Komplexe Analysis 2

SS 2007

Harald Woracek

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der Primzahlsatz

Wir wollen in diesem Kapitel den Primalsatz beweisen der eine quantitative Anwort auf die Frage nach der Anzahl der Primzahlen gibt.

1.0.1 Satz (Primzahlsatz)**.** *Bezeichne mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen, und sei $\pi(x) := \sharp\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}\right) = 1\,.$$

Dazu stellen wir einen Zusammenhang mit sogenannten Dirichletreihen her. Diese sind funktionentheoretischen Methoden zugänglich.

1.0.2 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die, zunächst formal gebildete, Reihe

$$D(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{1}{n^s}$$

heißt *Dirchletreihe* mit Koeffizienten a_n.

Natürlich stellt sich die Frage ob, und gegebenfalls für welche Zahlen $s \in \mathbb{C}$, die Reihe $D(s)$ konvergiert. Ähnlich wie Potenzreihen hat das Konvergenzgebiet einer Dirichletreihe eine ganz spezielle Gestalt, es handelt sich nämlich stets um eine Halbebene.

Für $\alpha \in [-\infty, \infty]$ bezeichne mit $\mathbb{H}_\alpha$ die offene Halbebene

$$\mathbb{H}_\alpha := \big\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \alpha\big\}\,.$$

1.0.3 Lemma. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, und sei $D(s)$ die Dirichletreihe mit Koeffizienten a_n. Ist $D(s)$ für eine Zahl $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, so konvergiert $D(s)$ auf der abgeschlossenen Halbebene $\overline{\mathbb{H}_{\operatorname{Re} s_0}}$ absolut und gleichmäßig.*

Beweis. Es ist $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s}$, und daher gilt

$$\Big|a_n \frac{1}{n^s}\Big| = \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \frac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} s_0}},\ \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0\,.$$

❑

Setzt man $\gamma := \inf\{s \in \mathbb{C} : D(s) \text{ absolut konvergent}\}$, so ist wegen Lemma 1.0.3 also $D(s)$ auf der Halbebene $\mathbb{H}_\gamma$ absolut und lokal gleichmäßig konvergent. Daher stellt $D(s)$ eine auf $\mathbb{H}_\gamma$ analytische Funktion dar. Die Halbebene $\mathbb{H}_\gamma$ heißt auch *Konvergenzhalbebene* der Dirichletreihe $D(s)$, und γ ihre *Konvergenzabszisse*. Genauer muss man eigentlich von der *Halbebene der absoluten Konvergenz* bzw. *Abszisse der absoluten Konvergenz* sprechen, denn es kann durchaus vorkommen, dass $D(s)$ für gewisse Punkte s konvergiert aber nicht absolut konvergiert.

1.0.4 Beispiel. Betrachte die Dirichletreihe mit Koeffizienten $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, das ist also die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n n^{-s}$. Das Konvergenzverhalten dieser Reihe ist wie folgt:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n n^{-s} \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & , \text{ auf } \mathbb{H}_1, \\ \text{konvergent aber nicht absolut konvergent} & , \ 0 < \operatorname{Re} s \leq 1 \\ \text{divergent} & , \ \operatorname{Re} s \leq 0 \end{cases}$$

1.0.5 Beispiel. Die *Riemannsche Zetafunktion* $\zeta(s)$ ist die Dirichletreihe zur Folge $a_n := 1$, $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Die Konvergenzabszisse (der absoluten Konvergenz) dieser Dirichletreihe ist gleich 1, $\zeta(s)$ ist also eine auf $\mathbb{H}_1$ analytische Funktion. Man kann zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ für $\operatorname{Re} s \leq 1$ nicht konvergiert.

Der Zusammenhang der Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ mit einer gewissen Dirichletreihe begründet sich auf der folgenden Feststellung.

1.0.6 Lemma. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) *Es gilt* $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1 + o(1))$.

(*ii*) *Sei* $\Theta(x) := \sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\leq x}} \log p$. *Dann ist* $\Theta(x) = x(1 + o(1))$.

(*iii*) *Sei*

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & , \quad n = p^k \text{ mit } p \in \mathbb{P} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und $\psi(x) := \sum_{\substack{n\leq x \\ n\in\mathbb{N}}} \Lambda(n)$. *Dann ist* $\psi(x) = x(1 + o(1))$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen. Sei $r(x)$ definiert durch die Beziehung $\Theta(x) = x(1 + r(x))$. Es gilt klarerweise $\Theta(x) \leq \pi(x) \log x$, also

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x}(1 + r(x)). \tag{1.1}$$

Wir brauchen auch eine Abschätzung von π nach oben. Sei $0 < q < 1$, dann gilt wegen $\pi(x^q) \leq x^q$,

$$\Theta(x) \geq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ x^q<p\leq x}} \log p \geq \log(x^q) \cdot \big(\pi(x) - \pi(x^q)\big) \geq q \log x \cdot \big(\pi(x) - x^q\big),$$

also

$$\pi(x) \le \frac{x}{\log x}(1+r(x))\frac{1}{q} + x^q\,.$$

Wir setzen speziell $q := 1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}$. Dann folgt

$$\pi(x) \le \frac{x}{\log x}(1+R(x)) \tag{1.2}$$

wobei

$$R(x) := -1 + (1+r(x))\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)^{-1} + (\log x)x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}}\,.$$

Es ist

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big) = 1,\ \lim_{x\to\infty}(\log x)x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}} = 0\,,$$

also ist

$$\limsup_{x\to\infty} r(x) = \limsup_{x\to\infty} R(x),\ \liminf_{x\to\infty} r(x) = \liminf_{x\to\infty} R(x)\,.$$

Sei nun (ii) vorausgesetzt, d.h. sei $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$. Dann folgt auch $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$, und wegen (1.1) und (1.2) erhalten wir (i). Gilt umgekehrt (i), so folgt wegen (1.1) dass $\limsup_{x\to\infty} r(x) \le 0$, und wegen (1.2) dass $\liminf_{x\to\infty} R(x) \ge 0$. Wir schließen dass $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$, d.h. es gilt (ii).

Wir zeigen als nächstes, dass

$$\psi(x) = \Theta(x) + O\big((\log x)\sqrt{x}\big)\,.$$

Dieses impliziert klarerweise die Äquivalenz von (ii) und (iii). Die Summanden von ψ die bei Θ fehlen sind die $\log p$ zu Primzahlpotenzen p^k mit $k \ge 2$. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\sharp\big\{(k,p)|k\ge 2, p^k \le x\big\} = O(\sqrt{x})\,.$$

Ist $p^k \le x$, so folgt $p \le \sqrt[k]{x}$ und $k \le \frac{\log x}{\log p} \le \frac{\log x}{\log 2}$, also kann man obige Anzahl abschätzen durch

$$\sum_{2\le k\le \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[k]{x} = \sqrt{x} + \sum_{3\le k\le \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[k]{x} \le \sqrt{x} + \frac{\log x}{\log 2}\sqrt[3]{x} = O(\sqrt{x})\,.$$

❏

Die Eigenschaft (i) in Lemma 1.0.6 ist offenbar gerade die Aussage des Primzahlsatzes. Interessant wird die Äquivalenz von (i) und (iii) nun im Lichte des folgenden Tauber'schen Satzes.

1.0.7 Satz (Ein Taubersatz). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, sodaß die Dirichletreihe $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ in der Halbebene $\mathbb{H}_1$ absolut konvergiert. Es gelte:*

- (i) *Die Funktion $(s-1)D(s)$ läßt sich auf eine offene Menge, welche die abgeschlossene Halbebene $\overline{\mathbb{H}_1}$ enthält, analytisch fortsetzen. Sei ρ das Residuum an der Stelle $s=1$ der Funktion $D(s)$.*

(ii) Es existieren Konstanten C und κ mit der Eigenschaft ($s = \sigma + it$)

$$|D(s)|, |D'(s)| \leq C|t|^{\kappa}, \ \sigma > 1, |t| \geq 1\,.$$

Sei $r(x)$ definiert durch $\sum_{n\leq x} a_n = \rho x(1 + r(x))$. Dann gilt für eine geeignete natürliche Zahl $N(\kappa)$

$$r(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[N(\kappa)]{\log x}}\Big)\,.$$

Es kann zum Beispiel $N(\kappa) = 2[\kappa] + 2$ gewählt werden.

Um den Primzahlsatz zu zeigen haben wir also zwei Dinge zu tun: Erstens zu zeigen, dass die Folge $(\Lambda(n))_{n\in\mathbb{N}}$ den Voraussetzungen von Satz 1.0.7 mit $\rho = 1$ genügt, und zweitens natürlich Satz 1.0.7 zu beweisen.

1.1 Die Riemannsche Zetafunktion

Die, uns interessierende, Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ ist eng verbunden mit der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$. Die folgende Aussage zeigt dieses, sowie auch dass $\zeta(s)$ wiederum eng verbunden ist mit den Primzahlen $\mathbb{P}$.

1.1.1 Lemma. *Die Riemannsche Zetafunktion hat die folgende Darstellung, das* Euler-Produkt*:*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \big(1 - \frac{1}{p^s}\big)^{-1}, \ s \in \mathbb{H}_1\,. \tag{1.3}$$

Insbesondere ist $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{H}_1$. Die logarithmische Ableitung $(\log\zeta(s))' = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ ist gegeben als

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(n)\frac{1}{n^s}\,.$$

Beweis. Um die Produktdarstellung von $\zeta(s)$ einzusehen schreibe für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty}(p^{-s})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(p^k)^{-s}, \quad \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(p^k)^{-s}\Big)\,.$$

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat, folgt durch Ausmultiplizieren (beachte, dass die auftretenden Reihen absolut konvergieren),

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p_0\leq p\leq p_1}} \sum_{k=0}^{\infty}(p^k)^{-s} = 1 + \sum_{\substack{n>1 \text{ hat}\\ \text{nur Primfaktoren}\\ p\in[p_0,p_1]}} n^{-s}\,. \tag{1.4}$$

Wir erhalten ($s = \sigma + it$)

$$\Big|\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p_0\leq p\leq p_1}} \big(1 - \frac{1}{p^s}\big)^{-1} - 1\Big| \leq \sum_{\substack{n>1 \text{ hat}\\ \text{nur Primfaktoren}\\ p\in[p_0,p_1]}} n^{-\sigma} \leq \sum_{n\geq p_0} n^{-\sigma}\,.$$

Wir sehen, dass das Euler-Produkt auf jeder abgeschlossenen Halbebene $\overline{\mathbb{H}_{1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$, lokal gleichmäßig konvergiert. Verwendet man (1.4) mit $p_0 = 2$, und läßt p_1 gegen unendlich streben, so erhält man (1.3).

Da das Euler-Produkt lokal gleichmäßig konvergiert, ist auch die Reihe

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = -\log\Big(\prod_{p\in\mathbb{P}}\big(1-\frac{1}{p^s}\big)^{-1}\Big) = -\log\zeta(s)$$

auf $\mathbb{H}_1$ absolut und lokal gleichmäßig konvergent. Da alle Summanden analytische Funktionen sind, folgt dass die Reihe der Ableitungen auf $\mathbb{H}_1$ ebenfalls lokal gleichmäßig konvergiert, und zwar zur Summe $-(\log\zeta(s))' = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Nun gilt

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{d}{ds}\log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{(\log p)p^{-s}}{1-p^{-s}} =$$

$$= -\sum_{p\in\mathbb{P}}(\log p)\sum_{k=1}^{\infty}(p^k)^{-s} = -\sum_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(n)n^{-s}\,.$$

Die letzte Umformung ist gerechtfertigt, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}$ auf $\mathbb{H}_1$ absolut konvergiert.

❑

Im folgenden Satz zeigen wir einige wesentliche Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

1.1.2 Satz. *Es gilt:*

(i) *Die Funktion $\zeta(s)$ besitzt eine Fortsetzung auf die Halbebene $\mathbb{H}_0$ die analytisch auf $\mathbb{H}_0\backslash\{1\}$ ist, und an der Stelle 1 einen einfachen Pol mit Residuum 1 hat.*

(ii) *Für jedes $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gibt es eine Konstante C_m, sodaß ($s = \sigma + it$)*

$$|\zeta^{(m)}(s)| \le C_m|t|,\ \ |t| \ge 1, \sigma > 1\,.$$

(iii) *Bezeichne die nach (i) existierende (und nach dem Identitätssatz eindeutige) Fortsetzung von $\zeta(s)$ zu einer auf $\mathbb{H}_0$ meromorphen Funktion wiederum mit ζ. Dann hat ζ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ keine Nullstellen.*

(iv) *Es gibt eine Konstante $\delta > 0$, sodaß*

$$|\zeta(s)| \ge \delta|t|^{-4},\ \ |t| \ge 1, \sigma > 1\,.$$

Beweis. (Satz 1.1.2, (i), (ii)) Sei $\beta(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, und betrachte das Integral

$$F(s) := \int_1^{\infty} x^{-s-1}\beta(x)\,dx\,.$$

Es gilt $|x^{-s-1}\beta(x)| \le \frac{1}{2}x^{-\sigma-1}$, also konvergiert dieses Integral lokal gleichmäßig in der Halbebene $\mathbb{H}_0$. Daher ist $F(s)$ eine analytische Funktion auf $\mathbb{H}_0$.

Am Intervall $(n,n+1)$ ist $\beta(x)=x-n-\frac{1}{2}$, also haben wir

$$\int\limits_n^{n+1}\beta(x)\frac{d}{dx}(x^{-s})\,dx=\frac{1}{2}\big[(n+1)^{-s}+n^{-s}\big])-\int\limits_n^{n+1}x^{-s}\,dx\,.$$

Es folgt

$$-s\int_1^N\beta(x)x^{-s-1}\,dx=-s\sum_{n=1}^{N-1}\int\limits_n^{n+1}\beta(x)x^{-s-1}\,dx=\sum_{n=1}^{N}n^{-s}-\frac{1}{2}\big(1+N^{-s}\big)-$$

$$-\int_1^N x^{-s}\,dx=\sum_{n=1}^{N}n^{-s}-\frac{1}{2}\big(1+N^{-s}\big)-\frac{N^{1-s}}{1-s}+\frac{1}{1-s}\,.$$

Für $\operatorname{Re}s>1$ kann man in dieser Beziehung $N\to\infty$ streben lassen, und erhält

$$\zeta(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}-sF(s),\ \ s\in\mathbb{H}_1\,. \tag{1.5}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist also eine Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf $\mathbb{H}_0$, und offenbar hat sie die in (i) verlangten Eigenschaften.

Wir kommen zum Beweis von (ii). Zunächst bemerken wir dass, wegen

$$\zeta^{(m)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\log n)^m\frac{1}{n^s},\ \ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

jede Ableitung der Zetafunktion auf jeder Halbebene $\overline{\mathbb{H}_{1+\varepsilon}}$ beschränkt ist:

$$|\zeta^{(m)}(s)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^m\frac{1}{n^\sigma}\leq\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^m\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\,,$$
$$m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\varepsilon>0,s\in\mathbb{H}_{1+\varepsilon}\,. \tag{1.6}$$

Für die gewünschte Abschätzung nach oben brauchen wir also nur einen ausgeschnittenen Streifen rechts der Geraden $\operatorname{Re}s=1$ zu betrachten, zum Beispiel $S:=\{s\in\mathbb{C}:\ 1<\operatorname{Re}s\leq 2,|t|\geq 1\}$. Für $s\in S$ gilt $\frac{|s|}{|\operatorname{Im}s|}\leq\sqrt{5}$, für die Abschätzung in (ii) genügt es also auf S eine Abschätzung der Gestalt $|\zeta^{(m)}(s)|\leq c_m|s|$ zu finden.

Wegen (1.5) erhalten wir eine Abschätzung $|\zeta^{(m)}(s)|\leq c_m|s|$, $s\in S$, wenn wir zeigen können, dass alle Ableitungen $F^{(k)}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ auf S beschränkt sind. Dies ist aber einfach einzusehen: Es gilt

$$F^{(k)}(s)=\int\limits_1^{\infty}(-\log t)^m t^{-s-1}\beta(t)\,dt,\ \ k\in\mathbb{N}_0\,.$$

Beachte hier, dass alle diese Integrale lokal gleichmäßig konvergieren. Also haben wir

$$|F^{(k)}(s)|\leq\int_1^\infty(\log t)t^{-\sigma-1}\frac{1}{2}\,dt\leq\frac{1}{2}\int_1^\infty(\log t)^k t^{-2}\,dt,\ \operatorname{Re}s\geq 1\,.$$

❑

Für den Beweis von (iii) und (iv) verwenden wir das folgende Lemma.

1.1.3 Lemma. *Es gilt ($s = \sigma + it$)*

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 \, |\zeta(\sigma+2it)| \, |\zeta(\sigma)(\sigma-1)|^3 \geq \frac{1}{\sigma-1}, \;\; s \in \mathbb{H}_1 \,. \tag{1.7}$$

Beweis. Zunächst eine elementare Ungleichung: Für $|a| = 1$ gilt $\operatorname{Re}(a^4) + 4\operatorname{Re}(a^2) + 3 \geq 0$. Denn ist $a\overline{a} = 1$, so berechnet man

$$(a+\overline{a})^4 = a^4 + 4a^3\overline{a} + 6a^2\overline{a}^2 + 4a\overline{a}^3 + \overline{a}^4 = (a^4+\overline{a}^4) + 4(a^2+\overline{a}^2) + 6\,,$$

und damit

$$2\big(\operatorname{Re}(a^4) + 4\operatorname{Re}(a^2) + 3\big) = (2\operatorname{Re} a)^4 \geq 0\,.$$

Sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen, sodaß die Dirichletreihe $D(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n n^{-s}$ auf $\mathbb{H}_1$ absolut konvergiert, und setze $Z(s) := e^{D(s)}$. Wir zeigen, dass dann

$$\operatorname{Re} D(\sigma+2it) + 4\operatorname{Re} D(\sigma+it) + 3D(\sigma) \geq 0, \;\; s = \sigma+it \in \mathbb{H}_1\,,$$

und

$$|Z(\sigma+it)|^4 \, |Z(\sigma+2it)| \, |Z(\sigma)|^3 \geq 1\,. \tag{1.8}$$

Um dies einzusehen, setzt man in der obigen Ungleichung $a := n^{-i\frac{t}{2}}$. Dann folgt also

$$\operatorname{Re}(n^{-2it}) + 4\operatorname{Re}(n^{-it}) + 3 \geq 0\,.$$

Multipliziert man dieses mit $b_n n^{-\sigma}$ und summiert auf, so folgt die behauptete Ungleichung für D. Die Ungleichung für Z folgt durch exponentiieren.

Betrachte speziell die Koeffizienten

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & , \; n = p^k \text{ mit } p \in \mathbb{P} \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{n^s} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-ks} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \Big(-\log(1-p^{-s})\Big), \;\; s \in \mathbb{H}_1\,,$$

also

$$Z(s) = e^{D(s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)\,.$$

Die im letzten Absatz bewiesene Ungleichung liefert nun (1.7).

❏

Beweis. (Satz 1.1.2, $(iii), (iv)$) Angenommen die Fortsetzung von ζ hätte eine Nullstelle $s_0 = 1+it_0$. Dann muß also $\lim_{\sigma\searrow 1} \zeta(\sigma+it_0) = 0$ gelten. Die linke Seite der Ungleichung (1.7) hat, für $t = t_0$ und $\sigma \searrow 1$, einen endlichen Grenzwert, nämlich

$$\lim_{\sigma\searrow 1} \left[\left|\frac{\zeta(\sigma+it_0)}{\sigma-1}\right|^4 \, |\zeta(\sigma+2it_0)| \, |\zeta(\sigma)(\sigma-1)|^3 \right] = |\zeta'(1+it_0)|^4 \, |\zeta(1+2it_0)|\,.$$

Die rechte Seite strebt für $\sigma \searrow 1$ aber gegen $+\infty$, ein Widerspruch. Das zeigt (iii).

