# Ergänzungen zur komplexen Analysis

SS 2006

Harald Woracek

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Die komplexen Zahlen

## 1.1 Eigenschaften von $\mathbb{C}$

Wir diskutieren einige Unterschiede zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Zunächst: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

LEI.1

**1.1.1 Lemma.** *$\mathbb{C}$ kann nicht zu einem angeordneten Körper gemacht werden.*

*Beweis.* In einem angeordneten Körper ist jedes Quadrat positiv. Insbesondere ist also $1 > 0$ und daher $-1 < 0$. Könnte $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper gemacht werden, so wäre $-1 = i^2 > 0$ WS!.

❑

Nun betrachten wir Körperantomorphismen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

THI.2

**1.1.2 Satz.** *Es gilt*

(*i*) *Es gibt (ausser der Identität) keinen Körperantomorphismus von $\mathbb{R}$.*

(*ii*) *Es gibt unendlich viele Körperantomorphismen von $\mathbb{C}$ (ohne Beweis).*

(*iii*) *Es gibt (ausser der Identität) genau einen Körperantomorphismus von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ (als Ganzes) fest läßt.*

*Beweis.*
`ad`($i$): Zunächst läßt jeder Körperantomorphismus $\mathbb{Q}$ elementweise fest. Da in $\mathbb{R}$ gilt

$$x \geq y \iff \exists z \in \mathbb{R} : x - y = z^2 \,,$$

erhält jeder Körperantomorphismus die Ordnung, ist also stetig. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist muß ein solcher $= id_{\mathbb{R}}$ sein.

`ad`($iii$): Wegen $\varphi(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}$ folgt aus ($i$), daß $\varphi(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Es folgt

$$\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(i)\varphi(y) = x + \varphi(i)y \,,$$

$$\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1, \text{d.h.} \varphi(i) = \pm i \,.$$

Also ist entweder $\varphi = id_{\mathbb{C}}$ oder $\varphi(z) = \overline{z}$.

`ad`($ii$): Geht mit Hilfe von Transrendenzbasen von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$.

❑

THI.3

**1.1.3 Satz.** *(Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ zerfällt in Linearfaktoren. D.h. $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. Klarerweise ist diese Aussage äquivalent zu: Jedes Polynom in $\mathbb{C}[z] \backslash \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle. Betrachtet man mit $p \in \mathbb{C}[z]$ auch das Polynom $q/z) := p(z)\overline{p(\overline{z})}$, so gilt $q(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}$, also ist $q \in \mathbb{R}[z]$. Offensichtlich ist nun die obige Aussage äquivalent zu: Jedes Polynom $q \in \mathbb{R}[z] \setminus \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle.*

*Beweis.* 1.(Argand) Wir benützen die folgenden Aussagen:

$(i)$ Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ hängt stetig von $z$ ab.

$(ii)$ Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum $K$ nimmt auf $K$ ein Minimum an.

$(iii)$ Jede komplexe Zahl hat $k - te$ Wurzeln.

Sei nun $p \in \mathbb{C}[z]\mathbb{C}$ gegeben.
$\cdot$) $\exists c \in \mathbb{C} : |p(c)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$. Denn $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 = z^n(a_n + \frac{a_n-1}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n})$. Für hinreichend großes $|z|$ ist die Klammer nahe bei $a_n(\neq 0)$, also gilt $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Sei nun $R$ so groß , daß $|p(z)| > |p(0)|$ für $|z| > R$. Dann ist $\inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| =\in_{|z|\leq R} |p(z)|$ und letzteres wird angenommen, da die abgeschlossene Kreisscheibe kompakt ist.

$\cdot$) Sei $k \geq 1$, $h(z) := +bz^k + z^k g(z)$ mit $b \in \mathbb{C} \setminus 0$, $g \in \mathbb{C}[z]$, $g(0) = 0$. Dann $\exists u \in \mathbb{C} : |h(u)| < 1$. Denn: Sei $d$ eine $k - te$ Wurzel von $\frac{1}{b}$. Für alle $t : 0 < t \leq 1$ gilt $|h(dt)| \leq |1 - t^k| + |d^k t^k g(dt)| = 1 - t^k(1 - |\frac{1}{b} g(dt)|)$. Da $g(0) = 0$ und $g$ stetig bei 0 folgt die Behauptung.

$\cdot$) Ist $p(c) \neq 0$ so $\exists c' : |p(c')| < |p(c)|$. Denn: setze $h(z) := \frac{p(c+z)}{p(c)} = 1 + b_k z^k + z^k(b_{k+1} z + \ldots + b_n z^{n-k})$ mit $b_k \neq 0$. Nach dem gerade bewiesenen gibt es ein $u$ mit $|h(u)| < 1$, also ist $|p(c + u)| < |p(c)|$.

$\cdot$) Wegen dem ersten Teil dieses Beweises folgt, daß $\exists c : |f(c)| = 0$, d.h. $f(c) = 0$.

❑

Dieses Verfahren ist nicht konstruktiv, kann aber zu einem Algerithmus verbessert werden.

REa

*1.1.4 Bemerkung.* (M.W.Hirsch, St.Smale,1979) Konstruieren einen Algerithmus, so daß für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z] \setminus \mathbb{C}$ und für beliebigen Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produziert wird, welche gegen eine Nullstelle von $p$ konvergiert. Genauer gilt sogar

$$|p(z_n)| \leq K^n |f(z_0)|, n \in \mathbb{N}$$

mit einer Konstanten $K < 1$ die nur von Grad des Polynomes $p$ abhängt.

*Beweis.* 1.(Laplace) Wir benutzen die folgenden Aussagen:

$(i)$ Jedes reelle Polynom mit ungeraden Grad hat eine reelle Nullstelle (*ii*) Zu jedem nicht konstanten reellen Polynom $p$ gibt es einen Oberkörper $K \geq \mathbb{R}$ in dem $p$ in Linearfaktoren zerfällt.

(*iii*) Hauptsatz über symmetrische Funktionen: Sei

$$\prod_{k=1}^{n}(z-\zeta_k) = z^n - \eta_1 z^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \eta_n\,,$$

dann ist jedes symetrische Polynom in $\mathbb{R}[\zeta_1, \ldots, \xi_n]$ ein Polynom in $\mathbb{R}[\eta_1, \ldots, \eta_n]$.

