.2}$$

Hier ist S' injektiv. Weiters gilt wegen der Surjektivität von $\iota'_Z = \sigma \circ \pi_{Z^\perp}$

$$\pi'_M(\operatorname{ran} S') = \pi'_M \circ S' \circ \iota'_Z(Y') = T'(Y') = \operatorname{ran} T' .$$

Da τ (siehe Proposition 5.4.8) und $\iota_{M^\perp}$ isometrisch sind, ist es auch π'_M. Damit ist $\operatorname{ran} S'$ genau dann als normierter Raum vollständig, wenn $\operatorname{ran} T'$ es ist. Da X' und $(X/M)'$ Banachräume sind, ist daher die $\|.\|$-Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran} S'$ in $(X/M)'$ äquivalent zu der von $\operatorname{ran} T'$ in X'.

Ist $\operatorname{ran} T'$ also $\|.\|$-abgeschlossen, so auch $\operatorname{ran} S'$ und infolge auch $\operatorname{ran} S = \operatorname{ran} T$. Umgekehrt folgt aus der $\|.\|$-Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran} T = \operatorname{ran} S$ jene von $\operatorname{ran} S'$ und damit auch die von $\operatorname{ran} T'$. Zusätzlich ist S' bijektiv, wodurch gemäß (6.2.2)

$$\operatorname{ran} T' = \pi'_M(\operatorname{ran} S') = \pi'_M((X/M)') = \iota_{M^\perp} \circ \tau((X/M)') = \iota_{M^\perp}(M^\perp) = M^\perp .$$

Als Annihilator ist $\operatorname{ran} T' = M^\perp$ ein $\sigma(X', X)$-abgeschlossener Unterraum von X'.

❑

6.3 Der Satz von Krein-Smulian

Der Satz von Krein-Smulian besagt, dass eine konvexe Teilmenge C des Dualraumes X' eines Banachraumes $(X, \|.\|)$ genau dann schwach-* abgeschlossen ist, wenn $C \cap K_r^{X'}(0)$ für alle $r > 0$ schwach-* abgeschlossen ist. Dass aus der schwach-* Abgeschlossenheit von C jene von $C \cap K_r^{X'}(0)$ folgt, ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz 5.5.6. Für die Umkehrung müssen wir etwas weiter ausholen.

Zunächst sei $I := c_0(\mathbb{N}, X)$ die Menge aller möglichen Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$ sei $S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} : X' \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der Operator S aus Beispiel 6.1.6, also

$$S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(x') = (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}} .$$

Mit $\mathcal{T}$ bezeichnen wir nun die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen $S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Diese Topologie wird auch *beschränkte schwach-* Topologie* bezeichnet. Gemäß Bemerkung 5.0.3 ist dann $(X', \mathcal{T})$ eine lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

6.3.1 Lemma. *Für die beschränkte schwach-* Topologie gilt $(X', \mathcal{T})' = \iota(X)$, wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettung bezeichnet. Insbesondere ist die beschränkte schwach-* Topologie feiner als die schwach-* Topologie, also $\mathcal{T} \supseteq \sigma(X', X)$.*

Beweis. Zu $x \in X$ gibt es sicherlich eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_1 = x$. Für jedes bezüglich $\mathcal{T}$ konvergente Netz $(f_j)_{j\in J}$ mit Grenzwert f in X' folgt wegen den Eigenschaften von initialen Topologien

$$|\iota(x)(f_j) - \iota(x)(f)| = |(f_j - f)(x_1)| \leq \|S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(f_j - f)\|_\infty \stackrel{j\in J}{\longrightarrow} 0\,.$$

Also gilt $\iota(x) \in (X', \mathcal{T})'$ und somit $\iota(X) \subseteq (X', \mathcal{T})'$.

Ist umgekehrt $F \in (X', \mathcal{T})'$, so gilt $|F(f)| \leq 1$ für alle $f \in U$ mit einer geeigneten Nullumgebung U bzgl. $\mathcal{T}$; vgl. Proposition 2.1.14. Wegen (5.0.1) können wir annehmen, dass

$$U = S^{-1}_{(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}}(K_1^{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})}(0)) \cap \cdots \cap S^{-1}_{(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}}(K_1^{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})}(0))\,.$$

mit gewissen Nullfolgen $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$. Mischen wir diese Nullfolgen zu der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $y_{m\cdot(j-1)+k} = x_j^k$ für $k = 1\dots, m$ und $j \in \mathbb{N}$, so erhalten wir wieder eine Nullfolge. Wegen

$$\begin{aligned} f \in U &\Leftrightarrow \|(f(x_n^k))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1 \text{ für } k = 1\dots, m \\ &\Leftrightarrow \|(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow f \in S^{-1}_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(K_1^{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})}(0)) \end{aligned}$$

gilt $U = S^{-1}_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(K_1^{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})}(0))$. Für beliebiges $f \in X'$ und $\delta > \|(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$ gilt $\|((\frac{1}{\delta}\cdot f)(y_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq 1$, womit $|F(\frac{1}{\delta}\cdot f)| \leq 1$, also $|F(f)| \leq \delta$. Für $\delta \searrow \|(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$ folgt

$$|F(f)| \leq \|(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty, \quad f \in X'\,.$$

Folglich ist auf dem Bildraum $S_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(X')$ $(\subseteq c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}))$ durch $G((f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}) := F(f)$ ein durch 1 beschränktes lineares Funktional wohldefiniert, welches sich normtreu zu einem beschränkten linearen Funktional, ebenfalls G genannt, auf ganz $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ fortsetzen lässt; vgl. Korollar 5.2.4. Also gibt es ein $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ mit

$$G((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot \beta_n \quad \text{für alle} \quad (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})\,.$$

Wie in Beispiel 6.1.6 festgestellt, gilt $S'_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\ell_1(\mathbb{N},\mathbb{C})) \subseteq \iota(X)$ $(\subseteq X'')$ mit $S'_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(G) = S'_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \iota(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot y_n)$, wodurch

$$F(f) = G((f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}) = G(S_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(f)) = \big(S'_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}(G)\big)(f) = \iota(\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot y_n)(f)$$

für alle $f \in X'$. Also gilt $F \in \iota(X)$.

❑

6.3.2 Lemma. *Für jedes beschränkte $B \subseteq X'$ gilt $\mathcal{T}|_B = \sigma(X', X)|_B$.*

Beweis. In Lemma 6.3.1 haben wir gesehen, dass $\mathcal{T} \supseteq \sigma(X', X)$, womit auch $\mathcal{T}|_B \supseteq \sigma(X', X)|_B$.

Für $x \in X$ ist $X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ stetig bezüglich $\sigma(X', X)$. Folglich ist für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ und jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Abbildung $S^N_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$: $X' \to c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ definiert durch

$$S^N_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(f) = (f(x_1), \dots, f(x_N), 0, \dots)$$

ebenfalls stetig bezüglich $\sigma(X', X)$. Offenbar ist dann $S^N_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B : B \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ stetig bezüglich $\sigma(X', X)|_B$. Falls $\|f\| \leq C$ für alle $f \in B$, so gilt

$$\|S^N_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B(f) - S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B(f)\|_\infty = \sup_{n>N} |f(x_n)| \leq C \cdot \sup_{n>N} \|x_n\| \,.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $(S^N_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B)_{N\in\mathbb{N}}$ auf B gleichmäßig gegen $S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B$, womit $S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B : B \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ stetig bezüglich $\sigma(X', X)|_B$ ist.

Andererseits ist $\mathcal{T}|_B$ die gröbste Topologie auf X' derart, dass $S_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}|_B : B \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ für alle Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X stetig ist; siehe Korollar 1.2.4. Somit gilt auch $\mathcal{T}|_B \subseteq \sigma(X', X)|_B$.

❑

6.3.3 Lemma. *Ein $O \subseteq X'$ ist genau dann offen bezüglich der beschränkten schwach-* Topologie, wenn $O \cap B \in \sigma(X', X)|_B$ für alle beschränkten $B \subseteq X'$. Also ist $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf X' bezüglich der Abbildungen $\iota_B : (B, \sigma(X', X)|_B) \to X'$ mit $\iota_B(x) = x$, $x \in B$, wobei B alle beschränkten Teilmengen von X' durchläuft.*

Beweis. Gemäß Lemma 6.3.2 folgt für $O \in \mathcal{T}$ und für beschränktes $B \subseteq X'$, dass $O \cap B \in \mathcal{T}|_B = \sigma(X', X)|_B$.

Sei umgekehrt $O \subseteq X'$ mit $O \cap B \in \sigma(X', X)|_B$ für alle beschränkten $B \subseteq X'$. Wir nehmen zunächst $0 \in O$ an und zeigen, dass O eine Nullumgebung bezüglich $\mathcal{T}$ ist. Wegen $O \cap K_1^{X'}(0) \in \sigma(X', X)|_{K_1^{X'}(0)}$ gibt es ein endliches $F_0 \subseteq X$ mit

$$0 \in \{f \in X' : |f(x)| \leq 1,\, x \in F_0\} \cap K_1^{X'}(0) \subseteq O \,,$$

da $\{\{f \in X' : |f(x)| \leq 1,\, x \in F\} : F \subseteq X \text{ endlich}\}$ eine Nullumgebungsbasis bezüglich $\sigma(X', X)$ abgibt. Wir wollen induktiv für $n \in \mathbb{N}$ endliche $F_n \subseteq K^X_{\frac{1}{n}}(0)$ derart konstruieren, dass

$$\{f \in X' : |f(x)| \leq 1,\, x \in F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_n\} \cap K^{X'}_{n+1}(0) \subseteq O \,. \tag{6.3.1}$$

Angenommen, $m \in \mathbb{N}$ und $F_k \subseteq K^X_{\frac{1}{k}}(0)$ sind für $0 < k < m \in \mathbb{N}$ so, dass (6.3.1) für $n = m - 1$ zutrifft. Wäre

$$K(F) := \{f \in X' : |f(x)| \leq 1,\, x \in \bigcup_{0\leq j<m} F_j \cup F\} \cap K^{X'}_{m+1}(0) \setminus (O \cap K^{X'}_{m+1}(0))$$

für alle endlichen $F \subseteq K^X_{\frac{1}{m}}(0)$ nichtleer, so würde $\{K(F) : F \subseteq K^X_{\frac{1}{m}}(0) \text{ endlich}\}$ ein System $\sigma(X', X)|_{K^{X'}_{m+1}(0)}$-abgeschlossener Teilmengen der $\sigma(X', X)$-kompakten Menge $K^{X'}_{m+1}(0)$ abgeben; vgl. Satz 5.5.6. Wegen $K(F \cup G) = K(F) \cap K(G)$ hat dieses die endliche Durchschnittseigenschaft, womit

$$\bigcap_{F\subseteq K^X_{\frac{1}{m}}(0) \text{ endlich}} K(F) \neq \emptyset \,.$$

Da $F = \{x\}$ für jedes $x \in K^X_{\frac{1}{m}}(0)$ hier zulässig ist, folgt für $f \in X'$ aus diesem Schnitt $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq \frac{1}{m}$, was $\|f\| \leq m$ nach sich zieht. Somit liegt f auch in der Menge links in (6.3.1) für $n = m-1$, was $K(F) \cap O = \emptyset$

für jedes endliche $F \subseteq K^X_{\frac{1}{m}}(0)$ widerspricht. Also gilt $K(F) = \emptyset$ für mindestens ein endliches $F \subseteq K^X_{\frac{1}{m}}(0)$. Setzen wir $F_m := F$ für eines dieser F, so bedingt $K(F_m) = \emptyset$ die Gültigkeit von (6.3.1) auch für $n = m$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die im Falle eines unendlichen $\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} F_k$ diese Menge injektiv durchläuft, und sonst diese Menge durchläuft und ab einem gewissen Index identisch gleich Null ist. In jedem Fall ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wobei wegen (6.3.1), und weil jedes $f \in X'$ in $K^{X'}_{n+1}(0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ liegt,

$$\begin{aligned} S^{-1}_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(K_1^{c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})}(0)) &= \{f \in X' : |f(x_n)| \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{f \in X' : |f(x)| \leq 1,\, x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} F_k\} \subseteq O\,. \end{aligned}$$

Somit ist O eine Nullumgebung bezüglich $\mathcal{T}$.

Für allgemeines $O \subseteq X'$ mit $O \cap B \in \sigma(X', X)|_B$ für alle beschränkten $B \subseteq X'$ und $x \in O$ gilt $0 \in O - x \subseteq X'$ mit $(O - x) \cap B = (O \cap (B + x)) - x \in \sigma(X', X)|_{B+x} - x = \sigma(X', X)|_B$ für alle beschränkten $B \subseteq X'$. Nach dem oben behandelten Fall ist $O - x$ eine Nullumgebung und infolge O eine x-Umgebung bezüglich $\mathcal{T}$. Also ist O Umgebung bezüglich $\mathcal{T}$ aller ihrer Punkte und somit in $\mathcal{T}$.

❑

6.3.4 Satz (*von Krein-Smulian*)**.** *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Ein konvexes $C \subseteq X'$ ist genau dann schwach-* abgeschlossen, wenn $K_r^{X'}(0) \cap C$ für alle $r > 0$ schwach-* abgeschlossen ist.*

Beweis. Es reicht von der schwach-* Abgeschlossenheit der Mengen $C \cap K_r^{X'}(0)$, $r > 0$, auf die schwach-* Abgeschlossenheit von C zu schließen. Für ein beliebiges beschränktes $B \subseteq X'$ gilt $B \subseteq K_r^{X'}(0)$ für hinreichend großes $r > 0$, womit $C \cap B = (C \cap K_r^{X'}(0)) \cap B$ eine abgeschlossene und infolge $(X' \setminus C) \cap B = B \setminus (C \cap B)$ eine offene Teilmenge von B bezüglich $\sigma(X', X)|_B$ ist.

Nach Lemma 6.3.3 ist damit $X' \setminus C$ offen und infolge C abgeschlossen bezüglich der beschränkten schwach-* Topologie $\mathcal{T}$. In Lemma 6.3.1 haben wir erkannt, dass $(X, \mathcal{T})' = \iota(X)$. Aus Satz 5.3.8 folgt daher

$$C = \overline{C}^{\mathcal{T}} = \overline{C}^{\sigma(X',X)}\,,$$

womit C schwach-* abgeschlossen ist.

❑

6.4 Das Spektrum

Sei X ein Banachraum. Betrachte $L_b(X) := L_b(X, X)$. Dann ist $L_b(X)$ versehen mit der Operatornorm nicht nur ein Banachraum, sondern auch eine Algebra: Für $S, T \in L_b(X)$ definiere

$$S \cdot T : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & S(T(x)) \end{cases}$$

Klarerweise ist diese Operation mit den Vektorraumoperationen verträglich, in dem Sinne, dass

$$S(T+R) = ST + SR,\ (S+T)R = SR + TR,\ \lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T)\,,$$

und assoziativ,

$$S(TR) = (ST)R\,.$$

Sie ist auch mit der Norm von $L_b(X)$ verträglich, denn es gilt

$$\|(S\cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\cdot\|Tx\| \leq \|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|\,,$$

also haben wir

$$\|S\cdot T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|\,.$$

Gemäß der folgenden Definition ist $L_b(X)$ versehen mit der Hintereinanderausführung eine sogenannte Banachalgebra. Weil die spektralen Eigenschaften von Elementen $T \in L_b(X)$, die uns hier interessieren, nur von der Tatsache abhängen, dass es sich um eine Banachalgebra handelt, wollen wir in diesem Abschnitt diese allgemeineren Objekte studieren.

6.4.1 Definition. Sei $A \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$.

(*i*) Ist A versehen mit einer bilinearen Abbildung

$$A\times A \to A,\quad (a,b)\mapsto ab\,,$$

die assoziativ ist, also

$$a(bc) = (ab)c \quad \text{für alle} \quad a,b,c\in A\,,$$

so nennt man A eine *Algebra*.

(*ii*) Ein $e \in A$ heißt *Einselement* einer Algebra A, falls

$$ae = ea = a \quad \text{für alle} \quad a \in A\,.$$

(*iii*) Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$ab = ba \quad \text{für alle} \quad a,b\in A\,.$$

(*iv*) Eine *Unteralgebra* B einer Algebra A ist ein linearer Unterraum von A, der unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

(*v*) Ist A mit einer Norm $\|.\|$ derart versehen, dass

$$\|ab\| \leq \|a\|\cdot\|b\| \quad \text{für alle} \quad a,b\in A\,,$$

so spricht man von einer *normierten Algebra*. Ist obendrein $(A,\|.\|)$ ein Banachraum, so spricht man von einer *Banachalgebra*.

(*vi*) Ist A eine Banachalgebra und $e \in A$ ein Einselement, so heißt selbiges *normiert*, falls $\|e\| = 1$. In dem Fall spricht man von einer Banachalgebra mit Eins.

Wir beschränken uns im folgenden auf Algebren über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Viele, wenn auch nicht alle, Beispiele und Resultate lassen sich auch für Algebren über $\mathbb{R}$ herleiten.

Eine Algebra ist also nichts anderes als ein *Ring*, der noch zusätzlich eine Vektorraumstruktur hat.

6.4.2 Bemerkung.

(*i*) Sei A eine Algebra. Ist $a \in A$, so folgt für irgendein $x \in A$, $0a = (x-x)a = (xa)-(xa) = 0 = (ax)-(ax) = a(x-x) = a0$. Also ist immer $0a = a0 = 0$. Wegen $A \neq \{0\}$ kann 0 kein Einselement sein.

(*ii*) Einselemente, falls vorhanden, sind offensichtlich eindeutig, denn ist mit e auch $\tilde{e}$ ein solches, so gilt $e = e\tilde{e} = \tilde{e}$.

(*iii*) Eine ganz wichtige Eigenschaft von Banachalgebren ist die Stetigkeit der Abbildung $(a, b) \mapsto ab$, wenn man $A \times A$ mit der Maximumsnorm oder mit der Summennorm, also mit der Produkttopologie, versieht. Konvergiert nämlich $(a_n, b_n) \to (a, b)$ in $A \times A$, also

$$\|(a_n, b_n) - (a, b)\| = \max(\|a_n - a\|, \|b_n - b\|) \to 0,\ n \to \infty\,,$$

so sind die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt und daher konvergiert auch

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n(b_n - b) + (a_n - a)b\| \leq \|a_n\| \cdot \|b_n - b\| + \|b\| \cdot \|a_n - a\|$$

gegen Null.

//

Offensichtlich ist $L_b(X)$ eine Banachalgebra mit Eins, wobei die identische Abbildung $I : X \to X$ das Einselement abgibt. $L_b(X)$ ist im Allgemeinen aber nicht kommutativ. Es gibt aber noch viele weitere Beispiele.

6.4.3 Beispiel.

(*i*) Eine bekannte kommutative Algebra mit Einselement ist $\mathbb{C}[z]$, also die Menge der Polynome $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten. Die Abbildung $(p, q) \mapsto pq$ ist dabei nichts anderes als die bekannte Polynommultiplikation und das Einselement ist das konstante Polynom 1.

(*ii*) Ist X ein topologischer Raum, und bezeichnet $C_b(X, \mathbb{C})$ den Vektorraum aller beschränkten und stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)|$, so ist $C_b(X, \mathbb{C})$ bekannterweise ein Banachraum. Betrachtet man nun die Abbildung

$$C_b(X, \mathbb{C}) \ \times \ C_b(X, \mathbb{C}) \ \to C_b(X, \mathbb{C}), \quad (f, g) \mapsto f \cdot g\,,$$

also die punktweise Multiplikation, so gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. Also ist $C_b(X, \mathbb{C})$ eine offensichtlich auch kommutative Banachalgebra.

Schließlich ist die konstante Einsfunktion offensichtlich ein normiertes Einselement.

(*iii*) Der Raum $C_0(X, \mathbb{C})$ aller im unendlichen verschwindenden Funktion aus $C_b(X, \mathbb{C})$, also jene $f \in C_b(X, \mathbb{C})$, die

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists K \subseteq X \ \text{ kompakt } : |f(t)| < \epsilon,\ \forall t \in X \setminus K\,,$$

erfüllen, ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{C})$. Außerdem gilt $f \cdot g \in C_0(X, \mathbb{C})$, wenn $f, g \in C_0(X, \mathbb{C})$. Also ist $C_0(X, \mathbb{C})$ eine abgeschlossene Unteralgebra und somit für sich selber genommen eine Banachalgebra. Im Allgemeinen hat diese Banachalgebra aber kein Einselement.

(*iv*) Der Raum ℓ^∞ aller beschränkten reell- bzw. komplexwertigen Folgen versehen mit der punktweisen Multiplikation ist ebenfalls eine Banachalgebra mit Einselement. In der Tat ist das ein Spezialfall von Beispiel (*ii*), wenn man $X = \mathbb{N}$ versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nimmt.

//

6.4.4 Definition. Sei A eine Algebra mit Einselement. Ein Element $a \in A$ heißt *invertierbar*, falls es ein $b \in A$ gibt mit $ab = ba = e$. Weiters sei

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : a \ \text{ ist invertierbar}\}\,.$$

Für ein $a \in A$ bezeichne

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \in \mathrm{Inv}(A)\}$$

die *Resolventenmenge* von a und

$$\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \notin \mathrm{Inv}(A)\}$$

das *Spektrum* von a. Für $a - \lambda e$ schreibt man auch kurz $a - \lambda$. Die Abbildung $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ heißt auch kurz die *Resolvente von a*.

6.4.5 Bemerkung.

1. Wegen $0a = a0 = 0 \neq e$ ist sicher $0 \notin \mathrm{Inv}(A)$, womit $\mathrm{Inv}(A) \neq A$.

2. Hat $a \in A$ eine Links- und eine Rechtsinverse, also $ca = e = ab$ für gewisse $b, c \in A$, so folgt wegen $c = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b$, dass $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Insbesondere ist das $b \in A$ mit $ab = ba = e$ eindeutig, wird mit a^{-1} bezeichnet und heißt *Inverses* von a.

3. Mit dem letzten Punkt überprüft man leicht, dass $(\mathrm{Inv}(A), \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e ist.

4. Für $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt sicherlich $\lambda a \in \mathrm{Inv}(A)$ mit $(\lambda a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} a^{-1}$.

//

6.4.6 Bemerkung. In $L_b(X)$ ist ein $T \in L_b(X)$ genau dann invertierbar im Sinne von Definition 6.4.4, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\operatorname{ran} T = X$ und wenn $T^{-1} : X \to X$ auch beschränkt ist. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung ist die Tatsache, dass $T^{-1} : X \to X$ beschränkt ist aber automatisch erfüllt, wenn $\ker T = \{0\}$ und $\operatorname{ran} T = X$.

Für $T \in L_b(X)$ ist also $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$\rightsquigarrow$ $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$.

Trifft $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ zu, so heißt λ ein *Eigenwert* von T, $\ker(T - \lambda I)$ der *Eigenraum* von T zu λ, und jedes $x \in \ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ ein *Eigenvektor* von T zu λ. Die Menge aller Eigenwerte bezeichnet man auch als das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$ von T.

Den Rest von $\sigma(T)$ unterteilt man noch in das *stetige Spektrum* $\sigma_c(T)$, welches die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ umfasst, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ dicht in X, aber nicht ganz X ist, sowie das *Residualspektrum* $\sigma_r(T)$. Das ist die Menge aller Punkte $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $T - \lambda I$ injektiv ist und $\overline{\operatorname{ran}(T - \lambda I)} \neq X$. Offenbar gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \,\dot\cup\, \sigma_c(T) \,\dot\cup\, \sigma_r(T) \,.$$

Um die Notation zu vereinfachen, schreibt man oft $T - \lambda$ anstelle von $T - \lambda I$. //

Sei A Algebra mit Einselement. Ist $a \in A$ und $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$, so kann man definieren

$$p(a) := \alpha_n a^n + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 e \,.$$

Klarerweise ist $p(a)$ wieder ein Element von A.

Betrachte für festes $a \in A$ die Abbildung

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbb{C}[z] & \to & A \\ \quad p & \mapsto & p(a) \end{cases}$$

Nun sind A und $\mathbb{C}[z]$ Algebren über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$. Wie man unmittelbar nachrechnet, ist ϕ_a ein *Algebra-Homomorphismus*, also eine lineare und mit der Multiplikation verträgliche Abbildung. Man spricht vom sogenannten *Einsetzhomomorphismus*.

Insbesondere ist das Bild von ϕ_a eine kommutative Unteralgebra von A.

6.4.7 Satz (Spektralabbildungssatz). *Sei A eine Algebra mit Einselement, und sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt für $a \in A$*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) \,,$$

wobei $p(\sigma(a)) := \{p(z) : z \in \sigma(a)\}$ für nicht konstante p und $p(\sigma(a)) := \{\mu\}$, wenn $p(z) = \mu$, wobei $\mu \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für konstante Polynome $\mu \in \mathbb{C}$ ist $p(a) = \mu e$ und damit $\sigma(p(a)) = \{\mu\} = p(\sigma(a))$.

Im Folgenden sei $p(z) = \alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstant, also $\alpha_n \neq 0$ und $n \geq 1$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$p(z) - \lambda = \alpha_n (z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)$$

mit gewissen nicht notwendigerweise verschiedenen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diese Zahlen sind offensichtlich die Nullstellen des Polynoms $p(z) - \lambda$, also $p^{-1}(\lambda) =$

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Also gilt $\lambda \in p(\sigma(a))$ genau dann, wenn mindestens eines der dazugehörigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\sigma(a)$ liegt. Geht man zu den jeweiligen Negationen über, so liegt λ nicht in $p(\sigma(a))$ genau dann, wenn alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \rho(a)$ liegen.