Wir kommen zum Beweis von (iv). Zunächst kann man sich wieder, wie im Beweis von (ii), auf den ausgeschnittenen Streifen S beschränken, denn für $\sigma > 2$ gilt

$$|\zeta(s)| \geq 1 - |\zeta(s) - 1| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} > 0\,.$$

Nach Lemma 1.1.3 gilt für $s \in \mathbb{H}_1$

$$|\zeta(s)| \geq \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{4}}|\zeta(\sigma)(\sigma-1)|^{\frac{3}{4}}}\,.$$

Die Funktion $\zeta(\sigma)(\sigma-1)$ ist auf dem Intervall $1 \leq \sigma \leq 2$ stetig, sie ist also nach oben durch eine positive Konstante beschränkt. Da $|\zeta(\sigma+it)| \leq C_0|t|$, $|t| \geq 1$, folgt mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$

$$|\zeta(s)| \geq c(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}},\ s \in S\,. \tag{1.9}$$

Sei nun $\epsilon \in (0,1)$ gegeben, und setze $\sigma(t) := 1 + \epsilon|t|^{-5}$.
Fall $\sigma(t) \leq \sigma \leq 2$*:* In diesem Fall gilt wegen (1.9)

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq c\big(\epsilon|t|^{-5}\big)^{\frac{3}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}} = c\epsilon^{\frac{3}{4}}|t|^{-4}\,.$$

Fall $1 < \sigma < \sigma(t)$*:* Es ist $\zeta(\sigma+it) = \zeta(\sigma(t)+it) + \int_{\sigma(t)}^{\sigma} \zeta'(x+it)\,dx$, und daher

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(\sigma(t)+it)| - \Big|\int_{\sigma(t)}^{\sigma} \zeta'(x+it)\,dx\Big|\,.$$

Wegen $|\zeta'(s)| \leq C_1|t|$, $|t| \geq 1$, $\sigma > 1$, folgt

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(\sigma(t)+it)| - C_1|t|(\sigma(t)-\sigma) \geq$$

$$\geq c\epsilon^{\frac{3}{4}}|t|^{-4} - C_1|t|(\sigma(t)-1) = \big(c\epsilon^{\frac{3}{4}} - C_1\epsilon\big)|t|^{-4}\,.$$

Wählt man nun ϵ so klein, daß $c - C_1\epsilon^{\frac{1}{4}} > 0$ ist, folgt die Abschätzung nach unten.

❑

Die gewünschten Eigenschaften der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ können nun aus Satz 1.1.2 hergeleitet werden.

1.1.4 Korollar. *Die Folge* $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.0.7.*

Beweis. Die Tatsache dass $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$ auf $\mathbb{H}_1$ absolut konvergiert ist klar. Sei

$$G := \big\{s \in \mathbb{H}_0 \setminus \{1\} : \zeta(s) \neq 0\big\} \cup \{1\}\,.$$

Dann ist G offen und enthält die abgeschlossene Halbebene $\overline{\mathbb{H}_1}$. Es ist $-(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ eine analytische Fortsetzung von $(s-1)D(s)$ auf G. Offenbar ist das Residuum von $D(s)$ and der Stelle 1 gleich 1. Es gilt, für $|t| \geq 1$, $\sigma > 1$,

$$|D(s)| = \frac{|\zeta'(s)|}{|\zeta(s)|} \leq \frac{C_1}{\delta}|t|^5\,,$$

und, wegen $D'(s) = \frac{\zeta''(s)\zeta(s)-\zeta'(s)^2}{\zeta(s)^2}$,

$$|D'(s)| \le \frac{C_2C_0 + C_1^2}{\delta^2}|t|^9 \,.$$

❏

Damit folgt der Primzahlsatz sobald wir den Taubersatz Satz 1.0.7 bewiesen haben.

1.2 Beweis von Satz 1.0.7

Wir betrachten nicht nur $A_0(x) = \sum_{n\le x} a_n$, sondern auch die *höheren summatorischen Funktionen*

$$A_k(x) := \frac{1}{k!}\sum_{n\le x} a_n(x-n)^k,\ \ x \ge 1, k = 0,1,2,\dots \,.$$

Diese Funktionen sind nichtnegativ, monoton wachsend, und für $k \ge 1$ absolut stetig. Es gilt

$$A'_{k+1}(x) = A_k(x),\ \ k \ge 0 \,.$$

Weiters ist stets $A_k(1) = 0$, $k \ge 1$, also haben wir $A_{k+1}(x) = \int\limits_1^x A_k(t)\,dt$. Sei im folgenden $r_k(x)$ definiert durch

$$A_k(x) = \rho\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\big(1 + r_k(x)\big)\,,$$

dann ist $r_k(x)$, $x \ge 1$, eine auf kompakten Mengen beschränkte Funktion.

1.2.1 Lemma. *Sei $k \ge 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$r_{k+1}(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[N]{\log x}}\Big)\,,$$

so folgt

$$r_k(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[2N]{\log x}}\Big)\,.$$

Beweis. Da die Funktion $A_k(x)$ monoton wachsend ist, gilt $(c > 0)$

$$cA_k(x) \le \int\limits_x^{x+c} A_k(t)\,dt\,.$$

Wir verwenden diese Ungleichung für $c = hx$ wobei $0 < h < 1$. Es gilt

$$A_{k+1}(x+hx) - A_{k+1}(x) = \frac{\rho}{(k+2)!}\Big[(x+hx)^{k+2}\big(1 + r_{k+1}(x+hx)\big) -$$

$$-x^{k+2}\big(1 + r_{k+1}(x)\big)\Big]\,.$$

und daher

$$1+r_k(x)=\frac{(k+1)!}{\rho x^{k+1}}A_k(x)\le\frac{(k+1)!}{\rho x^{k+1}}\frac{1}{hx}\big(A_{k+1}(x+hx)-A_{k+1}(x)\big)=$$

$$=\frac{1}{h(k+2)}\Big[(1+h)^{k+2}\big(1+r_{k+1}(x+hx)\big)-\big(1+r_{k+1}(x)\big)\Big]\,.$$

Mit

$$\epsilon(x):=\sup_{0\le\xi\le1}|r_{k+1}(x+\xi x)|$$

schreibt sich diese Beziehung als

$$r_k(x)\le\frac{1}{h(k+2)}\Big[(1+h)^{k+2}\big(1+\epsilon(x)\big)-\big(1-\epsilon(x)\big)\Big]-1=$$

$$=\frac{1}{h(k+2)}\Big[\big((1+h)^{k+2}+1\big)\epsilon(x)+\big((1+h)^{k+2}-(1+h(k+2))\big)\Big]\,.$$

Nach unserer Voraussetzung an $r_{k+1}(x)$ ist für hinreichend große x sicher $\epsilon(x)<1$. Wir können, für solche x, also $h:=\sqrt{\epsilon(x)}$ verwenden. Der erste Summand in obiger Ungleichung ist dann $\le\sqrt{\epsilon(x)}\frac{2^{k+2}+1}{k+2}$. Der zweite Term ist ein Polynom in h dessen konstanter und linearer Term verschwindet. Er kann also, bis auf einen (von k abhängigen) konstanten Faktor, durch $h^2=\epsilon(x)$, und damit auch durch $\sqrt{\epsilon(x)}$ abgeschätzt werden. Unsere Voraussetzung an $r_{k+1}(x)$ impliziert offenbar dass auch $\epsilon(x)=O(\frac{1}{\sqrt[N]{\log x}})$, also gilt mit einer gewissen Konstanten $K(k)$

$$r_k(x)\le K(k)\frac{1}{\sqrt[2N]{\log x}}\,.$$

Wir müssen $r_k(x)$ auch nach unten abschätzen. Mittels $(0<c<x)$

$$cA_k(x)\ge\int\limits_{x-c}^{x}A_k(t)\,dt=A_{k+1}(x)-A_{k+1}(x-c)\,,$$

erhält man genauso wie oben (mit geeignetem $K(k)$)

$$r_k(x)\ge -K(k)\sqrt{\epsilon(x)}$$

für hinreichend große x. Es folgt $r_n(x)=O(\frac{1}{\sqrt[2N]{\log x}})$.

❑

Sei $k\in\mathbb{N}$. Für $\sigma>1$ betrachte das Integral

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{|x^{s+k}|}{|s(s+1)\cdots(s+k)|}\,ds\,.$$

Der Integrand ist längs des Integrationsweges ein $O(\frac{1}{t^2})$, also ist dieses Integral konvergent. Auf der Geraden $\operatorname{Re}s=\sigma$ wird die Reihe $D(s)$ durch die von t unabhängige konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}$ majorisiert. Also ist das Integral

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds,\ \sigma>1\,,$$

absolut konvergent und es gilt

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\right)\cdot x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^k \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(\frac{x}{n})^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds\right). \tag{1.10}$$

Die Integrale auf der rechten Seite können berechnet werden.

1.2.2 Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds = \begin{cases} 0 & 0 < a \le 1 \\ \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{a})^k & a > 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

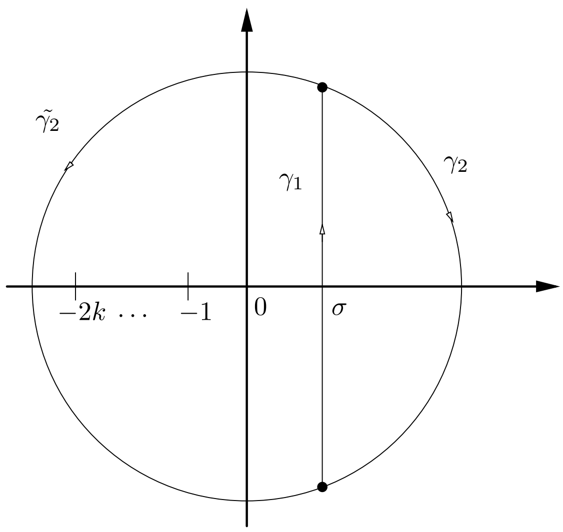
Beweis. Sei

$$f(s) := \frac{a^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}.$$

Diese Funktion ist analytisch auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der einfachen Pole $0, -1, \ldots, -k$. Die Residuen an diesen Polen sind

$$\mathrm{Res}(f, -\nu) = \frac{(-1)^\nu a^{-\nu}}{\nu!(k-\nu)!},\ \nu = 0, \ldots, k.$$

Seien $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{\gamma_2}$ die folgenden Wege:



Im Fall $0 < a \le 1$ integriert man f längs des Weges $\gamma_1 + \gamma_2$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(s)\,ds = 0$. Da $0 < a \le 1$ ist, gilt $|a^s| \le 1$ längs des gesamten Integrationsweges. Das Integral $\int_{\gamma_2} f(s)\,ds$ strebt daher für $R \to \infty$ gegen 0. Es folgt

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(s)\,ds = 0.$$

Sei nun $a > 1$. Wir integrieren $f(s)$ längs des Weges $\gamma_1 + \tilde{\gamma}_2$. Es ist $|a^s| \le a^\sigma$ längs dieses Weges, also gilt $\int_{\tilde{\gamma}_2} f(s)\, ds \to 0$ für $R \to \infty$. Nach dem Residuensatz haben wir

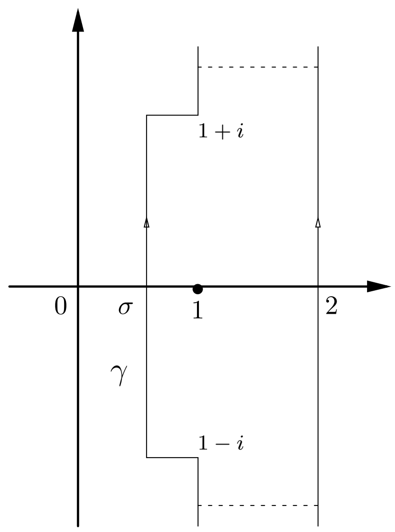
$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1+\tilde{\gamma}_2} f(s) ds = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu a^{-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} = \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{a}\Big)^k .$$

❑

Setzt man (1.11) in (1.10) ein, so erhält man

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\, ds,\ \ k = 1, 2, \ldots, \sigma > 1\,.$$

Insbesondere kann man hier zum Beispiel $\sigma := 2$ verwenden. Wir verschieben in dieser Formel den Integrationsweg „$\mathrm{Re}\, s = 2$“ in die Halbebene $\mathrm{Re}\, s \le 1$:



Dabei sei $\sigma \in (0, 1)$ so gewählt, dass der gesamte Weg γ im Analytizitätsgebiet von $D(s)$ liegen.

Sei nun Γ_R die Kurve „Stück von γ nach oben, dann strichlierte Strecke, dann längs $\mathrm{Re}\, s = 2$ nach unten, dann strichlierte Strecke“. Der Integrand ist innerhalb der Kurve Γ_R analytisch mit Ausnahme eines einfachen Poles an der Stelle 1. Nach dem Residuensatz haben wir

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{-\Gamma_R} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdot \ldots \cdot (s+k)} ds = \frac{\rho x^{1+k}}{(k+1)!}\,.$$

Wegen $|D(s)| \le C|t|^\kappa$, $|t| \ge 1$, $1 \le \sigma \le 2$, gilt für jedes feste x längs der strichlierten Strecken

$$\Big| \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \Big| \le C_1 |t|^{\kappa-k-1}\,.$$

Wir wählen nun $k > \kappa+1$, dann ist der Integrand längs der strichlierten Strecken also $\leq C_1|t|^{-2}$. Läßt man nun $R \to \infty$ streben, so erhält man

$$A_k(x) = \frac{\rho x^{1+k}}{(k+1)!} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds\,.$$

Um A_k mit Hilfe dieser Formel abzuschätzen, benützen wir das Lemma von Riemann-Lebesgue in einer etwas feinereren Variante.

1.2.3 Lemma (von Riemann-Lebesgue)**.** *Sei $I = (a, b)$, ein (endliches oder unendliches) Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

(*i*) *f ist beschränkt;*

(*ii*) *f ist stetig differenzierbar;*

(*iii*) *f und f' sind absolut integrierbar.*

Dann ist für $x > 0$ auch die Funktion $f(t)x^{it}$ absolut integrierbar und es gilt

$$\int\limits_a^b f(t)x^{it}\,dt = O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\,.$$

Beweis. Wir wählen Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a < a_n < b_n < b$. Da $|x^{it}| = 1$ ist und f absolut integrierbar, gilt

$$\int_a^b f(t)x^{it}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(t)x^{it}\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{i\log x}\Big(f(t)x^{it}\Big|_{a_n}^{b_n} - \int\limits_{a_n}^{b_n} f'(t)x^{it}\,dt\Big)\Big]\,.$$

Nach Voraussetzung ist f beschränkt und f' absolut integrierbar, also ist

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)x^{it}dt\Big| \leq K\Big|\frac{1}{\log x}\Big|\,.$$

❑

Wegen $|D'(s)| \leq \hat{C}|t|^{\kappa}$, $|t| \geq 1$, $1 \leq \sigma \leq 2$, und da k hinreichend groß gewählt wurde, können wir das Lemma von Riemann-Lebesgue auf die Funktion $f(t) := \frac{D(s)}{s(s+1)\cdots(s+k)}$, $s = 1 + it$, $t \in (1, \infty)$, anwenden. Es folgt dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1+i}^{1+i\infty} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\ldots(s+k)}ds = O\Big(\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big)\,.$$

Das gleiche Argument kann man auf die Integrale längs der Strecken $[1-i, 1-i\infty)$ bzw. $[1-i, 1+i]$ anwenden. Für letzteres erhält man, da $\sigma < 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i}^{\sigma+i} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\ldots(s+k)}ds = O\Big(x^{\sigma-1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big) = O\Big(\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big)\,.$$

Wir betrachten nun das Integral längs der horizontalen Strecke $[\sigma + i, 1 + i]$:

$$\Big| \int\limits_{\sigma+i}^{1+i} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,ds\Big| \leq C_2 \int\limits_{\sigma}^{1} x^{k+u}\,du =$$

$$= C_2 \frac{x^k}{\log x}(x - x^{\sigma}) = O\Big(\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big)\,.$$

Analog behandelt man das Integral längs der horizontalen Strecke $[\sigma - i, 1 - i]$.

Wir schließen aus den obigen Abschätzungen, daß für $k > \kappa + 1$

$$A_k(x) = \frac{\rho x^{k+1}}{(k+1)!} + O\Big(\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big)\,,$$

d.h. daß $r_k(x)$ ein $O(\frac{1}{\log x})$ ist. Mit Lemma 1.2.1 folgt für $k \leq \kappa + 1$

$$r_k(x) = O\Big(\frac{1}{\sqrt[N_k]{\log x}}\Big)\,,$$

wobei $N_k := 2^{[\kappa]+2-k}$. Speziell für $k = 0$ folgt die Behauptung von Satz 1.0.7.

Kapitel 2

Elliptische Funktionen

2.1 Periodische Funktionen

Wir betrachten in diesem Kapitel stets Funktionen die meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ sind. Eine Zahl $p \in \mathbb{C}$ heißt *Periode* der Funktion $f \in M(\mathbb{C}) \subseteq C(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$, wenn

$$f(z+p) = f(z),\ z \in \mathbb{C}\,.$$

Die Menge aller Perioden einer Funktion f bildet offenbar eine abgeschlossene (additive) Untergruppe von $\mathbb{C}$. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Untergruppe, so bezeichnen wir mit $K(G)$ die Menge aller Funktionen mit Perioden G, d.h.

$$K(G) := \big\{ f \in M(\mathbb{C}) :\ f(z+p) = f(z), z \in \mathbb{C}, p \in G \big\}\,.$$

Offenbar ist $K(G)$ ein Unterkörper von $M(\mathbb{C})$. Wir wollen bemerken, dass $K(G)$ nicht nur ein Unterkörper von $M(\mathbb{C})$ ist, sondern auch noch unter anderen Operationen abgeschlossen ist. Nämlich gilt stets

$$f(z) \in K(G) \ \Rightarrow\ f'(z), f(-z) \in K(G)$$

sowie

$$f \in K(G), a \in \mathbb{C}\ \Rightarrow f(z+a) \in K(G)\,.$$

Wie die folgende Bemerkung zeigt, ist diese Begriffsbildung $K(G)$ für diskrete Untergruppen interessant.

2.1.1 Lemma. *Ist G nicht diskret, so ist $K(G) = \mathbb{C}$, d.h. $K(G)$ enthält nur die konstanten Funktionen.*

Beweis. Sei $p_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von G und sei $f \in K(G)$. Wähle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $w_0 := f(z_0) \neq \infty$. Dann hat die Menge der w_0-Stellen von f einen Häufungspunkt, nämlich $z_0 + p_0$. Nach dem Identitätssatz ist f konstant. ❑

Diskrete Untergruppen von $\mathbb{C}$ müssen bereits von einer ganz speziellen Gestalt sein.

2.1.2 Lemma. *Sei G eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$. Dann ist G von einem der folgenden Typen:*

(1) *$G = \{0\}$.*

(2) *$G = \mathbb{Z}w$ mit einem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. G zyklisch.*

(3) *$G = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ mit zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Zahlen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass G abgeschlossen ist. Angenommen p_0 ist ein Häufungspunkt von G. Sei $\epsilon > 0$, dann existieren zwei verschiedene Elemente $x, y \in G$ mit $|x - p_0|, |y - p_0| < \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt, dass $x - y \in G \setminus \{0\}$ und $|x - y| < \epsilon$. Also ist 0 ein Häufungspunkt von G. Nun ist $0 \in G$, also ist G nicht diskret, ein Widerspruch. Beachte dass, da G diskret ist, also auch $G \setminus \{0\}$ abgeschlossen ist.

Ist $G = \{0\}$, so sind wir fertig. Sei also $G \neq \{0\}$. Bezeichne $U_r(w)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt w und Radius r. Ist $R > 0$ so groß dass $(G \setminus \{0\}) \cap \overline{U_R(0)} \neq \emptyset$, so ist die Menge $\{w \in G \setminus \{0\} : |w| \leq R\}$ kompakt und nichtleer. Also existiert $w_1 \in G$ mit $|w_1| = \min\{|w| : w \in G \setminus \{0\}\}$. Ist $G = \mathbb{Z}w_1$, so sind wir fertig. Sei also $G \neq \mathbb{Z}w_1$. Dann existiert nach dem gleichen Kompaktheitsargument ein Element $w_2 \in G \setminus \mathbb{Z}w_1$ mit $w_2 = \min\{|w| : w \in G \setminus \mathbb{Z}w_1\}$.