(*iv*) Jedes quadratische Polynom in $\mathbb{C}[z]$ zerfällt in Linearfaktoren. Sei nun $h(z) = z^n - b_1 z^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n b_n \in \mathbb{R}[z]$ gegeben. Wir schreiben $n = 2^k q$ mit $2 \chi q$ und verwenden Induktion nach $k$. Der Induktionsanfang ist gerade $(i)$. Sei also $k \geq 1$.

Für gewisse Elemente $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in K$ (Zufällungskörper) gilt

$$h(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\zeta_k)\,.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ betrachte das Polynom

$$L_t(z) := \prod_{1 \leq k < l \leq n}(z - \zeta_k - \zeta_l - t\zeta_k\zeta_l) \in K[z]\,.$$

Bei Permutationen von $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ bleibt $L_t$ invariant, also sind seine Koeffizienten symetrische (reelle) Polynome in $\zeta_k$ und damit in $b_k$. Es folgt $L_t \in \mathbb{R}[z]$. Der Grad von $L_t$ ist $\frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}q(2^k_{q-1})$, also hat $L_t$ nach Induktionsvoraussetzung eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. $\exists$ Index $(k,l)$, so daß $\zeta_k + \zeta_l + t\zeta_k\zeta_l \in \mathbb{C}$. Da es nur endlich viele Indius aber unendlich viele reelle Zahlen $t$ gibt, $\exists r \neq s$, $(k,l)$, so daß

$$\zeta_k + \zeta_l + r\zeta_k\zeta_l \in \mathbb{C}, \zeta_k + \zeta_l + s\zeta_k\zeta_l \in \mathbb{C}\,,$$

damit ist aber $\zeta_k\zeta_l$, $\zeta_k + \zeta_l \in \mathbb{C}$. Also sind $\zeta_k$, $\zeta_l$ die Nullstellen des Polynoms

$$z^2 - (\zeta_k + \zeta_l)z + \zeta_k\zeta_l \in \mathbb{C}[z]\,,$$

sind also selbst in $\mathbb{C}$.

❑

*Folgerung I.4* Jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ ist entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. D.h. insbesondere, daß man am $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, keine Multiplikation definieren kann, die $\mathbb{R}^n$ zu einem Körper macht.

## 1.2 Reelle Divisionsalgebra

DEI.5

**1.2.1 Definition.** Sei $V$ ein Vektorenraum über $\mathbb{R}$ und sei auf $V$ eine Multiplikation definiert die den Distributivgesetzen

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz), x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)\,,$$

$x, y : z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, genügt. Dann heißt $V$ eine reelle Algebra.

Es werden viele zusätzliche Eigenschaften von reellen Algebren als Gesetze formuliert und benannt:

DEI.6

**1.2.2 Definition.** Sei $V$ eine reelle Algebra. $V$ heißt

$(i)$ assoriative $:\iff \forall x,y,z\in V : x(yz)=(xy)z$.

$(ii)$ kommutative $:\iff \forall x,y\in V : xy=yx$.

$(iii)$ Algebra mit Eiserelement $:\iff \exists e\in V:\forall x\in V : Xe=ex=x$.

$(iv)$ nullteilerfrei $:\iff \forall x,y\in V : xy=0\Rightarrow x=0vy=0$.

$(v)$ ] quadratisch $:\iff$ $V$ ist Algebra mit Einzelelement $e$, und jedes Element $x\in V$ genügt einer Gleichung der Gestalt $x^2=\alpha e+\beta x$ mit gewissen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$(vi)$ Divisionsalgebra $:\iff \forall a,b\in V, a\neq 0\exists|x\exists|y : ax=b, ya=b$.

Eine assoriative Divisionsalgebra mit Einzelwert (nicht notwendig kommutativ) heißt manchmal auch Schiefkörper. Dazu bemerke man:

LEI.7

**1.2.3 Lemma.** *Jede assoriative Divisionsalgebra hat ein Einserelement.*

*Beweis.* Sei $a\neq 0$, dann existiert $e\in V$ mit $ea=a$. Es ist $e\neq 0$ wegen $a\neq 0$ und es folgt $(e^2-e)a=0$, also $e^2=e$. Daher ist $e(ex-x)=(e^2-e)x=0$, also $ex=x$ für beliebiger $x\in V$. Analog folgt $xe=x$.

❑

Ein bekanntes Beispiel für einen Schiefkörper (der kein Körper ist) sind die Hamiltonschen Quaternionen. Wir definieren dazu an $\mathbb{R}^h$ m it der Basis $e:=(1,0,0,0)$, $i=(0,1,0,0)$, $j=(0,0,1,0)$, $k=(0,0,0,1)$ eine Multiplikation durch die Festlegung das $e$ ein Einselelement ist und das gilt:

$$\left\{\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & -e & k & -j \\ j & -k & -e & i \\ k & j & -i & -e \end{array}\right.$$

Diese 4-dimensionale reelle Algerba bezeichnet man mit $\mathbb{H}$. Die Tatsache, daß $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist folgt aus dem nächsten Lemma.

LEI.8

**1.2.4 Lemma.** *Die Abbildung*

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\mapsto\begin{pmatrix}\alpha+i\beta & - & (\gamma+i\delta)\\ \gamma-i\delta & & \alpha-i\beta\end{pmatrix}$$

*ist ein injektiver Homomorphismus von $\mathbb{H}$ in den Ring der komplexen 2x2-Matrizen. Insbesondere ist $\mathbb{H}$ Schiefkörper.*

*Beweis.* Es gilt:

$$e\mapsto\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), i\mapsto\left(\begin{smallmatrix}i&0\\0&-i\end{smallmatrix}\right), j\Rightarrow\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right), k\mapsto\left(\begin{smallmatrix}0&-0\\-i&0\end{smallmatrix}\right),$$

und man rechnet unmittelbar nach, daß die Matrizen der gleichen Operationstafel genügen wie $i,j,k$.

Das Bild von $\mathbb{H}$ ist die Menge aller komplexen $2x2$-Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, $\pm, e \in \mathbb{C}$. Da dort $\left(\begin{smallmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right) = |z|^2 + |w|^2$ ist und die Inverse wieder diese Gestalt hat ist dieser Unterring sogar ein Schiefkörper.

❑

Ist $V$ eine beliebige Algebra mit Einselement und genügen $u, v, w \in \mathcal{A}$, der Operationstafel von $i, j, k$, so heißt $(u, v, w)$ ein Hamiltonsches Tripel.