Nun gilt

$$p(a) - \lambda = \alpha_n (a - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (a - \lambda_n)\,,$$

wobei es in diesem Produkt nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, da $\phi_a(\mathbb{C}[z])$ ja eine kommutative Unteralgebra von A ist.

Ist $\lambda \notin p(\sigma(a))$ bzw. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho(a)$, also $a - \lambda_j \in \text{Inv}(A)$, $j = 1, \dots, n$, dann folgt aus der Tatsache, dass $\text{Inv}(A)$ eine Gruppe ist, dass auch ihr Produkt und in Folge $p(a) - \lambda$ in $\text{Inv}(A)$ liegt. Also liegt λ nicht in $\sigma(p(a))$.

Liegt umgekehrt λ nicht in $\sigma(p(a))$, also $p(a) - \lambda \in \text{Inv}(A)$, dann folgt für jedes $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}(a - \lambda_j)\big[\alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k)\ (p(a) - \lambda)^{-1}\big] \\ = \big[(p(a) - \lambda)^{-1}\ \alpha_n \prod_{k \neq j} (a - \lambda_k)\big](a - \lambda_j) = e\,.\end{aligned}$$

Also sind alle $(a - \lambda_j)$ invertierbar, siehe Bemerkung 6.4.5. Also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \rho(a)$ bzw. $\lambda \notin p(\sigma(a))$.

Schließlich folgt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$, wenn man das Bewiesene auf $p(z) = z^n$ anwendet.

❑

6.4.8 Lemma. *Sei A eine Algebra mit Einselement und $a \in \text{Inv}(A)$, also $0 \notin \sigma(a)$. Dann gilt $\sigma(a^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Beweis. Wegen $a^{-1} \in \text{Inv}(A)$ gilt $0 \notin \sigma(a)$. Für $\lambda \neq 0$ gilt wegen der Gruppeneigenschaft von $\text{Inv}(A)$

$$a - \lambda e \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow (\frac{1}{\lambda} e - a^{-1}) = \frac{1}{\lambda} a^{-1} (a - \lambda e) \in \text{Inv}(A)\,.$$

❑

6.4.9 Lemma. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins.*

⇝ *Für jedes $a \in A$ mit $\|a\| < 1$ gilt $e - a \in \text{Inv}(A)$ mit*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,, \tag{6.4.1}$$

wobei $a^0 := e$ und wobei diese A-wertige Reihe absolut konvergiert.

⇝ $\text{Inv}(A)$ *ist eine offene Teilmenge von A. Genauer gilt für $a \in \text{Inv}(A)$, dass auch*

$$U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \text{Inv}(A)\,. \tag{6.4.2}$$

⇝ *Die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ bildet* $\text{Inv}(A)$ *bijektiv und stetig auf* $\text{Inv}(A)$ *ab.*

Beweis.

⇝ Wegen $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ und $\|a\| < 1$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1-\|a\|}$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ absolut. Da $c \mapsto bc$ für jedes feste $b \in A$ stetig ist (siehe Bemerkung 6.4.2), folgt

$$a \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n = \lim_{N\to\infty} a \sum_{n=0}^{N} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - e\,,$$

und somit $e = (e-a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Genauso zeigt man $e = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\ (e-a)$.

⇝ Ist $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, so gilt $a - b = a(e - a^{-1}b)$, wobei $\|a^{-1}\ b\| < \|a^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|a^{-1}\|} = 1$. Also existiert $(e - a^{-1}b)^{-1}$, wobei

$$(a-b)^{-1} = (e - a^{-1}b)^{-1}\ a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}b)^n\ a^{-1} \tag{6.4.3}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz. Somit gilt $a - U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(0) = U_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$. Insgesamt ist daher $\mathrm{Inv}(A)$ offen.

⇝ Aus (6.4.3) folgt für $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$

$$\begin{aligned}\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\| &= \|\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}b)^n\ a^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(a^{-1}b)^n\ a^{-1}\| \\ &\leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}b\|^n = \frac{\|a^{-1}\| \cdot \|a^{-1}b\|}{1 - \|a^{-1}b\|} \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|a^{-1}\|\ \|b\|} \cdot \|b\|\,,\end{aligned}$$

wobei $\|a^{-1}b\| \leq \|a^{-1}\|\ \|b\| < 1$. Diese Abschätzung zeigt, dass aus $b_n \to 0$ folgt, dass $(a - b_n)^{-1} \to a^{-1}$. Also ist $a \mapsto a^{-1}$ stetig.

❑

6.4.10 Lemma. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$.*

⇝ *$\rho(a)$ ist offen und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Genauer gilt $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.*

⇝ *Lokal um jedes $\mu \in \rho(a)$ ist die Funktion $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ in eine A-wertige Potenzreihe entwickelbar. Genauer gilt, dass $U_{\frac{1}{\|(a-\mu e)^{-1}\|}}(\mu) \subseteq \rho(a)$ bzw. äquivalent dazu*

$$\|(a - \mu e)^{-1}\| \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(\mu, \sigma(a))},\ \ \mu \in \rho(a)\,, \tag{6.4.4}$$

und dass für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|(a-\mu e)^{-1}\|}}(\mu)$

$$(a - \lambda e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n\ \big((a - \mu e)^{-1}\big)^{n+1} \tag{6.4.5}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz in A.

$\rightsquigarrow$ *Es gilt die* Resolventengleichung

$$(a-\lambda e)^{-1} - (a-\mu e)^{-1} = (\lambda-\mu)(a-\lambda e)^{-1}(a-\mu e)^{-1}, \ \lambda, \mu \in \rho(a).$$

$\rightsquigarrow$ *Schließlich gilt für* $0 < |\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$ *im Sinne der absoluten Konvergenz*

$$\Big(a - \frac{1}{\zeta}e\Big)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n, \tag{6.4.6}$$

und infolge $\lim_{|\mu|\to+\infty} \|(a-\mu e)^{-1}\| = 0$

Beweis.

$\rightsquigarrow$ Die Abbildung $\lambda \mapsto a - \lambda e$ ist eine stetige Funktion von $\mathbb{C}$ nach A. Nun ist $\rho(a)$ gerade das Urbild von $\mathrm{Inv}(A)$ unter dieser Abbildung und daher offen. $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ ist somit abgeschlossen.

Aus $|\lambda| > \|a\|$ folgt wegen $\|\frac{1}{\lambda}a\| < 1$ die Invertierbarkeit von $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda}a)$, womit $\sigma(a) \subseteq K_{\|a\|}(0)$.

$\rightsquigarrow$ Sei $\mu \in \rho(a)$. Für $\lambda \in U_{\frac{1}{\|(a-\mu e)^{-1}\|}}(\mu)$ gilt $\|(a-\lambda e) - (a-\mu e)\| = |\lambda - \mu| < \frac{1}{\|(a-\mu e)^{-1}\|}$. Wegen (6.4.2) ist $\lambda \in \rho(a)$, wobei wegen (6.4.3)

$$(a-\lambda e)^{-1} = \Big((a-\mu e) - [(a-\mu e)-(a-\lambda e)]\Big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\mu)^n \big((a-\mu e)^{-1}\big)^{n+1}$$

im Sinne der absoluten Konvergenz.

$\rightsquigarrow$ Für $\mu, \lambda \in \rho(a)$ gilt

$$\begin{aligned}(a-\lambda e)^{-1} - (a-\mu e)^{-1} &= (a-\lambda e)^{-1}\big(e - (a-\lambda e)(a-\mu e)^{-1}\big) \\ &= (a-\lambda e)^{-1}\big((a-\mu e) - (a-\lambda e)\big)(a-\mu e)^{-1} \\ &= (\lambda-\mu)(a-\lambda e)^{-1}(a-\mu e)^{-1}.\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Für $|\zeta| < \frac{1}{\|a\|}$ gilt sicher $\frac{1}{\zeta} \in \rho(a)$, wobei mit (6.4.1)

$$(\frac{1}{\zeta}e - a)^{-1} = \zeta(e - \zeta a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n,$$

im Sinne der absoluten Konvergenz. Da Grenzfunktionen von Potenzreihen mit Konvergenzradius R stetig auf $U_R(0)$ sind, gilt

$$\lim_{|\mu|\to+\infty} \|(a-\mu e)^{-1}\| = \lim_{\zeta\to 0} \|(a - \frac{1}{\zeta}e)^{-1}\| = 0.$$

❑

Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und X ein Banachraum über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$, so heißt eine Funktion $\varphi : G \to X$ *analytisch*, wenn sie lokal um jeden Punkt $\mu \in G$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, also $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z - \mu)^n a_n$ für $|z-\mu| < r$ gilt mit einem hinreichend kleinen $r > 0$ und mit $a_n \in X$

für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Insbesondere ist die Funktion $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ auf $\rho(a)$ gemäß Lemma 6.4.10 analytisch.

Für analytische Funktionen gelten folgende Resultate, die wir aber hier nicht beweisen wollen. Der interessierte Leser sei auf die entsprechende Fachliteratur, z.B. [K1] oder [Co], verwiesen.

6.4.11 Satz. *Sei $\varphi : G \to X$ analytisch. Für $H = \{\frac{1}{z} : z \in G \setminus \{0\}\}$ ist die Abbildung $z \mapsto \varphi(\frac{1}{z})$ auf H ebenfalls analytisch.*

6.4.12 Satz. *Sei $\varphi : G \to X$ analytisch und sei $z_0 \in G$. Dann sind die Koeffizienten der Potenzreihe, in die φ lokal um z_0 entwickelbar ist, also*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \, a_n$$

für alle $z \in U_r(z_0)$ mit einem hinreichend kleinen $r > 0$ eindeutig durch $\varphi|_{U_r(z_0)}$ bestimmt. Zudem konvergiert diese Potenzreihe absolut sogar auf dem größten Kreis $U_R(z_0)$, der noch in G enthalten ist, und stimmt dort mit φ überein. Insbesondere ist

$$R = \sup\{\rho \in (0, +\infty) : U_\rho(z_0) \subseteq G\} \leq \frac{1}{\limsup \|a_n\|^{\frac{1}{n}}} .$$

6.4.13 Satz (von Liouville)**.** *Sei $\varphi : \mathbb{C} \to X$ analytisch. Ist φ beschränkt, so muss φ sogar konstant sein.*

Wir haben in Lemma 6.4.10 gesehen, dass das Spektrum ganz im abgeschlossenen Kreis um 0 mit Radius $\|a\|$ liegen muss. Im Allgemeinen kann $\sigma(a)$ aber wesentlich kleiner sein. Wir definieren den *Spektralradius* $r(a)$ als

$$r(a) := \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| .$$

Es ist eine wichtige Feststellung, dass sich diese algebraische Größe mit Hilfe der analytischen Größe $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ ausdrücken lässt.

6.4.14 Satz. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$. Dann gilt immer $\sigma(a) \neq \emptyset$ und*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Beweis. Im Falle $\sigma(a) = \emptyset$ wäre $\varphi := (\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1})$ eine analytische Abbildung von $\mathbb{C}$ nach A. Zudem gilt $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \|(a - \lambda e)^{-1}\| = 0$; siehe unmittelbar nach (6.4.6).

Da stetige Funktionen beschränkt auf Kompakta sind, folgt damit die Beschränktheit der Funktion φ. Wegen Satz 6.4.13 zusammen mit $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \varphi(\lambda) = 0$ folgt $0 = \varphi(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Daraus folgt der Widerspruch $e = a \cdot a^{-1} = 0$.

Um $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ zu beweisen, stellen wir zunächst fest, dass wegen Satz 6.4.7 die Beziehungen $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n$ und damit

$$r(a^n) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^n)\} = \sup\{|\lambda|^n : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a)^n$$

gelten. Die aus Lemma 6.4.10 bekannte Tatsache, dass $r(a) \leq \|a\|$, angewandt auf a^n ergibt dann $r(a) = r(a^n)^{\frac{1}{n}} \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Also muss

$$r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Es bleibt $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$ zu zeigen. Dafür sei wieder $\varphi : \rho(a) \to A$ definiert durch $\varphi(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$. Wegen Satz 6.4.11 ist $h : \zeta \mapsto \varphi(\frac{1}{\zeta})$ auf

$$D := \{\frac{1}{z} : z \in \rho(a) \setminus \{0\}\}$$

analytisch. Aus $\sigma(a) = \rho(a)^c \subseteq K_{r(a)}(0)$ folgt $D \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\}$.

Für $\zeta \in U_{\frac{1}{\|a\|}}(0) \setminus \{0\}$ $(\subseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0) \setminus \{0\})$ folgt aus (6.4.6)

$$h(\zeta) = (a - \frac{1}{\zeta}e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{n+1} a^n , \tag{6.4.7}$$

wobei diese Reihe absolut konvergiert. Insbesondere können wir h auf die Menge $D \cup \{0\} \supseteq U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ analytisch fortsetzen, indem man $h(0) = 0$ setzt.

Aus Satz 6.4.12 folgt nun, dass die Reihe in (6.4.7) sogar auf $U_{\frac{1}{r(a)}}(0)$ konvergiert. Da die Koeffizientenfolge dann sicher eine Nullfolge und somit beschränkt ist, folgt für festes $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$, dass

$$\|\zeta^{n+1} a^n\| \leq C,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} ,$$

mit einem $C > 0$. Daraus schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\zeta|^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{|\zeta|} .$$

Da $|\zeta| < \frac{1}{r(a)}$ beliebig war, gilt sogar $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$.

❑

6.4.15 Beispiel. Sei μ ein σ-endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, sei $\phi \in L^\infty(\mu)$, und $1 < p < \infty$. Für die lineare Abbildung $M_\phi : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ wie in Beispiel 6.1.4 wollen wir zeigen, dass

$$\rho(M_\phi) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} \big(- |\phi - \lambda|\big) < 0\big\} . \tag{6.4.8}$$

Die Tatsache, dass $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} \big(- |\phi - \lambda|\big) < 0$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{C}$, bedeutet gerade, dass $|\phi - \lambda| \geq c$, μ-fast überall für ein festes $c > 0$.

Also gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} \big(- |\phi - \lambda|\big) < 0$, dass $(\phi - \lambda)^{-1} \in L^\infty(\mu)$. Offenbar gilt dann $(M_\phi - \lambda)M_{(\phi-\lambda)^{-1}} = M_{(\phi-\lambda)^{-1}}(M_\phi - \lambda) = I$, also ist $\lambda \in \rho(M_\phi)$ und

$$(M_\phi - \lambda)^{-1} = M_{(\phi-\lambda)^{-1}} .$$

Sei umgekehrt angenommen, dass $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} \big(- |\phi - \lambda|\big) = 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Menge Δ_n mit $\mu(\Delta_n) > 0$ derart, dass $|\phi(x) - \lambda| \leq \frac{1}{n}$ für $x \in \Delta_n$. Da μ σ-endlich ist, können wir Δ_n so wählen, dass zusätzlich $\mu(\Delta_n) < \infty$. Setze $f_n := \mu(\Delta_n)^{-\frac{1}{p}} \chi_{\Delta_n}$. Dann ist

$$\|f_n\|_p^p = \int_\Omega |f_n|^p \, d\mu = \frac{1}{\mu(\Delta_n)} \int_\Omega \chi_{\Delta_n} \, d\mu = 1 ,$$

$$\|(M_\phi - \lambda)f_n\|_p^p = \int_\Omega |\phi - \lambda|^p \cdot |f_n|^p \, d\mu \leq \frac{1}{n^p} .$$

Wir schließen, dass $(M_\phi - \lambda)$ nicht invertierbar in $L_b(L^p(\mu))$ ist. Insgesamt folgt (6.4.8). Als nächstes wollen wir zeigen, dass

$$\sigma_p(M_\phi) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \mu\big(\phi^{-1}(\{\lambda\})\big) > 0\big\} .$$

Gehört λ zu dieser Menge, so wähle $\Delta \subseteq \phi^{-1}(\{\lambda\})$ mit $0 < \mu(\Delta) < \infty$. Dann gilt $(M_\phi - \lambda)\chi_\Delta = 0$ aber $\chi_\Delta \in L^p(\mu) \setminus \{0\}$. Umgekehrt folgt aus $(M_\phi - \lambda)f = 0$ mit $\|f\|_p > 0$, dass $\phi(x) - \lambda = 0$ für fast alle $x \in \{t : f(t) \neq 0\}$ mit $\mu\{t : f(t) \neq 0\} > 0$. Also gilt $\phi(x) = \lambda$ für alle $x \in \Delta$ mit einem $\Delta \in \mathcal{A}$, $\mu(\Delta) > 0$.

Wir wollen schließlich anmerken, dass für jeden Punkt $\lambda \in \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$ das Bild $\operatorname{ran}(M_\phi - \lambda)$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt. Um dies einzusehen, sei $\lambda \notin \sigma_p(M_\phi)$ gegeben, und sei $1 < q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\mu\big(\phi^{-1}(\{\lambda\})\big) = 0$.

Betrachten wir jetzt M_ϕ als Operator in $L_b(L^q(\mu))$, so folgt auch $\lambda \notin \sigma_p(M_\phi)$, womit $\{f \in L^q(\mu) : (M_\phi - \lambda)f = 0\} = \{0\}$. Gemäß Beispiel 6.1.5 ist $M_\phi \in L_b(L^q(\mu))$ bis auf Isomorphie gerade die Konjugierte von $M_\phi \in L_b(L^p(\mu))$. Nach Korollar 6.1.8, *(ii)*, ist das Bild von $(M_\phi - \lambda) \in L_b(L^p(\mu))$ dicht in $L^p(\mu)$. Somit haben wir $\sigma_c(M_\phi) = \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$ und $\sigma_r(M_\phi) = \emptyset$. //

6.4.16 Beispiel. Sei K ein kompakter Hausdorff-Raum, und $\phi \in C(K)$. Dann können wir den Multiplikationsoperator M_ϕ auch als Operator in $L_b(C(K))$ betrachten. Als erstes zeigen wir

$$\sigma(M_\phi) = \phi(K) . \tag{6.4.9}$$

Genauso wie im letzten Beispiel erhält man, dass $\phi(K)^c \subseteq \rho(M_\phi)$; es ist nämlich

$$(M_\phi - \lambda)^{-1} = M_{(\phi-\lambda)^{-1}}, \ \lambda \notin \phi(K) .$$

Für die umgekehrte Inklusion konstruieren wir wieder eine Folge f_n mit $\|f_n\| = 1$ aber $\|(M_\phi - \lambda)f_n\| \leq \frac{1}{n}$. Sei also $\lambda \in \phi(K)$ gegeben, und schreibe $\lambda = \phi(x_0)$. Da ϕ stetig ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung O_n von x_0 mit $|\phi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}$ für $x \in O_n$. Da K kompakt und damit auch regulär ist, bilden die abgeschlossenen Umgebungen von x_0 eine Umgebungsbasis. Wir finden also eine abgeschlossene Umgebung A_n von x_0 mit $O_n \supseteq A_n$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine Funktion $f_n \in C(K)$ mit $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n(A_n) = 1$, und $f_n(O_n^c) = 0$. Diese hat offenbar die gewünschte Eigenschaft. Damit haben wir (6.4.9) bewiesen. Als nächstes zeigen wir

$$\sigma_p(M_\phi) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \big(\phi^{-1}(\{\lambda\})\big)^\circ \neq \emptyset\big\} .$$

Einerseits, hat man $f \in \ker(M_\phi - \lambda) \setminus \{0\}$, so muss $\phi(x) - \lambda = 0$ gelten für alle $x \in f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Diese Menge ist aber offen und nichtleer. Hat umgekehrt $\phi^{-1}(\{\lambda\})$ nichtleeres Inneres, so konstruiert man wieder mit Hilfe des Lemmas von Urysohn eine stetige Eigenfunktion.

Weiters ist für $\lambda \in \sigma(M_\phi)$ und damit $\lambda = \phi(x)$ der Bildraum $\operatorname{ran}(M_\phi - \lambda) = \{f \cdot (\phi - \phi(x)) : f \in C(K)\}$ im abgeschlossenen Kern des stetigen linearen Funktional $f \mapsto f(x)$ enthalten und somit nie dicht. Wir haben also $\sigma_c(M_\phi) = \emptyset$ und $\sigma_r(M_\phi) = \sigma(M_\phi) \setminus \sigma_p(M_\phi)$.

An diesem Beispiel lässt sich auch der Spektralabbildungssatz einfach illustrieren. Denn für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt offenbar $p(M_\phi) = M_{p\circ\phi}$, und daher

$$\sigma(p(M_\phi)) = (p \circ \phi)(K) = p(\sigma(M_\phi)) \,.$$

Weiters haben wir

$$r(M_\phi) = \max_{x\in K} |\phi(x)| = \|M_\phi\| \,.$$

//

6.5 Kompakte Operatoren

Ehe wir die Definition eines kompakten Operators geben, wollen wir daran erinnern, wie sich die Kompaktheit einer Teilmenge eines metrischen Raumes charakterisieren lässt.

6.5.1 Bemerkung. Für eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (M, d) sind folgende Aussagen äquivalent.

(*i*) K ist kompakt.

(*ii*) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K.

(*iii*) $(K, d|_{K\times K})$ ist ein vollständiger metrischer Raum und K ist total beschränkt.

Dabei bedeutet die totale Beschränktheit einer Teilmenge $B \subseteq M$, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in M$ derart gibt, dass $B \subseteq U_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\epsilon(x_n)$.

Für den Abschluss einer Teilmenge A eines metrischen Raumes (M, d) sind daher folgende Aussagen äquivalent.

(*a*) A ist in M relativ kompakt, also ist $\overline{A}$ kompakt.

(*b*) Jede Folge in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M.

(*c*) $(\overline{A}, d|_{\overline{A}\times\overline{A}})$ ist ein vollständiger metrischer Raum und A ist total beschränkt.

In (*c*) kann man offensichtlich erste Bedingung weglassen, falls (M, d) als vollständig vorausgesetzt wird.

Die Aussagen über die Abschlüsse von A folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen über K, wenn man bemerkt, dass der Abschluss und auch jede Teilmenge einer total beschränkten Menge wieder total beschränkt ist, und weil es zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\overline{A}$ eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A gibt mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, womit für jede Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert aus M die entsprechende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls denselben Grenzwert hat, welcher offenbar in $\overline{A}$ liegt. //

6.5.2 Definition. Seien X, Y Banachräume. Dann heißt eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ *kompakter Operator*, wenn $T(K_1^X(0))$ in Y relativ kompakt ist, daher wenn
$$\overline{T(K_1^X(0))}$$
in Y kompakt ist. Die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $K(X, Y)$.

Da jede kompakte Teilmenge eines normierten Raumes total beschränkt und infolge beschränkt ist, liegt jeder kompakte Operator in $L_b(X, Y)$, also $K(X, Y) \subseteq L_b(X, Y)$.

6.5.3 Bemerkung. Da das Multiplizieren mit einer festen komplexen Zahl ungleich Null ein Homöomorphismus ist, und da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt sind, folgt, dass die Kompaktheit von $\overline{T(K_1^X(0))}$ zu der von $\overline{T(K_\delta^X(0))}$ bzw. $\overline{T(U_\delta^X(0))}$ für nur ein $\delta > 0$ äquivalent ist. //

Kompakte Operatoren sind unter allen beschränkten Operatoren auf einem unendlichdimensionalen Banachraum jene, deren Eigenschaften jenen von Operatoren auf endlichdimensionalen Räumen – sprich Matrizen aus der linearen Algebra – am nächsten kommen.

6.5.4 Proposition. *Für Banachräume X, Y, Z gilt:*

(i) *Jedes $T \in L_b(X, Y)$ mit $\dim \operatorname{ran} T < \infty$ ist kompakt.*

(ii) *Falls für $T \in K(X, Y)$ der Bildbereich $\operatorname{ran} T$ abgeschlossen ist, so muss $\dim \operatorname{ran} T < \infty$.*

(iii) *Die Menge $K(X, Y)$ der kompakten Operatoren in $L_b(X, Y)$ ist ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener linearer Unterraum von $L_b(X, Y)$.*

(iv) *Für $T \in L_b(X, Y)$ und $S \in L_b(Y, Z)$ ist ST kompakt, wenn mindestens einer der beiden Operatoren S, T kompakt ist.*

Beweis.
ad(i): Wegen $\dim \operatorname{ran} T < \infty$ ist $\operatorname{ran} T$ algebraisch und topologisch isomorph zu $\mathbb{C}^{\dim \operatorname{ran} T}$; vgl. Satz 2.2.1. Insbesondere hat die beschränkte Menge $T(K_1^X(0))$ einen kompakten Abschluss $\overline{T(K_1^X(0))}^{\operatorname{ran} T}$ in $\operatorname{ran} T$. Nach Satz 2.2.1 ist $\operatorname{ran} T$ in Y abgeschlossen, womit $\overline{T(K_1^X(0))}^{\operatorname{ran} T} = \overline{T(K_1^X(0))}^{Y}$.

ad(ii): Als abgeschlossener Unterraum von Y ist $\operatorname{ran} T$ ein Banachraum. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $T : X \to \operatorname{ran} T$ offen. Also ist $\overline{T(K_1^X(0))}$ eine kompakte Umgebung der 0 in $\operatorname{ran} T$. Nach Proposition 2.2.4 folgt dann $\dim \operatorname{ran} T < \infty$.

ad(iii): Die algebraischen Operationen sind stetig, also ist das Bild der kompakten Menge $\overline{S(K_1^X(0))} \times \overline{T(K_1^X(0))}$ unter $+$ wieder kompakt, wodurch auch
$$\overline{(S+T)(K_1^X(0))} \subseteq \overline{S(K_1^X(0))} + \overline{T(K_1^X(0))}$$

kompakt ist. Zusammen mit $\overline{(\lambda T)(K_1^X(0))} = \lambda\overline{T(K_1^X(0))}$ erhalten wir die Kompaktheit von $S+T$ und λT. Somit ist die Menge der kompakten Operatoren ein linearer Unterraum von $L_b(X,Y)$.