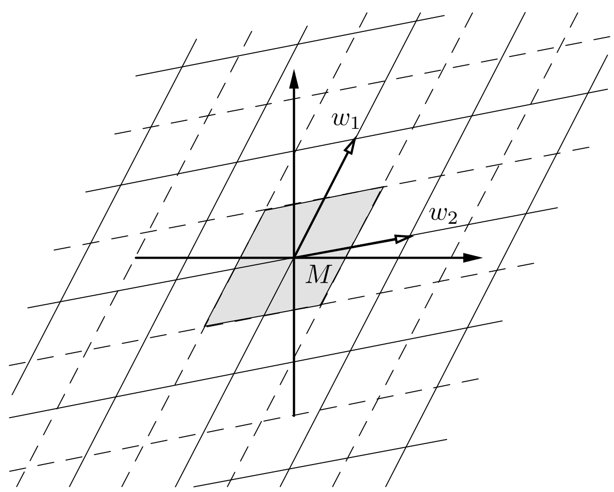
Wir zeigen als erstes dass w_1 und w_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Angenommen es wäre $w_2 = \lambda w_1$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $|w_2| \geq |w_1|$, folgt $|\lambda| \geq 1$. Wir erhalten im Fall $\lambda \geq 1$

$$|w_2 - w_1| = (\lambda - 1)|w_1| < \lambda|w_1| = |w_2|\,.$$

Da $w_2 - w_1 \in G \setminus \mathbb{Z}w_1$, ist das ein Widerspruch. Im Fall $\lambda \leq -1$ hat man $|w_2 + w_1| = (-\lambda - 1)|w_1| < (-\lambda)|w_1| = |w_2|$, und erhält genauso einen Widerspruch.

Wir benötigen eine Zwischenbemerkung: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Zahlen, dann gilt $\mathrm{co}\{0, a, b, a + b\} \subseteq U_{|a|+|b|}(0)$. Trivialerweise ist $0 \in U_{|a|+|b|}(0)$. Da $a, b \neq 0$, ist $|a|, |b| < |a| + |b|$. Weiters ist, wegen der $\mathbb{R}$-linearen Unabhängigkeit, $|a+b| < |a|+|b|$. Da die offene Kreisscheibe $U_{|a|+|b|}(0)$ konvex ist, folgt dass $\mathrm{co}\{0, a, b, a + b\} \subseteq U_{|a|+|b|}(0)$.

Setze nun $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Betrachte die Aufteilung der gesamten Ebene in Parallelogramme mit Seiten $\frac{w_1}{2}$ sowie $\frac{w_2}{2}$:



Jedes der kleinen Parallelogramme hat genau einen Eckpunkt w in L. Nach der obigen Zwischenbemerkung ist es enthalten in der offenen Kreisscheiben $U_r(w)$, wobei $r := \frac{|w_1|}{2} + \frac{|w_2|}{2}$. Bemerke, dass $r \leq |w_2|$. Wir schliessen, dass

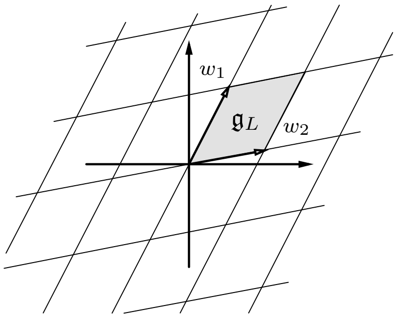
$$M := \mathrm{co}\{\pm\frac{w_1}{2} \pm \frac{w_2}{2}\} \subseteq U_{|w_2|}(0)\,,$$

$$\mathbb{C} \setminus M \subseteq \bigcup_{w \in L\setminus\{0\}} U_{|w_2|}(w)\,.$$

Sei nun angenommen, dass $G \setminus L \neq \emptyset$. Dann können wir wieder $w_0 \in G \setminus L$ wählen, sodaß $|w_0| = \min\{|w| : w \in G \setminus L\}$. Nach der Minimialitätseigenschaft von w_2, ist sicher $|w_0| \geq |w_2|$. Also ist $w_0 \notin M$. Also existiert $w \in L \setminus \{0\}$ mit $|w_0 - w| < |w_2| \leq |w_0|$. Da $w_0 - w \in G \setminus L$ ist, ist das ein Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von w_0.

❑

2.1.3 Definition. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Zahlen. Dann heißt $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ ein *Gitter*. Die Punkte aus L bezeichnet man auch als *Gitterpunkte*, die konvexe Hülle $\mathfrak{g}_L := \mathrm{co}\{0, w_1, w_2, w_1 + w_2\}$ als *Grundmasche zum Gitter L*.



Jede Funktion $f \in K(L)$ heißt *elliptische Funktion zum Gitter L*, manchmal spricht man auch von *doppeltperiodischen Funktionen*.

Ist $G = \mathbb{Z}w$, so kennen wir einige Funktionen in $K(G)$. Zum Beispiel $f(z) = e^{2\pi i w^{-1} z}$, oder $f(z) = \sin(2\pi w^{-1} z)$. Wir wollen nun auch zu jedem Gitter L elliptische Funktionen konstruieren. Dazu benötigen wir ein Lemma.

2.1.4 Lemma. *Es gilt:*

(*i*) *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe*

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(n,m)\neq(0,0)}} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$.

(*ii*) *Sei L ein Gitter und sei $\sigma > 2$. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{w\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{|w|^\sigma}$$

konvergent.

(*iii*) *Sei L ein Gitter und sei $M \subseteq L \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{w \in M} \Big(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \Big) \tag{2.1}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus M$.

Beweis. Um (*i*) einzusehen, bemerke man, dass die betrachtete Reihe genau dann konvergiert, wenn das Integral

$$I = \int\limits_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

konvergiert. Substituiert man Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, so erhält man

$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{r\, drd\varphi}{r^{2\alpha}} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}\,.$$

Sei $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Für den Beweis von (*ii*) genügt es zu zeigen, daß es eine Konstante $\delta > 0$ gibt mit

$$|nw_1 + mw_2|^2 \geq \delta(n^2+m^2),\ \ n, m \in \mathbb{Z}\,.$$

Betrachte die Funktion

$$h(x,y) := \frac{|xw_1 + yw_2|^2}{x^2+y^2},\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Diese ist homogen, d.h. es gilt $h(rx, ry) = h(x,y)$, $r > 0$. Sie nimmt also ihr Minimum auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ an. Da w_1 und w_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, ist $h(x,y)$ dort jedoch $\neq 0$.

Wir kommen zum Beweis von (*iii*). Für $|w| \geq 2|z|$ gilt

$$\Big|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\Big| = \Big|\frac{w^2-(z-w)^2}{w^2(z-w)^2}\Big| = \Big|\frac{-z^2+2zw}{w^2(z-w)^2}\Big| =$$

$$= \Big|\frac{-\frac{z}{w}+2}{(\frac{z}{w}-1)^2}\Big| \cdot \Big|\frac{z}{w^3}\Big| \leq 5|z|\frac{1}{|w|^3}\,.$$

Sei nun $r > 0$ gegeben. Ist $|z| \leq r$, so haben wir

$$\Big|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\Big| \leq 5r\frac{1}{|w|^3},\ \ |w| \geq 2r\,.$$

Also ist die Reihe $\sum_{\substack{w \in M \\ |w| \geq 2r}} \Big(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\Big)$ absolut und gleichmäßig konvergent auf der Kreisscheibe $\overline{U_r(0)}$. Da es nur endlich viele Gitterpunkte $w \in M$ mit $|w| \leq 2r$ gibt, konvergiert die Reihe (2.1) absolut und gleichmäßig auf $\overline{U_r(0)} \setminus M$.

❑

2.1.5 Satz. *Sei $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ ein Gitter. Die Funktion*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \Big(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \Big) \tag{2.2}$$

ist elliptisch zum Gitter L. Sie heißt die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter L.

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist gerade. Sie hat Pole 2-ter Ordnung in den Gitterpunkten und ist sonst analytisch. Ihre Ableitung $\wp'$ ist gegeben als

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^3} \,. \tag{2.3}$$

Sie ist ungerade, hat Pole 3-ter Ordnung in den Gitterpunkten und ist sonst analytisch.

Beweis. Wegen Lemma 2.1.4, (iii), ist die Reihe in (2.2) lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus (L \setminus \{0\})$, und stellt daher eine in $\mathbb{C} \setminus (L \setminus \{0\})$ analytische Funktion dar. Also ist $\wp$ in $\mathbb{C} \setminus L$ analytisch, und hat an der Stelle 0 einen 2-fachen Pol. Sei $w_0 \in L \setminus \{0\}$. Summiert man in (2.2) nur über $w \in L \setminus \{0, w_0\}$, so ist die entstehende Reihe lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus (L \setminus \{0, w_0\})$ und daher dort analytisch. Wir sehen, dass $\wp$ auch an der Stelle w_0 einen 2-fachen Pol hat.

Die Ableitung $\wp'$ ist also analytisch in $\mathbb{C} \setminus L$ und hat an den Gitterpunkten Pole 3-ter Ordnung hat. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz und der Analytizität der Summanden in (2.2), können wir $\wp'$ durch gliedweises differentiieren der Reihe (2.2) berechnen, wobei die entstehende Reihe wieder lokal gleichmäßig konvergent ist. Damit ergibt sich unmittelbar die Formel (2.3).

Die Abbildung $w \mapsto -w$ ist eine Bijektion von $L \setminus \{0\}$ auf sich. Wir sehen, dass $\wp(-z) = \wp(z)$ und $\wp'(-z) = -\wp'(z)$. Weiters ist für jedes $w_0 \in L$ die Abbildung $w \mapsto w - w_0$ eine Bijektion von L auf sich. Wir schließen dass die Funktion $\wp'(z)$ elliptisch ist.

Wir müssen noch zeigen, dass $\wp$ elliptisch ist. Es gilt $(\wp(z + w_1) - \wp(z))' = \wp'(z + w_1) - \wp'(z) = 0$, also ist $\wp(z + w_1) - \wp(z) = c$ konstant für $z \in \mathbb{C} \setminus L$. Speziell für $z := -\frac{1}{2}w_1 \notin L$ ergibt sich

$$c = \wp(-\frac{1}{2}w_1 + w_1) - \wp(-\frac{1}{2}w_1) = \wp(\frac{1}{2}w_1) - \wp(-\frac{1}{2}w_1) = 0 \,.$$

Die gleiche Argumentation zeigt, dass $\wp(z + w_2) = \wp(z)$ gilt.

❑

Grundlegend für die Untersuchung elliptischer Funktionen sind die drei Liouvilleschen Sätze. Diese sind eigentlich ganz einfache Folgerungen aus der Periodizität.

2.1.6 Satz. *Sei L ein Gitter und f elliptisch zu L. Dann gilt:*

(i) 1-ter Liouvillescher Satz: *Hat f keine Polstellen, so ist f konstant.*

(ii) 2-ter Liouvillescher Satz: *Es hat f nur endlich viele Pole modulo L und die Summe aller Residuen an Polstellen eines vollständigen Representantensystems modulo L ist gleich Null.*

(*iii*) 3-ter Liouvillescher Satz: *Sei $b \in \mathbb{C}_\infty$. Die Anzahl der b-Stellen von f modulo L gezählt gemäß ihrer Vielfachheit hängt nicht von b ab.*

Beweis. Hat f keine Pole, so ist also $f \in H(\mathbb{C})$. Insbesondere ist f eine stetige Funktion der abgeschlossenen Grundmasche $\mathfrak{g}_L$ nach $\mathbb{C}$. Daher ist f auf $\mathfrak{g}_L$ beschränkt, und wegen der Periodizität daher auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant. Dies beweist den 1-ten Liouvilleschen Satz.

Betrachte wieder die abgeschlossene Grundmasche $\mathfrak{g}_L$. Da $f \in M(\mathbb{C})$ ist, hat die Menge der Polstellen von f keinen endlichen Häufungspunkt. Insbesondere können in $\mathfrak{g}_L$ nur endlich viele Pole liegen, also hat f auch nur endlich viele Pole modulo L. Da in $\bigcup_{\lambda,\mu=-1,0,1}[(\lambda w_1 + \mu w_2) + \mathfrak{g}_L]$ nur endlich viele Polstellen liegen, können wir $a \in \mathbb{C}$ wählen, sodass am Rand von $a + \mathfrak{g}_L$ keine Pole liegen. Nach dem Residuensatz gilt

$$\sum_{\substack{w \text{ Pol} \\ w \in a+\mathfrak{g}_L}} \operatorname{Res}(f, w) = \int\limits_{\partial(a+\mathfrak{g}_L)} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Die Summe auf der linken Seite erstreckt sich genau über ein vollständiges Representantensystem der Pole von f modulo L. Das Integral auf der rechten Seite ist gleich 0, denn die Integrale über gegenüberliegende Seiten von $\partial(a + \mathfrak{g}_L)$ heben sich auf da f periodisch ist und sie in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Das ist der 2-ten Liouvilleschen Satz.

Wir kommen schliesslich zum 3-ten Liouvilleschen Satz. Mit f ist auch $\frac{f'(z)}{f(z)-b}$ elliptisch zum Gitter L. Bezeichne mit N_b, $b \in \mathbb{C}_\infty$, die Anzahl der b-Stellen von f modulo L gezählt gemäß ihrer Vielfachheit. Sei $a \in \mathbb{C}$ wieder so gewählt, dass auf $\partial(a + \mathfrak{g}_L)$ keine Pole liegen. Nach dem 2-ten Liouvilleschen Satz und dem Satz von logarithmischen Residuum folgt

$$N_b - N_\infty = \int\limits_{\partial(a+\mathfrak{g}_L)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - b}\, d\zeta = 0,\ b \in \mathbb{C}\,.$$

❑

Ist $f \in K(L)$, so definieren wir eine Zahl $\operatorname{Ord} f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die *Ordnung von f*, als die Anzahl N_b der b-Stellen von f modulo L gezählt gemäß ihrer Vielfachheit. Nach dem 3-ten Liouvilleschen Satz ist $\operatorname{Ord} f$ wohldefiniert, nach dem 1-ten ist $\operatorname{Ord} f \neq 0$ und nach dem 2-ten ist $\operatorname{Ord} f \neq 1$.

2.1.7 Beispiel. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion hat Ordnung 2, ihre Ableitung $\wp'$ hat Ordnung 3.

2.2 Der Körper $K(L)$

Es stellt sich heraus, dass die algebraische Struktur des Körpers $K(L)$ recht einfach ist. Tatsächlich kann man alle elliptischen Funktionen aus der Weierstraßschen $\wp$-Funktion und ihrer Ableitung erzeugen.

2.2.1 Satz. *Sei L ein Gitter. Dann gilt $K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\wp'$.*

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen als erstes, dass

$$\big\{f \in K(L) :\ f \text{ gerade, analytisch auf } \mathbb{C} \setminus L\big\} = \mathbb{C}[\wp]\,.$$

Dabei ist die Inklusion „$\supseteq$“ klar. Sei also eine gerade Funktion $f \in K(L)$ die ausserhalb von L analytisch ist gegeben. Ihre Laurententwicklung um Null ist, da sie gerade ist, von der Form

$$f(z) = \sum_{k=n(f)}^{\infty} a_{2k} z^{2k} .$$

Wir verwenden Induktion nach $n(f)$. Ist $n(f) \geq 0$, so ist f nach dem 1-ten Liouvillschen Satz konstant, und daher $f \in \mathbb{C}[\wp]$. Sei vorausgesetzt, dass für alle g mit $n(g) > n(f)$ schon gezeigt ist, dass $g \in \mathbb{C}[\wp]$. Die Funktion $g(z) := f(z) - a_{2n(f)} \wp^{-n(f)}$ ist gerade, elliptisch und analytisch außerhalb von L. Sie hat bei Null einen Pol der Ordnung $2(n(f) - 1)$. Also ist $g \in \mathbb{C}[\wp]$, und damit auch $f \in \mathbb{C}[\wp]$.
Schritt 2: Als nächstes zeigen wir dass

$$\big\{f \in K(L) : \; f \text{ gerade}\big\} = \mathbb{C}(\wp) .$$

Wieder ist die Inklusion „$\supseteq$“ trivial. Sei also $f \in K(L)$ gerade und sei $a_1, \dots, a_m$ ein vollständiges Representantensystem der Pole die nicht in L liegen, wobei jede Stelle so oft aufgezählt wird wie ihre Vielfachheit angibt. Dann ist

$$g(z) := f(z) \cdot \prod_{i=1}^{m} \big(\wp(z) - \wp(a_i)\big)$$

eine gerade elliptische Funktion, die Pole nur in L hat. Nach dem ersten Schritt ist $g \in \mathbb{C}[\wp]$, und wir schließen dass $f \in \mathbb{C}(\wp)$.
Schritt 3: Wir zeigen dass

$$\big\{f \in K(L) : \; f \text{ ungerade}\big\} = \mathbb{C}(\wp)\wp' .$$

Ist $f \in K(L)$ ungerade, so ist $g := \frac{f}{\wp'}$ gerade. Nach Schritt 2 ist $g \in \mathbb{C}(\wp)$ und es folgt, dass $f \in \mathbb{C}(\wp)\wp'$.
Schritt 4: Jede Funktion f läßt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben, nämlich als $f = f_g + f_u$ mit

$$f_g(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2}, \;\; f_u(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2} .$$

Ist $f \in K(L)$, so sind auch $f_g, f_u \in K(L)$. Damit folgt die Behauptung des Satzes aus Schritt 2 und Schritt 3.

❑

Ist f_0 eine nichtkonstante elliptische Funktion, so wird jeder Wert von f_0 angenommen. Also ist der Einsetz-Homomorphismus $r \mapsto r(f_0)$ welcher $\mathbb{C}(X)$ nach $K(L)$ abbildet injektiv. Das heißt wir können $\mathbb{C}(\wp)$ mit $\mathbb{C}(X)$ identifizieren. Also ist $K(L)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}$ mit Transzendenzgrad 1. Weiters ist $K(L)$ eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$, tatsächlich hat sie Grad 2.

Das im Beweis von Satz 2.2.1 verwendete Verfahren ist konstruktiv. Als Beispiel zeigen wir:

2.2.2 Beispiel (Differentialgleichung für $\wp(z)$). Es gilt

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

wobei

$$g_2 := 60 \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-4},\ g_3 := 140 \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-6}\,.$$

Die Funktion $\wp'(z)^2$ ist gerade und hat Pole nur in L, muß sich also als Polynom in $\wp(z)$ schreiben lassen. Um dieses Polynom zu bestimmen, machen wir Koeffizientenvergleich bei den jeweiligen Hauptteilen der Laurententwicklungen an der Stelle 0. Dazu müssen wir die Laurententwicklung von $\wp$ kennen: Es ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2(n+1)}z^{2n}\,, \tag{2.4}$$

mit

$$G_k := \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-k},\ k \geq 3\,.$$

Um (2.4) einzusehen, bemerken wir zunächst dass, da $\wp(z)$ gerade ist, die Laurentreihe von $\wp$ die Gestalt $\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}z^{2n}$ hat. Aus der Definition von $\wp(z)$ folgt $a_0 = 0$. Für $k \geq 1$ gilt

$$(\wp(z) - \frac{1}{z^2})^{(k)}(z) = (-1)^k(k+1)! \sum_{w \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-w)^{k+2}}\,,$$

also ist

$$a_{2n} = \frac{(\wp(z) - \frac{1}{z^2})^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (2n+1) \sum_{w \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^{2(n+1)}}$$

Nun können wir Koeffizientenvergleich bei den Hauptteilen machen. Es ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots\,,$$

also folgt

$$\begin{aligned}
\wp'(z) &= -2\frac{1}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots\,,\\
\wp(z)^2 &= \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \dots\,,\\
\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + \dots\,,\\
\wp'(z)^2 &= 4\frac{1}{z^6} - 24G_4\frac{1}{z^2} - 80G_6 + \dots\,.
\end{aligned}$$

Daher ist $g(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60\wp(z) + 140G_6$ eine elliptische Funktion die keine Pole hat und an der Stelle 0 gleich Null. Nach den Liouvilleschen Sätzen ist $g = 0$.

Die Reihen G_n heißen auch *Eisenstein-Reihen zum Gitter L*. Offensichtlich ist $G_{2n+1} = 0$. Die Information der Zahlenfolge $(G_n)_{n\geq 3}$ der Eisenstein-Reihen zu L entspricht also genau der Kenntnis der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zum Gitter L, und diese wiederum bestimmt $K(L)$, also alle elliptischen Funktionen zu L.

Da die $\wp$-Funktion eine so prominente Rolle spielt, und wir sie späterhin noch brauchen werden, wollen wir ihr Abbildungsverhalten noch etwas genauer studieren.