Die Menge $\operatorname{Im} V := \{x \in V | x^2 \in \mathbb{R}e,\ x \notin \mathbb{R}e \setminus 0\}$ heißt der Imaginärraum von $V$. Klarerweise $\operatorname{Im} V$ bzgl. skalarer Multiplikation abgeschlossen, i.a. jedoch nicht bzgl. Addition.

RE0

*1.2.5 Bemerkung.* Ist $V$ nullteilerfrei, $u \neq 0$, $u \in \operatorname{Im} V$, $u^2 = \alpha, e$, so ist $\alpha < 0$. Denn: angenommen $\alpha > 0$, $\alpha = \beta^2$, dann folgt $(u - \beta e)(u + \beta e) = u^2 - \beta^2 = 0$, ein WS! da $u \neq \pm\beta e$.

LEI.9

**1.2.6 Lemma.** *Sei $V$ nullteilerfrei, $(u, v, w)$ ein Hamiltonsches Tripel, dann gilt*

*(i) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{H} \to V$, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w$, ist ein injektiver Homomorphismus.*

*(ii)* $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \leq \operatorname{Im} V$.

*Beweis.*
`ad`$(i)$: Klarerweise ist $\varphi$ ein Homomorphismus. Er ist genau dann injektiv, wenn die Elemente $e, u, v, w$ linear unabhängig sind.
·) $u, v$ sind linear unabhängig: Angenommen $u = \alpha v \Rightarrow uv = vu \Rightarrow w = -w$ d.h. $w = 0$ WS!.

·) $e, u, v$ sind linear unabhängig: Angenommen $v = \alpha e + \beta u$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow 2\alpha\beta u = v^2 - \alpha^2 e - \beta^2 u^2 \in \mathbb{R}e$ WS!

·) $e, u, v, w$ sind linear unabhängig: Angenommen nicht, dann gibt es eindeutige Zahlen $g, \sigma, \tau \in \mathbb{R} : w = ge + \sigma u + \tau v$. Wegen $w = uv$, folgt $-v = gu - \sigma e + \tau w$, also

$$w = (g + \sigma)e + (\sigma - g)u - \tau^2 w\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt $\tau^2 = -1$ WS!.

`ad`$(ii)$: Es gilt $(\beta u + \gamma v + \delta w)^2 \in \mathbb{R}e$ durch nachrechnen.

❑

LEI.10

**1.2.7 Lemma.** *Sei $V$ eine nullteilerfreie assoriative reelle Algebra mit Einselement $e$. Ist $U \leq \operatorname{Im} V$ ein 2-dimensionaler Unterraum und $u \in U$, $u^2 = -e$, so gibt es $v \in U$ so daß $u, v, uv$ ein Hamiltonsches Tripel ist.*

*Beweis.* Wähle $x \in U$, so daß $u, x$ linear unabhängig sind. Dann gilt da $x + u \in U \leq \operatorname{Im} V$ ist:

$$\beta e = (e + x)^2 = u^2 + x^2 + (ux + xu)\,,$$

also $ux + xu = \gamma e$ Setze $v = x + \frac{\gamma}{2}u$, dann ist $uv = -vu$. Weiters können wir annehmen, daß $v^2 = -e$, denn sonst multipliziere man $v$ mit einem $\lambda > 0$.

Es ist $u, v, w := uv$ ein Hamiltonsches Tripel. Denn:

$$\begin{array}{lllllll} vw & = & v(uv) & = & -v(vu) & = & -v^2u = u, \\ wv & = & (uv)v & = & uv^2 & = & -u, \\ wu & = & (uv)u & = & -vu^2 & = & v, \\ uw & = & u(uv) & = & u^2v & = & -v, \\ vw^2 & = & uw & = & -v, & \text{also} & v(w^2+e) = 0 \Rightarrow w^2 = -e. \end{array}$$

❑

Wie bemerkt ist $\operatorname{Im} V$ im allgemeinen kein Unterraum von $V$. Wir werden sehen, daß dies bei quadratischen Algebren doch der Fall ist. Zunächst zeigen wir, daß "quadratisch" kein seltener Begriff ist.

LEI.11

**1.2.8 Lemma.** *Jede endlich dimmensionale assoriative Divisionsalgebra ist quadratisch.*

*Beweis.* Betrachte den Einsatzhomomorphismus $\varphi_x$ von $\mathbb{R}[z] \to V$, d.h. für $x \in V$ ist $\varphi_x(p(z)) := p(x)$. Da $V$ nullteilerfrei ist, ist $ker\ \varphi_x$ ein Primideal. Da $\mathbb{R}[z]$ ein Hauptidealring ist, gibt es ein Primpolynom $p \in \mathbb{R}[z]$, so daß $ker\ \varphi = (p)$. Reelle Primpolynome sind aber linear oder quadratisch.

❑

LEI.12

**1.2.9 Lemma.** *Ist $V$ quadratisch, so ist $ImV$ ein Unterraum von $V$ und es gilt $V = \mathbb{R}e \oplus ImV$.*

*Beweis.*
·) Seien $u, v \in mV$ linear unabhängig. Es gelten Beziehungen $/u+v)^2 = \alpha_1 e + \beta_1(u+v)$, $(u-v)^2 = \alpha_2 e + \beta_2(u-v)$, und es folgt

$$(\beta_1 + \beta_2 u + (\beta_1 - \beta_2)v = 2u^2 + 2v^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)e \in \mathbb{R}e\,.$$

Wie wir im Beweis von Lemma 1.2.6 gesehen haben sind $u, v, e$ linear unabhängig, also ist $\beta_1 = \beta_2 = 0$ d.h. $(u+v) \in ImV$.

·) Sei $x \in V$, $x \notin \mathbb{R}$. Es gilt $x^2 = \alpha e + 2\beta x$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, also

$$(x - \beta e)^2 = x^2 - 2\beta x + \beta^2 e = (\alpha + \beta^2)e \in \mathbb{R}e\,,$$

d.h. da $x - \beta e \notin \mathbb{R}e$, daß $x - \beta e \in ImV$.