Sei $T \in L_b(X,Y)$ im Abschluss von $K(X,Y)$. Zu jedem $r > 0$ existiert dann ein $S \in K(X,Y)$ mit $\|S-T\| < r$. Da die Menge $S(K_1^X(0))$ total beschränkt ist, existieren $x_1,\dots,x_n \in K_1^X(0)$ mit

$$S(K_1^X(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_r^Y(S(x_i))\,.$$

Da $\|Tx - Sx\| < r$ für $x \in K_1^X(0)$, folgt

$$T(K_1^X(0)) \subseteq S(K_1^X(0)) + U_r^Y(0) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{2r}^Y(S(x_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{3r}^Y(T(x_i))\,.$$

Also ist $T(K_1^X(0))$ total beschränkt und daher $\overline{T(K_1^X(0))}$ kompakt.

`ad`(iv): Für kompaktes T ist mit $\overline{T(K_1^X(0))}$ auch $S(\,\overline{T(K_1^X(0))}\,)$ kompakt, und somit auch

$$\overline{S(T(K_1^X(0)))} \subseteq S(\,\overline{T(K_1^X(0))}\,)\,.$$

Für kompaktes S ist wegen

$$\overline{S(T(K_1^X(0)))} \subseteq \overline{S(\|T\|K_1^Y(0))} = \overline{\|T\|S(K_1^Y(0))} = \|T\|\;\overline{S(K_1^Y(0))}$$

und der Tatsache, dass Multiplizieren mit $\|T\|$ stetig ist, auch ST kompakt. ❑

6.5.5 Bemerkung. Ist $T \in L_b(X,Y)$ kompakt und $M \subseteq X$ abgeschlossen, so ist die Einbettung $\iota : M \to X,\ x \mapsto x$ offensichtlich stetig. Aus Proposition 6.5.4, (iv), folgt, dass $T|_M = T \circ \iota : M \to Y$ auch kompakt ist //

6.5.6 Bemerkung. Wir sehen, dass $K(X) := K(X,X)$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von $L_b(X)$ ist. Für $\dim X = \infty$ gilt $K(X) \neq L_b(X)$, da I sicher nicht kompakt ist. Wegen Proposition 6.5.4 ist $K(X)$ in $L_b(X)$ Norm-abgeschlossen.

Ist $X = H$ ein separabler Hilbertraum, so kann man zeigen, dass tatsächlich $K(X)$ das einzige echte Norm-abgeschlossene Ideal von $L_b(H)$ ist. //

6.5.7 Satz. *Seien X,Y Banachräume und $T \in L_b(X,Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn $T' \in L_b(Y',X')$ kompakt ist.*

Beweis. Sei T kompakt. Setzen wir

$$\Phi := \{y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}} : y' \in Y',\ \|y'\| \leq 1\}\,,$$

so ist $\Phi \subseteq C(\,\overline{T(K_1^X(0))}\,,\mathbb{C})$, wobei $\overline{T(K_1^X(0))}$ $(\subseteq Y)$ versehen mit der von $\|.\|$ induzierten Topologie kompakt ist, und $C(\,\overline{T(K_1^X(0))}\,,\mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_\infty$ ein Banachraum ist.

Wegen $|y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y)| \leq \|y\|$ für alle $y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in \Phi$ und $y \in \overline{T(K_1^X(0))}$ ist die Menge Φ von Funktionen punktweise beschränkt, und wegen

$$|y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y_1) - y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}(y_2)| = |y'(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|$$

für $y_1, y_2 \in \overline{T(K_1^X(0))}$ und $y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in \Phi$ ist sie auch gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela–Ascoli ist Φ total beschränkt. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Punkte $y_1', \dots, y_n' \in Y'$ mit $\|y_j'\| \leq 1$ und

$$\Phi \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(y_j'|_{\overline{T(K_1^X(0))}})\,.$$

Ist nun $y' \in Y'$, $\|y'\| \leq 1$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}} \in U_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(y_j'|_{\overline{T(K_1^X(0))}})$, so gilt auch

$$\begin{aligned} \|T'y_j' - T'y'\| &= \sup_{x \in K_1^X(0)} \big|\langle x, T'(y_j' - y')\rangle\big| = \sup_{x \in K_1^X(0)} \big|\langle Tx, y_j' - y'\rangle\big| \\ &= \sup_{x \in K_1^X(0)} \big|y_j'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}(Tx) \;-\; y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}(Tx)\big| \\ &\leq \|y_j'|_{\overline{T(K_1^X(0))}} \;-\; y'|_{\overline{T(K_1^X(0))}}\|_\infty < \epsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist auch $\{T'y' : y' \in Y',\ \|y'\| \leq 1\} = T'(K_1^{Y'}(0))$ eine total beschränkte Teilmenge von X' und damit T' kompakt.

Für die Umkehrung seien zunächst $\iota_X : X \to X''$, $\iota_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Einbettungen wie in Lemma 5.5.2. Dann gilt für $x \in X$, $y' \in Y'$ stets

$$\langle y', \iota_Y Tx\rangle_{Y'} = \langle Tx, y'\rangle_Y = \langle x, T'y'\rangle_X = \langle T'y', \iota_X x\rangle_{X'} = \langle y', T''\iota_X x\rangle_{Y'}\,,$$

womit $\iota_Y T = T''\iota_X$. Da die kanonischen Einbettungen immer Isometrien sind, folgt

$$\iota_Y T(K_1^X(0)) \subseteq T''(K_1^{X''}(0))\,.$$

Für kompaktes T' folgt nach dem ersten Teil des Beweises die Kompaktheit von T''. Insbesondere ist $T''(K_1^{X''}(0))$ total beschränkt und damit auch seine Teilmenge $\iota_Y T(K_1^X(0))$. Da Isometrien diese Eigenschaft erhalten, ist auch $T(K_1^X(0))$ total beschränkt und damit T kompakt.

❑

6.5.8 Proposition. *Sei X Banachraum, $T \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt* $\dim\ker(T - \lambda I) < \infty$. *Zudem ist* $\operatorname{ran}(T - \lambda I)$ *abgeschlossen und hat endliche Kodimension in X, wobei* $\dim\Big(X/\operatorname{ran}(T - \lambda I)\Big) = \dim\ker(T' - \lambda I)$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von $T - \lambda I$ ist $Y := \ker(T - \lambda I)$ ($\subseteq X$) abgeschlossen und daher ein Banachraum. Der Operator $T|_Y = \lambda I|_Y : Y \to Y$ ist bijektiv und kompakt. Aus Proposition 6.5.4, (ii), schließen wir $\dim Y < \infty$.

Wegen $\dim\ker(T-\lambda I)<\infty$ existiert gemäß Proposition 5.2.8 ein abgeschlossener Unterraum M von X mit

$$\ker(T-\lambda I)\dot{+}M=X\,.$$

Die Abbildung $S:=(T-\lambda I)|_M : M\to X$ ist dann beschränkt, injektiv, und es gilt $\operatorname{ran} S=\operatorname{ran}(T-\lambda I)$. Um zu zeigen, dass $\operatorname{ran} S$ in X abgeschlossen ist, genügt es nach Lemma 4.3.6 eine Zahl $r>0$ derart zu finden, dass

$$r\|x\|\leq\|Sx\|,\ x\in M\,. \tag{6.5.1}$$

Angenommen, (6.5.1) ist für jedes $r>0$ falsch, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\in M$, mit $\|x_n\|=1$, $Sx_n\to 0$. Nun ist $\overline{T(K_1^X(0))}$ kompakt. Geht man nötigenfalls zu einer Teilfolge über, so kann man also erreichen, dass $Tx_n\to x_0$ für ein gewisses $x_0\in X$. Es folgt $\lambda x_n=(T-S)x_n\to x_0$, womit $x_0\in M$. Nun ergibt

$$Sx_0=\lim_{n\to\infty}S(\lambda x_n)=\lambda\lim_{n\to\infty}Sx_n=0\,.$$

zusammen mit der Injektivität von S die Tatsache $x_0=0$, welche aber $\|x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|\lambda x_n\|=|\lambda|\neq 0$ widerspricht.

Aus dem schon Bewiesenen zusammen mit Proposition 6.1.7 folgt wegen Satz 6.5.7, dass $(\operatorname{ran}(T-\lambda I))^\perp=\ker(T-\lambda I)'=\ker(T'-\lambda I)$ endlichdimensional ist. Wegen Korollar 5.4.9 hat $\operatorname{ran}(T-\lambda I)$ endliche Kodimension und $\dim\Big(X/\operatorname{ran}(T-\lambda I)\Big)=\dim\ker(T'-\lambda I)$.

❑

Im Allgemeinen kann man über die Gestalt des Spektrums nicht mehr sagen, als dass $\sigma(T)$ kompakt und nichtleer ist. Für einen kompakten Operator T gilt aber viel mehr; vgl. die Zusammenfassung 6.5.13.

Wir benötigen ein geometrisches Lemma.

6.5.9 Lemma. *Sei X normierter Raum und M ein linearer Unterraum mit $\overline{M}\neq X$. Ist $r>1$, so existiert $x\in X$ mit*

$$\|x\|<r \textit{ aber } \|x-y\|\geq 1 \textit{ für alle } y\in M\ .$$

Beweis. Sei $x_1\in X$ mit $\|x_1+\overline{M}\|_{X/\overline{M}}=1$, also

$$\inf\big\{\|x_1-y\|:y\in M\big\}=\inf\big\{\|x_1-y\|:y\in\overline{M}\big\}=1\,.$$

Wähle $y_1\in M$ mit $\|x_1-y_1\|<r$ und setze $x:=x_1-y_1$.

❑

6.5.10 Lemma. *Für einen Banachraum X sei $T:X\to X$ beschränkt. Weiters sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $r>0$ mit $|\lambda_n|\geq r>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Gibt es eine Folge $M_n\subseteq X$, $n\in\mathbb{N}$, abgeschlossener Unterräume mit*

$$M_n\subsetneq M_{n+1},\ T(M_n)\subseteq M_n,\ (T-\lambda_n I)(M_{n+1})\subseteq M_n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$, so ist T nicht kompakt.

Beweis. Wenden wir Lemma 6.5.9 auf $M_n \subsetneq M_{n+1}$ an, so gibt es $x_n \in M_{n+1}$ mit $\|x_n\| \leq 2$, $\|x_n - y\| \geq 1$ für alle $y \in M_n$. Für $1 \leq m < n$ liegt

$$z := Tx_m - (T - \lambda_n I)x_n \,,$$

in M_n. Also folgt

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda_n x_n - z\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n - \frac{1}{\lambda_n} z\| \geq |\lambda_n| \geq r > 0 \,.$$

Die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also keine konvergente Teilfolge, obwohl $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, was für kompakte T nicht der Fall sein kann.

❑

Die folgende Aussage beinhaltet einen Teil des Hauptsatzes dieses Abschnittes über die Struktur von $\sigma(T)$.

6.5.11 Proposition. *Ist X ein Banachraum, $T \in K(X)$, $r > 0$, und $E \subseteq \mathbb{C} \setminus U_r^{\mathbb{C}}(0)$ eine Menge von Eigenwerten von T, so*

(*i*) *gilt* $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$ *für jedes* $\lambda \in E$,

(*ii*) *ist E endlich.*

Beweis. Angenommen, (*i*) ist falsch, womit $\operatorname{ran}(T - \lambda_0 I) = X$ für ein $\lambda_0 \in E$. Wir setzen $M_n := \ker(T - \lambda_0 I)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und bemerken, dass wegen $(T - \lambda_0 I)^n T = T(T - \lambda_0 I)^n$ sicherlich $T(M_n) \subseteq M_n$.

Da λ_0 ein Eigenwert von T ist, existiert $x_1 \in M_1$, $x_1 \neq 0$. Wegen $\operatorname{ran}(T - \lambda_0 I) = X$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $(T - \lambda_0 I)x_{n+1} = x_n$, $n \geq 1$. Es folgt

$$(T - \lambda_0 I)^n x_{n+1} = x_1 \neq 0, \ (T - \lambda_0 I)^{n+1} x_{n+1} = (T - \lambda_0 I)x_1 = 0 \,.$$

Also sind M_n abgeschlossene Unterräume mit $M_n \subsetneq M_{n+1}$. Setzt man $\lambda_n := \lambda_0$ für alle n, so gilt offenbar auch

$$(T - \lambda_n I)(M_{n+1}) \subseteq M_n \,.$$

Gemäß Lemma 6.5.10 wäre T dann aber nicht kompakt.

Wäre (*ii*) falsch, so gäbe es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Eigenwerten. Sei e_n ein Eigenvektor zu λ_n und setze

$$M_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \,.$$

Da die λ_n verschieden sind, gilt $\dim M_n = n - 1$. Als endlichdimensionale Unterräume von X sind die M_n abgeschlossen, wobei auch $M_n \subsetneq M_{n+1}$. Für $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in M_{n+1}$ folgt

$$Tx = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n e_n \in M_{n+1} \,,$$

und damit

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)e_1 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e_{n-1} \in M_n \,.$$

Wieder nach Lemma 6.5.10 wäre T dann aber nicht kompakt.

❑

6.5.12 Satz. *Sei X ein Banachraum und $T \in K(X)$.*

(i) Ist $\lambda \neq 0$, so gilt

$$\dim \ker(T - \lambda I) = \dim \Big(X / \operatorname{ran}(T - \lambda I) \Big) .$$

(ii) Für $\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}$ ist λ ein Eigenwert von T, also $\sigma(T) \backslash \{0\} = \sigma_p(T) \backslash \{0\}$.

(iii) $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar und hat höchstens einen Häufungspunkt, nämlich 0.

Beweis. Für festgehaltenes $\lambda \neq 0$ sei $N := \ker(T - \lambda I)$ und $M := \operatorname{ran}(T - \lambda I)$. Wegen Proposition 6.5.8 ist N endlichdimensional und M ist abgeschlossen mit endlicher Kodimension. Für einen gewissen endlichdimensionalen Unterraum F von X und einen gemäß Proposition 5.2.8 gewählten abgeschlossenen Unterraum E von X gilt dann

$$X = N \dot{+} E = F \dot{+} M ,$$

wobei alle vier hier auftretenden Unterräume auch abgeschlossen sind; vgl. Satz 2.2.1. Die Abbildungen $\psi_1 : N \times E \to X$ und $\psi_2 : F \times M \to X$ definiert durch $\psi_j(x, y) = x + y$ sind nach Korollar 4.3.4 linear und bijektiv mit beschränkten Inversen. Dabei sind $N \times E$ und $F \times M$ Banachräume wie in Proposition 2.4.5. Gemäß Lemma 6.1.3 sind auch $\psi_1' : X' \to (N \times E)'$ und $\psi_2' : X' \to (F \times M)'$ bijektiv und beschränkt invertierbar, wobei wir $(N \times E)'$ mit $N' \times E'$ und $(F \times M)'$ mit $F' \times M'$ auf natürliche Weise identifizieren können. Man beachte dabei, dass

$$\begin{aligned} \dim N' &= \dim N = \dim \ker(T - \lambda I) < \infty \quad \text{und} \\ \dim F' &= \dim F = \dim \Big(X / \operatorname{ran}(T - \lambda I) \Big) < \infty . \end{aligned}$$

Die Abbildung $S : E \to M$ definiert durch $Sy = (T - \lambda I)y$ für $y \in E$ ist offenbar linear, beschränkt und bijektiv. Wieder nach Korollar 4.3.4 ist S und wegen Lemma 6.1.3 auch $S' : M' \to E'$ bijektiv und beschränkt invertierbar. Für ein lineares $B : N \to F$ sei $R : N \times E \to F \times M$ definiert durch

$$R(x, y) = (Bx, Sy), \quad (x, y) \in N \times E .$$

Man überzeugt sich leicht, dass dann $R'(a, b) = (B'a, S'b)$ für $(a, b) \in F' \times M'$. Offenbar gilt

$$\begin{gathered} \ker R = \ker B \times \{0\}, \ \operatorname{ran} R = \operatorname{ran} B \times M, \\ \ker R' = \ker B' \times \{0\}, \ \operatorname{ran} R' = \operatorname{ran} B' \times E' . \end{gathered} \tag{6.5.2}$$

Betrachtet man $\psi_2 R \psi_1^{-1} : X \to X$, so gilt für $x \in N, y \in E$

$$\begin{aligned} \psi_2 R \psi_1^{-1}(x + y) + \lambda(x + y) &= Bx + Sy + \lambda(x + y) \\ &= Bx + (T - \lambda I)y + \lambda(x + y) \\ &= Bx + (T - \lambda I)(x + y) + \lambda(x + y) = T(x + y) + Bx . \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

Wegen der Beschränktheit von $N \dot{+} E \ni x + y \mapsto x \in N$ ist auch $x + y \mapsto Bx$ ein beschränkter Operator mit endlichdimensionalen Bildbereich, weshalb $C :=$

$\psi_2 R \psi_1^{-1} + \lambda I \in K(X)$; vgl. Proposition 6.5.4. Gemäß Satz 6.5.7 erhalten wir $C' \in K(X')$. Offenbar gilt

$$(C - \lambda I) = \psi_2 R \psi_1^{-1} \quad \text{und} \quad (C' - \lambda I) = (\psi_1^{-1})' R' \psi_2' \,. \tag{6.5.4}$$

Wir wollen zunächst $\dim N \neq \dim F$ auf einen Widerspruch führen, womit (i) bewiesen wäre. Im Falle $\dim N > \dim F$ gilt immer $\ker B \neq \{0\}$. Zudem können wir $B : N \to F$ surjektiv wählen. Gemäß (6.5.2) und (6.5.4) gilt $\operatorname{ran}(C - \lambda I) = X$ aber $\ker(C - \lambda I) \neq \{0\}$, was zusammen Proposition 6.5.11 widerspricht.

Im Falle $\dim N < \dim F$ können wir $B : N \to F$ injektiv wählen, womit $B' : F' \to N'$ surjektiv ist. Wegen $\ker B' \neq \{0\}$ folgt aus (6.5.2) und (6.5.4), dass $\operatorname{ran}(C' - \lambda I) = X'$ aber $\ker(C' - \lambda I) \neq \{0\}$, was wiederum Proposition 6.5.11 widerspricht.

Die Aussage (ii) folgt sofort aus (i), wenn man bedenkt, dass wegen dem Satz von der offenen Abbildung $\lambda \in \sigma(T)$ heißt, dass $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ oder $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$. Die Aussage (iii) folgt sofort aus Proposition 6.5.11 und (ii). ❑

6.5.13 (Zusammenfassung)**.** *Sei X ein Banachraum und $T \in K(X)$. Dann besteht das Spektrum von T aus einer (endlichen oder unendlichen) Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die, falls sie unendlich ist, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ erfüllt. Jeder von Null verschiedene Spektralpunkt λ ist ein Eigenwert, und es gilt*

$$\dim \ker(T - \lambda) = \dim[X / \operatorname{ran}(T - \lambda)] < \infty \,. \tag{6.5.5}$$

Die Aussage von Satz 6.5.12, insbesondere, dass stets (6.5.5) gilt, ist auch als *Fredholmsche Alternative* bekannt.

6.5.14 Bemerkung. Nach Proposition 6.5.8 gilt $\dim \ker(T' - \lambda I) = \dim \Big(X / \operatorname{ran}(T - \lambda I) \Big)$. Wegen Satz 6.5.7 können wir Satz 6.5.12 auch auf T' anwenden und erhalten sogar

$$\begin{aligned} \dim \ker(T - \lambda I) &= \dim \Big(X / \operatorname{ran}(T - \lambda I) \Big) \\ &= \dim \ker(T' - \lambda I) = \dim \Big(X' / \operatorname{ran}(T' - \lambda I) \Big) \,. \end{aligned}$$

//

6.6 Operatoren im Hilbertraum

Wir beginnen mit einer Konsequenz der Schwarzschen Ungleichung; vgl. Lemma 6.1.1. Wieder haben alle Räume den Skalarkörper $\mathbb{C}$.

6.6.1 Korollar. *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ist $T : H_1 \to H_2$ linear, dann gilt*

$$\|T\| = \sup \Big\{ |(Tx, y)| : \, x \in H_1, y \in H_2, \, \|x\|, \|y\| \le 1 \Big\} \,.$$

Beweis. Wegen der Schwarzschen Ungleichung gilt $|(Tx, y)| \le \|T\|$ für $\|x\|, \|y\| \le 1$. Mit $y = \frac{1}{\|Tx\|} Tx$ gilt sogar $|(Tx, y)| = \|Tx\|$, wodurch

$$\|T\| = \sup \Big\{ \|Tx\| : \|x\| \le 1 \Big\} = \sup \Big\{ |(Tx, y)| : \|x\|, \|y\| \le 1 \Big\} \,.$$

❑

Sei $T \in L_b(H_1, H_2)$. Dann ist die Abbildung $f : x \mapsto (Tx, y)$ für jedes feste y ein stetiges Funktional auf H_1. Also gibt es wegen Proposition 3.2.5 ein eindeutig bestimmtes Element – wir bezeichnen es mit T^*y – für das $f(x) = (x, T^*y)$, $x \in H_1$ gilt. Also ist T^*y jenes eindeutige Element aus H_1 mit

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \text{für alle} \quad x \in H_1 \,.$$

Aus der Eindeutigkeit von $T^*y \in H_1$ mit dieser Eigenschaft folgt die Linearität der Abbildung $y \mapsto T^*y$. Der Operator $T^* : H_2 \to H_1$ heißt die *Adjungierte* von T.

Offenbar hängt T^* eng mit dem konjugierten Operator T' zusammen. Bevor wir auf diesen Zusammenhang näher eingehen, stellen wir einige elementare Eigenschaften zusammen.

6.6.2 Proposition. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) Für alle $T \in L_b(H_1, H_2)$ gilt $T^* \in L_b(H_2, H_1)$ mit

$$\|T^*\| = \|T\|, \quad \|T^*T\| = \|T\|^2 \,.$$

(ii) Für alle $T, S \in L_b(H_1, H_2), R \in L_b(H_2, H_3)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(T+S)^* = T^* + S^*,\ (\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*,\ (RS)^* = S^*R^*,\ T^{**} = T,\ I^* = I \,,$$

wobei I die Identitätsabbildung auf einem Hilbertraum ist.

(iii) Für alle $T \in L_b(H_1, H_2)$ gilt

$$\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp, \quad \ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp \,.$$

Beweis.
ad(i): Wegen Korollar 6.6.1 gilt

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup\{|(T^*x, y)| : x \in H_2, y \in H_1, \|x\|, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(x, Ty)| : x \in H_2, y \in H_1, \|x\|, \|y\| \leq 1\} = \|T\| \,.\end{aligned}$$

Es ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$. Andererseits gilt

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2 \quad \text{für alle} \quad x \in H_1 \,,$$

also $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

ad(ii): Wir beweisen $(RS)^* = S^*R^*$; die restlichen Aussagen folgen analog. Für alle $x \in H_1, y \in H_3$ ist

$$(RSx, y) = (R(Sx), y) = (Sx, R^*y) = (x, S^*R^*y) \,.$$

ad(iii): Es ist $x \in \ker T^* \iff T^*x = 0 \iff (T^*x, y) = 0$ für alle $y \in H_1 \iff (x, Ty) = 0$ für alle $y \in H_1 \iff x \perp \operatorname{ran} T$. Die zweite Beziehung folgt aus der ersten, wenn man $T^{**} = T$ beachtet.

❑

Da sich nach dem Satz von Riesz, Proposition 3.2.5, der Dualraum H' in natürlicher Weise mit H identifizieren lässt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen Adjungierter und Konjugierter. Dazu bezeichnen wir für $j = 1, 2$ mit Φ_j die konjugiert-lineare Isometrie zwischen H_j und H'_j aus Proposition 3.2.5, $\Phi_j : y \mapsto (\cdot, y)$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[d, "T"'] & H'_1 & H_1 \arrow[l, "\Phi_1"'] \\ H_2 & H'_2 \arrow[u, "T'"] & H_2 \arrow[l, "\Phi_2"] \arrow[u, "T^*"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ, d.h. es gilt $\Phi_1 \circ T^* = T' \circ \Phi_2$, denn es gilt einerseits ($x \in H_2, y \in H_1$)

$$(Ty, x) = \langle Ty, (\cdot, x)\rangle = \langle Ty, \Phi_2(x)\rangle = \langle y, T'(\Phi_2(x))\rangle ,$$

und andererseits

$$(Ty, x) = (y, T^*x) = \langle y, (\cdot, T^*x)\rangle = \langle y, \Phi_1(T^*x)\rangle .$$

Man könnte dieses Diagramm genauso zur Definition der Adjungierten heranziehen. Der obige Zugang über das innere Produkt ist aber gebräuchlicher.

Die Tatsache, dass für einen Operator auf einem Hilbertraum die Adjungierte wieder ein Operator auf dem gleichen Raum ist, gibt uns die Möglichkeit, T und T^* in Beziehung zu setzen.