Sei f eine meromorphe Funktion. Ein Punkt $b \in \mathbb{C}_\infty$ heißt *Verzweigungspunkt* von f, falls es im Urbild $f^{-1}(\{b\})$ eine mehrfache b-Stelle gibt. Ist $b \in \mathbb{C}$, so bedeutet dies gerade dass es ein Urbild a von b mit $f'(a) = 0$ gibt.

2.2.3 Lemma. *Es gilt:*

(*i*) *Die Funktion $\wp'(z)$ hat modulo L genau drei Nullstellen, nämlich $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$. Diese sind einfach.*

(*ii*) *Die Funktion $\wp(z)$ hat modulo L genau vier Verzweigungspunkte, nämlich*

$$e_0 := \infty,\ e_1 = \wp(\frac{w_1}{2}),\ e_2 = \wp(\frac{w_2}{2}),\ e_3 = \wp(\frac{w_1 + w_2}{2})\,.$$

(*iii*) *Sei $w \in \mathbb{C} \setminus L$. Dann gilt $\wp(z) = \wp(w)$ genau dann, wenn $z \equiv w \mod L$ oder $z \equiv -w \mod L$.*

Beweis. Ist a einer der angegebenen Werte, so ist $2a \in L$ aber $a \notin L$. Es folgt $\wp'(a) = \wp'(a - 2a) = \wp'(-a) = -\wp'(a)$, also $\wp'(a) = 0$. Da $\wp'$ Ordnung 3 hat, sind das alle Nullstellen und sie sind einfach.

Die Aussage (*ii*) folgt nun unmittelbar aus (*i*), da $\wp$ einen zweifachen Pol in den Gitterpunkten hat. Um (*iii*) einzusehen sei w gegeben. Dann ist $g(z) := \wp(z) - \wp(w)$ eine elliptische Funktion mit Ordnung 2. Sie hat also modulo L (inklusive Vielfachheit) genau zwei Nullstellen. Offensichtlich ist $g(w) = g(-w) = 0$.

❑

2.3 Das Abel'sche Theorem

Wegen dem Produktsatz von Weierstraß existiert zu je zwei vorgegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne endlichen Häufungspunkt mit $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ eine in ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion die genau die Nullstellen a_n und Polstellen b_n hat. Verlangt man zusätzlich, dass $f \in K(L)$ für ein Gitter L, so muß klarerweise a_n und b_n L-periodisch sein. Weiters muß die Anzahl der Elemente eines vollständigen Representantensystems modulo L von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleich jener eines solchen von $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein, nämlich gleich $\operatorname{Ord} f$. Diese offensichtlichen notwendigen Bedingungen sind aber noch nicht hinreichend für die Existenz von f.

2.3.1 Satz (Abel)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, so daß $a_j \not\equiv b_k \mod L$, $j, k = 1, \ldots, n$. Dann existiert eine elliptische Funktion die modulo L genau (inklusive Vielfachheit) die Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ und die Polstellen $b_1, \ldots, b_n$ hat, genau dann wenn*

$$a_1 + \ldots + a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n \mod L\,.$$

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, noch einige Vorbereitungen.

2.3.2 Lemma. *Sei $L = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ ein Gitter, sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und betrachte das Gitter $\hat{L} := (aw_1)\mathbb{Z} + (aw_2)\mathbb{Z}$. Dann ist die Abbildung $\varphi_a : f(z) \mapsto f(a^{-1}z)$ eine Bijektion von $K(L)$ auf $K(\hat{L})$.*

Beweis. Sei $f \in K(L)$ und $w = n(aw_1) + m(aw_2)$. Dann gilt

$$\varphi_a(z+w) = f\big(a^{-1}[z+naw_1+maw_2]\big) = f\big(a^{-1}z+nw_1+mw_2\big) = f(a^{-1}z) = \varphi_a(z)\,,$$

also ist $\varphi_a \in K(\hat{L})$. Klarerweise ist $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{(ba)}$ und $\varphi_1 = \mathrm{id}$. Insbesondere ist $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a \,\mathrm{id}$, also φ_a eine Bijektion von $K(L)$ auf $K(\hat{L})$.

❑

Dieses Lemma zeigt dass man bei der Untersuchung von $K(L)$ nicht alle Gitter zu betrachten braucht. Definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge aller Gitter durch

$$L_1 \sim L_2 :\Leftrightarrow\ \exists\, a \in \mathbb{C}\setminus\{0\} :\ L_2 = aL_1\,,$$

so kann man sich stets auf die Betrachtung der Gitter eines vollständigen Representantensystems modulo $\sim$ zurückziehen (oder auf die einer Menge von Gittern die ein solches umfasst). Zum Beispiel gibt es zu jedem Gitter L eine (nicht eindeutig bestimmte) Zahl τ mit $\operatorname{Im}\tau > 0$, sodass $L \sim (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. Um dies einzusehen schreibe $L = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$, und setze $a := \pm(w_1)^{-1}$, wobei das Vorzeichen so gewählt ist, dass $\operatorname{Im}(\pm w_2 w_1^{-1}) > 0$. Beachte hier, dass w_1 und w_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

2.3.3 Lemma. *Sei $L = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ ein Gitter, dann existiert eine in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Ist $w \in L$, so gilt $\sigma(z + w) = e^{a(w)z+b(w)}\sigma(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit gewissen, von w aber nicht von z abhängigen, komplexen Zahlen $a(w), b(w)$.

(ii) Die Funktion σ hat nur einfache Nullstellen. Diese sind genau die Punkte $\frac{w_1+w_2}{2} + L$.

Beweis. Genauso wie in den obigen Ausführungen sieht man, dass es genügt die Existenz von σ für Gitter der Gestalt $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, zu beweisen. Sei also im folgenden stets vorausgesetzt, dass L von dieser Gestalt ist.

Wir betrachten die sogenannte *Thetareihe für* τ:

$$\vartheta(\tau, z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau+2nz)}\,. \tag{2.5}$$

Als erstes zeigen wir, daß sie in ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Schreibe $\tau = u + iv$, $v > 0$, und $z = x + iy$ dann ist

$$\left|e^{i\pi(n^2\tau+2nz)}\right| = e^{-\pi(n^2v+2ny)}\,.$$

Variert z in einem Kompaktum K, so ist y auf K nach unten beschränkt, und da $v > 0$ ist, haben wir

$$n^2v + 2ny \geq \frac{1}{2}n^2v,\ n \geq N\,,$$

mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$. Es folgt $|e^{i\pi(n^2v+2nz)}| \leq e^{-\frac{\pi}{2}vn^2}$ für alle $n \geq N$. Da $v > 0$ ist $e^{-\frac{\pi}{2}v} < 1$. Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{\pi}{2}v}\right)^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{\pi}{2}v}\right)^{n^2}$$

ist also, als Teilreihe einer konvergenten geometrischen Reihe, konvergent. Wir sehen, dass die Reihe in (2.5) auf K gleichmäßig konvergiert.

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten von $\vartheta(\tau, z)$. Offensichtlich gilt

$$\vartheta(\tau, z) = \vartheta(\tau, z+1)\,. \tag{2.6}$$

Weiters ist

$$\vartheta(\tau, z+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau+2n\tau+2nz)} = e^{-i\pi(\tau+2z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi((n+1)^2\tau+2(n+1)z)}$$

Da mit n auch $n+1$ alle ganzen Zahlen durchläuft folgt

$$\vartheta(\tau, z+\tau) = e^{-i\pi(\tau+2z)}\vartheta(\tau, z)\,. \tag{2.7}$$

Durch mehrfache Anwendung der Formeln (2.6) und (2.7) erhalten wir für beliebiges $w \in L$ die Transformationsformel (i).

Sei $a \in \mathbb{C}$ sodass auf dem Rand der verschobenen Grundmasche $a + \mathfrak{g}_L$ keine Nullstellen von $\vartheta(\tau, .)$ liegen. Da $\vartheta(\tau, .)$ die Periode 1 hat, heben sich im Integral

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial(a+\mathfrak{g}_L)} \frac{\vartheta'(\tau,\zeta)}{\vartheta(\tau,\zeta)}\, d\zeta$$

die Beiträge der rechten und linken Kante auf. Wegen (2.7) gilt

$$\theta'(\tau, z+\tau) = -2\pi i e^{-i\pi(\tau+2z)}\vartheta(\tau, z) + e^{-i\pi(\tau+2z)}\vartheta'(\tau, z)\,,$$

und daher

$$\frac{\theta'(\tau, z+\tau)}{\vartheta(\tau, z+\tau)} = -2\pi i + \frac{\vartheta'(\tau,\zeta)}{\vartheta(\tau,\zeta)}\,.$$

Also haben wir

$$2\pi i I = \int_a^{a+1} \frac{\vartheta'(\tau, a+t)}{\vartheta(\tau, a+t)}\, dt + \int_{a+1}^{a} \frac{\vartheta'(\tau, a+\tau+t)}{\vartheta(\tau, a+\tau+t)}\, dt = 2\pi i\,.$$

Nach dem Satz von logarithmischen Residuum hat $\vartheta(\tau, .)$ daher genau eine Nullstelle z_0 in $a + \mathfrak{g}_L$ und diese ist einfach. Wegen der Transformationsregel (i) ist die Menge aller Nullstellen von $\vartheta(\tau, .)$ gleich $z_0 + L$, und alle diese Nullstellen sind einfach.

Um eine Nullstelle z_0 zu bestimmen, bemerken wir, dass sich für $z := \frac{1+\tau}{2}$ in der Reihe (2.5) die Summanden zu $n \geq 0$ und $-n-1$ gegenseitig aufheben:

$$\Big[(-n-1)^2\tau + 2(-n-1)\frac{1+\tau}{2}\Big] = \Big[n^2\tau + 2n\frac{1+\tau}{2}\Big] - (2n+1)\,.$$

❏

Beweis. (Satz 2.3.1) Seien zuerst $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gegeben mit $a_1 + \ldots + a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n \mod L$. Indem man zum Beispiel a_1 durch einen modulo L kongruenten Punkt ersetzt, können wir annehmen dass sogar $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$.

Sei σ die Funktion aus Lemma 2.3.3, z_0 die Nullstelle von σ in der Grundmasche, und definiere

$$f(z) := \frac{\prod_{j=1}^n \sigma(z_0 + z - a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z_0 + z - b_j)} .$$

Offenbar hat f die gewünschten Null- und Polstellen. Weiters ist für $w \in L$ wegen der Transformationsformel aus Lemma 2.3.3, (i),

$$f(z+w) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{a(w)(z_0+z-a_j)+b(w)}}{\prod_{j=1}^n e^{a(w)(z_0+z-b_j)+b(w)}} f(z) = e^{a(w)(\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{j=1}^n a_j)} f(z) = f(z) .$$

Wir sehen, dass $f \in K(L)$.

Sei nun umgekehrt $f \in K(L)$, und seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$, $n := \operatorname{Ord} f$, vollständige Representantensysteme modulo L der Nullstellen bzw. Polstellen von f aufgelistet gemäß ihrer Vielfachheit.

Betrachte eine verschobene Grundmasche $a + \mathfrak{g}_L$ die 0 nicht enthält und auf deren Rand keine Null- oder Polstellen von f liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_j, b_j \in a + \mathfrak{g}_L$. Nach dem Residuensatz (expliziter: nach dem verallgemeinerten Satz vom logarithmischen Residuum) gilt

$$\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial(a+\mathfrak{g}_L)} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta . \tag{2.8}$$

Setzt man $g(z) := z\frac{f'(z)}{f(z)}$, so ist für $w \in L$

$$g(z+w) - g(z) = w\frac{f'(z)}{f(z)} .$$

Das obige Integral (2.8) berechnet sich durch zusammenfassen der Beiträge gegenüberliegender Seiten daher als

$$-\frac{w_2}{2\pi i} \int_{[a,a+w_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \frac{w_1}{2\pi i} \int_{[a,a+w_2]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta .$$

Die Funktion f hat auf der Strecke $[a, a+w_1]$, und daher auch auf einer gewissen einfach zusammenhängenden offenen Umgebung dieser Strecke, keine Null- oder Polstellen. Sei h ein Zweig des Logarithmus von f auf dieser Umgebung. Dann gilt also $f(z) = e^{h(z)}$ sowie $h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Es folgt

$$\int_{[a,a+w_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = h(a+w_1) - h(a) .$$

Nun ist $e^{h(a+w_1)} = f(a + w_1) = f(a) = e^{h(a)}$, also haben wir $h(a + w_1) - h(a) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Das zweite Integral behandelt man genauso. Es folgt, dass $\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j \in L$.

❑

Wir wollen noch elliptische Funktionen zu vorgegeben Hauptteilen konstruieren.

2.3.4 Satz. *Seien $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$ paarweise inkongruent modulo L, $l_1,\dots,l_n \in \mathbb{N}$, und $a_{\nu,j} \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,n$, $\nu = 1,\dots,l_j$, komplexe Zahlen mit $a_{j,l_j} \neq 0$, $j = 1,\dots,n$. Dann existiert eine elliptische Funktion die modulo L genau die Polstellen $b_1,\dots,b_n$ hat und dort die Hauptteile*

$$\sum_{\nu=1}^{l_j} a_{\nu,j} \frac{1}{(z-b_j)^\nu}$$

hat, genau dann wenn $\sum_{j=1}^n a_{1,j} = 0$ ist.

Beweis. Gibt es eine Funktion $f \in K(L)$ mit den genannten Eigenschaften, so ist nach dem 2-ten Liouvillschen Satz $\sum_{j=1}^n a_{1,j} = 0$.

Umgekehrt seien $b_1,\dots,b_n$ und $a_{\nu,j}$ gegeben. Durch Linearkombinationen von Funktionen der Gestalt $\wp^{(k)}(z+a)$ können wir eine Funktion $F \in K(L)$ erzeugen, die genau die Polstellen $b_1,\dots,b_n$ hat, und dort die Hauptteile

$$\sum_{\nu=2}^{l_j} a_{\nu,j} \frac{1}{(z-b_j)^\nu} .$$

Man beachte hier, dass das Residuum der $\wp$-Funktion an ihrer Polstelle, und damit auch dass jeder ihrer Ableitungen, gleich Null ist.

Sei σ die Funktion aus Lemma 2.3.3, z_0 ihre Nullstelle in der Grundmasche, und definiere

$$g(z) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} .$$

Diese Funktion hat modulo L genau eine Polstelle, und hat dort einen einfachen Pol mit Residuum 1. Wegen der Transformationsformel aus Lemma 2.3.3, (i), gilt für jedes $w \in L$

$$\sigma'(z+w) = a(w)e^{a(w)z+b(w)}\sigma(z) + e^{a(w)z+b(w)}\sigma'(z) ,$$

also ist $g(z+w) = a(w) + g(z)$. Wegen $\sum_{j=1}^n a_{1,j} = 0$ ist die Funktion

$$G(z) := \sum_{j=1}^n a_{1,j} g(z-b_j)$$

also elliptisch zum Gitter L. Weiters hat sie genau die Polstellen $b_1,\dots,b_n$ und hat dort einfache Pole mit Residuum $a_{1,j}$. Die Funktion $F+G$ hat nun die im Lemma verlangten Eigenschaften.

❑

2.4 Das Additionstheorem der $\wp$-Funktion

2.4.1 Satz. *Sei L ein Gitter. Es gilt:*

(i) Geometrische Form des Additionstheorems*: Sei $u, v, u \pm v \notin L$, dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix} = 0$$

(*ii*) Analytische Form des Additionstheorems*: Sei $u, v, u \pm v \notin L$, dann gilt*

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\Big)^2 - \wp(u) - \wp(v)\,.$$

(*iii*) Verdoppelungsformel*: Sei $2u \notin L$, dann gilt*

$$\wp(2u) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\Big)^2 - 2\wp(u) = \frac{(\wp(u)^2 + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3\wp(u)}{4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3}$$

Beweis. Wegen $u, v, u \pm v \notin L$ folgt aus Lemma 2.2.3, (*iii*), dass $\wp(u) \neq \wp(v)$. Die Funktion

$$f(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix}$$

ist elliptisch zum Gitter L und hat die Gestalt $f(z) = A + B\wp(z) + C\wp'(z)$ mit gewissen Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$. Daher ist f analytisch in $\mathbb{C} \setminus L$ und hat and den Gitterpunkten Pole der Ordnung 3. Es folgt, dass $\operatorname{Ord} f = 3$. Damit hat f auch genau drei Nullstellen (inklusive Vielfachheit gezählt). Offensichtlich ist $f(u) = f(v) = 0$, nach dem Abelschen Theorem muß die dritte Nullstelle bei $-(u+v)$ liegen. Das zeigt die Aussage (*i*).

Betrachte die drei Punkte

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &:= (\wp(u), \wp'(u)) \\ (x_2, y_2) &:= (\wp(v), \wp'(v)) \\ (x_3, y_3) &:= (\wp(u+v), -\wp'(u+v)) \end{aligned}$$

Wegen (*i*) liegen diese Punkte auf einer Geraden.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Werte x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden sind. Die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, sind also verschiedene Punkte einer Geraden $y = mx + b$ mit $m := \frac{\wp'(v)-\wp'(u)}{\wp(v)-\wp(u)}$ und b geeignet. Wegen der Differentialgleichung von $\wp$, vgl. Beispiel 2.2.2, sind x_1, x_2, x_3 Nullstellen des Polynomes

$$q(X) := 4X^3 - g_2X - g_3 - (mX+b)^2\,.$$

Da sie paarweise verschieden sind gilt $q(X) = 4(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$, und wir schließen dass

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m^2}{4}\,.$$

Das ist die Beziehung in (*ii*).

Untersuchen wir nun den Fall, dass x_1, x_2, x_3 nicht paarweise verschieden sind. Wegen unserer Voraussetzungen an u und v ist stets $x_1 \neq x_2$, also tritt dieser genau dann auf, wenn $x_3 = x_1$ oder $x_3 = x_2$ gilt, d.h. genau dann wenn $u \pm (u+v) \in L$ oder $v \pm (u+v) \in L$. Wegen $u, v \notin L$ ist das äquivalent zu $2u+v \in L$ oder $u+2v \in L$. Die Menge $\{(u,v) : u, v, u \pm v \notin L, 2u+v, u+2v \notin L\}$ ist dicht in $\{(u,v) : u, v, u \pm v \notin L\}$. Die linke und rechte Seite der Formel in (*ii*) hängen stetig von (u,v) ab, also gilt die gewünschte Gleichheit überall.

Wir kommen zum Beweis von (*iii*). Für das erste Gleichheitszeichen halte man u in (*ii*) fest und lasse $v \to u$ streben. Die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion besagt dass $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$. Daher gilt

$2\wp''(z) = 12\wp^2(z) - g_2$. Setzt man dies ein, so erhält man die zweite Gleichheit. ❑

Wir wollen kurz motivieren warum man von der Formel in (i) als der „geometrischen Form“ des Additionstheorems der $\wp$-Funktion spricht. Sei $\boldsymbol{P}^2\mathbb{C}$ der zweidimensionale projektive Raum über $\mathbb{C}$, und betrachte die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}/L \to \boldsymbol{P}^2\mathbb{C}$, die definiert ist vermöge der Beziehung

$$z \mapsto \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)] & , \ z \notin L \\ [0, 0, 1] & , \ z \in L \end{cases}$$

Wegen der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion und der Tatsache, dass $\wp$ jeden Wert annimmt, ist Φ eine Bijektion von $\mathbb{C}/L$ auf die ebene algebraische Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ mit der Gleichung

$$z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3 \,.$$

Mit Hilfe dieser Bijektion können wir die Struktur einer abelschen Gruppe, die $\mathbb{C}/L$ als Faktorgruppe von $\langle \mathbb{C}, + \rangle$ nach der Untergruppe L trägt, auf die algebraische Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ übertragen.

Das Additionstheorem der $\wp$-Funktion liefert nun eine geometrische Charakterisierung der so auf $\tilde{X}(g_2, g_3)$ definierten Gruppenoperation. Es besagt nämlich: Seien $a, b, c \in \tilde{X}(g_2, g_3)$ und $a + b + c = 0$. Dann liegen a, b, c auf einer Geraden. Es gilt sogar auch die Umkehrung: Eine Gerade hat mit $\tilde{X}(g_2, g_3)$ drei Schnittpunkte und diese haben Summe 0. Das heißt die Addition auf $\tilde{X}(g_2, g_3)$ ist tatsächlich in geometrische Weise bestimmt.