❑

THI.13

**1.2.10 Satz.** *(Frobenius) Sei $V$ eine nullteilerfreie, assoriative und quadratische reelle Algebra (z.B. eine endlichdimensionale assoriative Divisionsalgebra). Dann ist $V \cong \mathbb{C}$ oder $V \cong \mathbb{H}$.*

*Beweis.*
·) Ist $dimV = 1$, so ist trivialerweise $V \cong \mathbb{R}$. Ist $dimV = 2$, so $\exists u \in V$ mit $u^2 = -e$ und es ist $V = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}u$, also ist $V \cong \mathbb{C}$.

$\cdot$) Sei $dimV \geq \exists$. Dann ist $dimImV \geq 2$ also gibt es wegen Lemma 1.2.7 ein Hamiltonscher Tripel $u, v, w \in ImV$. Sei $x \in ImV$, da $v, u, w, \substack{w+x \\ u+x \\ v+x} \in ImV$ folgt

$$xu + ux \in \mathbb{R}e, xv + vx \in \mathbb{R}e, xw + wx \in \mathbb{R}e\,.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $V$ von rechts die zweite mit $u$ von links, so folgt $xw - wx \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, also mit der dritten Gleichung $xw \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}e$ und damit

$$x \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w\,,$$

d.h. $ImV = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}e$ und damit $V \cong \mathbb{H}$.

❑

# Kapitel 2

# Runge-Theorie

## 2.1 Der Polverschiebungssatz

Ist $B$ eine Kreisscheibe, so werden alle in $B$ holomorphen Funktionen durch ihre Taylor-Polynome kompakt approximiert. Das ist für allgemeine Gebiete nicht richtig: Ist zum Beispiel $K = \{|z| = 1\}$ und $f(z) = \frac{1}{z}$, so ist $f$ analytisch auf $K$ (d.h. in einer gewissen Umgebung von $K$), kann jedoch sicher nicht gleichmäßig durch Polynome approximiert werden denn $\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i$. Es stellt sich also die Frage:
Sei $D$ ein Gebiet, $K \leq D$ ein Kompaktum. Wann sind alle auf $K$ analytischen Funktionen gleichmäßig durch in $D$ analytische Funktionen approximierbar ?
Oder: Wo muß man Singularitäten zulassen, so daß jede auf $K$ holomorphe Funktion approximierbar ist ?

Wir benötigen eine allgemeine Version der Cauchyschen Integralformel. Zunächst: REc

*2.1.1 Bemerkung.* Sei $\mathbb{R}$ ein kompaktes Rechteck in einem Gebiet $D$. Dann gilt für jede Funktion $f$ analytisch auf $R$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z), z\in \dot{R} \\ o, z \notin R \end{cases}.$$

LEII.1

**2.1.2 Lemma.** *Sei $K (\neq \emptyset)$ ein Kompaktum im Gebiet $D$. Dann gibt es endlich viele verschiedene, orientierte, horizontale oder vertikale Strecken $\sigma^1 \ldots, \sigma^n$ gleichen Länge in $D \setminus K$, so daß für jede in $D$ analytische Funktion $f$ gilt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{\sigma^\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, z \in K\,.$$

*Beweis.*
$\cdot$) oBdA sei $D \neq \mathbb{C}$. Da $K$ kompakt ist, gilt $d(K, \partial D) > 0$. Wir legen ein achsenparalleles Gitter kompakter Quadrate (d.h. Randstrecken sind dabei). auf die Ebene. Die Maschenweite $d$ sei $< \frac{d(K,\partial D)}{\sqrt{2}}$. Da $K$ kompakt ist, wird $K$ nur von endlich vielen Gitterquadraten getroffen: $Q^1, \ldots, Q^k$ Es gilt:

$$K \subseteq_{\nu=1}^{k} Q^k \subseteq D\,.$$

Dabei ist die linke Inklusion klar, die rechte folgt da die Maschenweite hinreichend klein gewählt wurde.

·) Wir betrachten nun diejenigen Strecken $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ die Teile von $\partial Q^k$ sind, aber nicht als gemeinsame Seite von zwei Quadraten vorkommen. Die Orientierung erhalten sie von einer positiven Orientierung des Randes der Quadrate.Es ist $\bigcup_{\nu=1}^n \sigma^\nu \leq D \setminus K$, denn hätte ein $\sigma^\nu$ mit $K$ einen Punkt gemeinsam, so wäre auch das angrenzende Quadrat ein $Q^p$, ein Widerspruch ur Wahl von $\sigma^\nu$. Da gemeinsame Seiten verschiedener Gitterquadrate in entgegengesetzer Orientierung durchlaufen werden, folgt

$$\sum_{\mu=1}^{k} \int\limits_{\partial Q^\mu} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\sigma^\nu} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in D \setminus \bigcup_{\mu=1}^{k} \partial Q^\mu .$$

·) Sei $\mathbb{Z} \in \dot{Q}^\ell$, so gilt

$$\int\limits_{\partial Q^k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \{^{f(z), k=l 0, k \neq l},$$

also folgt die Behauptung für $z \in \bigcup_{\mu=1}^k \dot{Q}^\mu$. Da die Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens stetige Funktionen von $z$ in $D \setminus \bigcup_{\nu=1}^n$ sind, folgt die Behauptung auch für $z \in \bigcup_{\mu-1}^k Q^\mu \setminus \bigcup_{\nu=1}^n \sigma^\nu$, insbesondere also für $z \in K$.

❑

LEII.2

**2.1.3 Lemma.** *Es gibt endlich viele Strecken $\sigma^1, \ldots, \sigma^n \leq D \setminus K$, sodaß jede in $D$ analytische Funktion gleichmäßig auf $K$ durch rationale Funktionen der Gestalt*

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{C\alpha}{z - w_\alpha}, c_\alpha \in \bigcup_{\nu=1}^{n} \sigma^{nu},$$

*approximiert werden kann.*

*Beweis.* Nach Lemma 2.1.2 gilt für $z \in K : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^n \int\limits_{\sigma^\nu} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, für gewisse Strecken $\sigma^\nu$. Wir zeigen, daß man jedes der Integrale gleichmäßig approximieren kann.