6.6.3 Definition. Sei H ein Hilbertraum und $T \in L_b(H)$. Dann heißt T

(i) *normal*, wenn $TT^* = T^*T$;

(ii) *selbstadjungiert*, wenn $T = T^*$;

(iii) *unitär*, wenn $TT^* = T^*T = I$, d.h. T ist bijektiv mit $T^* = T^{-1}$.

Ist $T \in L_b(H_1, H_2)$ mit zwei Hilberträumen H_1, H_2 so, dass $T^*T = I_{H_1}$ und $TT^* = I_{H_2}$, dann wird T ebenfalls als unitär bezeichnet.

6.6.4 Beispiel. Sei μ ein σ-endliches Maß auf der Menge Ω versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, und sei $\phi \in L^\infty(\mu)$. Wir betrachten den Multiplikationsoperator M_ϕ mit Symbol ϕ am $L^2(\mu)$. Als erstes bestimmen wir seine Hilbertraumadjungierte. Wegen

$$\big(M_\phi f, g\big) = \int_\Omega (\phi f)\overline{g}\, d\mu = \int_\Omega f\overline{(\overline{\phi} g)}\, d\mu = \big(f, M_{\overline{\phi}} g\big) ,$$

ist $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$. Wir sehen, dass M_ϕ stets normal ist, und selbstadjungiert bzw. unitär genau dann, wenn ϕ f.ü. reell ist bzw. f.ü. Betrag 1 hat. //

Über die Gestalt des Spektrums solcher spezieller Typen von Operatoren lässt sich einiges sagen. Zum Beispiel ist die folgende Aussage über den Spektralradius eines normalen Operators von großer Bedeutung in der Spektraltheorie. Wir erinnern daran, dass stets $r(T) \leq \|T\|$ gilt, im Allgemeinen aber nicht Gleichheit gelten muss.

6.6.5 Proposition. *Sei $N \in L_b(H)$ normal. Dann gilt $r(N) = \|N\|$.*

Beweis. Ist N normal, so auch N^2. Wir erhalten mit Proposition 6.6.2, (ii),

$$\begin{aligned}\|N^2\|^2 &= \|(N^2)^*(N^2)\| = \|N^*(N^*N)N\| = \|N^*(NN^*)N\| \\ &= \|(N^*N)^*(N^*N)\| = \|N^*N\|^2 = (\|N\|^2)^2\,,\end{aligned} \tag{6.6.1}$$

also $\|N^2\| = \|N\|^2$. Daraus erhalten wir $\|N^{2^k}\| = \|N\|^{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion, da diese Gleichheit für $k = 1$ richtig ist und da durch eine Anwendung von (6.6.1) auf den normalen Operator N^{2^k} zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $\|N^{2^k}\| = \|N\|^{2^k}$

$$\|N^{2^{k+1}}\| = \|(N^{2^k})^2\| = \|N^{2^k}\|^2 = \|N\|^{2^{k+1}}$$

folgt. Aus Satz 6.4.14 erhalten wir schließlich

$$r(N) = \lim_{n\to\infty} \|N^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|N^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|N\|\,.$$

❑

Bei der Untersuchung von Operatoren auf einem Hilbertraum ist die quadratische Form (Tx, x) von Bedeutung.

6.6.6 Lemma. *Ist $T \in L_b(H)$ und gilt $(Tx, x) = 0$ für alle $x \in H$, so folgt $T = 0$.*

Beweis. Aus der Polarisationsformel (3.1.3) angewandt auf die Sesquilinearform $[x, y] = (Tx, y)$ folgt $(Tx, y) = 0$ für alle $x, y \in H$ und damit $Tx = 0$ für jedes $x \in H$.

❑

Nun wollen wir uns noch speziell unitäre Operatoren ansehen.

6.6.7 Proposition. *Sei $U \in L_b(H_1, H_2)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *U ist unitär.*

(ii) $\operatorname{ran} U = H_2$ *und* $(Ux, Uy)_{H_2} = (x, y)_{H_1}$ *für alle* $x, y \in H_1$.

(iii) $\operatorname{ran} U = H_2$ *und* $\|Ux\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ *für alle* $x \in H_1$.

Beweis. Ist U unitär, so folgt $\operatorname{ran} U = H_2$ unmittelbar aus $UU^* = I_{H_2}$. Wegen $U^*U = I_{H_1}$ folgt $(Ux, Uy)_{H_2} = (x, U^*Uy)_{H_1} = (x, y)_{H_1},\ x, y \in H_1$. Wir haben damit $(i) \Rightarrow (ii)$ gezeigt. Die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist trivial. Aus (iii) folgt schließlich

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x),\ x \in H_1\,.$$

Wegen Lemma 6.6.6 gilt daher $U^*U = I_{H_1}$. Andererseits ist unter der Voraussetzung (iii) sicher U eine lineare stetige Bijektion von H_1 auf H_2. Aus Korollar 4.3.4 folgt $U^{-1} \in L_b(H_2, H_1)$, und aus $U^*U = I_{H_1}$ damit $U^* = U^{-1}$.

❑

Auch über die Lage des Spektrums eines unitären Operators lässt sich eine Aussage machen.

6.6.8 Proposition. *Sei $U \in L_b(H)$ unitär. Dann gilt $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Beweis. Es gilt $\|U\| = 1$, also ist $\sigma(U) \subseteq K_1(0)$ $(\subseteq \mathbb{C})$. Da sicher $0 \in \rho(U)$ ist, und U^{-1} ebenfalls unitär, folgt, dass auch $\sigma(U^{-1}) \subseteq K_1(0)$ $(\subseteq \mathbb{C})$. Nun ist nach Lemma 6.4.8 $\sigma(U^{-1}) = \sigma(U)^{-1}$.

❑

Die Menge $W(T) := \{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ heißt der *numerische Wertebereich* des Operators $T \in L_b(H)$. Offenbar gilt

$$W(T) \subseteq K^{\mathbb{C}}_{\|T\|}(0)\,. \tag{6.6.2}$$

Man überprüft sofort, dass $W(T^*) = \{\bar{z}.z \in W(T)\}$ und $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Das Spektrum eines Operators im Hilbertraum steht in Beziehung zu seinem numerischen Wertebereich.

6.6.9 Proposition. *Für einen Hilbertraum H und $T \in L_b(H)$ gilt*

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}\,.$$

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{W(T)}$, und setze $\delta := d(\lambda, W(T)) > 0$. Für $x \in H$, $\|x\| = 1$, gilt

$$\delta \leq |(Tx, x) - \lambda| = \big|\big((T - \lambda)x, x\big)\big| \leq \|(T - \lambda)x\|\,. \tag{6.6.3}$$

Aus der Linearität folgt damit $\delta\|x\| \leq \|(T-\lambda)x\|$ für alle $x \in H$. In Bemerkung 4.3.5 haben wir gesehen, dass dann $T - \lambda$ injektiv ist, und dass die Abbildung $(T - \lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(T - \lambda) \to H$ beschränkt mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich $\frac{1}{\delta}$ ist. Wegen Lemma 4.3.6 ist $\operatorname{ran}(T - \lambda)$ auch abgeschlossen.

Da $z \in W(T^*)$ genau dann, wenn $\overline{z} \in W(T)$, kann man obige Argumentation auf T^* und $\overline{\lambda}$ anwenden, und erhält $\ker(T^* - \overline{\lambda}) = \{0\}$. Also gilt

$$\operatorname{ran}(T - \lambda) = \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda)} = (\operatorname{ran}(T - \lambda)^{\perp})^{\perp} = \ker(T^* - \overline{\lambda})^{\perp} = X\,;$$

insgesamt folgt $\lambda \in \rho(T)$.

❑

6.6.10 Bemerkung. Wir wollen herausstreichen, dass wir im Beweis von Proposition 6.6.9 für $\lambda \notin \overline{W(T)}$ gezeigt haben, dass $\lambda \in \rho(T)$ mit $\|(T - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, W(T))}$ gilt. //

6.6.11 Bemerkung. Sei $[.,.] : H \times H \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Gemäß Satz 3.2.6 lässt sich diese dann eindeutig durch einen Operator $G \in L_b(H)$ mit $\|G\| = \|[.,.]\|$ darstellen, also $[x, y] = (Gx, y)$ für alle $x, y \in H$. Ist nun $[.,.]$ auch *koerziv*, also gilt für ein $c > 0$

$$\operatorname{Re}[x, x] \geq c\|x\|^2 \quad \text{für alle} \quad x \in H\,,$$

dann folgt daraus, dass der numerische Wertebereich $W(G)$ von G in der Halbebene $H_c := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq c\}$ enthalten ist. Verwenden wir das in Bemerkung 6.6.10 Gesagte für $\lambda = 0$, so folgt $0 \in \rho(G)$ mit

$$\|G^{-1}\| \leq \frac{1}{c}\,,$$

da $c = d(0, H_c) \leq d(0, W(G))$. Der in dieser Bemerkung dargelegte Sachverhalt wird neben Satz 3.2.6 auch Satz von *Lax-Milgram* genannt. //

6.6.12 Korollar. *Für einen Hilbertraum H und $A \in L_b(H)$ ist A genau dann selbstadjungiert, wenn $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Es gilt ($x \in H$)

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im}(Ax, x) &= (Ax, x) - \overline{(Ax, x)} = (Ax, x) - (x, Ax) \\ &= (Ax, x) - (A^* x, x) = ((A - A^*)x, x) . \end{aligned}$$

Also gilt $W(A) \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $((A - A^*)x, x) = 0$ für alle $\|x\| = 1$ und damit für alle $x \in H$. Wegen Lemma 6.6.6 bedeutet das gerade $A = A^*$.

❑

6.6.13 Korollar. *Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Setzen wir*

$$\gamma_-(A) := \inf \big\{ (Ax, x) : \|x\| = 1 \big\} \quad \textit{und} \quad \gamma_+(A) := \sup \big\{ (Ax, x) : \|x\| = 1 \big\} ,$$

so gilt

$$\sigma(A) \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)] \subseteq \mathbb{R} ,$$

wobei $\gamma_-(A), \gamma_+(A) \in \sigma(A)$. Dabei ist

$$\|A\| = r(A) = \max(|\gamma_-(A)|, |\gamma_+(A)|) .$$

Beweis. Offenbar gilt $\gamma_-(A) = \min \overline{W(A)}$ und $\gamma_+(A) = \max \overline{W(A)}$. Gemäß Korollar 6.6.12 und Proposition 6.6.9 haben wir

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)] \subseteq \mathbb{R} .$$

Nehmen wir für einen Moment an, dass $W(A) \subseteq [0, +\infty)$, dann folgt (vgl. (6.6.2))

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)} \subseteq [0, \gamma_+(A)] \subseteq [0, \|A\|] \subseteq [0, +\infty) .$$

Wegen Proposition 6.6.5 folgt daraus $\max_{z \in \sigma(A)} z = \max_{z \in \sigma(A)} |z| = r(A) = \|A\|$. Wir erhalten$\|A\| \in \sigma(A)$ und nach einer abermalige Anwendung obiger Inklusionskette $\|A\| = \gamma_+(A)$.

Allgemein gilt $W(A) + \lambda = W(A + \lambda I) \subseteq [0, +\infty)$ für alle reellen $\lambda \geq -\gamma_-(A)$. Also folgt für solche λ aus obigem Spezialfall angewandt auf den selbstadjungierten Operator $A + \lambda I$

$$\gamma_+(A) + \lambda = \gamma_+(A + \lambda I) \in \sigma(A + \lambda I) .$$

Wegen $\sigma(A + \lambda I) = \sigma(A) + \lambda$ (siehe Satz 6.4.7) folgt $\gamma_+(A) \in \sigma(A)$. Infolge gilt $-\gamma_-(A) = \gamma_+(-A) \in \sigma(-A) = -\sigma(A)$, und daher $\gamma_-(A) \in \sigma(A)$.

Schließlich folgt $r(A) = \max(|\gamma_-(A)|, |\gamma_+(A)|)$ sofort aus $\sigma(A) \subseteq [\gamma_-(A), \gamma_+(A)]$ mit $\gamma_-(A), \gamma_+(A) \in \sigma(A)$.

❑

Aus Korollar 6.6.13 und Korollar 6.6.12 folgt unmittelbar

6.6.14 Korollar. *Für ein $A \in L_b(H)$ ist A genau dann selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty)$, wenn $0 \leq (Ax, x)$ $(\in \mathbb{R})$ für alle $x \in H$. In diesem Fall spricht man von einem* positiven Operator.

6.7 Kompakte selbstadjungierte Operatoren

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Beispiel beginnen.

6.7.1 Beispiel. Sei H ein Hilbertraum, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $E = \{e_n : \mathbb{N} \ni n \leq N\}$ ein Orthonormalsystem in H mit $e_n \neq e_m$ für $n \neq m$. Weiters seien λ_n, $\mathbb{N} \ni n \leq N$, Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, die im Falle $N = \infty$ eine Nullfolge abgeben. Wir betrachten die Abbildung $A : H \to H$ definiert durch

$$Ax = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, e_n) e_n, \; x \in H . \tag{6.7.1}$$

Für $N < \infty$ ist dies eine endliche Summe. Im Falle $N = \infty$ folgt aus $\hat{x} = ((x, e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, dass auch $(\lambda_n (x, e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$; vgl. Satz 3.3.3. Wegen (3.3.2) konvergiert dann die Reihe in (6.7.1), womit A in jedem Fall wohldefiniert ist. Man überzeugt sich leicht von der Linearität von A. Aus Satz 3.3.3 erhalten wir mit[†] $c := \max_{\mathbb{N} \ni j \leq N} |\lambda_j|$ auch

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n (x, e_n)|^2 \leq c^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 = c^2 \cdot \|x\|^2 ,$$

weshalb sich A als beschränkt mit $\|A\| \leq c$ herausstellt. Für $x = e_j$, wobei $j \in \mathbb{N}$ derart ist, dass $|\lambda_j| = c$, folgt $\|Ax\|^2 = \|\lambda_j x\|^2 = c^2$, wodurch sogar $\|A\| = \max_{\mathbb{N} \ni j \leq N} |\lambda_j|$. Wegen

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, e_n)(e_n, y) = (x, Ay)$$

ist A auch selbstadjungiert.

Wiederholen wir im Falle $N = \infty$ diese Argumentation für $A_k : H \to H$ definiert durch

$$A_k x = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n, \; x \in H ,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, so ist auch A_k linear und beschränkt durch $\|A_k\| = \max_{j \in \mathbb{N}, j \geq k} |\lambda_j|$. Insbesondere gilt $\lim_{k \to \infty} \|A_k\| \to 0$. Wegen

$$A - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (., e_n) e_n = A_{k+1}$$

konvergiert die Folge $(\sum_{n=1}^{k} \lambda_n (., e_n) e_n)_{k \in \mathbb{N}}$ von beschränkten Operatoren mit endlichdimensionalem Bild bezüglich der Operatornorm gegen A. Nach Proposition 6.5.4 folgt somit $A \in K(H)$.

Aus (6.7.1) zusammen mit $Ae_j = \lambda_j e_j$ erhalten wir wegen Proposition 6.6.2

$$\ker(A)^\perp = \overline{\operatorname{ran} A} = \overline{\operatorname{span} E} .$$

Schließlich wollen wir $\sigma(A) \setminus \{0\}$ bestimmen. Gemäß Satz 6.5.12 gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, also wenn λ ein Eigenwert ist.

[†]Im Fall $N = \infty$ existiert dieses Maximum wegen $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = 0$.

Wegen $Ae_j = \lambda_j e_j$ ist jedes λ_j ein Eigenwert. Sei P die orthogonale Projektion auf den Abschluss der linearen Hülle aller e_j, also $P = \sum_{j=1}^{N} (., e_j) \cdot e_j$ gemäß (3.3.3) in Satz 3.3.3. Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ungleich allen λ_j, $j \in \mathbb{N}$, so folgt für $x \in H$

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, e_n) e_n - \sum_{n=1}^{N} \lambda (x, e_n) e_n - \lambda (I - P) x \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\lambda_n - \lambda)(x, e_n) e_n - \lambda (I - P) x \,, \end{aligned}$$

wodurch $\|Ax - \lambda x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n - \lambda|^2 |(x, e_n)|^2 + |\lambda|^2 \|(I - P)x\|^2$; siehe Satz 3.3.3. Für $x \neq 0$ gilt $Px \neq 0$ oder $(I - P)x \neq 0$, wobei im ersten Fall $(x, e_n) \neq 0$ für mindestens ein n. Wir schließen in jedem Fall auf $\|Ax - \lambda x\|^2 \neq 0$, wodurch $\lambda \notin \sigma_p(A) \setminus \{0\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$. Also gilt $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_j : \mathbb{N} \ni j \leq N\}$. //

Wir wollen in diesem Abschnitt den Sachverhalt vom Anfang von Kapitel 7 für selbstadjungierte Operatoren auf endlichdimensionalen Hilberträumen auf kompakte selbstadjungierte Operatoren auf beliebigen Hilberträumen erweitern. In der Tat wollen wir zeigen, dass jeder kompakte selbstadjungierte Operator auf einem Hilbertraum von der Bauart des Operators in Beispiel 6.7.1 ist. Zunächst benötigen wir

6.7.2 Lemma. *Ist $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert, so gilt $\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I)$ für verschiedene $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$.*

Beweis. Sind $x \in \ker(A - \lambda I)$ und $y \in \ker(A - \mu I)$, so folgt wegen $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (siehe Korollar 6.6.13)

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y) \,,$$

was für $\lambda \neq \mu$ nur möglich ist, wenn $(x, y) = 0$.

❑

Ist H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ kompakt und selbstadjungiert so gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ gemäß Korollar 6.6.13. Nach Satz 6.5.12 ist $\sigma(A)$ abzählbar mit Häufungspunkt höchstens 0, wobei $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$.

6.7.3 Lemma. *Ist $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert und kompakt, so gibt es ein $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ein ONS $\{e_j : j \in \mathbb{N}, j \leq N\}$ mit $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und komplexe Zahlen λ_j, $j \in \mathbb{N}$, $j \leq N$, derart, dass $\{\lambda_j : N \geq j \in \mathbb{N}\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$ mit $e_j \in \ker(A - \lambda_j I)$, $N \geq j \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = 0$ im Fall $N = \infty$, und dass für jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$*

$$\operatorname{span}\{e_j : N \geq j \in \mathbb{N},\ \lambda_j = \lambda\} = \ker(A - \lambda I) \,. \tag{6.7.2}$$

Beweis. Für jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ gilt $0 < \dim \ker(A - \lambda I) < \infty$; siehe Proposition 6.5.8. Als endlichdimensionaler Hilbertraum hat $\ker(A - \lambda I)$ eine Orthonormalbasis bestehend aus $\dim \ker(A - \lambda I)$ vielen Vektoren; siehe Lemma 3.3.2. Wir wählen eine solche aus und bezeichnen diese mit E_λ.

$$E := \bigcup_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}} E_\lambda$$

bildet nach Lemma 6.7.2 ein abzählbares Orthonormalsystem in H. Insbesondere können wir E in der Form

$$E = \{e_j : j \in \mathbb{N},\, j \leq N\} \tag{6.7.3}$$

mit $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und einer injektiven Abbildung $j \mapsto e_j$ schreiben. Für $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq N$ setzen wir zudem $\lambda_j = \lambda$, wobei $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ derart ist, dass $e_j \in E_\lambda$.

Um im Fall $N = \infty$ das Grenzwertverhalten $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$ nachzuweisen, sei $\epsilon > 0$. Nach Proposition 6.5.11 ist $\sigma(A) \setminus K_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)$ und folglich auch $\bigcup_{\lambda\in\sigma(A)\setminus K_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)} E_\lambda$ endlich. Da $j \mapsto e_j$ injektiv ist, gibt es ein $j(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcup_{\lambda\in\sigma(A)\setminus K_\epsilon^{\mathbb{C}}(0)} E_\lambda \;\subseteq\; \{e_j : j \leq j(\epsilon)\}\,.$$

Für $j > j(\epsilon)$ gilt folglich $e_j \notin E_\lambda$ im Fall $|\lambda| > \epsilon$, womit $|\lambda_j| \leq \epsilon$.

❑

Im vorherigen Lemma 6.7.3 bedeutet $N = 0$ genau $\sigma(A)\setminus\{0\} = \emptyset$ und $N \in \mathbb{N}$ genau, dass $\sigma(A) \setminus \{0\}$ endlich und nichtleer ist. Weil $j \mapsto e_j$ in Lemma 6.7.3 injektiv ist, gibt es nach (6.7.2) zu jedem $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ genau $\dim\ker(A - \lambda I)$ viele j mit $\lambda_j = \lambda$. Man sagt, dass λ_j, $N \geq j \in \mathbb{N}$, das Spektrum gezählt nach Vielfachheit durchläuft.

6.7.4 Satz (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Für einen Hilbertraum H sowie einen selbstadjungierten und kompakten Operator $A : H \to H$ gilt mit der Notation aus Lemma 6.7.3*

$$Ax = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, e_n) e_n,\;\; x \in H\,. \tag{6.7.4}$$

Diese Reihe konvergiert im Falle $N = \infty$ bezüglich der Operatornorm. In jedem Fall gilt $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{ran} A} = \overline{\operatorname{span} E}$.

Beweis. Wir betrachten das Orthonormalsystem E wie in (6.7.3), welches aus Eigenvektoren e_j zu den Eigenwerten $\lambda_j \neq 0$ besteht. Offenbar gilt $E \subseteq \operatorname{ran} A$ und somit

$$\overline{\operatorname{span} E} \subseteq \overline{\operatorname{ran} A} = (\operatorname{ran} A)^{\perp\perp} = (\ker A)^\perp\,; \tag{6.7.5}$$

vgl. Proposition 6.6.2. Aus $A(E) \subseteq \operatorname{span} E$ folgt für $x \in E^\perp$ und $y \in E$, dass $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$, wodurch $A(E^\perp) \subseteq E^\perp$.

Im Fall $E^\perp \neq \{0\}$ ist also $A|_{E^\perp} : E^\perp \to E^\perp$ ein kompakter und selbstadjungierter Operator. Jedes $\lambda \in \sigma(A|_{E^\perp}) \setminus \{0\}$ ist gemäß Satz 6.5.12 ein Eigenwert von $A|_{E^\perp}$ und daher auch von A. Ist $0 \neq x \in E^\perp$ ein dazugehöriger Eigenvektor, also $Ax = \lambda x$, so folgt mit (6.7.3), dass x endliche Linearkombination von Vektoren aus E ist, womit wir den Widerspruch $x \in \operatorname{span} E \cap E^\perp = \{0\}$ erhalten.

Also gilt $\sigma(A|_{E^\perp}) = \{0\}$, was zusammen mit Korollar 6.6.13 impliziert, dass $\|A|_{E^\perp}\| = r(A|_{E^\perp}) = 0$. Wir erhalten $A|_{E^\perp} = 0$ und infolge $E^\perp \subseteq \ker A$. Durch Bildung orthogonaler Komplemente folgt zusammen mit (6.7.5), dass $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{ran} A} = \overline{\operatorname{span} E}$.

Um (6.7.4) nachzuweisen, sei zunächst $x \in E$, also $x = e_j$ für ein j. Wir erhalten wegen $(x, e_n) = 0$ für $n \neq j$

$$Ax = \lambda_j e_j = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (x, e_n) e_n \,.$$

Wie wir in Beispiel 6.7.1 gesehen haben, hängt hier die linke und rechte Seite linear und stetig von x ab. Also gilt (6.7.4) für alle $x \in \overline{\operatorname{span} E}$. Für $x \in \overline{\operatorname{span} E}^{\perp} = E^{\perp} = \ker A$ verschwindet die linke und rechte Seite in (6.7.4), womit (6.7.4) auf ganz H gilt.

Dass die Reihe in (6.7.4) im Falle $N = \infty$ bezüglich der Operatornorm konvergiert, haben wir in Beispiel 6.7.1 gesehen.

❏

6.7.5 Bemerkung. Die Eigenwerte eines kompakten, selbstadjungierten und positiven Operator A sind in $[0, +\infty)$ enthalten; siehe Korollar 6.6.14. Insbesondere können wir die Indexierung in (6.7.3) so wählen, dass die Folge λ_j, $j \in \mathbb{N}, j \leq N$, der entsprechenden Eigenwerte in $\sigma(A) \setminus \{0\}$ monoton fallend ist, also

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots > 0 \,.$$

Für $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ gilt gemäß unserer Wahl der Indexierung $\lambda = \lambda_j$ für genau $\dim \ker(A - \lambda I)$-viele aufeinanderfolgende Indizes j. //

6.7.6 Proposition (*Minimax-Prinzip*)**.** *Sei H ein Hilbertraum, $A \in L_b(H)$ kompakt, selbstadjungiert und positiv. Mit der Indexierung von Eigenwerten und Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren wie in Bemerkung 6.7.5 gilt*

$$\lambda_n = \inf_{\substack{V \leq H \\ \dim V = n-1}} \sup_{\substack{x \in V^{\perp} \\ \|x\|=1}} (Ax, x) \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}, n \leq N \,, \tag{6.7.6}$$

wobei das Infimum ein Minimum ist. Im Falle $N < n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq \dim H$ verschwindet die rechte Seite von (6.7.6).