Schliesslich wollen wir zeigen, dass für eine beliebige elliptische Funktion f ein Analogon des Additionstheorems der $\wp$-Funktion gilt.

2.4.2 Satz. *Sei $f \in K(L)$, dann gibt es ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ mit*

$$P(f(z), f(w), f(z + w)) = 0 \,.$$

Der Beweis dieser Aussage erfolgt unter Verwendung körpertheoretischer Methoden. Wir werden die folgenden Begriffe und Aussagen verwenden:

- Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ heißen algebraisch abhängig über k, wenn es ein $P \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ gibt, sodaß $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$ gilt. Ein Element $a \in K$ heißt algebraisch über k, wenn es algebraisch abhängig über k ist. Die Körpererweiterung K heißt algebraisch über k, wenn jedes Element $a \in K$ algebraisch über k ist.

- Ist $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$, K_2 algebraisch über K_1 und K_3 algebraisch über K_2, so ist K_3 algebraisch über K_1.

- Sei $k \subseteq K$ und sei vorausgesetzt, dass n Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ existieren, sodaß K algebraisch über $k(a_1, \ldots, a_n)$ ist. Dann sind je $n + 1$ Elemente von K algebraisch abhängig über k.

Beweis. (Satz 2.4.2) Die folgenden Überlegungen spielen alle im Körper Ω der meromorphen Funktionen in 2 Variablen, der wie folgt konstruiert werden kann: Die Menge aller Funktionen $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die in beiden Variablen (gleichzeitig) stetig und jeder einzelnen Variablen analytisch sind ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement. Ω sei sein Quotientenkörper. Wir betrachten die Teilkörper

$$k := \mathbb{C} \text{ und } K := \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), \wp'(z), \wp'(w))\,.$$

Betrachte zusätzlich die Körper $K_1 := \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w))$ und $K_2 := \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), \wp'(z))$. Wegen der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion ist $\wp'(z)$ Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in $\mathbb{C}(\wp(z)) \subseteq K_1$, also ist K_2 algebraisch über K_1. Genauso ist $\wp'(w)$ Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in $\mathbb{C}(\wp(w)) \subseteq K_2$, also ist K algebraisch über K_2. Es folgt dass K algebraisch über K_1 ist. Daher sind je drei Elemente von K algebraisch abhängig über k.

Sei nun $f \in K(L)$. Nach Satz 2.2.1 ist $f(z) \in \mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z)) \subseteq K$ und genauso $f(w) \in \mathbb{C}(\wp(w), \wp'(w)) \subseteq K$. Nach dem Additionstheorem in der analytischen Form ist $\wp(z+w) \in K$, wegen dem Additionstheorem in der geometrischen Form haben wir $\wp'(z+w) \in K$. Satz 2.2.1 zeigt nun, dass auch $f(z+w) \in K$. Es folgt nach dem im vorigen Absatz Gezeigten also dass $f(z), f(w), f(z+w)$ algebraisch abhängig über $\mathbb{C}$ sind, und das ist die gewünschte Behauptung.

❑

Kapitel 3

Riemannsche Flächen

3.1 Riemannsche Flächen und analytische Funktionen

Wir werden auf 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten eine analytische Struktur definieren.

3.1.1 Definition.

(i) Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum. Ein Paar (U, ϕ) heißt eine *Karte*, wenn $U \subseteq X$ offen, $\phi(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $\phi : U \to \phi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

(ii) Zwei Karten (U_1, ϕ_-) und (U_2, ϕ_2) eines Hausdorff-Raumes X heißen *analytisch verträglich*, wenn $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder die Abbildung

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U_1 \cap U_2)} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

analytisch ist. Da $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ bijektiv ist, ist in diesem Fall auch die Inverse $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ analytisch.

(iii) Eine Familie $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ von Karten heißt ein *Atlas* auf X, wenn $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ ist und je zwei Karten aus $\mathfrak{A}$ analytisch verträglich sind.

3.1.2 Definition. Eine *Riemannsche Fläche* ist ein Paar $(X, \mathfrak{A})$ wobei X ein Hausdorffscher topologischer Raum ist und $\mathfrak{A}$ ein Atlas auf X.

3.1.3 Beispiel. Sei X eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ versehen mit der Spurtopologie. Dann ist $\mathfrak{A} := \{(X, \mathrm{id})\}$, wobei id als Abbildung von X nach $\mathbb{C}$ betrachtet wird, ein Atlas auf X.

3.1.4 Beispiel. Sei $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$, d.h., vermöge der stereographischen Projektion, die Riemannsche Zahlenkugel. Wir definieren ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

$$U_1 := \mathbb{C},\ \phi_1 := \mathrm{id}$$

$$U_2 := \mathbb{C}^* \cup \{\infty\},\ \phi_2(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & , z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & , z = \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

Dann ist $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ und

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C}^* .$$

Wir sehen, dass $\mathfrak{A} := \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ ein Atlas auf $\mathbb{C}_\infty$ ist.

3.1.5 Beispiel. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, und bezeichne $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Die Faktormenge $\mathbb{C}/L$ heißt der *komplexe Torus*. Bezeichne mit $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ die kanonische Projektion. Wir versehen $\mathbb{C}/L$ mit der finalen Topologie bezüglich π, d.h. eine Menge $W \subseteq \mathbb{C}/L$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(W) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist.

Ist $V \subseteq \mathbb{C}$, so ist $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in L}(w + V)$. Wir sehen, dass offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ unter π auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}/L$ abgebildet werden. Die Projektion π ist also nicht nur stetig, sondern auch offen.

Bezeichne mit $\mathcal{A}$ die Menge aller offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ die mit jeder Äquivalenzklasse modulo L höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Es gibt viele Mengen mit dieser Eigenschaft, zum Beispiel jede Kugel mit hinreichend kleinem Radius. Für jedes $V \in \mathcal{A}$ ist $\pi(V)$ offen und $\pi|_V$ eine bijektive stetige und offene Abbildung von V auf $\pi(V)$, also ein Homöomorphismus.

Wir definieren nun

$$\mathfrak{A} := \big\{(\pi(V), (\pi|_V)^{-1}) : V \in \mathcal{A}\big\} .$$

Offenbar ist $\bigcup_{V \in \mathcal{A}} \pi(V) = \mathbb{C}/L$. Seien $V_1, V_2 \in \mathcal{A}$, und betrachte die Abbildung

$$\psi := (\pi|_{V_2})^{-1} \circ (\pi|_{V_1}) : V_1 \cap \big((\pi|_{V_1})^{-1}\pi|_{V_2}(V_2)\big) \to \big((\pi|_{V_2})^{-1}\pi|_{V_1}(V_1)\big) \cap V_2 .$$

Dann gilt stets $\psi(z) \equiv z \mod L$. Da L diskret ist und ψ stetig, folgt dass ψ auf jeder Komponente konstant ist, und daher analytisch. Also ist $\mathfrak{A}$ ein Atlas.

Riemannsche Flächen haben eine wichtige Zusammenhangseigenschaft. Ein topologischer Raum heißt *lokal bogenweise zusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus bogenweise zusammenhängenden Mengen hat.

3.1.6 Lemma. *Sei $(X, \mathfrak{A})$ eine Riemannsche Fläche. Dann ist X lokal bogenweise zusammenhängend. Damit ist jede Zusammenhangskomponente von X offen und bogenweise zusammenhängend.*

Beweis. Da jeder Punkt eine Umgebung besitzt die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, ist X lokal bogenweise zusammenhängend.

Sei $x \in X$ und M die Bogenkomponente von X die x enthält, d.h. die Menge aller $y \in X$ die mit x durch eine stetige Kurve verbunden werden können. Wegen lokal bogenweise zusammenhängend ist M offen. Also sind alle Bogenkomponenten offen, und daher auch abgeschlossen. Da jede Bogenkomponente zusammenhängend ist, folgt, dass die Zusammenhangskomponenten gleich den Bogenkomponenten sind.

❑

Mit Riemannschen Flächen können diverse Konstruktionen ausgeführt werden. Wir erwähnen an dieser Stelle nur eine ganz einfache.

3.1.7 Lemma. *Sei $(X, \mathfrak{A})$ eine Riemannsche Fläche, und sei $Y \subseteq X$ offen. Versieht man Y mit der Spurtopologie von X und definert man*

$$\mathfrak{B} := \big\{(U \cap Y, \phi|_{U \cap Y}) : (U, \phi) \text{ Karte von } X\big\}$$

so ist $(Y, \mathfrak{B})$ eine Riemannsche Fläche.

Beweis. Klar.

❑

3.1.8 Definition. Seien $(X_1, \mathfrak{A}_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ Riemannsche Flächen und $f : X_1 \to X_2$. Dann heißt f *analytisch*, wenn f stetig ist und für je zwei Karten $(U_1, \phi_1) \in \mathfrak{A}_1$, $(U_2, \phi_2) \in \mathfrak{A}_2$ mit $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ die Abbildung

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \to \mathbb{C}$$

analytisch ist. Die Menge aller analytischen Abbildungen von $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(X_2, \mathfrak{A}_2)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hol}((X_1, \mathfrak{A}_1), (X_2, \mathfrak{A}_2))$.

Wir werden im folgenden oft von einer Riemannschen Fläche X sprechen und dabei den Atlas von X nicht explizit anführen. Man beachte, dass dies nur dazu dient die Notation abzukürzen, tatsächlich hängen alle eingeführten Begriffe von dem gegebenen Atlas ab.

3.1.9 Lemma. *Seien X_1, X_2 Riemannsche Flächen und $f : X_1 \to X_2$. Dann ist $f \in \mathrm{Hol}(X_1, X_2)$ genau dann, wenn gilt: Für jeden Punkt $x \in X_1$ existieren Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ von X_1 bzw. X_2 und eine offenen Umgebung $U \subseteq X_1$ von x, sodaß $U \subseteq U_1$, $f(U) \subseteq U_2$, und $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch ist.*

Beweis. Sei vorausgesetzt, dass f der Bedingung des Lemmas genügt. Sei $x \in X_1$ und wähle $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), U$ wie angegeben. Dann ist $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch und daher stetig. Da ϕ_2 und ϕ_1^{-1} Homöomorphismen sind und $\phi_1(U)$ offen, folgt dass f an der Stelle x stetig ist.

Seien nun $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)$ Karten von X_1 bzw. X_2 mit $V_1 \cap f^{-1}(V_2) \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von f folgt dass $V_1 \cap f^{-1}(V_2)$ offen ist. Sei $z \in \psi_1(V_1 \cap f^{-1}(V_2))$, und wähle $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), U$ wie angegeben für den Punkt $x := \psi_1^{-1}(z)$. Dann ist

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \psi_1^{-1})$$

wobei auf einen geeigneten Definitionsbereich eingeschränkt wird: Setze $D := \psi_1(U \cap V_1 \cap f^{-1}(V_2))$, dann ist D offen, nichtleer, und alle Zusammensetzungen sind wohldefiniert

$$D \overset{\phi_1 \circ \psi_1^{-1}}{\to} \psi_1(U \cap V_1 \cap f^{-1}(V_2)) \overset{\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}}{\to} \phi_2(U_2 \cap V_2) \overset{\psi_2 \circ \phi_2^{-1}}{\to} \mathbb{C}$$

Als Zusammensetzung analytischer Funktionen ist also $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}|_D$ analytisch.

Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Hol}(X_1, X_2)$, und $x \in X_1$ gegeben, so wähle Karten (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) von X_1 bzw. X_2 mit $x \in U_1$ und $f(x) \in U_2$, und setze $U := U_1 \cap f^{-1}(U_2)$. Da f stetig ist, ist U eine offene Umgebung von x, und da f analytisch ist, ist die Funktion $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(U)}$ analytisch.

❑

3.1.10 Beispiel. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : X \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \in H(X)$, d.h. analytisch im Sinne der Funktionentheorie, genau dann wenn $f \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C})$. Das ist trivial, denn die einzigen Karten von X bzw. $\mathbb{C}$ sind $\mathrm{id} : X \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

3.1.11 Beispiel. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Menge aller komplexwertigen Funktionen f die auf einer Teilmenge $\operatorname{dom} f$ von X definiert sind steht in bijektiver Beziehung zur Menge aller Funktionen $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}_\infty$, und zwar vermöge der Identifikation $f \to \tilde{f}$ mit

$$\tilde{f} : z \mapsto \begin{cases} f(z) & , \ z \in \operatorname{dom} f \\ \infty & , \ z \notin \operatorname{dom} f \end{cases}$$

Dann gilt: Es ist $f \in M(X)$, d.h. f meromorph im Sinne der Funktionentheorie, genau dann wenn $\tilde{f} \in \operatorname{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$.

Beweis. Sei zuerst $f \in M(X)$, und bezeichne mit D die Menge der Singularitäten von f. Für $z \in X \setminus D$ wähle

$$(U_1, \phi_1) := (X, \mathrm{id}), \ (U_2, \phi_2) := (\mathbb{C}, \mathrm{id}), \ U := U_r(z)\,,$$

wobei $r > 0$ so klein ist, dass $U_r(z) \subseteq X \setminus D$. Es ist $U_r(z) = \mathrm{id}^{-1}(U_r(z))$ offen in der Riemannschen Fläche X. Weiters ist $U \subseteq U_1$, $\tilde{f}(U) \subseteq U_2$, und $\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1} = f$ analytisch. Sei nun $z \in D$. Wähle $(U_1, \phi_1) := (X, \mathrm{id})$, (U_2, ϕ_2) die Karte (3.1), und $U := U_r(z)$ wobei $r > 0$ so klein ist, dass $U \setminus \{z\} \subseteq X \setminus D$ und $f(x) \neq 0$, $x \in U_r(z)$. Eine solche Wahl von r ist möglich da $\lim_{x \to z} |f(x)| = \infty$. Dann ist

$$\big(\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1}\big)(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & , \ x \in U \setminus \{z\} \\ 0 & , \ x = z \end{cases}$$

und diese Funktion ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz analytisch. Wir sehen, dass $\tilde{f} \in \operatorname{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$.

Umgekehrt sei f so, dass $\tilde{f} \in \operatorname{Hol}(X, \mathbb{C}_\infty)$. Sei $z \in X$ gegeben. Ist $\tilde{f}(z) \neq \infty$, so wähle eine offene Umgebung U von z mit $\tilde{f}(x) \neq \infty$, $x \in U$. Dann gilt für die Karten $(U_1, \phi_1) := (X, \mathrm{id})$, $(U_2, \phi_2) := (\mathbb{C}, \mathrm{id})$ dass $U \subseteq U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ und $f = \phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1}$ analytisch. Ist $\tilde{f}(z) = \infty$, so wähle eine offene Umgebung U von z mit $\tilde{f}(x) \neq 0$, $x \in U$. Dann gilt für die Karten $(U_1, \phi_1) := (X, \mathrm{id})$ und (U_2, ϕ_2) aus (3.1), dass $U \subseteq U_1 \cap f^{-1}(U_2)$. Weiters ist für $x \in U$

$$\big(\phi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1}\big)(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & , \ \tilde{f}(x) \neq \infty \\ 0 & , \ \tilde{f}(x) = \infty \end{cases}.$$

Diese Funktion ist, wieder nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, analytisch. Also ist $f : X \setminus \tilde{f}^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ meromorph.

❑

3.1.12 Beispiel. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und $L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$. Dann steht die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}_\infty$ in bijektiver Beziehung mit den L-periodischen Funktionen $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$, nämlich vermöge der Beziehung $f \mapsto f \circ \pi$. Dann gilt: Es ist $f \in K(L)$, d.h. elliptisch zum Gitter L, genau dann wenn $\tilde{f} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}/L, \mathbb{C}_\infty)$.

Um dies einzusehen genügt es zu bemerken, dass nach Beispiel 3.1.11 für eine Karte (U, ϕ) von $\mathbb{C}/L$ die Funktion $\tilde{f} \circ \phi^{-1}$zu $\operatorname{Hol}(U, \mathbb{C}_\infty)$ gehört, genau dann wenn $\tilde{f}|_{\phi^{-1}(U)}$ meromorph ist.

Wir geben nun noch eine einfache Konstruktion Riemannscher Flächen an. Sind X, Y topologische Räume und $p : Y \to X$. Dann heißt p ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $p(V) \subseteq X$ offen ist, und $p|_V : V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist.

3.1.13 Lemma. *Sei X eine Riemannsche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum, und $p : Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Dann kann Y zu einer Riemannschen Fläche gemacht werden, und zwar derart dass p analytisch ist.*

Beweis. Ist (U, ϕ) eine Karte von X, und $V \subseteq Y$ offen mit $p(V) \subseteq U$, so ist $(V, \phi \circ p|_V)$ eine Karte auf Y. Hat man zwei in dieser Weise erhaltene Karten $(V_1, \phi_1 \circ p|_{V_1})$, $(V_2, \phi_2 \circ p|_{V_2})$, mit $V_.1 \cap V_2 \neq \emptyset$, so gilt

$$\big(\phi_2 \circ p|_{V_2}\big) \circ \big(\phi_1 \circ p|_{V_1}\big)^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \,,$$

und diese Abbildung ist analytisch.

Es ist für jede Karte (U, ϕ) von X die Abbildung $\phi \circ p$ eine Karte von Y, und daher ist $p \in \mathrm{Hol}(Y, X)$.

❑

3.2 Einige Sätze über analytische Funktionen

Viele Aussage aus der Funktionentheorie über analytische Funktionen lassen sich unmittelbar auf analytische Funktionen zwischen Riemannschen Flächen übertragen. Denn im lokalen ist eine Abbildung in $\mathrm{Hol}(X, Y)$ ja gerade eine analytische Funktion zwischen gewissen Teilmengen von $\mathbb{C}$.

3.2.1 Proposition. *Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Hol}(X, \mathbb{C})$ *ist eine $\mathbb{C}$-Algebra.*

(ii) *Sind $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hol}(Y, Z)$, so ist $g \circ f \in \mathrm{Hol}(X, Z)$.*

(iii) *Der* Identitätssatz*: Sei X zusammenhängend. Sind $f, g \in \mathrm{Hol}(X, Y)$ und hat die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ eine Häufungspunkt, so folgt $f = g$.*

(iv) *Der* Satz von der offenen Abbildung*: Sei $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$ nicht konstant. Dann ist f offen.*

(v) *Das* Maximumprinzip*: Ist $f \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C})$ nicht konstant, so besitzt $|f| : X \to [0, \infty)$ kein Maximum.*

(vi) *Ist $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$ injektiv, so ist $f^{-1} \in \mathrm{Hol}(f(X), X)$.*

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind klar.

Wir kommen zum Beweis des Identitätssatzes. Betrachte die Menge $M := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dann ist klarerweise M abgeschlossen. Sei x_0 ein Häufungspunkt von M. Zu $x_1 \in X$ existiert nach Lemma 3.1.6 eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

Ist $x \in X$, so existierten Karten $(\hat{U}_x, \phi_1)$ und (V_x, ψ_x) von X bzw. Y mit $x \in \hat{U}_x$ und $f(x) \in V_x$. Bezeichne die Zusammenhangskomponente von $\hat{U}_x \cap f^{-1}(V_x)$ welchen den Punkt x enthält mit U_x. Es gilt $\gamma([0, 1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} U_{\gamma(t)}$. Da $\gamma([0, 1])$ kompakt ist, können wir endlich viele Werte $t_1, \ldots, t_n$ finden, sodaß

$$\gamma([0, 1]) \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \,,$$

wobei $U_j := U_{\gamma(t_j)}$. OBdA können wir dabei annehmen, dass $t_1 = 0$ ist. Bezeichne entsprechend $V_j := V_{\gamma(t_j)}$, $\phi_j := \phi_{\gamma(t_j)}$ und $\psi_j := \psi_{\gamma(t_j)}$.