Die Funktion $v = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist stetig auf der kompakten Menge $\sigma x K$, also ist sie dort gleichmäßig stetig. Insbesondere gilt: zu $\epsilon > 0$ existiert $\sigma > 0$, so daß

$$|v(\zeta, z) - v(\zeta', z)| \leq \epsilon \forall \zeta, \zeta \in \sigma, z \in K \text{mit } |\zeta - \zeta'| \leq \delta .$$

Unterteilt man $\sigma$ in Teilstrecken $\pi^j$ der Länge $\leq \delta$, und ist $w_j \in \Pi^j$, so folgt $(c_j = -f(w_j) \int\limits_{\pi^j} d\zeta)$

$$\Big| \int\limits_{\pi^j} v(\zeta, z) d\zeta - \frac{c_j}{z - w_j} \Big| = \Big| \int\limits_{\pi^j} (v(\zeta, z) - v(w_j, z)) d\zeta \Big| \leq$$

$$\leq \epsilon \cdot L(\pi^j) .$$

Insgesamt folgt für jedes $z \in K$:

$$\Big| \int\limits_{\sigma} v(\zeta, z) d\zeta - \sum \frac{c_j}{z - w_j} \leq \epsilon \cdot L(\sigma) \,.$$

❑ REd

*2.1.4 Bemerkung.* Die Lage der Pole der approximierenden Funktion hängt im folgenden Sinn nicht von $\epsilon$ ab: Es werden zwar mehr Pole, je kleiner $\epsilon$ ist, sie rücken aber nicht näher an $K$ heran, da sie ja stets in $\bigcup \sigma^{\nu}$ liegen.

Das folgende Lemma zeigt, daß sich die Lage der Pole noch besser kontrollieren läßt: sie können in gewisse einzelne Punkte verschoben werden. LEII.3

**2.1.5 Lemma.** *(Polverschiebungssatz) Seien $a, b$ Punkte aus einer (Zusammenhang) Komponente von $\mathbb{C}\setminus K$. Dann ist $\frac{1}{z-a}$ auf $K$ gleichmäßig durch Polynome in $\frac{1}{(z-b)}$ approximierbbar. Ist $Z$ die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist $\frac{1}{z-a}$ auf $K$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar (d.h. der Pol $a$ kann nach $\infty$ verschoben werden).*

*Beweis.* Für $w \notin K$ bezeichne $L_w$ die Menge aller auf $K$ analytischen Funktionen, welche auf $K$ gleichmäßig durch Polynome in $\frac{1}{z-w}$ approximierbar sind.

Dieser Begriff ist im folgenden Sinne transitiv:

$$\frac{1}{z-s} \in L_c, \frac{1}{z-c} \in L_b \Rightarrow \frac{1}{z-s} \in L_b \,.$$

Sei nun $Z$ eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus K, S = \{s \in Z | \frac{1}{z-s} \in L_b\}$. Diese Menge ist nicht leer, denn $b \in S$ und abgeschlossen in $\mathbb{C} \setminus K$. Es genügt also zu zeigen, daß sie offen ist:
$\cdot$) Ist $c \in S$ und $\overline{B} \subseteq Z$ eine Scheibe um $c$, so ist $B \subseteq S$. Sei $s \in B$, dann konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum \frac{(s-c)^{\nu}}{(z-c)^{\nu+1}}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$, wegen $\overline{B} \cap K = \emptyset$ also gleichmäßig auf $K$ und zwar gegen $\frac{1}{z-s}$. Es folgt $\frac{1}{z-s} \in L_c$ und wegen der Transitivität $s \in S$.

Ist $Z$ die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so gibt es einen Punkt $d \in Z$ mit $K \subseteq \{|z| < |d|\}$. Dann ist $\frac{1}{z-d}$ auf $K$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar, nach den oben bewiesenen also auch $\frac{1}{z-a}$.

❑ REe

*2.1.6 Bemerkung.* Die Voraussetzung im Polverschiebungssatz das $a$ und $b$ in der gleichen Komponente liegen ist notwendig (das sie nicht völlig unnötig ist zeigt schon das Beispiel $\frac{1}{z}, K = \{|z| = 1\}$).
Denn es gilt die folgende Aussage:

> Sei $Z$ eine Komponente von $\mathbb{C}\setminus K, a \in Z, b \notin KuZ, \delta = \lim\limits_{z \in K} |z-a| (> 0)$. Dann ist $\lim\limits_{z \in K} |\frac{1}{z-a} - g(z)| \geq \frac{1}{\delta}$ für jedes Polynom $g$ in $\frac{1}{z-b}$.

Zum Beweis bemerke zunächst, daß $\partial Z \leq K$. Gäbe es ein $g$ mit $\sup\limits_{z \in K} \frac{1}{z-a} - g(z)| < \frac{1}{\delta}$, so wäre ($|z-a| \leq \delta$) auch $\sup\limits_{z \in K} |1 - (z-a) g(z)| < 1$. Da $g$ in $\overline{Z}$ beschränkt ist dürfen wir das Maximumsprinzip auf $\overline{Z}$ anwenden und es folgt $\sup\limits_{z \in Z} |1 - (z-a) g(z)| < 1$ ein WS! da $a \in Z$ liegt.

## 2.2 Approxomationssätze von Runge

Sei $P \subseteq \mathbb{C}$, dann ist die Menge $\mathbb{C}_p[z]$ aller rationalen Funktionen deren Rolle alle in $P$ liegen eine Teilalgebra der in $\mathbb{C} \setminus \overline{P}$ analytischen Funktionen.

THII.4

**2.2.1 Satz.** *Es gilt:*

(*i*) *(Approximationssatz 1.Fassung) Trifft $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$, so ist jede auf $K$ analytische Funktion auf $K$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathbb{C}_p[z]$ approximierbar.*

(*ii*) *(Approximationssatz 2.Fassung) Ist $K$ ein Kompaktum im Gebiet $D$ und trifft jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ die Menge $\mathbb{C} \setminus D$,l so ist jede auf $K$ analytische Funktion auf $K$ gleichmäßig durch rationale Funktionen approximierbar, die alle analytisch in $D$ sind.*

(*iii*) *(Kleiner Satz von Runge) Ist $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, so ist jede auf $K$ analytische Funktion auf $K$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar.*

*Beweis.*
`ad`$(i)$: Sei $f$ analytisch auf $K$, d.h. analytisch in einer gewissen Umgebung von $K$. Nach Lemma 2.1.3 gibt es ein zu $K$ disjunktes Kompaktum $L$, so daß $f$ auf $K$ gleichmäßig durch rationale Funktionen der Gestalt $\sum \frac{c_j}{z-w_j}, w_j \in L$, approximiert wird. Ist ein $w_j$ in einer beschränkten Komponente $Z_j$ von $\mathbb{C} \setminus K$, so existiert nach VS! ein $t_j \in PZ_j$, nach dem Polverschiebungssatz kann der Summand $\frac{c_j}{z-w_j}$ auf $K$ gleichmäßig durch Polynome in $\frac{1}{z-t_j}$ approximiert werden. Liegt $w_j$ in der unbeschränkten Komponente von $K$, so kann man sogar durch Polynome approximieren. Insgesamt finden wir eine Approximierende in $\mathbb{C}_p[z]$.