Beweis. Für $M_m := \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N$ gilt gemäß Satz 6.7.4

$$M_m^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N},\, m < k \leq N\}} \oplus \ker A \,.$$

Ist dann $x = y + \sum_{k=n}^{N} \alpha_k e_k$ aus $M_{n-1}^{\perp}$ mit $y \in \ker A = \operatorname{ran} A^{\perp}$ beliebig, so gilt

$$(Ax, x) = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k |\alpha_k|^2 \leq \lambda_n \sum_{k=n}^{N} |\alpha_k|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2 \,.$$

Wegen $\dim M_{n-1} = n - 1 < N \leq \dim H$ für $n \leq N$, können wir in diesem Fall $x \neq 0$ wählen, woraus die Ungleichung „$\geq$“ in (6.7.6) folgt. Im Falle $N < n \leq \dim H$ können wir $V \leq H$ mit $\dim V = n - 1$ und $M_N \leq V$ wählen. Damit folgt $\{0\} \neq V^{\perp} \subseteq \ker A$ und weiter $\sup_{x \in V^{\perp}, \|x\|=1} (Ax, x) = 0$.

Im Fall $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$ gilt „$\leq$“ in (6.7.6), da wir von $\dim V = n - 1$ auf $V^{\perp} \cap M_n \neq \{0\}$ und für $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in V^{\perp} \cap M_n$ weiter auf

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\alpha_k|^2 \geq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

schließen.

❑

Wir kommen zu einer weiteren Folgerung von Satz 6.7.4.

6.7.7 Proposition. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $T \in K(H_1, H_2)$. Mit der Indexierung von Eigenwerten und Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren wie in Bemerkung 6.7.5 angewandt auf den kompakten, selbstadjungierten und positiven Operator $A := T^*T \in K(H_1)$ gilt*

$$T = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}(., e_n) f_n \,, \tag{6.7.7}$$

und

$$T^* = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}(., f_n) e_n \,, \tag{6.7.8}$$

wobei $\{f_j : j \in \mathbb{N}, j \leq N\}$ ein Orthonormalsystem in H_2 ist. Im Falle $N = \infty$ konvergieren obige Reihen bezüglich der Operatornorm.

Beweis. Offenbar ist $T^*T : H_1 \to H_1$ selbstadjungiert und beschränkt. Wegen $(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geq 0$ erkennen wir aus Korollar 6.6.14, dass T^*T positiv ist. Gemäß Satz 6.7.4 gilt $T^*T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n(., e_n)e_n$, wobei im Falle $N = \infty$ diese Reihe bezüglich der Operatornorm konvergiert. Wir wählen hier die Indexierung von Eigenwerten und Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren wie in Bemerkung 6.7.5. Wie wir in Beispiel 6.7.1 gesehen haben, definiert

$$\sqrt{T^*T} := \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}(., e_n) e_n \tag{6.7.9}$$

einen linearen, selbstadjungierten und kompakten Operator. Dabei gilt für $x = e_j$

$$\sqrt{T^*T}^2 x = \sqrt{T^*T}\sqrt{\lambda_j} e_j = \lambda_j e_j = T^*Tx \,.$$

Linearität und Beschränktheit implizieren $\sqrt{T^*T}^2 x = T^*Tx$ für alle $x \in \overline{\operatorname{span} E}$. Aus $\ker T^*T = E^\perp = \ker \sqrt{T^*T}$ und $H_1 = \overline{\operatorname{span} E} \oplus E^\perp$ erhalten wir schließlich $(\sqrt{T^*T})^2 = T^*T$. Für $x \in H_1$ gilt daher

$$(\sqrt{T^*T}x, \sqrt{T^*T}x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \,. \tag{6.7.10}$$

Wenden wir diese Gleichung auf $x = y - z$ an, so folgt aus $\sqrt{T^*T}y = \sqrt{T^*T}z$, dass $Ty = Tz$. Somit ist durch $U(\sqrt{T^*T}x) = Tx$ eine surjektive Abbildung von $\operatorname{ran} \sqrt{T^*T}$ nach $\operatorname{ran} T$ wohldefiniert. Man überprüft sofort, dass U linear ist und mit (6.7.10) erkennen wir auch, dass U isometrisch ist, womit sich U eindeutig linear und isometrisch zu einer bijektiven Abbildung $U : \overline{\operatorname{ran} \sqrt{T^*T}} \to \overline{\operatorname{ran} T}$ fortsetzen lässt, welche $U\sqrt{T^*T} = T$ erfüllt; vgl. Satz 2.5.2.

Bezeichnet $P : H_1 \to \overline{\operatorname{ran} \sqrt{T^*T}}$ die orthogonale Projektion und wenden wir UP auf (6.7.9) an, so folgt (6.7.7), wobei $f_j = Ue_j$, $j \in \mathbb{N}, j \leq N$, wegen der Isometrieeigenschaft von U ein Orthonormalsystem in H_2 abgibt.

Aus $(x \mapsto \sqrt{\lambda_n}(., e_n) f_n)^* = (x \mapsto \sqrt{\lambda_n}(., f_n) e_n)$ folgt wegen der Tatsache, dass Adjungieren konjugiert linear und isometrisch bezüglich der Abbildungsnorm ist, auch die Darstellung von T^* in (6.7.8).

❑

6.7.8 Bemerkung. Wegen Proposition 6.7.7 ist jeder kompakte Operator $T : H_1 \to H_2$ für Hilberträume H_1, H_2 Grenzwert bezüglich der Operatornorm einer Folge von Operatoren mit endlichdimensionalen Bild. Bezeichnen wir mit $F(H_1, H_2) \leq L_b(H_1, H_2)$ den Unterraum aller beschränkten Operatoren von H_1 nach H_2 mit endlichdimensionalen Bild, so erhalten wir zusammen mit Proposition 6.5.4

$$K(H_1, H_2) = \overline{F(H_1, H_2)}\,,$$

wobei der Abschluss in $L_b(H_1, H_2)$ bezüglich der Operatornorm genommen wird. Es war lange eine offene Frage, ob diese Gleichheit auch für allgemeine Banachräume gilt. Durch ein aufwändiges Gegenbeispiel konnte diese Frage mit „Nein" beantwortet werden. //

6.7.9 Korollar. *Seien H_1, H_2 Hilberträume mit $\dim H_1 = \infty$ und habe $T \in K(H_1, H_2)$ die Darstellung (6.7.7) wie in Proposition 6.7.7. Setzen wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$s_n(T) := \min_{\substack{K \in L_b(H_1,H_2),\\ \dim \operatorname{ran} K < n}} \|T - K\|\,,$$

*so gilt $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n}$ für $n \leq N$ und $s_n(T) = 0$ für $N < n \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $s_n(T)$ werden auch s-*Zahlen *des kompakten Operators T genannt.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ hat $K_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_j}(., e_j)f_j$ einen Bildbereich von Dimension $n - 1$. Dabei gilt für $x \in H_1$

$$\begin{aligned}\|(T - K_n)x\|^2 = \|\sum_{j=n}^{N} \sqrt{\lambda_j}(x, e_j)f_j\|^2 &= \sum_{j=n}^{N} \lambda_j |(x, e_j)|^2 \\ &\leq \sum_{j=n}^{N} \lambda_n |(x, e_j)|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2\,,\end{aligned}$$

wodurch $\|T - K_n\| \leq \sqrt{\lambda_n}$ und infolge $\inf_{K \in L_b(H_1,H_2), \dim \operatorname{ran} K < n} \|T - K\| \leq \sqrt{\lambda_n}$. Für $N < n \in \mathbb{N}$ hat $T = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\lambda_j}(., e_j)f_j$ einen Bildbereich von Dimension kleiner n, wodurch $\min_{K \in L_b(H_1,H_2), \dim \operatorname{ran} K < n} \|T - K\| = 0$.

Ist umgekehrt $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ und K beschränkt mit $\dim \operatorname{ran} K < n$, so gilt wegen der Rangformel aus der Linearen Algebra $\operatorname{codim} \ker K = \dim \operatorname{ran} K < n$. Also gibt es ein $x \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $x \in \ker K$ und $\|x\| = 1$, wodurch

$$\begin{aligned}\|T - K\|^2 \geq \|(T - K)x\|^2 = \|Tx\|^2 &= \|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}(x, e_j)f_j\|^2 \\ = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |(x, e_j)|^2 &\geq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 = \lambda_n\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\inf_{K \in L_b(H_1,H_2), \dim \operatorname{ran} K < n} \|T - K\| \geq \sqrt{\lambda_n}$ und wegen der ersten Hälfte des Beweises ist diese Infimum sogar ein Minimum.

❑

Kapitel 7

Der Spektralsatz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist das Spektrum von A gleich der Menge aller Eigenwerte von A. Es gibt eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ des $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Diese Basis kann als Orthonormalbasis gewählt werden.

Bezeichne mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ alle Eigenwerte von A, und bezeichne mit P_k die orthogonale Projektion des $\mathbb{C}^n$ auf den Eigenraum von A zum Eigenwert λ_k. Dann gilt

$$P_i P_j = 0,\ i \neq j, \quad P_1 + \ldots + P_m = I\,.$$

Ist $x \in \mathbb{C}^n$, so kann man Ax berechnen als

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x\,.$$

Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren kann als ein „unendlichdimensionales Analogon" dieser Tatsache gesehen werden. In der allgemeinen Situation wird dabei obige Summe, in der über die Eigenwerte von A summiert wird, durch ein Integral, welches sich über das Spektrum von A erstreckt, ersetzt.

7.1 Spektralmaße

Für das Folgende sei daran erinnert, dass ein $P \in L_b(H)$ genau dann eine orthogonale Projektion ist, wenn $P^* = P = P^2$, vgl. (3.2.3).

7.1.1 Definition. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und H ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist eine Funktion $E : \mathcal{A} \to L_b(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(SM1) Für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion.

(SM2) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$.

(SM3) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für je zwei $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$.

(SM4) Sind $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so gilt

$$E\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

im Sinne der starken Operatortopologie, also $E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\Big)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x$ für alle $x \in H$.

Aus (SM3) folgt insbesondere, dass $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_2)E(\Delta_1)$. Für disjunkte $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$ gilt wegen (SM2) sogar $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\emptyset) = 0$. Insbesondere ist für eine paarweise disjunkte Mengenfolge $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, wie in (SM4) die Voraussetzung des folgenden Lemma 7.1.2 erfüllt. Also konvergiert die Reihe in (SM4) sowieso im Sinne der starken Operatortopologie.

Wegen $(P_m x, P_n y) = (P_n P_m x, y)$ für alle $x, y \in H$ bedeutet die Voraussetzung $P_n P_m = 0$ für $n \neq m$ gerade, dass $\operatorname{ran} P_m \perp \operatorname{ran} P_n$ für alle $n \neq m$.

7.1.2 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum, und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Projektionen auf H mit $P_n P_m = 0$, $n \neq m$. Dann konvergiert die Reihe*

$$P := \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

im starken Sinn, also gilt $Px = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_n x$ für alle $x \in H$. Ihre Summe P ist eine orthogonale Projektion, und es gilt

$$\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n, \qquad \operatorname{ran} P = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} P_n}\,.$$

Beweis. Wie man aus $P_n P_m = P_m P_n = 0$, $n \neq m$, leicht herleitet ist die Summe $\sum_{n=1}^{N} P_n$ eine orthogonale Projektion mit Bildraum $\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{N} \operatorname{ran} P_n$. Insbesondere gilt $\| \sum_{n=1}^{N} P_n \| \leq 1$. Für $x \in H$ gilt

$$\|x\|^2 \geq \Big\| \sum_{n=1}^{N} P_n x \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|^2\,.$$

Also ist die Folge $\sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|^2$ in N konvergent und daher eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Wegen $(M \leq N)$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} P_n x - \sum_{n=1}^{M} P_n x \Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} P_n x \Big\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} \|P_n x\|^2\,,$$

ist auch die Folge $(\sum_{n=1}^{N} P_n x)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H und somit konvergent gegen ein $Px \in H$. Offensichtlich ist $x \mapsto Px$ linear. Wegen

$$\|Px\|^2 = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} P_n x \Big\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (7.1.1)$$

gilt sogar $P \in L_b(H)$. Wir zeigen als nächstes, dass P eine selbstadjungierte Projektion ist:

$$P^2 x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} P_m \sum_{n=1}^{\infty} P_n x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} P_m P_n x = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} P_m x = Px\,,$$

$$(Px, y) = \lim_{N\to\infty} (\sum_{n=1}^{N} P_n x, y) = \lim_{N\to\infty} (x, \sum_{n=1}^{N} P_n y) = (x, Py)\,.$$

Schließlich gilt wegen (7.1.1) $\ker P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n$, und wir erhalten damit auch

$$\operatorname{ran} P = (\ker P)^{\perp} = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker P_n\Big)^{\perp} = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} (\ker P_n)^{\perp}} = \overline{\operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran} P_n}\,.$$

❑

Um mit Spektralmaßen zu arbeiten, werden wir uns oft mit Hilfe des nächsten Lemmas auf Sätze über komplexe Maße zurückziehen.

7.1.3 Bemerkung. Zunächst wollen wir einige wichtige Eigenschaften von komplexen Maßen aufzählen, vgl. [K2] oder [R2]. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darauf.

- ⇝ Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß, wenn für alle paarweise disjunkten Folgen $\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}$, von Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt

  $$\mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Delta_n)\,. \tag{7.1.2}$$

  Endliche nichtnegative Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sind spezielle komplexe Maße.

- ⇝ Für ein komplexes Maß μ wird durch $(\Delta \in \mathcal{A})$

  $$|\mu|(\Delta) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N},\ \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} A_j = \Delta\right\} \tag{7.1.3}$$

  eine nichtnegative Mengenfunktion $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definiert, die als *Variation* von μ bezeichnet wird.

  Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches nichtnegatives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist. Es ist damit offensichtlich das kleinste nichtnegative Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ so, dass $|\mu(\Delta)| \le \nu(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

- ⇝ Für ein komplexes Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnet $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ die *Totalvariation* von μ.

  Die Abbildung $\mu \mapsto \|\mu\|$ ist in der Tat eine Norm auf dem komplexen Vektorraum $M(\Omega, \mathcal{A})$ aller komplexen Maße. Mit dieser Norm ist $M(\Omega, \mathcal{A})$ ein Banachraum.

- ⇝ Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein nichtnegatives Maß und $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$, so heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls aus $A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0$ folgt, dass $\nu(A) = 0$. Man zeigt leicht, dass das zu $|\nu| \ll \mu$ äquivalent ist. Offensichtlich gilt immer $\nu \ll |\nu|$.

  Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sagen wir, dass $\nu \ll \mu$, falls $\nu \ll |\mu|$.

⇝ Sei μ ein σ-endliches nichtnegatives Maß. Dann ist ein Maß $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ genau dann absolut stetig bezüglich μ, wenn es eine sogenannte *Dichte-Funktion* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ gibt mit

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{7.1.4}$$

Der Zusammenhang zwischen ν und f ist bijektiv (f ist μ-fast überall eindeutig durch ν bestimmt), wobei sogar

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}, \tag{7.1.5}$$

und damit $\|f\|_1 = \|\nu\|$. f heißt die Dichte von ν bzgl. μ.

Die Dichte von ν bezüglich $|\nu|$ ist unimodular, hat also Werte auf der Einheitskreislinie.

⇝ Für $\nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sei μ irgendein nichtnegatives, σ-endliches Maß mit $\nu \ll \mu$, und sei f die Dichte von ν bezüglich μ.

Eine messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar bzgl. ν ($\in M(\Omega, \mathcal{A})$), wenn $g \cdot f$ integrierbar bzgl. μ ist. Wir definieren dann

$$\int_\Omega g \, d\nu := \int_\Omega g f \, d\mu .$$

Diese Definition ist unabhängig von μ, wobei $\mu = |\nu|$ eine zulässige Wahl ist. Außerdem ist das Integral linear im Maß ν und im Integranden g. Für beschränktes g gilt dabei

$$\left| \int_\Omega g \, d\nu \right| \leq \|g\|_\infty \, \|\nu\| . \tag{7.1.6}$$

⇝ Für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ folgt aus den letzten beiden Punkten, dass $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn (7.1.4) gilt, wobei die Dichte f auch in diesem Fall $|\mu|$-fast überall durch ν eindeutig bestimmt ist.

Ist $g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so gilt dann auch hier

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g f \, d\mu \tag{7.1.7}$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann integrierbar ist, wenn es die rechte ist.

⇝ Trägt Ω eine Hausdorffsche und lokalkompakte Topologie $\mathcal{T}$ und sind $\mathcal{A}$ die Borelmengen, also die von $\mathcal{T}$ auf Ω erzeugte σ-Algebra, so heißen Maße $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ Borelmaß, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq \Omega$. Ein solches Maß heißt *regulär*, falls für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, \ K \text{ ist kompakt}\} ,$$

und

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A, \ O \text{ ist offen}\} .$$

Ein $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ heißt regulär, falls $|\mu|$ regulär ist.

⇝ Ist $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär, f bzgl. μ integrierbar und ν definiert wie in (7.1.4), so ist auch ν regulär.

⇝ Die Menge aller regulären $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ bildet einen bzgl. $\|.\|$ abgeschlossenen Unterraum $M_{reg}(\Omega)$, welcher nach dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 2.3.9, isometrisch isomorph zu $(C_0(\Omega))'$ ist.

⇝ Hat die Topologie $\mathcal{T}$ auf Ω eine abzählbare Basis, so ist jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär. Insbesondere ist für jede offene oder abgeschlossene Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^p$ jedes $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ regulär.

//

7.1.4 Lemma. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle\Omega, \mathcal{A}, H\rangle$, und seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung $E_{g,h} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, die definiert ist durch*

$$E_{g,h}(\Delta) := \big(E(\Delta)g, h\big)\,,$$

ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$. Für die Variation $|E_{g,h}|$ gilt die Abschätzung

$$|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$$

Die Totalvariation von $E_{g,h}$ ist somit höchstens gleich $\|g\| \cdot \|h\|$.

Für diese komplexen Maße gilt $E_{g,h} = \overline{E_{h,g}}$, $E_{\lambda g_1 + \mu g_2, h} = \lambda E_{g_1,h} + \mu E_{g_2,h}$ sowie $E_{g,\lambda h_1 + \mu h_2} = \bar{\lambda} E_{g,h_1} + \bar{\mu} E_{g,h_2}$ für $g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Außerdem ist $E_{g,g}$ immer ein nichtnegatives Maß.

Beweis. Seien Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E_{g,h}(\Delta_n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big(E(\Delta_n)g, h\big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)g, h\Big) \\ &= \Big(E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)g, h\Big) = E_{g,h}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)\,, \end{aligned}$$

also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} E_{g,h}(\Delta_n)$ und zwar gegen $E_{g,h}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n)$. Wir sehen, dass $E_{g,h}$ ein komplexes Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist.

Offenbar gilt $E_{g,h}(\Delta) = \big(E(\Delta)g, h\big) = \big(g, E(\Delta)h\big) = \overline{\big(E(\Delta)h, g\big)} = \overline{E_{h,g}(\Delta)}$. Die Sesquilinearität der Abbildung $(g, h) \mapsto E_{g,h}$ überprüft man ähnlich elementar. Klarerweise ist $E_{g,g}(\Delta) = \big(E(\Delta)g, g\big) = \|E(\Delta)g\|^2$ nichtnegativ.

Um die Variation $|E_{g,h}|$ von $E_{g,h}$ abzuschätzen, seien $\Delta \in \mathcal{A}$ sowie paarweise disjunkte Mengen Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \Delta$ gegeben. Wähle $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$ mit $|E_{g,h}(\Delta_n)| = \alpha_n E_{g,h}(\Delta_n)$. Da für $m \neq n$ der Bildraum von $E(\Delta_m)$ orthogonal auf den von $E(\Delta_n)$ steht, gilt ($N \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |E_{g,h}(\Delta_n)| &= \sum_{n=1}^{N} \Big(E(\Delta_n)(\alpha_n g), h\Big) = \sum_{n=1}^{N} \Big(E(\Delta_n)(\alpha_n g), E(\Delta_n)h\Big) \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(\alpha_n g), \sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)h\Big) \\ &\leq \Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)(\alpha_n g)\Big\| \cdot \Big\|\sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)h\Big\|\,. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $E(\Delta_n)(\alpha_n g)$ paarweise orthogonal sind, gilt

$$\Big\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(\alpha_n g) \Big\|^2 = \sum_{n=1}^N \|E(\Delta_n)(\alpha_n g)\|^2 = \sum_{n=1}^N \|E(\Delta_n) g\|^2$$
$$= \Big\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n) g \Big\|^2 = \Big\| E(\bigcup_{n=1}^N \Delta_n) g \Big\|^2 \leq \|E(\Delta) g\|^2 .$$

Genauso zeigt man $\big\| \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)(h) \big\|^2 \leq \|E(\Delta)h\|^2$. Wir erhalten insgesamt $\sum_{n=1}^\infty |E_{g,h}(\Delta_n)| \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\|$. Also ist für jede Menge $\Delta \in \mathcal{A}$

$$\big|E_{g,h}\big|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \cdot \|E(\Delta)h\| .$$

Insbesondere gilt $\|E_{g,h}\| = \big|E_{g,h}\big|(\Omega) \leq \|g\| \cdot \|h\|$

❑

Bezeichne die Menge aller beschränkten $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ sei $\|\phi\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)|$. Wir wollen nun überlegen, wie man eine Funktion $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ bezüglich einem Spektralmaß integrieren kann.

7.1.5 Lemma. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ und sei $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $A \in L_b(H)$ so, dass für alle $g, h \in H$*

$$(Ag, h) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,h} .$$

Dabei ist $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Der Operator A heißt das Integral von ϕ bezüglich E, *und wird mit $\int \phi \, dE$ bezeichnet.*

Beweis. Für $g, h \in H$ bezeichne $B(g, h) := \int_\Omega \phi \, dE_{g,h}$. Mit $(g, h) \mapsto E_{g,h}(\Delta)$ ist auch $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear, vgl. Lemma 7.1.4. Wegen (7.1.6) und Lemma 7.1.4 gilt zudem

$$|B(g, h)| \leq \|\phi\|_\infty \|g\| \, \|h\| .$$

Also ist B sogar eine beschränkte Sesquilinearform. Nach Satz 3.2.6 existiert ein eindeutiger Operator $A \in L_b(H)$ mit $B(g, h) = (Ag, h)$ für $g, h \in H$. Dieser erfüllt zudem $\|A\| \leq \|\phi\|_\infty$.

❑

$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ ist nicht nur eine Menge sondern, versehen mit der normalen Addition und skalaren Multiplikation, der Multiplikation von Funktionen, sowie mit der Norm $\|.\|_\infty$ eine kommutative Banachalgebra mit dem Einselement $\phi \equiv 1$. Sie trägt sogar noch eine weitere algebraische Operation, nämlich das Konjugieren. Dafür definiere für $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ die Funktion ϕ^* durch $\phi^*(x) := \overline{\phi(x)}$. $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ ist mit diesen Operationen eine sogenannte C^*-Algebra.

7.1.6 Definition. Eine Banachalgebra $\mathcal{C}$ versehen mit einer Abbildung $.^* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ heißt *C^*-Algebra*,

(*i*) falls $.^*$ involutorisch ist, also $(a^*)^* = a, \ a \in \mathcal{C}$,

(ii) falls $.^*$ konjugiert linear ist, also $(\lambda a+\mu b)^* = \bar{\lambda}a^*+\bar{\mu}b^*,\ a,b \in \mathcal{C},\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}$,

(iii) falls $(ab)^* = b^*a^*,\ a,b \in \mathcal{C}$,

(iv) falls $.^*$ isometrisch ist, also $\|a^*\| = \|a\|,\ a \in \mathcal{C}$,

(v) und falls $\|aa^*\| = \|a\|^2$ für alle $a \in \mathcal{C}$ gilt.

Wegen

$$\sup_{x\in\Omega} \left|\overline{\phi(x)}\phi(x)\right| = \sup_{x\in\Omega}(|\phi(x)|^2) = \big(\sup_{x\in\Omega}|\phi(x)|\big)^2 ,$$

sind alle diese Eigenschaften für $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$ erfüllt, wobei diese C^*-Algebra sogar kommutativ ist.

Ein weiteres Beispiel für eine im Allgemeinen nicht kommutative C^*-Algebra mit Eins ist $L_b(H)$ für einen Hilbertraum H. Dazu definiere man die Involution auf dieser Algebra als $T \mapsto T^*$, wobei T^* die Hilbertraumadjungierte von T ist, siehe Proposition 6.6.2.

7.1.7 Bemerkung. Eine charakteristische Eigenschaft von C^*-Algebren $\mathcal{C}$ mit Eins ist, dass so wie für $L_b(H)$ (siehe Proposition 6.6.5) auch allgemein für normale Elemente $x \in \mathcal{C}$, also $x^*x = xx^*$, wegen

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*(x^2)\| = \|(x^*x)^2\| = \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \|x^*x\|^2 = (\|x\|^2)^2 ,$$

und damit $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k},\ k \in \mathbb{N}$, für den Spektralradius gilt, dass

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|x\| .$$

//

7.1.8 Definition. Eine Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ zwischen zwei C^*-Algebren mit Eins heißt ein **-Homomorphismus*, wenn sie mit allen algebraischen Operationen verträglich ist, also wenn stets gilt

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y),\ \Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x),\ \Phi(x\cdot y) = \Phi(x)\cdot\Phi(y) ,$$

$$\Phi(x^*) = (\Phi(x))^*,\ \Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2} .$$

Wir zeigen nun, dass man aus einem Spektralmaß für $\langle\Omega,\mathcal{A},H\rangle$ einen *-Homomorphismus von $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$ in $L_b(H)$ erhält.