Die Menge $\{z \in \phi_1(U_1) : \psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} = \psi_1 \circ g \circ \phi_1^{-1}\}$ hat in $\phi_1(U_1)$ einen Häufungspunkt, nämlich $\phi_1(x_0)$. Nach dem Identitätssatz der Funktionentheorie folgt dass $f|_{U_1} = g|_{U_1}$. Ist $\gamma([0,1]) \subseteq U_1$, so folgt insbesondere dass $f(x_1) = g(x_1)$ und wir sind fertig. Ist $\gamma([0,1]) \nsubseteq U_1$, so existiert ein Index $k \in \{2,\dots,n\}$ mit $U_k \cap U_1 \neq \emptyset$, denn andernfalls hätten wir die zusammenhängende Menge $\gamma([0,1])$ in die zwei nichtleeren offenen Mengen $\gamma([0,1]) \cap U_1$ und $\gamma([0,1]) \cap (U_2 \cup \ldots \cup U_n)$ zerlegt. OBdA sei $k = 2$. Die Menge $\{z \in \phi_2(U_2) : \psi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1} = \psi_2 \circ g \circ \phi_2^{-1}\}$ enthält eine nichtleere offene Menge, nämlich $\phi_2(U_1 \cap U_2)$. Es folgt dass $f|_{U_2} = g|_{U_2}$, insgesamt also $f|_{U_1 \cup U_2} = g|_{U_1 \cup U_2}$. Verfährt man nach dem selben Schema weiter, so erhält man in höchstens n Schritten dass $f(x_1) = g(x_1)$.

Um (iv) einzusehen, genügt es zu bemerken, dass für je zwei Karten das Bild der analytischen Funktion $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ offen ist, und das ψ ein Homöomorphismus ist.

Das Maximumprinzip ist nun klar. Um (vi) zu sehen, bemerke man dass $f(X)$ offen ist, daher eine Riemannsche Fläche, und dass für je zwei Karten die Funktion $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ analytisch und injektiv ist. Damit ist auch $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ analytisch.

❏

Ein Phänomen das in der klassischen Funktionentheorie nicht auftritt, ist die Möglichkeit, dass der Definitionsbereich einer analytischen Funktion kompakt ist. Im Rahmen der Riemannschen Flächen ist dies jedoch sehr wohl möglich, wie wir an den Beispielen von $\mathbb{C}_\infty$ bzw. $\mathbb{C}/L$ sehen, und ist tatsächlich ein sehr interessanter Fall. Die folgende Aussage ist einfach, wir wollen sie trotzdem explizit herausstellen, da sie sich mit diesem Fall beschäftigt.

3.2.2 Proposition. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt:*

(i) *Sei Y eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. Ist $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ nicht konstant, so ist f surjektiv und Y kompakt.*

(ii) *Es ist* $\mathrm{Hol}(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Beweis. Zu (i): die Menge $f(X)$ ist offen und kompakt, daher gleich Y. Zu (ii): $\mathbb{C}$ ist nicht kompakt.

❏

3.3 Die Riemannschen Flächen von Logarithmus und Wurzel

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(X)$. Setze $Y := f(X)$,

$$\Gamma(f) := \operatorname{graph} f = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\},$$

und bezeichne mit $\pi_1 : \Gamma(f) \to X$ bzw. $\pi_2 : \Gamma(f) \to Y$ die Projektionen auf die jeweiligen Komponenten

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(f) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Da f eine Funktion ist, ist π_1 bijektiv. Wir können also auf $\Gamma(f)$ eine Topologie definieren durch die Vorgabe dass π_1 ein Homöomorphismus wird.

Für $z \in X$ und $r > 0$ derart dass $f|_{U_r(z)}$ injektiv ist, definieren wir

$$U_{z,r} := \pi_1^{-1}(U_r(z)),\ \phi_{z,r} := \pi_2|_{U_{z,r}} .$$

Weiters sei

$$\mathfrak{A}(f) := \left\{(U_{z,r}, \phi_{z,r}) :\ f|_{U_r(z)} \text{ injektiv}\right\}.$$

3.3.1 Proposition. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(X)$, und sei vorausgesetzt dass $f'(z) \neq 0$, $z \in X$. Dann ist $(\Gamma(f), \mathfrak{A}(f))$ eine Riemannsche Fläche. Es gilt $\pi_1 \in \mathrm{Hol}(\Gamma(f), X)$, $\pi_1^{-1} \in \mathrm{Hol}(X, \Gamma(f))$, und $\pi_2 \in \mathrm{Hol}(\Gamma(f), Y)$.*

Beweis. Zunächst ist π_1 nach Definition ein Homöomorphismus von $\Gamma(f)$ und X, und daher ist $\Gamma(f)$ Hausdorff und $U_{z,r}$ offen. Es gilt $\phi_{z,r} = (f|_{U_r(z)}) \circ \pi_1|_{U_{z,r}}$ und $\phi_{z,r}(U_{z,r}) = f(U_r(z))$. Nun ist $f|_{U_r(z)}$ analytisch und injektiv, also ist auch $(f|_{U_r(z)})^{-1} : f(U_r(z)) \to U_r(z)$ analytisch. Es folgt dass $\phi_{z,r}(U_{z,r})$ offen ist und $\phi_{z,r}$ ein Homöomorphismus. Es ist also jedes Paar $(U_{z,r}, \phi_{z,r})$ eine Karte.

Sei $z \in X$ gegeben. Da $f'(z) \neq 0$ ist, gilt für jedes hinreichend kleine $r > 0$ dass $f|_{U_r(z)}$ injektiv ist. Es gibt also Karten die den Punkt z enthalten.

Seien $(U_{z,r}, \phi_{z,r})$ und $(U_{w,s}, \phi_{w,s})$ gegeben, und sei angenommen, dass $U_{z,r} \cap U_{w,s} \neq \emptyset$. Nun ist

$$(\phi_{z,r} \circ \phi_{w,s}^{-1})|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})} = \pi_2 \circ (\pi_2|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})})^{-1} = \mathrm{id}_{\pi_2(U_{z,r} \cap U_{w,s})} .$$

Insbesondere ist $(\phi_{z,r} \circ \phi_{w,s}^{-1})|_{\phi_{w,s}(U_{z,r} \cap U_{w,s})}$ analytisch.

Die Abbildung $\pi_2 : \Gamma(f) \to Y$ ist trivialerweise analytisch, denn sie ist ja lokal genau eine Karte. Die Abbildung $\pi_1 : \Gamma(f) \to X$ ist analytisch, da $\pi_1|_{U_{r,z}} \circ \phi_{z,r}^{-1} = (f|_{U_r(z)})^{-1}$. Nach Proposition 3.2.1, (vi), ist auch π^{-1} analytisch.

❑

Man spricht von $(\Gamma(f), \mathfrak{A}(f))$ manchmal auch als *Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion von f*. Denn: Bläht man den Bildbereich von f so auf, dass f bijektiv wird, d.h. macht man aus einem Punkt $w \in Y$ mit vielen Urbildern z_i, $i \in I$, die vielen Punkte (z_i, w), $i \in I$, mit dem jeweils eindeutigen Urbild z_i, so erhält man gerade $\Gamma(f)$. Aus f wird dabei die Abbildung $z \mapsto (z, f(z))$, und das ist gerade $\pi_1^{-1} : X \to \Gamma(f)$. Also hat das aufgeblähte f die Inverse $\pi_1 : \Gamma(f) \to X$.

Wir wollen diese Konstruktion für den Fall von $f(z) = e^z$ bzw. $f(z) = \sqrt[n]{z}$ auch noch anders interpretieren. Beschäftigen wir uns zunächst mit $f(z) = e^z$: Betrachte $Y := \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$. Wir versehen jetzt Y aber nicht mit der Produkttopologie, sondern mit einer anderen Topologie. Für $(k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$ und $0 < r < |z|$ definiere

$$U_r(k, z) := \begin{cases} \{k\} \times U_r(z) & , \ z \notin (-\infty, 0) \\ \big(\{k\} \times (U_r(z) \cap \overline{\mathbb{C}^+})\big) \cup \big(\{k+1\} \times (U_r(z) \cap \mathbb{C}^-)\big) & , \ z \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Dann bilden die $\mathfrak{V}(k, z) := \{U_r(k, z) : 0 < r < |z|\}$ Umgebungsbasen einer Topologie auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$. Bezeichnet π^2 die Projektion $\pi^2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, so ist π^2 ein lokaler Homöomorphismus. Tatsächlich bildet π^2 die Umgebung $U_r(k, z)$ bijektiv und bistetig auf $U_r(z)$ ab. Weiters können wir einen Atlas definieren als

$$\mathfrak{A} := \left\{(U_r(k, z), \pi^2|_{U_r(k,z)}) :\ (k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*, 0 < r < |z|\right\}.$$

Beachte hier, dass die Kartenwechsel immer die Identität sind, also sicher analytisch. Wir haben somit Y zu einer Riemannschen Fläche gemacht. Sei nun $\Phi : \Gamma(e^z) \to Y$ die Abbildung

$$\Phi\big((z, e^z)\big) := \big([\frac{\operatorname{Im} z}{2\pi}], e^z\big)\,.$$

Dann ist Φ bijektiv, und wir haben das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(e^z) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi^2"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \arrow[d, "\pi^2"] \\
\mathbb{C}^* \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass Φ eine bianalytische Abbildung von $\Gamma(e^z)$ auf Y ist.

Im Fall $f(z) = \sqrt[n]{z}$ geht man ganz genauso vor, nur dass man anstelle von $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$ die Menge $Z := \mathbb{Z}_n \times \mathbb{C}^*$ verwendet. Die Definitionen von Topologie und Atlas sind dann die gleichen. Der Isomorphismus zwischen $\Gamma(z^n)$ und Z ist gegeben durch

$$\Psi\big((z, z^n)\big) := \big([n\frac{\arg z}{2\pi}], z^n\big)\,,$$

wobei wir hier $\arg z \in [0, 2\pi)$ wählen.

Kapitel 4

Analytische Fortsetzung

4.1 Überlagerungen

4.1.1 Definition. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $\pi : Y \to X$ und $f : Z \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $F : Z \to Y$ heißt ein *lifting* von f, wenn $\pi \circ F = f$, d.h. also

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Hat man X, Y, Z und f gegeben, so muß es nicht notwendig ein lifting geben. Existiert ein lifting, so muß dieses nicht eindeutig sein. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man unter relativ allgemeinen Voraussetzungen erhalten. Die Frage nach der Existenz ist unangenehmer.

Eine Abbildung $\pi : Y \to X$ heißt *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $\pi(V)$ offen ist und $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf $\pi(V)$.

4.1.2 Proposition. *Seien X, Y Hausdorff, $\pi : Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus, Z zusammenhängend und $f : Z \to X$ stetig. Sei $z_0 \in Z$ und seien F_1, F_2 liftings von f mit $F_1(z_0) = F_2(z_0)$. Dann ist $F_1 = F_2$.*

Beweis. Sei $A := \{z \in Z : F_1(z) = F_2(z)\}$. Diese Menge ist abgeschlossen und nichtleer. Sei $z \in A$ und setze $y := F_1(z) = F_2(z)$. Wähle eine offene Umgebung V von y sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf die offene Menge $U := f(V)$ ist. Da F_1, F_2 stetig sind, gibt es eine offene Umgebung W von z mit $F_1(W), F_2(W) \subseteq U$. Nun ist $\pi \circ F_j = f$, also $F_j|_W = (\pi|_V)^{-1} \circ f|_W$, $j = 1, 2$. Wir sehen dass $W \subseteq A$. Also ist A auch offen, und da Z zusammenhängt, folgt $A = Z$.

❑

Es ist eine wichtige Tatsache, dass das lifting einer Homotopie in X, falls es existiert, eine Homotopie in Y ist.

Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to X$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt a bzw. b heißen *FEP-homotop in X*, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$

gibt mit $H(0,s)=a$, $H(1,s)=b$, $s\in[0,1]$, sodass

$$H(t,0)=\gamma_0(t),\ H(t,1)=\gamma_1(t),\ t\in[0,1]\,.$$

4.1.3 Satz (Monodromiesatz)**.** *Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\pi:Y\to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Seien γ_0,γ_1 Wege in X mit gleichem Anfangs- und Endpunkt a bzw. b die FEP-homotop in X sind, und sei $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ eine FEP-Homotopie zwischen γ_0 und γ_1. Sei $c\in Y$ mit $\pi(c)=a$, und sei angenommen, dass jeder Weg $\gamma_s(.):=H(.,s)$, $s\in[0,1]$, ein lifting $\Gamma_s:[0,1]\to Y$ besitzt. Dann haben Γ_0 und Γ_1 den gleichen Endpunkt und sind FEP-homotop.*

Beweis. Sei $K:[0,1]\times[0,1]\to Y$ definiert als $K(t,s):=\Gamma_s(t)$. Wegen der Eindeutigkeit des liftings Γ_s ist K wohldefiniert.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass, für ein gewisses $\epsilon>0$, die Abbildung K stetig auf $[0,\epsilon]\times[0,1]$ ist. Dazu wähle offene Umgebungen U von a und V von c, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Es gilt $H(\{0\}\times[0,1])=\{c\}\subseteq U$. Da H stetig ist und $[0,1]$ kompakt, existiert $\epsilon>0$ sodass $H([0,\epsilon]\times[0,1])\subseteq U$. Betrachte die Abbildung $K':=(\pi|_V)^{-1}\circ H|_{[0,\epsilon]\times[0,1]}$. Diese ist stetig. Nun ist für jedes $s\in[0,1]$ die Abbildung $t\mapsto K'(t,s)$ ein lifting von $\gamma_s|_{[0,\epsilon]}$ mit Anfangspunkt c. Wegen der Eindeutigkeit des liftings folgt $K'(t,s)=\Gamma_s(t)$, $t\in[0,\epsilon]$, $s\in[0,1]$. Also ist K stetig auf $[0,\epsilon]\times[0,1]$.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass K überall stetig ist. Angenommen es existiert ein Punkt (t,σ) wo K nicht stetig ist. Sei

$$\tau:=\inf\{t\in[0,1]:\ K \text{ nicht stetig an } (t,\sigma)\}\,.$$

Nach dem ersten Schritt gilt $\tau\geq\epsilon>0$. Sei V eine offene Umgebung von $K(\tau,\sigma)$ und U eine offene Umgebung von $\pi(K(\tau,\sigma))=\gamma_\sigma(\tau)$, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Wähle $\delta>0$, sodass $H(I_\delta(\tau)\times I_\delta(\sigma))\subseteq U$, wobei $I_\beta(u):=[0,1]\cap(u-\beta,u+\beta)$. Die Kurve $\Gamma:=(\pi|_V)^{-1}\circ\gamma_\sigma|_{I_\delta(\tau)}$ ist ein lifting von γ_σ mit $\Gamma(\tau)=K(\tau,\sigma)=\Gamma_\sigma(\tau)$. Also ist $\Gamma(t)=\Gamma_\sigma(t)$ für alle $t\in I_\delta(\tau)$. Insbesondere ist $K(t,\sigma)\in V$, $t\in I_\delta(\tau)$.

Wähle $t_1\in I_\delta(\tau)$, $t_1<\tau$, dann ist K an der Stelle (t_1,σ) stetig, und daher gibt es $\alpha>0$ sodass $K(t_1,I_\alpha(\sigma))\subseteq V$. Da $\pi(K(t,s))=H(t,s)$ und da $\pi|_V$ bijektiv ist, folgt dass

$$\Gamma_s(t_1)=K(t_1,s)=(\pi|_V)^{-1}(H(t_1,s)),\ s\in I_\alpha(\sigma)\,.$$

Also ist, wegen der Eindeutigkeit des liftings, $\Gamma_s(t)=(\pi|_V)^{-1}(H(t_1,s))$, $t\in I_\delta(\sigma)$. Wir sehen, dass $K(t,s)=(\pi|_V)^{-1}(H(t,s))$, $t\in I_\delta(\tau)$, $s\in I_\alpha(\sigma)$. Insbesondere ist K stetig an der Stelle (t,σ) für $t>\tau$, $t\in I_\delta(\tau)$, ein Widerspruch.

Wir haben jetzt gezeigt, dass Γ_0 und Γ_1 homotop sind. Da π ein lokaler Homöomorphismus ist, ist die Menge $\pi^{-1}(\{b\})$ diskret. Nun ist $K(\{1\}\times[0,1])$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\pi^{-1}(\{b\})$, und daher einpunktig. D.h. alle Wege Γ_s haben den selben Endpunkt.

❑

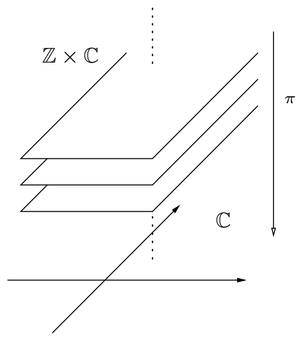
Wir kommen zur Frage nach der Existenz von liftings. Im allgemeinen ist die Situation dabei überhaupt nicht klar. Aber man kann doch eine Klasse von „guten“ Abbildungen π angeben, für die oft liftings existieren.

4.1.4 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $\pi:Y\to X$, dann heißt π eine *Überlagerungsabbildung*, wenn gilt: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung U, sodass sich $\pi^{-1}(U)$ als disjunkte Vereinigung $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{k \in I} V_i$ mit offenen Mengen V_i schreiben läßt und zwar derart dass $\pi|_{V_k} : V_k \to U$ für jedes $k \in I$ ein Homöomorphismus ist.

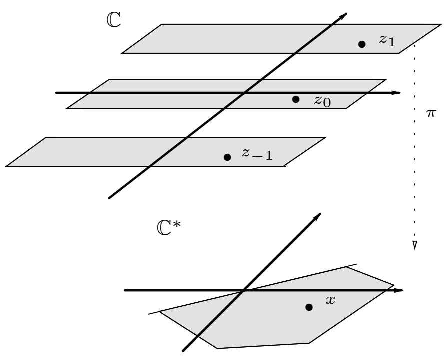
In diesem Fall heißt das Paar (Y, π) eine *Überlagerung von* X. Eine offene Umgebung U mit der genannten Eigenschaft heißt *trivialisierend*.

4.1.5 Beispiel.

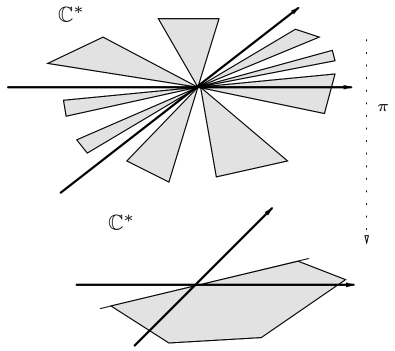
(*i*) Sei $X := \mathbb{C}$. Betrachte $Y := \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ versehen mit der Produkttopologie und sei π die Projektion auf die zweite Komponente, $\pi(n, z) := z$. Dann ist (Y, π) eine Überlagerung von X, denn zu gegebenem Punkt z wähle $U = \mathbb{C}$ und $V_k := \{k\} \times \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.



(*ii*) Sei $X := \mathbb{C}^*$, $Y := \mathbb{C}$, $\pi(z) := e^z$. Für $x \in X$, sei $U := \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w \in (\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg z + \frac{\pi}{2})\}$ und $V_k := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg x + \frac{\pi}{2}) + 2k\pi i\}$, $k \in \mathbb{Z}$, wobei wir $\arg x$ in $(-\pi, \pi]$ wählen.



(*iii*) Sei $X := \mathbb{C}^*$, $Y := \mathbb{C}^*$, und $\pi(z) := z^n$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in X$, sei $U := \{w \in \mathbb{C}^* : \arg w \in (\arg x - \frac{\pi}{2}, \arg z + \frac{\pi}{2})\}$ und $V_k := \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (\frac{\arg x - \frac{\pi}{2}}{n}, \frac{\arg x + \frac{\pi}{2}}{n}) + \frac{2k\pi i}{n}\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.



In einem ersten Schritt zeigen wir, dass für Überlagerungsabbildungen Wege stets ein lifting besitzen.

4.1.6 Lemma. *Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerungsabbildung. Ist γ ein Weg in X und $y_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, so existiert ein lifting Γ von γ mit $\Gamma(0) = y_0$.*

Beweis. Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg, $\gamma(0) =: x_0$. Da $[0,1]$ kompakt ist, existieren $t_0, \ldots, t_n$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und trivialisierende Mengen $U_1, \ldots, U_n$ mit $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Wir zeigen induktiv dass $\gamma|_{[0,t_k]}$ ein lifting mit Anfangspunkt y_0 besitzt. Für $k = 0$ ist das trivial. Sei angenommen Γ_{k-1} ist ein lifting von $\gamma|_{[0,t_{k-1}]}$ mit Anfangspunkt y_0. Schreibe $\pi^{-1}(U_k) = \dot{\bigcup}_{i \in I_k} V_{k,i}$, dann gilt $\Gamma_{k-1}(t_{k-1}) \in V_{k,i_0}$ für ein gewisses $i_0 \in I_k$. Definiere Γ_k als

$$\Gamma_k(t) := \begin{cases} \Gamma_{k-1}(t) & t \in [0, t_{k-1}] \\ (\pi|_{V_{k,i_0}})^{-1} \circ \gamma(t) & t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}$$

Dann ist Γ_k ein lifting von $\gamma|_{[0,t_k]}$ mit Anfangspunkt y_0.