`ad`$(ii)$: Man kann in $(i)$ die Menge $P$ ausserhalb von $D$ wählen.

`ad`$(iii)$: Klar aus dem obigen für $D = \mathbb{C}$.

❑

COII.5

**2.2.2 Korollar.** *Es gilt:*

(*i*) *Sei $K \neq \{|z| = 1\}$ ein nichtleeres Kompaktum in $\{|z| = 1\}$, dann gibt es ein Polynom $P$ mit $P(0) = 1$, $\sup_{z \in K} |P(z)| < 1$.*

(*ii*) *Sei $K$ ein Kompaktum, so daß $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist. Weiters seien $z_1, \ldots, z_n \in K$ und $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{N}$. Jede auf $K$ analytische Funktion kann durch Polynome $p$ auf $K$ gleichmäßig approximiert werden, so daß jedes $f - p$ in $z_j$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq L_j$ hat.*

*Beweis.*
`ad`$(i)$: Die Funktion $-\frac{1}{z}$ ist analytisch auf $K$ und da $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängt gibt es ein Polynom $\tilde{P}$ mit $\sup_{z \in K} |\tilde{P} + \frac{1}{z}| < 1$. Die Behauptung folgt mit $P := 1 + z\tilde{P}$.

`ad`$(ii)$: Wähle ein Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{C}[z]$ so daß $f - \tilde{p}$ bei $z_j$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq L_j$ hat. Dann ist die Funktion

$$F(z) := \frac{f(z) - \tilde{p}(z)}{\Pi_{j=1}^n (z - z_j)^{L_j}}$$

analytisch auf $K$. Da $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend existieren Polynome $p$ die $F(z)$ approximieren. Da $\Pi_{j=1}^{n}(z - z_j)^{L_j}$ auf $K$ beschränkt ist, approximieren die Polynome $\tilde{p}(z) + \Pi_{j=1}^{n}(z - z_j)^{L_j} \cdot p(z)$ auf $K$ gleichmäßig die Funktion $f$.

❑

LEII.6

**2.2.3 Lemma.** *Es gilt für ein Kompaktum K im Gebiet D:*

($i$) *Für jede Komponente $Z$ von $D \setminus K$ gilt $\partial Z \cap D \subseteq K$. Liegt $Z$ relativ kompakt in $D$ (d.h. $\exists$ Kompaktum $L \subseteq D$ mit $Z \subseteq L$), so gilt $\sup\limits_{z \in Z} |f(z)| = \sup\limits_{z \in K} |f(z)|$ für jede in $D$ analytische Funktionen.*

($ii$) *Jede Komponente $Z_0$ von $\mathbb{C} \setminus K$, die in $D$ liegt, ist eine Komponente von $D \setminus K$. Ist $Z_0$ zusätzlich beschränkt, so liegt $Z_0$ relativ kompakt in $D$.*

*Beweis.*
`ad`$(i)$: Die erste Aussage ist klar. Sei $Z$ also relativ kompakt in $D$, dann gilt $\partial Z \subseteq D$ also folgt die Behauptung aus dem Maximumsprinzip.

`ad`$(ii)$: Da $Z_0$ ein Gebiet in $D \setminus K$ ist, gibt es eine Komponente $Z_1$ von $D \setminus K$ mit $Z_1 \geq Z_o$. Da $Z_1$ ein Gebiet in $\mathbb{C} \setminus K$ ist, folgt wegen der Maximalität von $Z_0$ daß $Z_1 = Z_0$ ist. Ist $Z_0$ beschränkt, so ist $\overline{Z_0} = Z_0 \partial Z_0$ kompakt. Da $\partial Z_0 \subseteq K$ (wegen $(I)$ mit $D = \mathbb{C}$) folgt $\overline{Z_0} \subseteq DuK \subseteq D$.

❑

THII.7

**2.2.4 Satz.** *(Hauptsatz) Sei $K$ ein Kompaktum im Gebiet $D$. Dann sind äquivalent:*

($i$) *Der Raum $D \setminus K$ hat keine in $D$ relativ kompakte Komponente.*

($ii$) *Jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ trifft $\mathbb{C} \setminus D$.*

($iii$) *Jede auf $K$ analytische Funktion ist auf $K$ gleichmäßig durch rationale Funktionen ohne Pole in $D$ approximierbar.*

($iv$) *Jede auf $K$ analytische Funktion ist auf $K$ gleichmäßig durch in $D$ analytische Funktionen approximierbar.*

($v$) *Zu jedem $c \in D \setminus K$ gibt es eine in $D$ analytische Funktion $h$, so daß $|h(C)| \geq \sup\limits_{z \in K} |h(z)|$.*

*Beweis.*
$(i) \Rightarrow (ii)$ Klar wegen Lemma 2.2.3$(ii)$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Satz 2.2.1$(ii)$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ trivial

$(iv) \Rightarrow (i)$ Ist wegen Lemma 2.2.3$(i)$ genauso zu beweisen wie die Bemerkung am Ende von Abschnitt 1.

$(i) \Rightarrow (v)$ Der Bereich $D \setminus (Ku\{c\}$ hat die reellen Komponenten wie $D \setminus K$ bis auf eine, aus der $c$ entfernt ist. Also gilt $(i)$ und damit auch $(iv)$ auch für $Ku\{c\}$ statt $K$. Zu der Funktion $g(z) := \{ \begin{smallmatrix} o, z \in K \\ 1, z=c \end{smallmatrix}$ gibt es also eine in $D$ analytische Funktion $h$ mit $\sup\limits_{z \in K} |h(z)| < \frac{1}{2}$, $|1 - h(c)| < \frac{1}{2}$. Es folgt $|h(c)| > \frac{1}{2}$, also $(v)$.