7.1.9 Satz. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle\Omega,\mathcal{A},H\rangle$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi_E : \begin{cases} \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C}) & \to & L_b(H) \\ \phi & \mapsto & \int \phi\, dE \end{cases}$$

ein *-Homomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$ *für alle* $\Delta \in \mathcal{A}$.

(ii) $\|\Phi_E\| = 1$.

(iii) *Jeder Operator im Bild von* Φ_E *ist normal.*

(*iv*) *Vertauscht ein Operator* $B \in L_b(H)$ *mit allen Projektionen* $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, *so auch mit allen Operatoren der Form* $\Phi_E(\phi)$, $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(*v*) $\sigma(\Phi_E(\phi)) \subseteq \overline{\phi(\Omega)}$ *(topologischer Abschluss), wobei für* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\phi(\Omega)}$ $(\subseteq \rho(\Phi_E(\phi)))$

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda I)^{-1} = \Phi_E\Big(\frac{1}{\phi - \lambda}\Big) .$$

(*vi*) *Für* $g \in H$ *und* $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ *gilt* $\|\Phi_E(\phi)g\|^2 = \int_\Omega |\phi|^2 \, dE_{g,g}$.

(*vii*) *Ist* $\phi_n \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *eine gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion* $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ *konvergiert, so ist* $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ *und für alle* $g \in H$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_E(\phi_n)g = \Phi_E(\phi)g .$$

Also konvergiert die Folge $\Phi_E(\phi_n), n \in \mathbb{N}$, *bzgl. der starken Operatortopologie gegen* $\Phi_E(\phi)$.

(*viii*) *Ist* $\phi_n \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion* $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ *konvergiert, so ist* $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_E(\phi_n) = \Phi_E(\phi)$$

bezüglich der Operatornorm. Dasselbe gilt für gleichmäßig konvergente Netze.

Beweis.

⇝ Der Operator $\int \phi \, dE$ ist eindeutig durch die Beziehung

$$\Big(\Big[\int \phi \, dE\Big]g, h\Big) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,h}$$

definiert. Damit folgt unmittelbar, dass Φ_E linear ist. Wegen Lemma 7.1.5 gilt $\|\int \phi \, dE\| \leq \|\phi\|_\infty$ und daher $\|\Phi_E\| \leq 1$.

Aus der Definition von $\int \phi \, dE$ in Lemma 7.1.5 folgt unmittelbar $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\Phi_E(\mathbb{1}_\Omega) = E(\Omega) = I$, und somit $\|\Phi_E\| = 1$.

⇝ Weiters ist

$$\begin{aligned}\Big(\Big[\int \phi \, dE\Big]^* g, h\Big) &= \Big(g, \Big[\int \phi \, dE\Big]h\Big) \\ &= \overline{\int_\Omega \phi \, dE_{h,g}} = \int_\Omega \overline{\phi} \, dE_{g,h} = \Big(\Big[\int \overline{\phi} \, dE\Big]g, h\Big) ,\end{aligned}$$

und daher Φ_E mit * verträglich.

⇝ Angenommen, $B \in L_b(H)$ vertauscht mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$. Für $g, h \in H$ gilt $E_{g,B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g, B^*h) = (BE(\Delta)g, h) = (E(\Delta)Bg, h) = E_{Bg,h}(\Delta)$ und daher

$$\begin{aligned}\Big(B\Big[\int \phi \, dE\Big]g, h\Big) &= \Big(\Big[\int \phi \, dE\Big]g, B^*h\Big) = \int_\Omega \phi \, dE_{g,B^*h} \\ &= \int_\Omega \phi \, dE_{Bg,h} = \Big(\Big[\int \phi \, dE\Big]Bg, h\Big) .\end{aligned}$$

Also gilt $B\big[\int \phi \, dE\big] = \big[\int \phi \, dE\big]B$.

$\rightsquigarrow$ Da für jedes feste $\Delta_0 \in \mathcal{A}$ die Projektion $E(\Delta_0)$ mit allen $E(\Delta)$ vertauscht, folgt insbesondere $E(\Delta_0)\big[\int \phi\, dE\big] = \big[\int \phi\, dE\big]E(\Delta_0)$.

Aus $E_{E(\Delta_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta_0)E(\Delta)g,h) = (E(\Delta_0\cap\Delta)g,h) = E_{g,h}(\Delta_0\cap\Delta)$ folgt damit

$$E_{\left[\int \phi\, dE\right]g,h}(\Delta_0) = (E(\Delta_0)\Big[\int \phi\, dE\Big]g,h) = (\Big[\int \phi\, dE\Big]E(\Delta_0)g,h)$$
$$= \int_\Omega \phi\, dE_{E(\Delta_0)g,h} = \int_{\Delta_0} \phi\, dE_{g,h}\,.$$

Da Δ_0 beliebig war, ist $E_{\left[\int \phi\, dE\right]g,h}$ absolut stetig bezüglich $E_{g,h}$ mit ϕ als Dichte.

Halten wir nun ein $\phi_0 \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$ fest, so folgt daraus mit (7.1.7)

$$(\Big[\int \phi_0\, dE\Big]\Big[\int \phi\, dE\Big]g,h) = \int_\Omega \phi_0\, dE_{\left[\int \phi\, dE\right]g,h}$$
$$= \int_\Omega \phi_0\cdot\phi\, dE_{g,h} = \Big(\Big[\int \phi_0\cdot\phi\, dE\Big]g,h\Big)\,.$$

Somit ist Φ_E multiplikativ.

$\rightsquigarrow$ Das Bild von Φ_E ist als *-homomorphes Bild einer kommutativen C^*-Algebra ebenfalls kommutativ und enthält mit einem Operator T auch dessen adjungierten T^*. Daher gilt $TT^* = T^*T$ für jeden Operator der Gestalt $T = \Phi_E(\phi)$.

$\rightsquigarrow$ Für $\lambda \notin \overline{\phi(\Omega)}$ ist die Funktion $\frac{1}{\phi-\lambda}$ beschränkt und daher in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$. Aus der Linearität und der Multiplikativität von Φ_E folgt

$$(\Phi_E(\phi)-\lambda I)\ \Phi_E(\frac{1}{\phi-\lambda}) = \Phi_E(\frac{1}{\phi-\lambda})\ (\Phi_E(\phi)-\lambda I) = \Phi_E(\mathbb{1}_\Omega) = I\,,$$

und daher $\lambda \notin \sigma(\Phi_E(\phi))$, wobei $(\Phi_E(\phi)-\lambda I)^{-1} = \Phi_E(\frac{1}{\phi-\lambda})$.

$\rightsquigarrow$ Wegen der Multiplikativität gilt

$$\|\Big[\int \phi\, dE\Big]g\|^2 = (\int \phi\, dEg, \int \phi\, dEg) = (\Big[\int \phi\, dE\Big]^*\Big[\int \phi\, dE\Big]g,g)$$
$$= (\Big[\int |\phi|^2\, dE\Big]g,g) = \int_\Omega |\phi|^2\, dE_{g,g}\,.$$

$\rightsquigarrow$ Konvergiert eine gleichmäßige beschränkte Funktionenfolge $\phi_n \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$, $n\in\mathbb{N}$ punktweise gegen $\phi:\Omega\to\mathbb{C}$, so ist aus der Maßtheorie bekannt, dass ϕ messbar ist und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit ist ϕ auch beschränkt, also $\phi\in\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$. Zudem gilt für $g\in H$

$$\|\Phi_E(\phi_n)g - \Phi_E(\phi)g\|^2 = \|\int(\phi_n-\phi)\, dEg\|^2 = \int_\Omega |\phi_n-\phi|^2\, dE_{g,g} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz, da $|\phi_n-\phi|^2$ sicherlich gleichmäßig beschränkt ist und punktweise gegen Null konvergiert.

$\rightsquigarrow$ Konvergiert schließlich $\phi_n \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C}),\ n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, so folgt wegen $\|\Phi_E\| = 1$

$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0,\ n \to \infty\,.$$

❑

Folgendes Lemma zeigt auf, wie man $\int \phi\, dE$ nicht nur schwach wie in Lemma 7.1.5 definieren kann, sondern auch als Grenzwert bzgl. der Operatornorm einer Folge von Operatoren der Bauart $\sum_{k=1}^m \alpha_k E(\Delta_k)$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und einer $\mathcal{A}$-*Partition* $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\}$ von Ω erhält. Dabei bedeutet $\mathcal{A}$-*Partition*, dass $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = \Omega$ sind.

7.1.10 Korollar. *Sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ und sei $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$. Ist $\phi_n,\ n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Treppenfunktionen von Ω nach $\mathbb{C}$ der Form*

$$\phi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n \mathbb{1}_{\Delta_k^n}\,,$$

mit $\mathcal{A}$-Partitionen $\{\Delta_1^n, \ldots, \Delta_{m(n)}^n\}$ von Ω und $\alpha_k^n \in \mathbb{C}$ derart, dass ϕ_n gleichmäßig gegen ϕ konvergiert, also $\|\phi - \phi_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty$, dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$$

bezüglich der Operatornorm gegen $\int \phi\, dE$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Phi_E(\phi_n) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n\ \Phi_E(\mathbb{1}_{\Delta_k^n}) = \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^n E(\Delta_k^n)$. Wegen $\|\Phi_E\| = 1$ gilt

$$\|\Phi_E(\phi_n) - \Phi_E(\phi)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0,\ n \to \infty\,.$$

❑

7.1.11 Bemerkung. Man beachte, dass jede Funktion aus $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ beliebig gut gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar ist, da man zu jeder Funktion $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega, \mathbb{C})$ und beliebigem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung der abgeschlossenen Kreisscheibe $K^{\mathbb{C}}_{\|\phi\|_\infty}(0)$ durch offene Kugeln $U_j,\ j = 1, \ldots, n$, mit Durchmesser ϵ wählen kann.

Setzt man $V_j := \phi^{-1}(U_j)$, definiert Δ_j induktiv durch $\Delta_1 := V_1$, $\Delta_{j+1} := V_{j+1} \backslash \bigcup_{l=1}^j \Delta_l$, und wählt $x_k \in \Delta_k$ beliebig, so ist $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ eine $\mathcal{A}$-Partition von Ω und

$$\begin{aligned}\|\phi - \phi_\epsilon\|_\infty &= \max_{k=1,\ldots,n} \sup\{|\phi(x_k) - \phi(y)| : y \in \Delta_k\} \\ &\leq \max_{k=1,\ldots,n} \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x, y \in \Delta_k\} \leq \epsilon\,.\end{aligned}$$

Dabei ist $\phi_\epsilon := \sum_{k=1}^n \phi(x_k) \mathbb{1}_{\Delta_k}$. //

Ist Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, dann ist $C(\Omega)$ mit der Supremumsnorm und den natürlichen algebraischen Operationen eine kommutative C^*-Algebra mit Eins.

Es ist eine tiefliegende Tatsache, dass alle *-Homomorphismen von $C(\Omega)$ in eine C^*-Algebra $L_b(H)$ in der in Satz 7.1.9 dargestellten Weise erhalten werden können. Zum Beweis verwenden wir den Darstellungssatz von Riesz, Satz 2.3.9.

7.1.12 Satz. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, sei H ein Hilbertraum, und sei $\Phi : C(\Omega) \to L_b(H)$ ein beschränkter *-Homomorphismus wie in Definition 7.1.8. Bezeichnet $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Borelmengen in Ω, so existiert ein Spektralmaß E für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ mit*

$$\Phi(\phi) = \int \phi \, dE, \quad \phi \in C(\Omega) \,. \tag{7.1.8}$$

Unter allen Spektralmaßen mit dieser Eigenschaft gibt es genau eines so, dass für alle $g, h \in H$ das komplexe Borelmaß $E_{g,h}$ regulär ist.

Dieses eindeutige Spektralmaß hat zusätzlich die Eigenschaft, dass für einen Operator $B \in L_b(H)$ genau dann $B\ \Phi(\phi) = \Phi(\phi)\ B$ für alle $\phi \in C(\Omega)$ gilt, wenn $B\ E(\Delta) = E(\Delta)\ B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

Beweis.

Schritt 1: Wir konstruieren einen Kandidaten E für ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$. Seien $g, h \in H$ festgehalten. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{g,h} : \phi \mapsto (\Phi(\phi)g, h)$$

ein lineares Funktional auf $C(\Omega)$, für das ($\phi \in C(\Omega)$)

$$|(\Phi(\phi)g, h)| \leq \|\Phi(\phi)\| \, \|g\| \, \|h\| \leq \|\Phi\| \, \|\phi\|_\infty \, \|g\| \, \|h\| \,,$$

und damit $\|\Phi_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \, \|g\| \, \|h\|$ gilt. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß $\mu_{g,h}$ auf Ω mit $\|\mu_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \, \|g\| \, \|h\|$ derart, dass

$$\big(\Phi(\phi)g, h\big) = \Phi_{g,h}(\phi) = \int_\Omega \phi \, d\mu_{g,h} \quad \text{für alle} \quad \phi \in C(\Omega) \,. \tag{7.1.9}$$

Sind $g_1, g_2, h \in H$, so gilt

$$\big(\Phi(\phi)(g_1 + g_2), h\big) = \big(\Phi(\phi)g_1, h\big) + \big(\Phi(\phi)g_2, h\big) \quad \text{für alle} \quad \phi \in C(\Omega) \,,$$

woraus wegen der Eindeutigkeit im Rieszschen Darstellungssatz $\mu_{g_1+g_2,h} = \mu_{g_1,h} + \mu_{g_2,h}$ folgt. Genauso sieht man, dass $\mu_{\lambda g,h} = \lambda \mu_{g,h}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, und dass $\mu_{h,g} = \overline{\mu_{g,h}}$.

Zu gegebenen $\Delta \in \mathcal{A}$ definieren wir $[g, h]_\Delta := \mu_{g,h}(\Delta)$. Dann ist $[g, h]_\Delta$ eine Sesquilinearform und es gilt $|[g, h]_\Delta| \leq \|\mu_{g,h}\| \leq \|\Phi\| \, \|g\| \, \|h\|$. Nach Satz 3.2.6 existiert ein eindeutiger Operator $E(\Delta) \in L_b(H)$ mit

$$[g, h]_\Delta = (E(\Delta)g, h) \quad \text{für alle} \quad g, h \in H \,.$$

Wegen

$$(E(\Delta)g,h) = \mu_{g,h}(\Delta) = \overline{\mu_{h,g}(\Delta)} = \overline{(E(\Delta)h,g)} = (g,E(\Delta)h)$$

sind die Operatoren $E(\Delta)$ selbstadjungiert.

Schritt 2: Angenommen $B \in L_b(H)$ vertauscht mit allen $\Phi(\phi)$, $\phi \in C(\Omega)$. Dann gilt für $g,h \in H$ und beliebige $\phi \in C(\Omega)$

$$\int_\Omega \phi \, d\mu_{Bg,h} = \big(\Phi(\phi)Bg,h\big) = \big(B\Phi(\phi)g,h\big) = \big(\Phi(\phi)g,B^*h\big) = \int_\Omega \phi \, d\mu_{g,B^*h} \,.$$

Da die Maße $\mu_{g,h}$ eindeutig durch (7.1.9) bestimmt sind, stimmen die komplexen Maße $\mu_{Bg,h}$ und μ_{g,B^*h} überein. Für $\Delta \in \mathcal{A}$ folgt somit

$$(E(\Delta)Bg,h) = \mu_{Bg,h}(\Delta) = \mu_{g,B^*h}(\Delta) = (E(\Delta)g,B^*h) = (BE(\Delta)g,h)\,,$$

also $E(\Delta)B = BE(\Delta)$.

Da jeder Operator $\Phi(\phi_0)$ mit allen $\Phi(\phi)$, $\phi \in C(\Omega)$, vertauscht, gilt insbesondere

$$\Phi(\phi_0)E(\Delta) = E(\Delta)\Phi(\phi_0) \quad \text{für alle} \quad \phi_0 \in C(\Omega), \Delta \in \mathcal{A}\,.$$

Schritt 3: Aus der Multiplikativität von Φ werden wir nun insbesondere die Tatsache herleiten, dass die $E(\Delta)$ Projektionen sind. Dazu seien $\phi, \phi_0 \in C(\Omega)$. Es folgt

$$\int_\Omega \phi \cdot \phi_0 \, d\mu_{g,h} = (\Phi(\phi \cdot \phi_0)g,h) = (\Phi(\phi)\Phi(\phi_0)g,h) = \int_\Omega \phi \, d\mu_{\Phi(\phi_0)g,h} \,.$$

Da mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta \mapsto \int_\Delta \phi_0 \, d\mu_{g,h}$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Eindeutigkeit in (7.1.9)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_0 \cdot \mathbb{1}_\Delta \, d\mu_{g,h} &= \mu_{\Phi(\phi_0)g,h}(\Delta) = (E(\Delta)\Phi(\phi_0)g,h) \\ &= (\Phi(\phi_0)E(\Delta)g,h) = \int_\Omega \phi_0 \, d\mu_{E(\Delta)g,h} \,. \end{aligned}$$

Da für jedes feste $\Delta \in \mathcal{A}$ mit $\mu_{g,h}$ auch $\Delta_1 \mapsto \int_{\Delta_1} \mathbb{1}_\Delta \, d\mu_{g,h} = \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta)$ ein reguläres komplexes Borelmaß ist, folgt aus der Tatsache, dass obige Gleichung für alle $\phi_0 \in C(\Omega)$ gilt, wegen der Eindeutigkeit in (7.1.9)

$$\begin{aligned} (E(\Delta_1 \cap \Delta)g,h) = \mu_{g,h}(\Delta_1 \cap \Delta) &= \int_{\Delta_1} \mathbb{1}_\Delta \, d\mu_{g,h} \\ &= \mu_{E(\Delta)g,h}(\Delta_1) = (E(\Delta_1)E(\Delta)g,h)\,. \end{aligned}$$

Also gilt $E(\Delta_1 \cap \Delta) = E(\Delta_1)E(\Delta)$. Insbesondere ist wegen $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$ der Operator $E(\Delta)$ eine selbstadjungierte und somit orthogonale Projektion.

Schritt 4: Wir zeigen, dass E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ ist. Es ist schon bekannt, dass $E(\Delta)$ immer eine orthogonale Projektion ist, und dass $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$. Aus

$$(E(\Omega)g,h) = \mu_{g,h}(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d\mu_{g,h} = \big(\Phi(1)g,h\big) = (g,h)$$

und $(E(\emptyset)g,h) = \mu_{g,h}(\emptyset) = 0$ für alle $g,h \in H$ folgt $E(\Omega) = I$ und $E(\emptyset) = 0$.

Gemäß Lemma 7.1.2 gilt für paarweise disjunkte Borelmengen Δ_k, $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k)g = Pg \quad \text{für alle} \quad g \in H\,,$$

wobei $P : H \to H$ eine orthogonale Projektion ist. Da $\mu_{g,h} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß ist, gilt aber für alle $g,h \in H$

$$(Pg,h) = \sum_{k=1}^{\infty}(E(\Delta_k)g,h) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_{g,h}(\Delta_k) = \mu_{g,h}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k\Big) = (E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k\Big)g,h)\,,$$

und daher $P = E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k\Big)$. Also ist E bzgl. der starken Operatortopologie σ-additiv.

Schritt 5: Wegen Lemma 7.1.5 ist für $\phi \in C(\Omega)$ der Operator $A := \int \phi\, dE$ eindeutig durch $(Ag,h) = \int_\Omega \phi\, dE_{g,h}$ definiert. Nun gilt aber $E_{g,h} = \mu_{g,h}$ und aus (7.1.9) folgt somit (7.1.8).

Gilt schließlich $B\,E(\Delta) = E(\Delta)\,B$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$, so folgt $B\,\Phi(\phi) = \Phi(\phi)\,B$ für alle $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C}) \supseteq C(\Omega)$ wegen Satz 7.1.9.

❏

7.1.13 Korollar. *Sei Ω ein kompakter und Hausdorffscher topologischer Raum, bezeichne mit $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Borelmengen in Ω, und sei H ein Hilbertraum. Weiters sei $\Phi : C(\Omega) \to L_b(H)$ ein beschränkter *-Homomorphismus.*

Dann besitzt Φ eine Fortsetzung zu einem *-Homomorphismus $\Phi_E : \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C}) \to L_b(H)$ mit den Eigenschaften wie in Satz 7.1.9, wobei E das Spektralmaß zu Φ wie in Satz 7.1.12 ist. Insbesondere gilt $\|\Phi\| = \|\Phi_E\| = 1$.

Dabei sind für ein $B \in L_b(H)$ folgende Aussagen äquivalent.

- $\rightsquigarrow$ *$E(\Delta)\;B = B\;E(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.*
- $\rightsquigarrow$ *$\Phi(\phi)\;B = B\;\Phi(\phi)$ für alle $\phi \in C(\Omega)$.*
- $\rightsquigarrow$ *$\Phi_E(\phi)\;B = B\;\Phi_E(\phi)$ für alle $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\Omega,\mathbb{C})$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 7.1.12 und Satz 7.1.9.

❏

Folgendes Ergebnis zeigt, dass die Voraussetzung in Satz 7.1.12, dass Φ beschränkt ist, nicht vonnöten ist.

7.1.14 Lemma. *Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ jeweils C^*-Algebren mit Eins. Ist $\Phi : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ein *-Homomorphismus wie oben, so ist Φ automatisch beschränkt mit Abbildungsnorm $\|\Phi\| = 1$. Dabei gilt $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ für alle $a \in \mathcal{C}_1$.*

Beweis. Für $a \in \mathcal{C}_1$ sei $\lambda \in \rho(a)$, also $a - \lambda 1_{\mathcal{C}_1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}_1)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\big(\Phi(a) - \lambda 1_{\mathcal{C}_2}\big)\;\Phi\big((a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}\big) &= \Phi(a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})\;\Phi\big((a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}\big)\\ &= \Phi[(a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})(a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}] = \Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2}\,,\end{aligned}$$

und genauso $\Phi\big((a-\lambda 1_{\mathcal{C}_1})^{-1}\big)\ \big(\Phi(a)-\lambda 1_{\mathcal{C}_2}\big) = 1_{\mathcal{C}_2}$. Somit ist $\lambda \in \rho(\Phi(a))$. Übergang zu den Komplementen ergibt $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ und daher $r(\Phi(a)) \leq r(a)$.

Für $a \in \mathcal{C}_1$ sind aa^* und $\Phi(a)\Phi(a)^* = \Phi(aa^*)$ offensichtlich normal. Es folgt

$$\|\Phi(a)\|^2 = \|\Phi(a)\Phi(a)^*\| = r(\Phi(aa^*)) \leq r(aa^*) = \|aa^*\| = \|a\|^2 .$$

Wegen $\Phi(1_{\mathcal{C}_1}) = 1_{\mathcal{C}_2}$ gilt $\|\Phi\| = 1$.

❑

7.2 Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Der Spektralsatz ist DER Eckpfeiler in der Theorie der selbstadjungierten Operatoren, und spielt eigentlich bei allen Aussagen über selbstadjungierte Operatoren eine wesentliche Rolle.

7.2.1 Satz (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Bezeichne mit $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\sigma(A)$. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H\rangle$, das sogenannte* Spektralmaß von A *oder die* Spektralzerlegung *von A, mit*

$$A = \int (t \mapsto t)\, dE =: \int t\, dE(t) . \tag{7.2.1}$$

Dabei sind für einen Operator $T \in L_b(H)$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $TA = AT$.

(ii) $TE(\Delta) = E(\Delta)T$ *für alle* $\Delta \in \mathcal{A}$.

(iii) $T\left[\int \phi\, dE\right] = \left[\int \phi\, dE\right] T$ *für alle* $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\sigma(A), \mathbb{C})$.

Man beachte zunächst, dass jedes Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H\rangle$, welches (7.2.1) erfüllt, wegen der Rechenregeln in Satz 7.1.9 auch

$$p(A) = \int p\, dE \tag{7.2.2}$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ erfüllt.

Zum Beweis von Satz 7.2.1 konstruieren wir als erstes einen *-Homomorphismus von $C(\sigma(A))$ nach $L_b(H)$.

7.2.2 Lemma. *Sei $\mathbb{C}[z]$ neben den üblichen algebraischen Operationen $+$, skalares Multiplizieren und Multiplizieren (vgl. Beispiel 6.4.3) versehen mit $.^* : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$,*

$$.^* : p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 \ \longmapsto\ p^*(z) := \overline{a_n} z^n + \ldots + \overline{a_0} .$$

Dann ist $.^*$ konjugiert linear und involutorisch, und es gilt $(p\cdot q)^* = q^* \cdot p^* = p^* \cdot q^*$ für alle $p, q \in \mathbb{C}[z]$.