❑

Diese Aussage kann nun auf eine größere Klasse von stetigen Abbildungen als Wege ausgedehnt werden.

Ein topologischer Raum heisst *einfach zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend ist und wenn jeder geschlossene Weg FEP-homotop zum konstanten Weg ist (man könnte auch nur „homotop“verlangen, das führt auf den gleichen Begriff).

4.1.7 Proposition. *Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerunsabbildung. Sei weiters Z einfach zusammenhängend und lokal bogenweise zusammenhängend. Ist $f : Z \to X$ stetig, und $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$, sodass $f(z_0) = \pi(y_0)$, dann existiert ein lifting $F : Z \to Y$ von f mit $F(z_0) = y_0$.*

Beweis. Sei $z \in Z$, wähle einen Weg γ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z, und setze $\alpha := f \circ \gamma$. Dann ist α ein Weg in X mit Anfangspunkt $f(z_0)$. Sei $\Gamma : [0,1] \to Y$ das lifting von α mit $\Gamma(0) = y_0$, und definiere $F(z) := \Gamma(1)$.

Als erstes müssen wir zeigen, dass F wohldefiniert ist. Sei dazu γ' ein anderer Weg der z_0 mit z verbindet, und sei α' und Γ' wie oben konstruiert. Da Z einfach zusammenhängend ist, sind γ und γ' FEP(!)-homotop. Ist H eine FEP-Homotopie zwischen γ und γ', so ist $f \circ H$ eine FEP-Homotopie zwischen α und α'. Nach dem Monodromiesatz gilt $\Gamma'(1) = \Gamma(1)$.

Die Tatsache dass $\pi \circ F = f$ ist klar aus der Definition. Wir müssen noch zeigen, dass F stetig ist. Sei dazu $z \in Z$ gegeben. Seien U und V offene Umgebungen von $\pi(F(z)) = f(z)$ bzw. $F(z)$, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus von V auf U ist. Da Z lokal bogenweise zusammenhängend ist, existiert eine bogenweise zusammenhängende Umgebung W von z mit $f(W) \subseteq U$. Seien γ, α, Γ wie in der Definition von $F(z)$, und sei γ' ein Weg in W der z mit z' verbindet, $\alpha' := f \circ \gamma'$. Dann gilt stets $\alpha'([0,1]) \in U$, also ist $\Gamma' := (\pi|_V)^{-1} \circ \alpha'$ ein lifting von α' mit $\Gamma'(0) = F(z) = \Gamma(1)$. In der Definition von $F(z')$ verwenden wir nun den Weg $\gamma' \cdot \gamma$ der ja z_0 mit z' verbindet, und sein lifting $\Gamma' \cdot \Gamma$. Es folgt $F(z') = \Gamma'(1) \in V$. Also haben wir $F(W) \subseteq V$.

❑

Eine Anwendung dieses Satzes liefert die Existenz von Logarithmen stetiger Funktionen: Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, und sei $f : X \to \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Dann existiert eine Funktion $F : X \to \mathbb{C}$ sodass $f(z) = e^{F(z)}$, $z \in X$. Um dies zu sehen, betrachte die Überlagerungsabbildung $\pi(y) := e^y$, und wähle für F ein lifting von f.

4.2 Analytische Fortsetzung

4.2.1 Das Bündel der Funktionskeime

Sei X eine Riemannsche Fläche, und sei $x \in X$. Auf der Menge aller Paare (U, f) wo U eine offene Umgebung von x ist und $f \in \mathrm{Hol}(U, \mathbb{C})$, definieren wir eine Relation $\sim_x$ als $(U_1, f_1) \sim_x (U_2, f_2)$ wenn es eine offene Umgebung V von x gibt mit $f_1|_V = f_2|_V$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse $[(U, f)]_{\sim_x}$ heißt ein *Funktionskeim an der Stelle* x. Die Menge aller Funktionskeime an der Stelle x bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_x$, weiters sei

$$\mathcal{O}(X) := \dot{\bigcup}_{x \in X} \mathcal{O}_x \,.$$

$\mathcal{O}$ heißt das *Bündel der Funktionskeime auf* X. Wir können in natürlicher Weise eine Abbildung $\pi_X : \mathcal{O}(X) \to X$ definieren, und zwar wie folgt: Sei $y \in \mathcal{O}(X)$, dann existiert genau ein $x \in X$ mit $y \in \mathcal{O}_x$. Setze $\pi_X(y) := x$. Diese Abbildung heißt auch die *Bündelprojektion von* $\mathcal{O}(X)$.

Wir wollen nun auf $\mathcal{O}(X)$ die Struktur einer Riemannschen Fläche definieren. Für $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathrm{Hol}(U, \mathbb{C})$ setze

$$N(U, f) := \big\{[(U, f)]_{\sim_b} : \, b \in U\big\} \,.$$

Die Menge aller solcher Mengen $N(U, f)$ bildet die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(X)}$: Um dies zu sehen seien $N(U_1, f_1)$ und $N(U_2, f_2)$ gegeben mit $N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2) \neq \emptyset$. Wähle $y \in N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2)$, $y = [(V, g)]_{\sim_x}$. Dann gilt $x \in U_1 \cap U_2$ und $(U_1, f_1) \sim_x (V, g)$, $(U_2, f_2) \sim_x (V, g)$. Es existiert also eine offene Umgebung V_0 von x mit $V_0 \subseteq V \cap U_1 \cap U_2$ und $g|_{V_0} = f_1|_{V_0} = f_2|_{V_0}$. Daher ist

$$N(V_0, g|_{V_0}) \subseteq N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2) \,.$$

4.2.1 Lemma. *Die oben auf $\mathcal{O}(X)$ definierte Topologie ist Hausdorff. Die Bündelprojektion $\pi_X : \mathcal{O}(X) \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus.*

Beweis. Seien $y_1 \in \mathcal{O}_{x_1} \subseteq \mathcal{O}(X)$, $y_2 \in \mathcal{O}_{x_2} \subseteq \mathcal{O}(X)$, zwei verschiedene Funktionskeime. Ist $x_1 \neq x_2$, so können wir, da X Hausdorff ist, Representanten $y_1 = [(U_1, f_1)]_{\sim_{x_1}}$ und $y_2 = [(U_2, f_2)]_{\sim_{x_2}}$ wählen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann gilt offenbar $N(U_1, f_1) \cap N(U_2, f_2) = \emptyset$. Betrachte nun den Fall, dass $x_1 = x_2 =: x$. Sei U eine offene und zusammenhängende Umgebung von x. Angenommen es ist $N(U, f_1|_U) \cap N(U, f_2|_U) \neq \emptyset$, dann wähle $z \in N(U, f_1|_U) \cap N(U, f_2|_U)$, $z = [(V, h)]_{\sim_a}$. Dann ist $(U, f_1|_U) \sim_a (V, h)$ und $(U, f_2|_U) \sim_a (V, h)$, also auch $(U, f_1|_U) \sim_a (U, f_2|_U)$, d.h. f_1 und f_2 stimmen auf einer gewissen offenen Umgebung von a überein. Nach dem Identitätssatz gilt daher $f_1|_U = f_2|_U$. Es folgt dass auch $(U, f_1|_U) \sim_x (U, f_2|_U)$ und damit $(U_1, f_1) \sim_x (U_2, f_2)$, ein Widerspruch.

Für jede Menge $N(U, f)$ ist $\pi_X|_{N(U,f)}$ eine Bijektion von $N(U, f)$ auf die in X offene Menge U. Die Spurtopologie auf $N(U, f)$ ist gegeben durch die Umgebungen $N(V, f)$ mit $V \subseteq U$ offen. Daher ist $\pi_X|_{N(U,f|_V)}$ ein lokaler Homöomorphismus.

❑

Vermöge Lemma 3.1.13 wird nun $\mathcal{O}(X)$ zu einer Riemannschen Fläche. Ein Atlas von $\mathcal{O}(X)$ ist gegeben durch $\{\pi_X|_{N(U,f)}\}$.

4.2.2 Korollar. *Es ist* $\pi_X \in \mathrm{Hol}(\mathcal{O}(X), X)$. *Ist* $U \subseteq X$ *offen, und* $f \in \mathrm{Hol}(U, \mathbb{C})$, *so ist* $\pi_X|_{N(U,f)} : N(U, f) \to U$ *analytisch und bijektiv. Weiters ist* $(\pi_X|_{N(U,f)})^{-1} \in \mathrm{Hol}(U, N(U, f))$.

Beweis. Nach der Konstruktion von Lemma 3.1.13 ist π_X lokal gerade eine Kartenabbildung.

❑

Wir können auch in natürlicher Weise eine Abbildung $\alpha_X : \mathcal{O}(X) \to \mathbb{C}$ definieren: Ist $y \in \mathcal{O}(X)$, so wähle einen Representanten (U, f), d.h. $y = [(U, f)]_{\sim_{\pi_X(y)}}$, und setze $\alpha_X(y) := f(\pi_X(y))$. Beachte hier, dass der Wert $f(\pi_X(y))$ nicht von der Wahl des Representanten abhängt.

4.2.3 Lemma. *Sei* $U \subseteq X$ *offen,* $f \in \mathrm{Hol}(U, \mathbb{C})$. *Dann gilt* $\alpha_X|_{N(U,f)} = f \circ \pi_X|_{N(U,f)}$. *Es ist* $\alpha_X \in \mathrm{Hol}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$.

Beweis. Sei $y \in N(U, f)$, dann ist $y = [(U, f)]_{\sim_{\pi_X(y)}}$. Nach der Definition von α_X haben wir $\alpha_X(y) = f(\pi_X(y))$.

Es folgt das $\alpha_X \circ (\pi_X|_{N(U,f)})^{-1} = f$ ist, und damit analytisch. Da der Atlas von $\mathcal{O}(X)$ gerade durch die $\pi_X|_{N(U,f)}$ gegeben ist, folgt dass α_X analytisch ist.

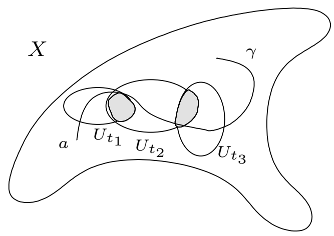
❑

4.2.2 Analytische Fortsetzung längs Wegen

4.2.4 Definition. Sei $y \in \mathcal{O}(X)$, $a := \pi_X(y)$, und sei $\gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg in X mit $\gamma(0) = a$. Weiters sei Γ ein lifting von γ mit $\Gamma(0) = y$. Dann heißt $\Gamma(1)$ die *analytische Fortsetzung von y längs γ*.

Die Bündelprojektion π_X ist keine Überlagerungsabbildung. Eine analytische Fortsetzung längs eines Weges muss nicht existieren. Wenn sie existiert ist sie, da $\mathcal{O}(X)$ und X Hausdorff sind, jedoch eindeutig.

Wir wollen uns überlegen, warum wir in dieser Definition von „analytischer Fortsetzung längs γ“ sprechen. Sei also $y \in \mathcal{O}_a$, γ ein Weg mit Anfangspunkt a, und Γ ein lifting von γ mit $\Gamma(0) = y$. Schreibe $\Gamma(t) = [(U_t, f_t)]_{\sim_{\gamma(t)}}$. Ist $t \in [0,1]$, so existiert $\epsilon > 0$ sodass $\Gamma(s) \in N(U_t, f_t)$, $s \in I_\epsilon(t)$. Also ist $[(U_s, f_s)]_{\sim_{\gamma(s)}} = [(U_t, f_t)]_{\sim_{\gamma(s)}}$, d.h. es existiert eine Umgebung V von $\gamma(s)$ mit $f_s|_V = f_t|_V$.



Wir wollen, wegen seiner traditionellen Bedeutung, den Monodromiesatz für analytische Funktionen explizit formulieren.

4.2.5 Korollar (Monodromiesatz für analytische Funktionen)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche, γ_0, γ_1 FEP-homotope Wege, und sei $y \in \mathcal{O}_{\gamma(0)}$ ein Funktionkeim. Sei H eine FEP-Homotopie zwischen γ_0 und γ_1, und sei vorausgesetzt, dass y für jedes $s \in [0,1]$ eine analytische Fortsetzung Γ_s längs jedes Weges $\gamma_s(.) := H(., s)$. Dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von y längs γ_0 und längs γ_1 überein.*

Man erhält nun, dass, unter bestimmten Voraussetzungen, Funktionskeime zu global definierten analytischen Funktionen fortsetzen werden können.

4.2.6 Korollar. *Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $y \in \mathcal{O}_a$. Sei vorausgesetzt, dass y eine analytische Fortsetzung längs jedes Weges mit Anfangspunkt a besitzt. Dann existiert $F \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C})$, sodass $(X, F) \sim_a y$.*

Beweis. Sei $x \in X$ gegeben. Für einen Weg γ_x der a mit x verbindet, existiert ein lifting Γ_x mit $\Gamma_x(0) = y$. Definiere nun $F(x) := \alpha_X(\Gamma_x(1))$. Nach dem Monodromiesatz ist der Wert $\alpha_X(\Gamma_x(1))$ nicht von der Wahl von γ_x abhängig, es ist also eine Funktion $F : X \to \mathbb{C}$ wohldefiniert.

Sei (U, f) ein Representant von $\Gamma_x(1)$ mit U bogenweise zusammenhängend. Für $y \in U$ wähle einen Weg $\gamma_{x,y}$ der ganz in U verläuft und der x mit y verbindet. Das lifting $\Gamma_{x,y}$ von $\gamma_{x,y}$ mit $\Gamma_{x,y}(0) = \Gamma_x(1)$ ist gegeben als $\Gamma_{x,y}(t) := [(U, f)]_{\sim_{\gamma_{x,y}(t)}}$. Verwendet man den Weg $\gamma_{x,y} \cdot \gamma_x$ um $F(y)$ zu berechnen, so sieht man dass $F(y) = f(y)$. Wir haben also $F|_U = f|_U$ und es folgt $F \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C})$.

❏

4.2.3 Maximale analytische Fortsetzung

Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt *lokal bianalytisch*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $p(V) \subseteq X$ offen ist, $p|_V$ bijektiv, und $p|_V \in \mathrm{Hol}(V, p(V))$. Dann ist auch $(p|_V)^{-1} \in \mathrm{Hol}(p(V), V)$.

Eine lokal bianalytische Abbildung induziert für jedes $y \in Y$ eine Abbildung zwischen $\mathcal{O}_{p(y)}$ und $\mathcal{O}_y$, nämlich die Abbildung

$$p^* : \begin{cases} \mathcal{O}_{p(y)} & \to \quad \mathcal{O}_y \\ [(U, f)]_{\sim_{p(y)}} & \mapsto \quad [((p|_V)^{-1}(U \cap p(V)), f \circ p)]_{\sim_y} \end{cases}$$

wobei V eine offene Umgebung von y ist sodass $p(V)$ offen und $p|_V$ bianalytisch ist. Man sieht leicht ein, dass p^* bijektiv ist, die Inverse $p_* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{p(y)}$ wird induziert durch $(\hat{V}, \hat{f}) \mapsto (p(\hat{V}), f \circ (p|_V)^{-1})$ wo $\hat{V} \subseteq V$ und V wie oben. Da das Bündel $\mathcal{O}(Y)$ die disjunkte Vereinigung der $\mathcal{O}_y$ ist, können die Abbildungen $p_* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{p(y)}$ der einzelnen Fasern zu einer Abbildung $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ zusammengefasst werden. Wir bezeichnen diese wieder mit p_*. Beachte, dass man die folgenden Diagramme hat:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\pi_X"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[rr, "p_*"] \arrow[dr, "\alpha_Y"'] & & \mathcal{O}(X) \arrow[dl, "\alpha_X"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

4.2.7 Lemma. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $p : Y \to X$ lokal bianalytisch. Dann ist $p_* \in \mathrm{Hol}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$.*

Beweis. Sei $y \in \mathcal{O}(Y)$ gegeben. Wähle offene Umgebungen $U \subseteq X$ von $\pi_X(p_*(y))$ und $V \subseteq \mathcal{O}(X)$ von $p_*(y)$, sodass $\pi_X|_V$ bianalytisch ist. Setze $W := (p \circ \pi_Y)^{-1}(U)$, dann ist $W \subseteq \mathcal{O}(Y)$ offen und $y \in W$. Weiters ist $p_*|_W = (\pi_X|_V)^{-1} \circ p \circ \pi_Y$, also analytisch.

❑

Wir wollen nun untersuchen wie weit sich ein gegebener Funktionskeim fortsetzen läßt.

4.2.8 Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $f_a \in \mathcal{O}_a$. Eine *analytische Fortsetzung* von f_a ist ein Tupel (Y, p, F, b) bestehend aus einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche Y, einer lokal bianalytischen Abbildung $p : Y \to X$, einer Funktion $F \in \mathrm{Hol}(Y, \mathbb{C})$, und einem Punkt $b \in Y$, sodass

$$p(b) = a \text{ und } p_*\big([(Y, F)]_{\sim_b}\big) = f_a\,.$$

Eine analytische Fortsetzung (Y, p, F, b) von f_a heißt *maximal*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jede analytische Fortsetzung (Z, q, G, c) von f_a existiert $\Phi \in \mathrm{Hol}(Z, Y)$ sodass $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$. Weiters sagen wir zwei analytische Fortsetzungen (Y, p, F, b) und (Z, q, G, c) sind *bianalytisch äquivalent*, wenn es eine analytische und bijektive Abbildung $\Phi : Z \to Y$ gibt mit $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$.

Die universelle Eigenschaft einer maximalen analytischen Fortsetzung lässt sich auch durch das folgende Diagramm ausdrücken:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} & \\ Z \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, dashed, "\Phi"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Die untere Hälfte dieses Diagramms ist stärker als die in der Definition geforderte Eigenschaft $\Phi(c) = b$, folgt aber wegen der Eindeutigkeit des liftings denn

X, Y sind Hausdorff, Z ist zusammenhängend, und p ein lokaler Homöomorphismus.

4.2.9 Satz. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, und $f_a \in \mathcal{O}_a$. Dann existiert eine maximale analytische Fortsetzung von f_a. Diese ist, bis auf bianalytische Äquivalenz, eindeutig. Man spricht auch von der* Riemannschen Fläche des Funktionskeims f_a.

Beweis. Wir zeigen als erstes die Existenz einer maximalen analytischen Fortsetzung. Dazu bezeiche Y die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{O}(X)$ welche den Punkt f_a enthält. Dann ist Y, als offene Teilmenge der Riemannschen Fläche $\mathcal{O}(X)$, selbst auch eine Riemannsche Fläche. Klarerweise ist Y zusammenhängend. Wir betrachten das Tupel $(Y, \pi_X|_Y, \alpha_X|_Y, f_a)$. Nach Korollar 4.2.2 ist $\pi_X|_Y$ lokal bianalytisch, und nach Lemma 4.2.3 ist $\alpha_X|_Y \in \mathrm{Hol}(Y, \mathbb{C})$. Offenbar ist $f_a \in Y$ und $\pi_X(f_a) = a$. Um $\pi_X^*(f_a)$ zu berechnen, schreibe $f_a = [(U, f)]_{\sim_a}$ mit U zusammenhängend. Dann ist $N(U, f) \subseteq Y$, und nach Lemma 4.2.3 gilt $f \circ \pi_X|_{N(U,f)} = \alpha_X|_{N(U,f)}$. Also ist $\pi_X^*([(U, f)]_{\sim_a}) = [(N(U, f), \alpha_X)]_{\sim_{f_a}}$. Wir sehen, dass $(Y, \pi_X|_Y, \alpha_X|_Y, f_a)$ eine analytische Fortsetzung von f_a ist.