$(v) \Rightarrow (i)$ Hätte $D \setminus K$ eine in $D$ relativ kompakte Komponente $Z_0$, so wäre wegen Lemma 2.2.3$(i)$ die Bedingung $(v)$ für jedes $c \in Z_0$ verletzt.

❑

COII.8

**2.2.5 Korollar.** *Es gilt:*

$(i)$ *(Präzisierung von kleinen Satz von Runge) Genau dann ist jede auf $K$ analytische Funktion auf $K$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar, wenn $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängt. Das ist genau dann der Fall, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C} \setminus K$ ein Polynom $p$ mit $|p(c)| > \sup\limits_{z \in K} |p(z)|$ gibt.*

$(ii)$ *Ist $P \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ so, daß jede auf $K$ analytische Funktion auf $K$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathbb{C}p[z]$ approximierbar ist, so trifft $P$ jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$.*

*Beweis.*
`ad`$(i)$: $\mathbb{C} \setminus K$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $\mathbb{C} \setminus K$ keine in $\mathbb{C}$ relative kompakte Komponente hat. Da jede in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion kompakt durch Taylor-Polynome approximierbar ist folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.2.4.

`ad`$(ii)$: Wegen des Polverschiebungssatzes können wir annehmen, daß $P$ jede Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ in höchstens einem Punkt trifft. Dann ist $D = \mathbb{C} \setminus P$ ein Bereich mit $K \subseteq D$. Da jede Funktion aus $\mathbb{C}_p[+]$ analytisch in $D$ ist $(\overline{P} = P)$ so wird wegen Satz 2.2.4$(iv) \Rightarrow (ii)$ jede beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ von $\mathbb{C} \setminus D = P$ getroffen.

❑

## 2.3 Eine Anwendung

Man konstruiert leicht Folgen stetiger Funktionen die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergieren. Wir konstruieren im folgenden eine Polynomfolge (d.h. sogar Folge analytischer Funktionen) die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergiert.

THII.9

**2.3.1 Satz.** *Es gibt eine Folge von Polynomen $p_n$, mit den folgenden Eigenschaften:*

$(i)$ $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(0) = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(z) = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$(ii)$ $\lim\limits_{n \to \infty} p_n^{(k)}(z) = 0$ *für jeden Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *und jedes* $k >, 1$.

$(iii)$ *Jede Folge* $(p_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert kompakt in* $\mathbb{C} \setminus \{x >, 0\}$. *Keine dieser Folgen konvergiert kompakt in einer Umgebung eines Punktes* $x >, 0$.

*Beweis.* Wir setzen $I_n := \{|z| \leq n, d(z, \mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{4}\}$, $K_n := \{0\}u[\frac{1}{4}, n]uI_n$, $n \geq 1$.
——————————S k i z z e—————-

Wir legen kompakte Rechtecke $\mathbb{R}_n$ bzw. $S_n$ um $\{0\}$ bzw. $[\frac{1}{4}, n]$, so daß gilt: Die Mengen $\mathbb{R}_n, S_n, I_{n+1}$ sind paarweise disjunkt. Das Kompaktum $L_n := \mathbb{R}_n u S_n u I_{n+1}$ ist eine Umgebung von $K_n$, die Menge $\mathbb{C} \setminus L_n$ hängt zusammen.

Die durch $g_n(z) = \{^{0, z \in L_n}_{1, z \in \mathbb{R}_n} \setminus \mathbb{R}_n$ definierte Funktion ist auf $L_n$ analytisch, also gibt es ein Polynom $p_n$, so daß

$$\sup \\ z \in L_n |g_n(z) - p_n(z)| \leq \tfrac{1}{4} .$$

Da $g_n' \equiv 0$ auf $L_n$ ist kann man sogar stärker approximieren, so dass gilt:

$$\sup \\ z \in K_n |p_n^{(k)}(z) \leq \tfrac{1}{4} \text{für} k = 1, \ldots, n .$$

Das folgt aus den Cauchy'schen Abschätzungen für die Ableitungen.

$$f^{(k)}(z) = \frac{k'}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^{k+1}} d\zeta$$

Da $z \in K_n$ ist $|z - \zeta|$ nach unten beschränkt wenn Integratisierung in $L_n$. Da $k$ höchstens $n$ ist, ist $p_n^{(k)}$ nahe bei $g_n^{(k)}$ für $z \in K_n$ und $k = 1, \ldots, n$ gln..

Nach Konstruktion konvergieren die $(p_n^{(k)})$ in $\mathbb{C} \setminus \{x \geq 0\}$ kompakt. Wäre sie in einer Scheibe um ein $x \geq 0$ kompakt konvergent, so auch auf der Linie $|z| = x$, also wegen dem Maximumsprinzip in einer Scheibe um 0, ein WS!

❑

Die Folge $p_n$ konvergiert zwar nicht im ganzen Analytiritätsgebiet ($= \mathbb{C}$) kompakt, aber zumindest auf einem dichten Teilgebiet ($\mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$). Das ist kein Zufall, wie der folgende Satz zeigt.

THII.10

**2.3.2 Satz.** *(Osgard) Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von in $D$ analytischen Funktionen, die in $D$ punktweise gegen eine Funktion $f$ konvergiert. Dann konvergiert diese Folge in einem Teilbereich $D'$ von $D$, das dicht in $D$ liegt kompakt. Insbesondere ist $f$ in $D'$ analytisch.*
*Wir verwenden im Beweis den Satz von Vitali:*

THII.11

**2.3.3 Satz.** *(Vitali) Sei $G$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine lokal beschränkte Folge von in $D$ analytischen Funktionen. Die Menge*

$$A := \{w \in G | \lim_{n \to \infty} f_n(w) \textit{existiert in } \mathbb{C}\}$$

*der Konvergenzpunkte habe einen Häufungspunkt in $G$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kompakt in $G$.*

*Beweis.* Auf Grund des Satzes von Montal genügt es zu zeigen, daß je zwei kompakt konvergente Teilfolgen den selben Limes haben. Das folgt aus dem Identitätssatz da $A$ nach VS! einen Häufungspunkt $G$ hat.