Ist $A = A^* \in L_b(H)$, so gilt zudem für den Einsetzhomomorphismus

$$\phi_A : \begin{cases} \mathbb{C}[z] & \to \quad L_b(H) \\ \quad p & \mapsto \quad p(A) \end{cases}, \tag{7.2.3}$$

$\phi_A(p^*) = \phi_A(p)^*$ *sowie*

$$\|\phi_A(p)\|_{L_b(H)} = \|p|_{\sigma(A)}\|_\infty .$$

Beweis. Die Gültigkeit der algebraischen Rechenregeln für $.^*$ ist einfach nachzuprüfen. Weiters haben wir schon im Absatz vor Satz 6.4.7 festgestellt, dass ϕ_A ein Algebren-Homomorphismus ist. Für $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ gilt zudem

$$\big[p(A)\big]^* = \big[a_n A^n + \ldots + a_0 I\big]^* = \overline{a_n} A^n + \ldots + \overline{a_0} I = p^*(A) .$$

Um die Norm von $p(A)$ zu berechnen, benützen wir den Spektralabbildungssatz und Proposition 6.6.5. Es gilt

$$\begin{aligned} \|p(A)\|_{L_b(H)} &= r(p(A)) = \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(A))\big\} = \max\big\{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(A))\big\} \\ &= \max\big\{|p(z)| : z \in \sigma(A)\big\} = \|p|_{\sigma(A)}\|_\infty . \end{aligned}$$

❑

7.2.3 Proposition. *Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutiger beschränkter *-Homomorphismus $\Phi_A : C(\sigma(A)) \to L_b(H)$ derart, dass $\Phi_A(p|_{\sigma(A)}) = \phi_A(p) = p(A)$ für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[z] \arrow[r, "p\mapsto p|_{\sigma(A)}"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & C(\sigma(A)) \arrow[d, dashed, "\exists!\,\Phi_A"] \\ & L_b(H) \end{tikzcd}$$

Beweis. Versehen wir $C(\sigma(A))$ mit $.^* : f \mapsto \bar{f}$, so ist die Abbildung $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ von $\mathbb{C}[z]$ nach $C(\sigma(A))$ linear und mit der Multiplikation sowie mit $.^*$ verträglich, wobei bei letzterer Verträglichkeit $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ maßgeblich einfließt. Das Bild

$$\mathcal{P} := \{p|_{\sigma(A)} : p \in \mathbb{C}[z]\}$$

von $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ ist somit eine bezüglich $.^*$ abgeschlossene Unteralgebra von $C(\sigma(A))$, welche offenbar alle linearen Funktionen der Form $x \mapsto \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ enthält. Also ist $\mathcal{P}$ nirgends verschwindend und punktetrennend, womit wegen dem Satz von Stone-Weierstraß

$$\overline{\mathcal{P}}^{C(\sigma(A))} = C(\sigma(A)) . \tag{7.2.4}$$

Die Abbildung

$$\hat{\phi}_A : \begin{cases} \quad \mathcal{P} & \to \quad L_b(H) \\ p|_{\sigma(A)} & \mapsto \quad \phi_A(p) = p(A) \end{cases}$$

ist wohldefiniert, da aus $p|_{\sigma(A)} = q|_{\sigma(A)}$ die Beziehung $\|p|_{\sigma(A)} - q|_{\sigma(A)}\|_\infty = \|0\|_\infty = 0$ und wegen Lemma 7.2.2 weiter $\|p(A) - q(A)\|_{L_b(H)} = 0$ bzw. $p(A) = q(A)$ folgt. Offensichtlich gilt $\hat{\phi}_A(1) = I$.

Da sowohl $p \mapsto p|_{\sigma(A)}$ also auch ϕ_A linear und mit der Multiplikation sowie mit $.^*$ verträglich sind, folgt dasselbe für $\hat{\phi}_A$. Weiters ist $\hat{\phi}_A$, wieder wegen Lemma 7.2.2, isometrisch.

Sei schließlich Φ_A die eindeutige Fortsetzung von $\hat{\phi}_A$ durch Stetigkeit zu einer isometrischen Abbildung von $\overline{\mathcal{P}}^{C(\sigma(A))} = C(\sigma(A))$ nach $L_b(H)$, vgl. Satz 2.5.2. Da alle Rechenregeln für *-Homomorphismen nur stetige Ausdrücke enthalten, übertragen sich durch die Eindeutigkeit von stetigen Fortsetzungen alle Rechenregeln von $\hat{\phi}_A$ auf Φ_A. Also ist Φ_A ein beschränkter *-Homomorphismus von der C^*-Algebra $C(\sigma(A))$ nach $L_b(H)$.

Da jedes lineare und beschränkte $\Phi : C(\sigma(a)) \to L_b(H)$ mit $\Phi(p|_{\sigma(a)}) = p(A)$ für alle $p \in \mathbb{C}[z]$ eine Fortsetzung von $\hat{\phi}_A$ ist, folgt $\Phi = \Phi_A$, wodurch auch die Eindeutigkeit gezeigt ist.

❑

Jetzt können wir Satz 7.1.12 einsetzen, um das gewünschte Spektralmaß zu erhalten.

Beweis (von Satz 7.2.1). Sei $\Phi_A : C(\sigma(A)) \to L_b(H)$ der *-Homomorphismus aus Proposition 7.2.3. Weiters sei E das Spektralmaß aus Satz 7.1.12, welches Φ_A als $\Phi_A(\phi) = \int \phi \, dE$ darstellt. Da $q(z) := z$ ein Polynom ist, gilt

$$A = \Phi_A(q) = \int q|_{\sigma(A)} \, dE = \int t \, dE(t) \, .$$

Für ein $T \in L_b(H)$ gilt nach Korollar 7.1.13 $TE(\Delta) = E(\Delta)T$ für alle Borelmengen Δ genau dann, wenn T mit allen $\Phi_A(\phi)$, $\phi \in C(\sigma(A))$, vertauscht, bzw. genau dann, wenn T mit allen $\Phi_E(\phi) = [\int \phi \, dE]$, $\phi \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\sigma(A), \mathbb{C})$ vertauscht. Wegen $q|_{\sigma(A)} = (t \mapsto t) \in C(\sigma(A))$, folgt daraus $AT = TA$.

Gilt umgekehrt $AT = TA$, so folgt auch $p(A)T = Tp(A)$ für jedes Polynom p. Da sowohl $\phi \mapsto \Phi_A(\phi)T$ als auch $\phi \mapsto T\Phi_A(\phi)$ stetig als Abbildungen von $C(\sigma(A))$ nach $L_b(H)$ sind, und da beide auf der dichten Menge $\mathcal{P}$ $(\subseteq C(\sigma(A)))$ übereinstimmen, folgt, dass auch $\Phi_A(\phi)T = T\Phi_A(\phi)$ für alle $\phi \in C(\sigma(A))$, vgl. (7.2.4).

Ist $\tilde{E}$ ein weiteres Spektralmaß für $\langle \sigma(A), \mathcal{A}, H \rangle$, welches (7.2.1) erfüllt, so folgt auch für dieses Maß (7.2.2), also

$$\int p \, dE = \Phi_A(p|_{\sigma(A)}) = p(A) = \int p \, d\tilde{E} \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbb{C}[z] \, .$$

Da die Abbildung $\phi \mapsto \int \phi \, d\tilde{E}$ ein beschränkter *-Homomorphismus auf $C(\sigma(A))$ ist, vgl. Satz 7.1.9, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 7.2.3, dass $\Phi_A(\phi) = \int \phi \, d\tilde{E}$ für alle $\phi \in C(\sigma(A))$. Schließlich folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 7.1.12, dass $E = \tilde{E}$, wenn man beachtet, dass auf $\sigma(A)$ als kompakter Teilmenge von $\mathbb{R}$ alle komplexen Borelmaße regulär sind, vgl. Bemerkung 7.1.3.

❑

7.2.4 Bemerkung. Ist E das Spektralmaß zu $A = A^* \in L_b(H)$, so können wir dieses durch $F(\Delta) := E(\Delta \cap \sigma(A))$, wobei $\Delta \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, also eine Borelteilmenge von $\mathbb{R}$ ist, zu einem Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathbb{R}), H \rangle$ fortsetzen. Offensichtlich hat F kompakten Träger, also $F(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ für eine gewisse kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$; etwa $K = \sigma(A)$.

Bezeichnet $\iota : \sigma(A) \to \mathbb{R}$, so gilt für $g, h \in H$ und $\Delta \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$

$$E^{\iota}_{g,h}(\Delta) := E_{g,h}(\iota^{-1}(\Delta)) = E_{g,h}(\Delta \cap \sigma(A)) = F_{g,h}(\Delta)\,.$$

Aus der bekannten Transformationsregel (die auch für komplexe Maße gilt) aus der Maßtheorie folgt für ein beschränktes messbares $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \; dF_{g,h} = \int_{\mathbb{R}} \phi \; dE^{\iota}_{g,h} = \int_{\sigma(A)} \phi \circ \iota \; dE_{g,h} = \int_{\sigma(A)} \phi|_{\sigma(A)} \; dE_{g,h}\,,$$

und daher $\int_{\mathbb{R}} \phi \; dF = \int_{\sigma(A)} \phi|_{\sigma(A)} \; dE$. Insbesondere gilt $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbb{1}_K(t) \; dF(t) = A$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und derart ist, dass $K \supseteq \sigma(A)$.

Sei nun umgekehrt $\tilde{F}$ ein Spektralmaß mit kompaktem Träger für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathbb{R}), H \rangle$ derart, dass $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbb{1}_K(t) \; d\tilde{F}(t) = A$ mit einem kompakten $K \subseteq \mathbb{R}$, für das $\tilde{F}(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ gilt. Indem wir K nötigenfalls durch $K \cup \sigma(A)$ ersetzen, können wir $K \supseteq \sigma(A)$ annehmen. Aus den Rechenregeln in Satz 7.1.9 folgt

$$p(A) = \int p \cdot \mathbb{1}_K \, d\tilde{F}$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$. Die selbe Gleichheit gilt für das eben mit E konstruierte Spektralmaß F. Da $\{p|_K : p \in \mathbb{C}[z]\}$ dicht in $C(K)$ sind, folgt aus $\|\Phi_F\| = \|\Phi_{\tilde{F}}\| = 1$ (vgl. Satz 7.1.9), dass $\int \phi \cdot \mathbb{1}_K \, d\tilde{F} = \int \phi \cdot \mathbb{1}_K \, dF$ für alle $\phi \in C(K)$.

Als Zusammensetzung der beschränkten *-Homomorphismen $\phi \mapsto \phi \cdot \mathbb{1}_K$ von $C(K)$ nach $\mathcal{B}^{\mathcal{A}(\mathbb{R})}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und Φ_F ist $\phi \mapsto \int \phi \cdot \mathbb{1}_K \, dF$ ein beschränkter *-Homomorphismus und stimmt mit $\phi \mapsto \int \phi \cdot \mathbb{1}_K \, d\tilde{F}$ überein. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 7.1.12 angewandt auf $\Omega = K$ ergibt $F(\Delta) = \tilde{F}(\Delta)$ für alle Borel-Teilmengen $\Delta \subseteq K$. Wegen $\tilde{F}(\mathbb{R} \setminus K) = 0 = F(\mathbb{R} \setminus K)$ folgt $F = \tilde{F}$.

Also ist F das eindeutige Spektralmaß mit kompaktem Träger für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathbb{R}), H \rangle$ so, dass $\int_{\mathbb{R}} t \cdot \mathbb{1}_K(t) \; d\tilde{F}(t) = A$ für ein gewisses kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $F(\mathbb{R} \setminus K) = 0$. //

7.2.5 Bemerkung. Wir bemerken noch, dass für $\Phi = \Phi_A$ auch Korollar 7.1.13 gilt, und wir damit jeder beschränkten und messbaren Funktion $\phi : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ einen normalen Operator $\Phi_E(\phi) = \int \phi \; dE$ zuordnen können. Wir erhalten also einen *Funktionalkalkül* für $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(\sigma(A), \mathbb{C})$. Für $\phi \in C(\sigma(A))$ gilt $\Phi_E(\phi) = \Phi_A(\phi)$, wobei wegen der Isometrieeigenschaft von Φ_A

$$\left\| \int \phi \; dE \right\| = \|\phi\|_\infty \quad \text{für alle} \quad \phi \in C(\sigma(A))\,. \tag{7.2.5}$$

//

7.2.6 Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Betrachte den Multiplikationsoperator $M \in L^2(a, b)$ mit Symbol $\phi(x) := x$. Dieser ist beschränkt und selbstadjungiert, wobei $\sigma(M) = [a, b]$; siehe (6.4.8) in Beispiel 6.4.15. Wir zeigen, dass das Spektralmaß E von M gegeben ist durch

$$E(\Delta) := M_{\mathbb{1}_\Delta}, \;\; \Delta \subseteq [a, b] \text{ Borelmenge}\,.$$

Zunächst überprüfen wir, dass E ein Spektralmaß auf $[a,b]$ ist. Dazu bemerke, dass

$$M_{\mathbb{1}_\Delta}^2 = M_{\mathbb{1}_\Delta^2} = M_{\mathbb{1}_\Delta},\ M_{\mathbb{1}_\Delta}^* = M_{\overline{\mathbb{1}_\Delta}} = M_{\mathbb{1}_\Delta}\,,$$
$$M_{\mathbb{1}_\emptyset} = 0,\ M_{\mathbb{1}_{[a,b]}} = I,\ M_{\mathbb{1}_{\Delta_1}} M_{\mathbb{1}_{\Delta_2}} = M_{\mathbb{1}_{\Delta_1}\mathbb{1}_{\Delta_2}} = M_{\mathbb{1}_{\Delta_1\cap\Delta_2}}\,,$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} M_{\mathbb{1}_{\Delta_n}} = M_{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{\Delta_n}} = M_{\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n}},\ \Delta_n \text{ paarweise disjunkt}\,.$$

Betrachte für $g,h \in L^2(a,b)$ das komplexe Maß $E_{g,h}(\Delta) := (E(\Delta)g,h)$. Es gilt

$$E_{g,h}(\Delta) = \big(E(\Delta)g,h\big) = \int_{[a,b]} (\mathbb{1}_\Delta g)\overline{h}\,dt = \int_\Delta g\overline{h}\,dt\,.$$

Wegen $g\overline{h} \in L^1(a,b)$ ist $E_{g,h}$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue Maßes mit der Dichte $g\overline{h}$. Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ folgt

$$\begin{aligned}\Big(\Big[\int p\,dE\Big]g,h\Big) &= \int_{[a,b]} p\,dE_{g,h} = \int_{[a,b]} p\cdot g\overline{h}\,dt\\ &= \int_{[a,b]} p(M)g\cdot\overline{h}\,dt = (p(M)g,h)\,;\end{aligned}$$

also ist $\int p\,dE = p(M)$. //

7.2.7 Beispiel. Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert und gelte $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $B \in L_b(H)$ mit $B^2 = A$. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Funktionalkalkül, denn die Funktion $\phi : x \mapsto +\sqrt{x}$ ist eine stetige Funktion auf $\sigma(A)$. Setzt man $B := \Phi_A(\phi)$, so gilt offenbar

$$B^2 = \Phi_A(\phi)^2 = \Phi_A(\phi^2) = \Phi_A(\mathrm{id}) = A\,.$$

Da ϕ reellwertig ist gilt zudem $B^* = \Phi_A(\phi)^* = \Phi_A(\bar{\phi}) = \Phi_A(\phi) = B$. //

7.2.8 Beispiel. Sei $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert, und sei $\phi(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius größer als $\|A\|$ ist. Dann ist insbesondere $\phi(z)$ eine stetige Funktion auf $\sigma(A)$, also ist der Operator $\Phi_A(\phi)$ wohldefiniert. Wir können aber auch in anderer, ebenfalls natürlicher, Weise einen Operator mit A und ϕ assoziieren. Dazu setzen wir

$$B := \sum_{n=1}^\infty a_n A^n\,.$$

Diese Reihe konvergiert, aufgrund unserer Annahme den Konvergenzradius von ϕ betreffend, in der Operatornorm. Da $\phi(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N a_n z^n$ gleichmäßig auf $\sigma(A)$ gilt, ist

$$\begin{aligned}B &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N a_n A^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N a_n \Phi_A(z^n)\\ &= \lim_{N\to\infty}\Phi_A\Big(\sum_{n=0}^N a_n z^n\Big) = \Phi_A\Big(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N a_n z^n\Big) = \Phi_A(\phi)\,.\end{aligned}$$

//

7.2.9 Bemerkung. Der Spektralsatz Satz 7.2.1 gilt genauso für jeden normalen Operator. Vergleicht man das mit der linearen Algebra, so überrascht diese Tatsache nicht, denn es kann ja auch jede normale Matrix mit einer geeigneten Basistransformation auf Diagonalform gebracht werden. Der Beweis des Spektralsatzes für normale Operatoren erfordert aber ein tiefliegendes Hilfsmittel – die sogenannte Gelfand-Transformation – aus der Theorie der C^*-Algebren, das wir hier aber nicht zur Verfügung haben.

Analysiert man den Beweis, den wir hier für selbstadjungierte Operatoren gegeben haben, so stellt man fest, dass der zweite Teil des Beweises, nämlich die Konstruktion des Spektralmaßes mit Hilfe von Satz 7.1.12, auch für normale Operatoren funktioniert. Der wesentliche Punkt ist also die Konstruktion eines *-Homomorphismus von $C(\sigma(A))$ nach $L_b(H)$. Ist A nun nicht selbstadjungiert, sondern nur normal, so steht man vor dem Problem, dass es nicht ausreicht Polynomfunktionen $p(z)|_{\sigma(A)}$ zu betrachten, da $\sigma(A)$ im Allgemeinen nicht reell ist und wir daher den Satz von Stone-Weierstraß nicht auf $\{p(z)|_{\sigma(A)} : p \in \mathbb{C}[z]\}$ anwenden können, weil diese Algebra nicht bezüglich komplexer Konjugation abgeschlossen ist. Versucht man diese Schwierigkeit zu beseitigen, indem man Polynome $p(z, \overline{z})$ in den beiden Variablen z und $\overline{z}$ betrachtet, so hat man das Problem zu zeigen, dass $\|p(N, N^*)\|_{L_b(H)} \leq \|p(z, \overline{z})|_{\sigma(A)}\|$, denn jetzt können wir den Spektralabbildungssatz nicht mehr einsetzen. Tatsächlich ist genau diese Stelle der Punkt, wo man ein tiefliegenderes Instrument benötigt. //

Aus dem Spektralsatz erhalten wir Normalformen für selbstadjungierte Operatoren. Um den technischen Aufwand zu reduzieren, beschränken wir uns auf den Fall, dass A einen *zyklischen Vektor* besitzt, also dass es ein Element $u \in H$ gibt mit

$$\overline{\operatorname{span}\{A^n u : n = 0, 1, 2, \ldots\}} = H\,.$$

7.2.10 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum, und $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Sei vorausgesetzt, dass A einen zyklischen Vektor besitzt. Dann existiert ein endliches positives Borelmaß μ auf $\sigma(A)$ und ein unitärer Operator $U : L^2(\mu) \to H$ mit $A \circ U = U \circ M_t$, wobei M_t den Multiplikationsoperator $f(t) \mapsto tf(t)$ in $L^2(\mu)$ bezeichnet.*

Beweis. Sei E das Spektralmaß von A, sei u ein zyklischer Vektor für A, und setze $\mu := E_{u,u}$. Dann ist $\mu(\Delta) = (E(\Delta)u, u) = \|E(\Delta)u\|^2 \geq 0$. Betrachte die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} C(\sigma(A)) & \to & H \\ f & \mapsto & (\int f\,dE)u \end{cases}$$

Aus Satz 7.1.9 wissen wir, dass

$$\|f\|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\sigma(A)} |f|^2\,dE_{u,u} = \Big\| \big[\int f\,dE \big] u \Big\|^2 = \|\psi f\|^2\,.$$

Nun ist der Definitionsbereich $C(\sigma(A))$ von ψ dicht in $L^2(\mu)$ und wegen $\operatorname{ran}\psi = \{[\int_{\sigma(A)} f\,dE]u : f \in C(\sigma(A))\} \supseteq \operatorname{span}\{A^n u : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ und $\operatorname{ran}\psi$ dicht in H. Wir können also ψ zu einem isometrischen und bijektiven Operator U von $L^2(\mu)$ auf H fortsetzen. Dabei gilt für alle $f \in C(\sigma(A))$

$$\psi\big(M_t(f)\big) = \big[\int tf(t)\,dE \big] u = \big[\int t\,dE \big] \big[\int f\,dE \big] u = A\big(\psi(f)\big)\,.$$

Weil beide Seiten stetig von f abhängen, folgt $U \circ M_t = A \circ U$.

❑

Wir wollen als nächstes eine Aussage beweisen, die zeigt, dass man Eigenschaften des Spektrums von A am Spektralmaß E ablesen kann.

7.2.11 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum, $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert, und E das Spektralmaß von A. Dann gilt für $\lambda \in \sigma(A)$ stets* $\ker(A - \lambda I) = \operatorname{ran} E(\{\lambda\})$. *Insbesondere ist $\lambda \in \sigma_p(A)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda\}) \neq 0$.*

Beweis. Für ein $g \in H$ gilt nach Satz 7.1.9 und wegen $|t - \lambda|^2 = 0$ für $t = \lambda$

$$\|(A - \lambda I)g\|^2 = \int_{\sigma(A)} |t - \lambda|^2 \, dE_{g,g} = \int_{\sigma(A)\setminus\{\lambda\}} |t - \lambda|^2 \, dE_{g,g} \,.$$

Da $|t - \lambda|^2 > 0$ auf $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$, und da das Integral einer strikt positiven Funktion nach einem (positiven) Maß genau dann verschwindet, wenn das Maß das Nullmaß ist, gilt $(A - \lambda I)g = 0$ genau dann, wenn

$$0 = E_{g,g}(\sigma(A) \setminus \{\lambda\}) = \|E(\sigma(A) \setminus \{\lambda\})g\|^2 \,.$$

Wegen $\|g\|^2 = \|E(\sigma(A) \setminus \{\lambda\})g\|^2 + \|E(\{\lambda\})g\|^2$ ist das äquivalent zu $g = E(\{\lambda\})g$ bzw. zu $g \in \operatorname{ran} E(\{\lambda\})$.

❑

Wir erhalten auch eine exakte Formel für das Wachstum der Resolvente.

7.2.12 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))} \quad \textit{für alle} \quad \lambda \in \rho(A) \,.$$

Beweis. Setzen wir $\phi(t) = t,\ t \in \sigma(A)$, so gilt $\mathbb{C} \setminus \overline{\phi(\sigma(A))} = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \rho(A)$. Gemäß Satz 7.1.9, (v), gilt für $\lambda \in \rho(A)$

$$(A - \lambda)^{-1} = \Phi_E\Big(\frac{1}{\phi - \lambda}\Big) = \int (t - \lambda)^{-1} \, dE \,.$$

Wegen $\frac{1}{\phi - \lambda} \in C(\sigma(A))$ folgt aus (7.2.5)

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \Big\| \int \frac{1}{t - \lambda} \, dE \Big\| = \Big\|\frac{1}{t - \lambda}\Big\|_\infty = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))} \,.$$

❑

Die Ungleichung „$\geq$“ in Korollar 7.2.12 gilt nach (6.4.4) allgemein in Banachalgebren.

Ist A ein kompakter selbstadjungierter Operator, so kann man, aufgrund der speziellen Gestalt des Spektrums eines kompakten Operators, den Spektralsatz in einer einfacheren Form formulieren. Dazu sei an die speziellen spektralen Eigenschaften kompakter Operatoren erinnert.

Ist $A = A^*$ kompakt, so ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$. Insbesondere können wir $\sigma(A) \setminus \{0\}$

als $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}, n \leq N\}$ mit einem $N \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ anschreiben. Dabei sind die λ_n paarweise verschieden und wir wählen zweckmäßiger Weise die λ_n noch so, dass $|\lambda_m| \leq |\lambda_n|$ für $n \leq m$. Setzen wir $P_n = E(\{\lambda_n\})$, so ist gemäß Korollar 7.2.11 P_n die orthogonale Projektion auf $\ker(A - \lambda_n)$. Außerdem gilt (im starken Sinne)

$$\sum_{n=1}^{N} P_n = \sum_{n=1}^{N} E(\{\lambda_n\}) = E(\sigma(A) \setminus \{0\}) = I - E(\sigma(A) \cap \{0\})\,. \tag{7.2.6}$$

Insbesondere ist der Abschluss der linearen Hülle der Bildbereiche von den P_n genau das orthogonale Komplement von $\operatorname{ran} E(\sigma(A) \cap \{0\}) = \ker A$ (vgl. Korollar 7.2.11). Damit gilt $0 \notin \sigma_p(A)$ genau dann, wenn die lineare Hülle der Bildbereiche der P_n dicht in H ist.

Setzen wir $f(t) = t,\ t \in \sigma(A)$, so erfüllt auf $\sigma(A)$ die Funktionenfolge $f_n(t) = t\mathbb{1}_{\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}}(t)$ für $n \leq N$

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{t\in\sigma(A)} |t\mathbb{1}_{\sigma(A)\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}}(t)| = \sup_{t\in\sigma(A)} |t\mathbb{1}_{\{\lambda_j : n+1\leq j\leq N\}}(t)| \\ &= \sup\{|\lambda_j| : n+1 \leq j \leq N\} = |\lambda_{n+1}|\end{aligned}$$

und im Falle $N < \infty$ und $n = N$ sogar $\|f_n - f\|_\infty = 0$. Nun gilt $A = \int f\ dE$ sowie

$$\int f_n\ dE = \sum_{j=1}^{n} \int t\mathbb{1}_{\{\lambda_j\}}(t)\ dE(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E(\{\lambda_j\}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\,.$$

Wegen $f, f_n \in C(\sigma(A))$ folgt aus (7.2.5)

$$\|A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\| = \|\int f\ dE - \int f_n\ dE\| = \|f_n - f\|_\infty\,.$$

Im Fall $N < \infty$ ist also $A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_j$ und sonst gilt $A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$ bzgl. der Operatornorm.