Sei (Z, q, G, c) eine andere analytische Fortsetzung von f_a. Definiere $\Phi := q_* \circ (\pi_Z|_{N(Z,G)})^{-1}$, dann ist $\Phi \in \mathrm{Hol}(Z, \mathcal{O}(X))$. Es gilt $f_a = q_*([(Z, G)]_{\sim_c}) = \Phi(c)$, also ist $f_a \in \Phi(Z)$. Da Φ stetig ist, ist $\Phi(Z)$ zusammenhängend. Es folgt dass $\Phi(Z) \subseteq Y$. Wir haben nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} & \\
Z \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[r, bend left, "(\pi_Z|_{N(Z,G)})^{-1}"] \arrow[dr, bend right, "q"'] & N(Z,G) \arrow[u, "\alpha_Z"] \arrow[l, bend left, "\pi_Z"] \arrow[r, "q_*"] & Y \arrow[ul, "\alpha_X"'] \arrow[dl, "\pi_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Wir kommen zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage. Seien dazu (Y, p, F, b) und (Z, q, G, c) zwei maximale analytische Fortsetzungen. Dann haben wir also $\Phi \in \mathrm{Hol}(Z, Y)$ und $\Psi \in \mathrm{Hol}(Y, Z)$ mit

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} & \\
Z \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, bend left, "\Phi"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[ul, "F"'] \arrow[ll, bend left, "\Psi"] \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Es sind $\Psi \circ \Phi$ und id_Z liftings der Abbildung $q : Z \to X$

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "q"] \\
Z \arrow[ur, bend left, "\Psi\circ\Phi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_Z"'] \arrow[r, "q"'] & X
\end{tikzcd}$$

und es gilt $\Psi \circ \Phi(c) = c$. Da X und Z Hausdorff sind und Z zusammenhängend, folgt dass $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_Z$. Genauso erhält man $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_Y$, also ist Φ bijektiv. Klarerweise ist $\Phi(c) = b$ und $F \circ \Phi = G$.

❑

Da auf einer Riemannschen Fläche die Zusammenhangskomponenten mit den Bogenkomponenten übereinstimmen, sehen wir, dass die maximale analytische Fortsetzung eines Funktionskeimes f_a gegeben ist als die Menge aller Funktionskeime die man aus f_a mittels analytischer Fortsetzung längs eines Weges erhalten kann.

Kapitel 5

Runge Theorie

5.0.1 Definition. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{C}$. Wir sagen f ist *analytisch auf* K, wenn es eine offene Menge U und eine analytische Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $U \supseteq K$, $F|_K = f$.

5.0.2 Beispiel. Sei $K := \overline{\mathbb{D}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Dann kann jede auf K analytische Funktion auf K gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. Denn die Taylorreihe von f mit Anschlussstelle 0 konvergiert gleichmäßig auf K.

Sei andererseits $K := \mathbb{T}$ die Einheitskreislinie und betrachte die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$. Diese ist analytisch auf K, kann aber auf K nicht gleichmäßig durch Funktionen aus $H(\mathbb{C})$ approximiert werden, insbesondere nicht durch Polynome. Denn für jedes $g \in H(\mathbb{C})$ gilt sicherlich $\oint_{\mathbb{T}} g(\zeta)\, d\zeta = 0$, und es ist aber $\oint_{\mathbb{T}} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i$.

Wir wollen in diesem Kapitel die folgende Frage untersuchen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K \subseteq G$ kompakt. Wann sind alle auf K analytischen Funktionen auf K gleichmäßig durch in G analytische Funktionen approximierbar? Oder, etwas allgemeiner: Wo muß man Singularitäten zulassen, sodass jede auf K analytische Funktion approximierbar ist?

5.1 Der Polverschiebungssatz

Der Polverschiebungssatz ist ein oft recht praktisches Hilfsmittel. Wir werden ihn, und einige verwandte Resultate, im folgenden benützen.

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus K$ bezeichne

$$R_\alpha := \overline{\mathbb{C}\Big[\frac{1}{z-\alpha}\Big]} \subseteq C(K)$$

den Abschluss der Polynome in $(z-\alpha)^{-1}$ bezüglich der Supremumsnorm auf K. Weiters setze $R_\infty = \overline{\mathbb{C}[z]} \subseteq C(K)$, das sind also jene Funktionen auf K die sich auf K gleichmäßig durch Polynome approximieren lassen.

5.1.1 Proposition (Polverschiebungssatz)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, und seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$. Dann gilt $R_a = R_b$ genau dann, wenn a und b in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ liegen. Ist a in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so gilt $R_a \subseteq R_\infty$.*

Beweis. Für $a \in \mathbb{C} \setminus K$ betrachte die Menge

$$M_a := \big\{ b \in \mathbb{C} \setminus K : \, R_b \subseteq R_a \big\} .$$

Offenbar gilt $a \in M_a$.

Wir zeigen dass M_a abgeschlossen ist. Sei dazu $c \in \overline{M_a}$, und $b_n \in M_a$ mit $b_n \to c$. Dann gilt $(z - b_n)^{-1} \to (z - c)^{-1}$ gleichmäßig auf K, also ist $(z - c)^{-1} \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{b_n}} \subseteq \overline{R_a} = R_a$. Es folgt $\mathbb{C}[(z - c)^{-1}] \subseteq R_a$, und damit auch $R_c \subseteq R_a$.

Die Menge M_a ist auch offen: Sei $b \in M_a$, und sei $r > 0$ sodass $U_r(b) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. Für $c \in U_{\frac{r}{2}}(b)$ und $z \in K$ gilt $|\frac{c-b}{z-b}| < \frac{1}{2}$, und daher ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{c-b}{z-b})^n$ auf K gleichmäßig konvergent. Nun ist

$$\frac{1}{z-c} = \frac{1}{z-b} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{c-b}{z-b})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-b)^n}{(z-b)^{n+1}} \in R_b \subseteq R_a \, .$$

Wir erhalten wieder $R_c \subseteq R_a$, und sehen dass $U_{\frac{r}{2}}(b) \subseteq M_a$.

Die Menge M_a ist also in $\mathbb{C} \setminus K$ offen und abgeschlossen, ist daher Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$. Insbesondere umfasst sie jene Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ welche a enthält.

Seien nun a, b in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Nach dem oben gezeigten gilt $b \in M_a$, und, wenn man die Rollen von a und b vertauscht, auch $a \in M_b$. Insgesamt hat man $R_a = R_b$.

Betrachte nun den Fall, dass a in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ liegt. Wähle einen Punkt c mit $K \subseteq U_{|c|}(0)$. Dann liegt c ebenfalls in der unbeschränkten Komponente und damit gilt $R_a = R_c$. Nun ist die Taylorreihe für $(z - c)^{-1}$ mit Anschlussstelle 0 im ganzen Kreis $U_{|c|}(0)$ konvergent, also kann $(z - c)^{-1}$ auf K gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. Wir haben also $R_a = R_c \subseteq R_\infty$.

Seien nun a, b Punkte aus verschiedenen Komponenten Z_a und Z_b von $\mathbb{C} \setminus K$. Dabei sei oBdA Z_a nicht die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Setze $\delta := \max_{z\in K} |z - a|$. Angenommen es gibt eine Funktion $g \in \mathbb{C}[(z - b)^{-1}]$ mit $\|\frac{1}{z-a} - g(z)\|_K < \frac{1}{2\delta}$. Dann gilt also $|1 - (z - a)g(z)| < \frac{1}{2}$, $z \in K$. Die Funktion $1 - (z - a)g(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, insbesondere ist sie also analytisch in Z_a und stetig auf $\overline{Z_a}$. Da Z_a beschränkt ist, erhalten wir aus dem Maximumprinzip

$$\sup_{z\in Z_a} |1 - (z - a)g(z)| = \max_{z\in\partial Z_a} |1 - (z - a)g(z)| \, .$$

Nun ist $\partial Z_a \subseteq K$, also ist die rechte Seite $\leq \frac{1}{2}$. Ein Widerspruch, denn an der Stelle a nimmt die Funktion $1 - (z - a)g(z)$ den Wert 1 an. Wir schliessen, dass $R_a \not\subseteq R_b$.

❑

Wir kommen nun zu einem Ergebnis, das uns zeigt wie man eine gegebene Funktion durch rationale Funktionen mit Polstellen in einer gewissen „kleinen" Menge approximieren kann.

5.1.2 Proposition. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und K kompakt, $K \subseteq G$. Dann gibt es eine kompakte Menge $M \subseteq G \setminus K$, sodass sich jede in G analytische Funktion auf K gleichmäßig approximieren läßt durch rationale Funktionen der Gestalt $\sum_{endl} \frac{c_j}{z-w_j}$ deren Pole w_j sämtliche in M liegen.*

Zum Beweis benützen wir das folgenden Lemma.

5.1.3 Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und K kompakt, $K \subseteq G$. Dann gibt es endlich viele orientierte Strecken $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ in $G \setminus K$, so daß für jede in G analytische Funktion f gilt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \;\; z \in K\,.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $G \neq \mathbb{C}$ ist. Da K kompakt ist, ist $d(K, \partial G) > 0$. Wir legen ein achsenparalleles Gitter mit Maschenweite $d < \frac{1}{\sqrt{2}} d(K, \partial D)$ auf die Ebene. Da K kompakt ist, wird K nur von endlich vielen der abgeschlossenen Gitterquadrate getroffen; seien diese $Q^1, \dots, Q^N$. Da wir die Maschenweite des Gitters hinreichend klein gewählt haben, gilt für jedes dieser Quadrate $Q^k \cap \partial G = \emptyset$, und daher $Q^k \subseteq G$. Also haben wir

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} Q^k \subseteq G\,.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial Q^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) & ,\; z \in \operatorname{Int}(Q^k) \\ 0 & ,\; z \in \operatorname{Int}((Q^k)^c) \end{cases}$$

Da die Quadrate Q^k paarweise disjunkt sind, erhalten wir insgesamt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N} \oint_{\partial Q^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \;\; z \in \bigcup_{k=1}^{N} \operatorname{Int}(Q^k)\,. \tag{5.1}$$

Bezeichne nun mit $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ jene Strecken, die Seite eines der Quadrate Q^k sind, aber nicht gemeinsame Seite von zwei solchen Quadraten. Diese Strecken seien mit jener Orientierung versehen die sie von der positiven Orientierung von ∂Q^k erhalten.

Ist σ Seite von zwei benachbarten Qudraten, so kommt in der Summe (5.1) der Summand $\int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ zweimal vor, jedoch mit unterschiedlicher Orientierung. Diese Summanden heben sich also gegenseitig auf. Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \;\; z \in \bigcup_{k=1}^{N} \operatorname{Int}(Q^k)\,. \tag{5.2}$$

Ist für eine Seite σ eines der Quadrate Q^k der Schnitt $\sigma \cap K$ nichtleer, so kommt auch das Q^k auf der entsprechenden Seite benachbarte Quadrat unter den Q^l vor, und damit ist die Seite σ nicht unter den oben ausgewählten $\sigma^1, \dots, \sigma^n$.

Die rechte Seite von (5.2) ist analytisch, insbesondere stetig, in $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \sigma^k$, insbesondere also auf K. Die linke Seite hat die gleiche Eigenschaft, die Beziehung (5.2) gilt also für alle $z \in K$.

❏

Beweis. (von Proposition 5.1.2) Seien $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ die Strecken aus dem obigen Lemma, und setze $M := \bigcup_{k=1}^{n} \sigma^k$.

Wegen der Integraldarstellung von f aus Lemma 5.1.3 genügt es zu zeigen, dass sich ein Integral $\int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ auf K gleichmäßig durch rationale Funktionen mit Polen nur in σ approximieren läßt.

Die Funktion $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist stetig auf der kompakten Menge $\sigma \times K$, also ist sie dort gleichmäßig stetig. Insbesondere finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\big|g(\zeta, z) - g(\zeta', z)\big| < \epsilon,\ z \in K \text{ und } \zeta, \zeta' \in \sigma \text{ mit } |\zeta - \zeta'| < \delta\,.$$

Nun unterteilt man σ in Teilstrecken π^j der Länge $\ell(\pi^j) = \int_{\pi^j} d\zeta < \delta$, wählt $w_j \in \pi^j$, und setzt $c_j := -f(w_j)\ell(\pi^j)$. Dann folgt

$$\Big|\int\limits_{\pi^j} g(\zeta, z)\, d\zeta - \frac{c_j}{z - w_j}\Big| = \Big|\int\limits_{\pi^j} \big(g(\zeta, z) - g(w_j, z)\big)\, d\zeta\Big| \leq \epsilon \cdot \ell(\pi^j)\,.$$

Insgesamt folgt

$$\Big|\int\limits_{\sigma} g(\zeta, z) d\zeta - \sum \frac{c_j}{z - w_j}\Big| < \epsilon \cdot \ell(\sigma)\,.$$

❑

Je besser wir in Proposition 5.1.2 die Funktion f approximieren wollen desto mehr Pole werden die approximierenden rationalen Funktion haben. Die Lage der Pole ist jedoch von der Approximationsgüte unabhängig: Da stets alle Pole in $\bigcup_{k=1}^n \sigma^k$ liegen, rücken sie nicht näher an K heran.

5.2 Die Approximationssätze von Runge

Sei $P \subseteq \mathbb{C}$. Bezeichne mit $\mathbb{C}_P(z)$ die Menge aller rationalen Funktionen deren Pole sämtliche in P liegen.

5.2.1 Satz (Approximationssatz von Runge)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, und $P \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *Jede auf K analytische Funktion ist auf K gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathbb{C}_P(z)$ approximierbar.*

(*ii*) *P trifft jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$.*

(*iii*) *Zu jedem $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ gibt es eine Funktion $p \in \mathbb{C}_P(z)$ mit*

$$|p(z_0)| > \max_{z \in K} |p(z)|\,.$$

Beweis. Wir zeigen (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Sei f ist analytisch auf K, d.h. analytisch auf einer gewissen offenen Menge $G \subseteq K$. Nach Proposition 5.1.2 gibt es eine kompakte Teilmenge $M \subseteq G$, sodass f durch Funktionen der Gestalt

$$g(z) = \sum_{\text{endl}} \frac{c_j}{z - w_j} \tag{5.3}$$

mit $w_j \in M$ auf K gleichmäßig approximiert werden kann.

Sei $w \in M$ und gehöre w zu einer beschränkten Komponente Z von $\mathbb{C} \setminus K$. Wähle $w_0 \in Z \cap P$. Dann kann nach dem Polverschiebungssatz $(z-w)^{-1}$ durch Polynome in $(z - w_0)^{-1}$ approximiert werden. Ist w in der unbeschränkten Komponente, so kann, ebenfalls nach dem Polverschiebungssatz, $(z-w)^{-1}$ durch Polynome approximiert werden. Insgesamt kann jeder Summand in (5.3), und damit auch g, durch Elemente aus $\mathbb{C}_P(z)$ approximiert werden.

Es gelte (i). Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ gegeben, und setze $\delta := \max_{z\in K} |z - z_0|$. Die Funktion $(z - z_0)^{-1}$ ist analytisch auf K, also gibt es eine Funktion $q \in \mathbb{C}_P(z)$ mit $\max_{z\in K} |(z - z_0)^{-1} - q(z)| < \frac{1}{2\delta}$. Nach dem Polverschiebungssatz können wir annehmen, dass q an der Stelle z_0 analytisch ist. Für die Funktion $p(z) := 1 - (z - z_0)q(z)$ gilt dann $\max_{z\in K} |p(z)| < \frac{1}{2}$ und $p(z_0) = 1$. Wir sehen, dass (iii) erfüllt ist.

Sei nun angenommen, dass P eine beschränkte Komponente Z_0 von $\mathbb{C} \setminus K$ nicht trifft. Ist $p \in \mathbb{C}_P(z)$, so ist p analytisch in Z_0. Wegen $\partial Z_0 \subseteq K$, ist p stetig auf $\overline{Z_0}$. Also haben wir nach dem Maximumprinzip $\sup_{z\in Z_0} |p(z)| \leq \max_{z\in K} |p(z)|$. Die Bedingung (iii) ist also für jedes $z_0 \in Z_0$ verletzt.

❑

5.2.2 Korollar (Kleiner Satz von Runge)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Jede auf K analytische Funktion ist auf K gleichmäßig durch Polynome approximierbar, genau dann wenn $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist.*

Beweis. Wähle $P = \emptyset$ in Satz 5.2.1.

❑

Wir können auch so approximieren, dass gleichzeitig an endlich vielen Stellen interpoliert wird.

5.2.3 Korollar. *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und sei $\mathbb{C}\setminus K$ zusammenhängend. Weiters seien $z_1, \dots, z_n \in K$ und $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{N}$. Dann kann jede auf K analytische Funktion auf K gleichmäßig durch solche Polynome p approximiert werden, für die $f - p$ in z_j, $j = 1, \dots, n$, eine Nullstelle der Ordnung mindestens N_j hat.*

Beweis. Wähle ein Polynom q sodass $f - q$ bei z_j, $j = 1, \dots, n$, eine Nullstelle der Ordnung mindestens N_j hat. Dann ist die Funktion

$$F(z) := \frac{f(z) - q}{\prod_{j=1}^n (z - z_j)^{N_j}}$$

analytisch auf K. Sei $\delta := \max_{z\in K} |\prod_{j=1}^n (z-z_j)^{N_j}|$. Zu $\epsilon > 0$ wähle ein Polynom p sodass $\max_{z\in K} |F(z) - p(z)| < \frac{\epsilon}{\delta}$, dann gilt

$$\max_{z\in K} \Big| f(z) - \Big(q(z) + p(z) \prod_{j=1}^n (z - z_j)^{N_j}\Big)\Big| < \epsilon\,.$$

❑

Wir wissen aus dem Satz von Osgood, dass eine auf einem Gebiet G punktweise konvergente Folge analytischer Funktionen auf einer dichten offenen Teilmenge $\hat{G}$ von G sogar lokal gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist also der punktweise Grenzwert einer Folge analytischer Funktionen auf einer dichten offenen Teilmenge analytisch. Wir konstruieren mit Hilfe des Satzes von Runge eine Folge von Polynomen, die punktweise gegen die unstetige Funktion

$$\chi_{\{0\}}(z) := \begin{cases} 1 & , \; z = 0 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

konvergiert.

5.2.4 Beispiel. Sei

$$I_n := \big\{ z \in \mathbb{C} : \, |z| \leq n, \, d(z, [0, \infty)) \geq \frac{1}{n} \big\} \cup [\frac{1}{n}, n], \;\; K_n := I_n \cup \{0\} \, .$$

Dann ist K_n kompakt, es ist $K_n \subseteq K_{n+1}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathbb{C}$, und $\mathbb{C} \setminus K_n$ zusammenhängend. Die Funktion $\chi_{\{0\}}|_{K_n}$ ist analytisch auf K_n, also gibt es nach dem kleinen Satz von Runge Polynome p_n mit $\sup_{z \in K_n} |p_n(z) - \chi_{\{0\}}(z)| < \frac{1}{n}$. Es folgt dass

$$\lim_{n \to \infty} p_n(z) = \chi_{\{0\}}(z), \;\; z \in \mathbb{C} \, .$$

Ein dichter Teilbereich von $\mathbb{C}$ wo wir in diesem Beispiel lokal gleichmäßige Konvergenz haben, ist $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Tatsächlich konvergiert die Folge auf keiner offenen Menge die einen Punkt von $[0, \infty)$ enthält lokal gleichmäßig. Denn: Angenommen es existierte eine solche Menge O. Sei $r \in O \cap (0, \infty)$, dann ist ein ganzer Kreisbogen $\{z \in \mathbb{C} : \, |z| = r, -\delta \leq \arg z \leq \delta\}$ in O enthalten. Auf diesem konvergiert $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig. Auf dem Bogen $\{z \in \mathbb{C} : \, |z| = r, \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta\}$ ist $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ohnehin gleichmäßig konvergent, insgesamt also auf der ganzen Kreislinie mit Radius r. Nach dem Maximumprinzip konvergiert $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ daher auch auf der ganzen Kreisscheibe $U_r(0)$ gleichmäßig. Ein Widerspruch da die Grenzfunktion an der Stelle 0 unstetig ist.

Literaturverzeichnis

[BG] C.Berenstein, R.Gay: *Complex Variables,* Springer Verlag 1991.

[C] J.Conway: *Functions of one complex variable I,* 2.Auflage, Springer Verlag 1978.

[FB] E.Freitag, R.Busam: *Funktionenthoerie,* 2.Auflage, Springer Verlag 1995.

[R] R.Remmert: *Funktionentheorie 2,* Springer Verlag 1991.

Index