Wählt man nun Orthonormalbasen $\{v_{n,1}, \dots, v_{n,d_n}\}$ von $\ker(A - \lambda_n I)$ – nach Satz 6.5.12 ist $\ker(A - \lambda_n I)$ ja endlichdimensional – und $\{w_j : j \in J\}$ von $\ker A$, falls $\ker A \neq \{0\}$, so folgt aus (7.2.6) (siehe auch Lemma 7.1.2), dass

$$\overline{\operatorname{span}\left(\{v_{n,1}, \dots, v_{n,d_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w_j : j \in J\}\right)} = \operatorname{ran}\Big(\underbrace{\sum_{\lambda\in\sigma(A)} E(\{\lambda\})}_{=I}\Big) = H\,.$$

Also haben wir ein Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren gefunden. Stellen wir ein $x \in H$ mit dieser ONB als Fourierreihe

$$x = \sum_{n,k} (x, v_{n,k}) v_{n,k} + \sum_{j} (x, w_j) w_j$$

dar, so gilt

$$Ax = A(\sum_{n,k} (x, v_{n,k}) v_{n,k}) = \sum_{n,k} (x, v_{n,k}) A v_{n,k} = \sum_{n,k} \lambda_n (x, v_{n,k}) v_{n,k}\,.$$

Somit haben wir folgende Version des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte Operatoren bewiesen.

7.2.13 Korollar (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Schreiben wir $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ als endliche oder unendliche Folge mit paarweise verschiedenen λ_n, und bezeichnen wir mit P_n die orthogonale Projektion auf $\ker(A - \lambda_n I)$, so gilt $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $P_n P_m = P_m P_n = 0$, $m \neq n$, und*

$$A = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n \,, \tag{7.2.7}$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Ist u_i, $i \in I$, eine ONB von H bestehend aus Eigenvektoren von A – eine solche gibt es immer – so gilt für jedes $x \in H$ entwickelt in eine Fourierreihe

$$x = \sum_{i \in I} \hat{x}(i) u_i \,,$$

dass

$$Ax = \sum_{i \in I} \lambda_{(i)} \hat{x}(i) u_i \,,$$

wobei $\lambda_{(i)}$ jenen Eigenwert bezeichnet, zu dem u_i Eigenvektor ist.

7.3 Sturm-Liouville Differentialgleichungen

Sei q eine stetige reellwertige Funktion auf dem Intervall $[0,1]$, $f \in L^2(0,1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Parameter, und $(\alpha, \alpha_1), (\beta, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{gathered} -h'' + qh - \lambda h = f \\ \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) = 0, \ \beta h(1) + \beta_1 h'(1) = 0 \,, \end{gathered} \tag{7.3.1}$$

und fragen nach der Existenz von Lösungen bzw. nach einer Beschreibung der Lösungsmenge. Randwertprobleme dieser speziellen Gestalt heißen auch *Sturm-Liouville Probleme*, und treten in vielen Fragestellungen der Physik auf.

7.3.1 Beispiel. Betrachte eine zwischen zwei festen Punkten $(0,0)$ und $(1,0)$ eingespannte, in der (x,y)-Ebene schwingende Saite. Sei $p \in C([0,1])$, $p > 0$, die Massendichte der Saite. Weiters sei $u(t,x)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t. Dann erfüllt u die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\big) \,.$$

Da die Saite eingespannt ist, gilt für jedes t

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \,.$$

Um eine Lösung $u(t,x)$ zu finden, versuchen wir einen Separationsansatz $u(t,x) = T(t)X(x)$. Setzt man in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\ddot{T}(t)X(x) = T(t)\big(p(x)X'(x)\big)' \,,$$

wobei Punkte die Ableitung nach der Zeitvariablen t und Striche die Ableitung nach der Ortsvariablen x bezeichnen. Weiters gelten die Randbedingungen $T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0$ für alle t.

Setzt man voraus, dass keine der auftretenden Funktionen identisch Null ist, was ja ohnehin ein nicht sehr interessanter Fall wäre, so erhält man

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X'(x))'}{X(x)} \,,$$

sowie $X(0) = X(1) = 0$. Die linke Seite dieser Beziehung hängt nur von t ab, die rechte nur von x, also müssen beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten λ sein.

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda$ lässt sich sofort hinschreiben. Komplizierter ist die Gleichung die sich auf der rechten Seite ergibt:

$$\frac{(p(x)X'(x))'}{X(x)} = \lambda, \quad X(0) = X(1) = 0 \,. \tag{7.3.2}$$

Wir stehen als allererstes vor dem Problem herauszufinden, für welche λ diese Gleichung überhaupt lösbar ist. Dass dieses Problem nicht trivial ist, zeigt uns schon der Spezialfall $p(x) = 1$, $x \in [0,1]$. In diesem Fall sieht man elementar, dass es eine Lösung gibt genau dann, wenn λ von der Gestalt $\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist, und dass die Lösung für $\lambda = \pi^2 n^2$ ein skalares Vielfaches von $\sin(n\pi x)$ ist.

Macht man eine geeignete Variablensubstitution, so kann man das Problem (7.3.2) in ein Sturm-Liouville Problem umformulieren. //

7.3.2 Beispiel. Betrachte ein Teilchen, dass sich in einem eindimensionalen Medium zwischen zwei Barrieren 0 und 1 unter dem Einfluss eines elektrischen Potentials $V(x)$, $x \in [0,1]$, aufhält. Sei $\Psi(t,x)$, $\int_0^1 |\Psi(t,x)|^2 \, dx = 1$, jene Funktion, für die die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zum Zeitpunkt t sich im Abschnitt U des Leiters befindet gleich

$$P(t,U) = \int_U |\Psi(t,x)|^2 \, dx$$

ist. Dann besagt die Schrödinger Gleichung, dass

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

gilt. Dabei ist $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum und m die Masse des Teilchens.

Wir machen wieder einen Separationsansatz $\Psi(t,x) = T(t)X(x)$, und erhalten

$$i\hbar \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} + V(x) \,,$$

also muss für eine gewisse Konstante λ

$$i\hbar \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \text{ und } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} + V(x) = \lambda$$

gelten. Es folgt, dass T ein skalares Vielfaches von $e^{i\hbar\lambda t}$ sein muss. Für X haben wir wieder ein Sturm-Liouville Problem erhalten. Aus physikalischen Gründen nimmt man wieder die Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$ hinzu.

Die in dieser Weise erhaltenen Lösungen (sofern man welche erhält), haben die interessante Eigenschaft, dass $P(t,U)$ nicht von der Zeit abhängt. Sie beschreiben also die stationären Zustände des Teilchens. Tatsächlich ist für diese Zustände nicht nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von der Zeit unabhängig, sondern alle durch Messung ermittelbaren Grössen. //

Wir kommen nun zu unserer Untersuchung des Randwertproblems (7.3.1). Als erstes müssen wir uns klar machen, welche Eigenschaften eine Funktion zumindest haben muss, damit der Differentialausdruck auf der linken Seite von (7.3.1) überhaupt wohldefiniert ist: Da wir $f \in L^2(0,1)$ voraussetzen, muss die Funktion h differenzierbar sein, ihre Ableitung h' noch absolut stetig sein und h'' im $L^2(0,1)$ liegen.

7.3.3 Bemerkung. Warum nehmen wir nicht $f \in C([0,1])$ und betrachten zwei mal stetig differenzierbare Funktionen h? Wir werden den Operator $L : h \mapsto -h'' + qh$ betrachten. Dieser würde dann $C^2[0,1]$ nach $C([0,1])$ abbilden, also zwischen unterschiedlichen Räumen agieren. Versieht man $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm und $C^2[0,1]$ mit der Norm $\|f\| := \sum_{n=0}^{2} \|f^{(n)}\|_\infty$, so hat man einen beschränkten Operator zwischen zwei Banachräumen. Es ist aber viel besser L als (nicht beschränkten und nicht überall definierten) Operator vom $L^2(0,1)$ in sich selbst zu betrachten, denn dann hat man das mächtige Instrument der Spektraltheorie in Hilberträumen zur Verfügung. //

7.3.4 Definition. Sei

$$D_0 := \left\{ h \in C^1(0,1) : \, h' \text{ absolut stetig}, h'' \in L^2(0,1), \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) = 0 \right\},$$

$$D_1 := \left\{ h \in C^1(0,1) : \, h' \text{ absolut stetig}, h'' \in L^2(0,1), \beta h(1) + \beta_1 h'(1) = 0 \right\},$$

$D := D_0 \cap D_1$, und sei $L : D \to L^2(0,1)$ definiert als

$$Lh := -h'' + qh, \; h \in D\,.$$

Der Operator L heißt auch *Sturm-Liouville Operator mit Potential q.*

Offenbar ist L eine lineare Abbildung. Wir machen im Folgenden stets die

Generalvoraussetzung: L ist injektiv, also folgt aus $h \in D$ und $Lh = 0$, dass $h = 0$.

Man kann zeigen, dass immer eine geeignete reelle Zahl α_0 derart existiert, dass diese Voraussetzung für $q - \alpha_0$ (anstelle von q) gilt. Offenbar sind die Randwertprobleme für q und $q - \alpha_0$, bis auf eine Verschiebung des Eigenwertparameters λ äquivalent.

Wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Lösungen von linearen Differentialgleichungen gibt es reellwertige Funktionen $h_0, h_1 \in C^2[0,1]$ die nicht identisch Null sind, und die

$$Lh_0 = Lh_1 = 0, \; h_0 \in D_0, h_1 \in D_1\,,$$

erfüllen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage sind diese bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt, und es gilt $(h_0(x), h_0'(x)), (h_1(x), h_1'(x)) \neq (0,0)$, $x \in [0,1]$.

7.3.5 Lemma. *Sei W die Wronski-Determinante*

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} h_0(x) & h_1(x) \\ h_0'(x) & h_1'(x) \end{pmatrix}$$

der Funktionen h_0 und h_1. Dann gilt $W(0) \neq 0$. Insbesondere sind h_0 und h_1 linear unabhängige Funktionen.

Beweis. Angenommen es ist $W(0)=0$. Dann existiert $(\mu_0,\mu_1)\in\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ mit

$$\mu_0\big(h_0(0),h_0'(0)\big)=\mu_1\big(h_1(0),h_1'(0)\big)\,.$$

Da $(h_0(0),h_0'(0))\neq(0,0)$, muss $\mu_1\neq 0$ sein. Wir erhalten, dass h_1 der Randbedingung bei 0 genügt, da ja $\frac{\mu_0}{\mu_1}h_0$ dies tut. Es folgt $h_1\in D_1\cap D_0=D$, und wegen unserer Generalvoraussetzung folgt $h_1=0$, ein Widerspruch.

❑

Es gilt

$$W'(x)=(h_0h_1'-h_0'h_1)'=h_0'h_1'+h_0h_1''-h_0''h_1-h_0'h_1'=h_0qh_1-qh_0h_1=0\,.$$

Also ist W eine von Null verschiedene Konstante.

Sei $g:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ definiert als

$$g(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{W}h_0(x)h_1(y) & ,\ 0\le x\le y\le 1\\ \frac{1}{W}h_1(x)h_0(y) & ,\ 0\le y\le x\le 1\end{cases}$$

Beachte, dass g wohldefiniert ist, reellwertig, stetig, und der Symmetriebedingung $g(x,y)=g(y,x)$ genügt. Sie heißt die *Green'sche Funktion für L*.

7.3.6 Satz. *Sei g die Green'sche Funktion für L, und $G:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ der Integraloperator*

$$(Gf)(x):=\int_0^1 g(x,y)f(y)\,dy,\ \ f\in L^2(0,1)\,.$$

Dann ist G ein kompakter und selbstadjungierter Operator in $L^2(0,1)$. Es gilt

$$\operatorname{ran}G=D,\quad LGf=f,\ f\in L^2(0,1),\quad GLh=h,\ h\in D\,, \tag{7.3.3}$$

also ist L^{-1} ein kompakter selbstadjungierter Operator am Hilbertraum $L^2(0,1)$. Ist $\lambda\in\sigma_p(G)$, so ist $\lambda\neq 0$ und es gilt $\dim\ker(G-\lambda)=1$.

Beweis. Wir wissen aus den Übungsaufgaben, dass G kompakt und selbstadjungiert ist. Wir müssen zeigen, dass alle Gleichungen in (7.3.3) gelten.

Sei $f\in L^2(0,1)$ und setze $h:=Gf$. Setze

$$H_0(x):=\frac{1}{W}\int_0^x h_0(y)f(y)\,dy,\ \ H_1(x):=\frac{1}{W}\int_x^1 h_1(y)f(y)\,dy\,,$$

dann sind H_0 und H_1 absolut stetig und $H_0'=W^{-1}h_0f$, $H_1'=-W^{-1}h_1f$, fast überall. Es gilt

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_0^1 g(x,y)f(y)\,dy\\&=W^{-1}\int_0^x h_0(y)h_1(x)f(y)\,dy+W^{-1}\int_x^1 h_0(x)h_1(y)f(y)\,dy\\&=H_0(x)h_1(x)+H_1(x)h_0(x)\,.\end{aligned}$$

Daher ist h absolut stetig, damit fast überall differenzierbar, und es gilt

$$h'=(W^{-1}h_0f)h_1+H_0h_1'+(-W^{-1}h_1f)h_0+H_1h_0'=H_0h_1'+H_1h_0',\ \text{f.ü.}$$

Wir erhalten nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(y)\,dy = h(0) + \int_0^x \big(H_0(y)h_1'(y) + H_1(y)h_0'(y)\big)\,dy,\ x \in [0,1]\,.$$

Die Funktion $H_0 h_1' + H_1 h_0'$ ist stetig. Also folgt, dass h sogar überall differenzierbar ist und $h'(x) = H_0(x)h_1'(x) + H_1(x)h_0'(x)$ sogar für alle x gilt. Wir sehen, dass h' auch absolut stetig ist, und dass

$$h'' = (W^{-1}h_0 f)h_1' + H_0 h_1'' + h_0'' H_1 + h_0'(-W^{-1}h_1 f) \in L^2(0,1)\,.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \alpha h(0) + \alpha_1 h'(0) &= \alpha\big[H_0(0)h_1(0) + H_1(0)h_0(0)\big] + \alpha_1\big[H_0(0)h_1'(0) + H_1(0)h_0'(0)\big] \\ &= H_1(0)\big(\alpha h_0(0) + \alpha_1 h_0'(0)\big) = 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta h(1) + \beta_1 h'(1) &= \beta\big[H_0(1)h_1(1) + H_1(1)h_0(1)\big] + \beta_1\big[H_0(1)h_1'(1) + H_1(1)h_0'(1)\big] \\ &= H_0(1)\big(\beta h_1(1) + \beta_1 h_1'(1)\big) = 0\,. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also $h \in D$. Weiters berechnet man

$$\begin{aligned} Lh &= -\big[(W^{-1}h_0 f)h_1' + H_0 h_1'' + h_0'' H_1 + h_0'(-W^{-1}h_1 f)\big] + q(H_0 h_1 + H_1 h_0) \\ &= (-h_1'' + q h_1)H_0 + (-h_0'' + q h_0)H_1 + W^{-1}(h_1 h_0' - h_0 h_1')f = f\,. \end{aligned}$$

Es folgt dass $\operatorname{ran} G \subseteq D$ und $LG = \mathrm{id}_{L^2(0,1)}$.

Sei nun $h \in D$. Dann ist $Lh \in L^2(0,1)$, und wir erhalten $LGLh = Lh$. Da L injektiv ist, folgt $GLh = h$. Infolge haben wir $\operatorname{ran} G = D$ und $GL = \mathrm{id}_D$.

Klarerweise ist G injektiv, also $0 \notin \sigma_p(G)$. Sei $\lambda \in \sigma_p(G)$, und sei angenommen, dass es zwei linear unabhängige Funktionen $h, \tilde h \in \ker(G - \lambda)$ gibt. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung $-h'' + (q - \frac{1}{\lambda}) = 0$ eine Linearkombination von h und $\tilde h$, und erfüllt daher die Randbedingungen in (7.3.1). Nun kann man aber zu beliebig vorgegebenen x_0, x_1 eine Lösung y dieser Gleichung finden mit $y(0) = x_0$, $y'(0) = x_1$, ein Widerspruch.

❑

7.3.7 Korollar. *Es existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $L^2(0,1)$ derart, dass*

(i) *$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$, und $|\lambda_n| \to \infty$;*

(ii) *$e_n \in D$ und $Le_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, dann hat die Gleichung $Lh - \lambda h = f$ für jedes $f \in L^2(0,1)$ eine eindeutige Lösung $h \in D$;*

(iv) *Ist $\lambda = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann hat die Gleichung $Lh - \lambda h = f$ genau dann eine Lösung in D, wenn $f \perp e_n$ ist. In diesem Fall unterscheiden sich je zwei Lösungen nur um ein skalares Vielfaches von e_n.*

Beweis. Ist $h \in D$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und $Lh = \lambda h$, so folgt $Gh = \frac{1}{\lambda} h$. Umgekehrt ist für jede Funktion $h \in L^2(0,1)$, $\lambda \neq 0$, mit $Gh = \frac{1}{\lambda} h$ schon $h \in D$ und $Lh = \lambda h$. Die Behauptung folgt also aus dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Korollar 7.2.13 bzw. Satz 6.7.4.

❑

7.3.8 Bemerkung. Besonders interessant ist die Tatsache, dass man eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen erhält. Dazu denken wir wieder an das Beispiel der schwingenden Saite, Beispiel 7.3.1. Hat man eine Anfangslage der Saite gegeben, $u(0,x) = u_0(x) \in L^2(0,1)$, und entwickelt man diese in eine Reihe nach den Eigenfunktionen, $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n e_n$, $\gamma_n = \int_0^1 u_0(x) \overline{e_n(x)}\, dx$, so erhält man die Lösung der Schwingungsgleichung (wieder durch Variablensubstitution) explizit aus dieser Reihe. Um dies zu rechtfertigen, muss man beachten, dass diese Reihe hinreichend gut konvergiert. //

7.3.9 Beispiel. Betrachte den Fall, dass $q = 0$ und $(\alpha, \alpha_1) = (1,0)$, $(\beta, \beta_1) = (1,0)$. Dann betrachtet man also gerade die Gleichung $(L - \lambda)h = -h'' - \lambda h = 0$ mit den Randbedingungen $h(0) = h(1) = 0$. In diesem Fall kann man die Eigenwerte λ_n und zugehörigen Eigenfunktionen e_n natürlich explizit ermitteln: Es gilt $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, und $e_n(x) = \sin(\pi n x)$. Man erhält also eine Orthonormalbasis bezüglich derer die Reihendarstellung eines Elementes $f \in L^2(0,1)$ gerade die bekannte Fourier-Entwicklung einer $L^2(0,1)$-Funktion in eine reine Sinusreihe ist. //

Zum Abschluss betrachten wir noch ein Beispiel, welches zeigt, dass man oft auch noch viel mehr Theorie benötigt als in den bisher betrachteten Fällen.

7.3.10 Beispiel. Wir betrachten die Bewegung eines Elektrons im Wasserstoffatom, also unter dem Einfluss des elektrischen Potentials des Wasserstoffkernes. Sei wieder $\Psi(t, \vec{x})$ die L^2-Dichte der Aufenthaltswahrsscheinlichkeit, also

$$P(t,U) = \int_U |\Psi(t,\vec{x})|^2 \, d\vec{x}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t im Bereich U befindet. Die dreidimensionale Schrödingergleichung besagt dann

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

Schreibt man $\Psi(t, \vec{x})$ in Polarkoordinaten (r, ϕ, θ) an, und macht einen Separationsansatz, so kommt man für $R(r)$ wieder auf eine Gleichung von der Gestalt eines Sturm-Liouville Problems. Allerdings sucht man nun Lösungen nicht auf einem endlichen Intervall, sondern für $r \in [0, \infty)$.

Die von uns entwickelte Theorie von Sturm-Liouville Problemen lässt sich nun nicht mehr so einfach anwenden, denn der Operator G ist zwar noch selbstadjungiert, aber nicht mehr kompakt. Sein Spektrum kann also neben Eigenwerten noch andere Spektralpunkte enthalten. Das Punktspektrum ist aber auch hier wieder von besonderer Bedeutung, denn es gibt uns wieder stationäre Zustände des Elektrons. Die Eigenwerte beschreiben die stabilen Energieniveaus des Elektrons. //

Anhang A

Topologien / Dualräume

Einige verschiedene Topologien, die im Laufe der Untersuchung von topologischen Vektorräumen, normierten Räumen und Hilberträumen aufgetreten sind.

X Menge	$\mathcal{T}$ Topologie
	d Metrik $\dashrightarrow$ von der Metrik induzierte Topologie
X Vektorraum	$\Vert.\Vert$ Norm, Normtopologie
	$(.,.)$ Skalarprodukt $\dashrightarrow$ Norm, Normtopologie
	Familie von Seminormen $\leftrightarrows$ lokalkonvexe Topologie
	Teilraum von linearen Funktionalen $\dashrightarrow$ lokalkonvexe Topologie
X normierter Raum	$\mathcal{T}_{\Vert.\Vert}$ Normtopologie
	schwache Topologie $\mathcal{T}_w = \sigma(X, X') \subseteq \mathcal{T}_{\Vert.\Vert}$
$X = Y'$ Dualraum eines normierten Raumes	$\mathcal{T}_{\Vert.\Vert}$ Normtopologie
	schwache Topologie $\mathcal{T}_w = \sigma(X', X'') \subseteq \mathcal{T}_{\Vert.\Vert}$
	schwach-* Topologie $\mathcal{T}_{w*} = \sigma(X', \iota(X)) \subseteq \mathcal{T}_w$
$X = \mathcal{B}(X, Y)$, X, Y normierte Räume	Operatornorm $\dashrightarrow$ Normtopologie
	Konvergenz im starken Sinne
$X = \mathcal{B}(H)$, H Hilbertraum	Konvergenz im schwachen Sinne

Einige Beispiele von Banachräumen und ihren Dualräumen

X	$Y \cong X'$	$\varphi : Y \to X'$
$L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$. μ positives Maß auf Ω	$L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	$(\varphi g)(f) = \int_\Omega fg\, d\mu$
$L^1(\mu)$. μ positives σ-endliches Maß auf Ω	$L^\infty(\mu)$	$(\varphi g)(f) = \int_\Omega fg\, d\mu$
$C_0(L)$. L lokalkompakter Hausdorffraum	$M(L)$	$(\varphi\mu)(f) = \int_L f\, d\mu$
$M(L)$. L lokalkompakter Hausdorffraum	$L^\infty(M(L)) :=$ $\{F \in \prod_{\mu \in M(L)} L^\infty(\mu) : F(\mu) = F(\nu)$ μ-f.ü.wenn $\mu \ll \nu$ $\}$	$(\varphi F)(\mu) = \int_L F(\mu)\, d\mu$
$c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \to 0\}$	ℓ^1	$\varphi((b_n)_{n\in\mathbb{N}})((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$
$c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} :$ konvergent $\}$	ℓ^1	
$L^\infty(\mu)$. μ positives Maß auf M	Raum der endlichen-additiven μ-absolut stetigen Maße auf M	

Literaturverzeichnis

[R1] W.Rudin: *Functional Analysis,* International Series in Pure and Applied Mathematics, 2nd Edition, McGraw-Hill 1991.

[R2] W.Rudin: *Real and Complex Analysis,* International Edition, 3rd Edition, McGraw-Hill 1987.

[C] J.B.Conway: *A Course in Functional Analysis,* GTM 96, Springer 1985.

[W] D.Werner: *Funktionalanalysis,* Springer Verlag, 1997.

[Y] K.Yoshida: *Functional Analysis,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 123, Springer Verlag, 1997.

[H] H.Heuser: *Funktionalanalysis,* Mathematische Leitfäden, Teubner Verlag, 1975.

[DS] N.Dunford, J.Schwartz: *Linear Operators 1–3,* Wiley Interscience, New York 1971–1988.

[S] H.Schäfer: *Topological vector spaces,* GTM 3, Springer Verlag 1999.

[M] R.Megginson: *An Introduction to Banach space Theory,* GTM 183, Springer Verlag, 1998.

[GGK] I.Gohberg, S.Goldberg, M.Kaashoek: *Classes of Linear Operators,* OT 49, Birkhäuser Verlag, 1990.

[AG] N.Achieser, I.Glasmann: *Theorie der Linearen Operatoren im Hilbertraum,* Akademie Verlag, 1968.

[LT] J.Lindenstrauss, L.Tzafriri: *Classical Banach spaces I,II,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Springer Verlag, 1977.

[D] R.Douglas: *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* GTM 179, Springer Verlag, 1998.

[B] A.Balakrishnan: *Applied Functional Analysis,* Applications of Mathematics 3, Springer Verlag, 1976.

[CN] B.Choudhary, S.Nanda: *Functional Analysis with Applications,* Wiley, 1989.

[Co] J.B.Conway: *Functions of a complex variable I,* GTM 11, Springer Verlag 1978.

[K1] M.Kaltenbäck: *Fundament Analysis,* Heldermann Verlag.

[K2] M.Kaltenbäck: *Aufbau Analysis,* Heldermann Verlag.

[Hu] CH.HUND: *Fixpunktsatz von Brouwer,* Bachelorarbeit, Uni Bielefeld.

[Go] GOCKEL: *Lokalkonvexe Räume und Fixpunktsätze,* http://matheplanet.com/default3.html?article=1162.

Index