❑

Wir benötigen noch das folgende:

LEII.12

**2.3.4 Lemma.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie stetiger Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, die in $D$ punktweise beschränkt ist. Dann gibt es einen dichten Teilbereich $D'$ von $D$, so daß die auf $D'$ eingeschränkte Familie $\{f|_{D'} | f \in \mathcal{F}\}$ in $D'$ lokal beschränkt ist.*

*Beweis.* Wir betrachten die Mengen ($n \in \mathbb{N}$)

$$T_u := \{z \in D | \forall f \in \mathcal{F}_i |f(z)| \leq n\}$$

Da alle $f\mathcal{F}$ stetig sind, sind die Mengen $T_n$ abgeschlossen in $D$. Da jeder Punkt $z \in D$ wegen der punktweisen Beschränktheit in einen $T_n$ liegt folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_u = D$. Nach dem Dichte-Satz von Baire (siehe z.B. "Querelung: Mengentheoretische Topologie. $X$ lokal kompakt, $T_1, T_2$, abg.$X = UT_i, U$ offen $\Rightarrow \exists j : \bigcup \cap T_j^\circ \neq \emptyset$) folgt, daß für jede Kreisscheibe $B \subseteq D$ die Menge $B \cap \dot{T}_n$ für große $n$ nie leer ist. Daher ist $D' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \dot{T}_n$ ein dichter Teilbereich von $D$. Da $\mathcal{F}$ in $\dot{T}_n$ durch $n$ bschränkt ist, ist $\mathcal{F}$ auf $D'$ lokal beschränkt.

❑

*Beweis. (Satz 2.3.2)* Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ist wegen der punktweisen Konvergenz punktweise beschränkt in $D$. Nach Lemma 2.3.4 also in $D'$ lokal beschränkt, und nach Vitali in jeder Zusammenhangskomponente kompakt konvergent. Die Grenzfunktion ist also in $D'$ analytisch.

❑

# Kapitel 3

# Elliptische Funktionen

## 3.1 Die Weierstraßsche $\wp$ Funktion

Sind $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\mathbb{R}$ lineare unabhängig (d.h. $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$), so heißt die Menge

$$L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}$$

ein Gitter

——————Skizze ———— REf

*3.1.1 Bemerkung.* Ein Gitter $L$ ist eine diskrete Untergruppe (bzgl.+) von $\mathbb{C}$. Es gilt: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ (bzgl.+). Dann ist

1) $G = \{0\}$.
2) $G = \mathbb{Z}w$, d.h. zyklisch.
3) $G = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ mit $w_1, w_2\mathbb{R}$-linear unabhängig, d.h. ein Gitter.

DEIII.1

**3.1.2 Definition.** Eine elliptische Funktion zum Gitter $L$ ist eine in $\mathbb{C}$ meranorphe Funktion $f$ mit

$$f(z + w) = f(z), w \in L, z \in \mathbb{C}\,.$$

REg

*3.1.3 Bemerkung.* Laut Definition hat eine elliptische Funktion zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Perioden, sie heißt daher auch oft doppelt-periodisch. Ist $f$ eine in $\mathbb{C}$ meronorphe Funktion und nicht konstant, so ist die Menge $G$ der Perioden von $f$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$, kann daher nur von der Gestalt $1), 2)$ oder 3) sein. Beispiel für $1) : f(z) = z^2$, für $2) : f(z) = e^z$. Beispiele für 3) wird im folgenden konstruiert.

REh

*3.1.4 Bemerkung.* Eine elliptische Funktion kann als Funktion auf dem Torus $\mathbb{C}\setminus L$ aufgefasst werden. Dieser entsteht durch verkleben der gegenüberliegenden Kanten einer Grundmasche.————Skizze——————

LEIII.2

**3.1.5 Lemma.** *Es gilt:*

(i) *Die Reihe* ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}x\mathbb{Z} \\ (n,m)\neq(0,0)}} \frac{1}{(n^2 + m^2)^\alpha}$$

*konvergiert genau dann, wenn* $\alpha > 1$.

(*ii*) *Sei L ein Gitter. Die Reihe*

$$\sum_{w\in L\setminus\{0\}|w|^{-s},s>2}$$

*ist konvergent.*

*Beweis.*
ad$(i)$: Die angegebene Reihe konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$I = \int\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

konvergiert. Setzt man Polarkoordinaten ein ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$) so erhält man:

$$I = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} \frac{rdrd\varphi}{r^{2\varphi}} = 2\pi\int\limits_1^{\infty}\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}\,.$$

ad$(ii)$: Es genügt zu zeigen, daß es eine Konstante $\delta > 0$ gibt mit

$$|nw_1 + m_2|^2 \geq \delta(n^2+m^2)\,.$$

Die Funktion

$$\frac{|xw_1+yw_2|^2}{x^2+y^2}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,,$$

ist homogen, nimmt also ihr Minimum z.B. auf der Linie $x^2+y^2 = 1$ an. Da $w_1$ und $w_2\mathbb{R}$-linear unabhängig sind ist die dort jedoch $\neq 0$.

❑

LEIII.3

**3.1.6 Lemma.** *Sei L ein Gitter, $M \subseteq L\setminus\{0\}$. Die Reihe*

$$\sum_{w\in M}\left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

*konvergiert in $\mathbb{C}\setminus M$ lokal gleichmäßig, stellt daher dort eine analytische Funktion dar.*

*Beweis.* Es gilt für $|w| \geq 2|z|$ :

$$\left|\frac{1}{(Z-W)^2} - \frac{1}{W^2}\right| = \left|\frac{w^2-(z-w)^2}{w^2(z-w)^2}\right| = \left|\frac{-z^2+2zw}{w^2(t-w)^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{-\frac{z}{w}+2}{(\frac{z}{w}-1)^2}\right|\cdot\left|\frac{z}{w^3}\right| \geq |0|z|\frac{1}{|w|^3}\,.$$

Nach Lemma 3.1.5 ist für jedes $z$ in Kreisscheibe $\overline{\bigcup_r(0)}$ die Reihe

$$\sum_{\substack{w\in M\\|w|\leq 2r}}\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| \geq |0r\sum_{\substack{w\in M\\|w|\geq 2r}}|w|^{-3}$$

gleichmäßig konvergiert. Auf die gesamte Reihe fehlen nur endlich viele Summanden, also wird das Konvergenzverhalten ($z \notin M$) nicht gestört.

❑

DEIII.4

**3.1.7 Definition.** Sei $L$ ein Gitter. Die Funktion

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

heißt die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter $L$.

THIII.4

**3.1.8 Satz.** *Die wp-Funktion ist elliptisch zum Gitter $L$. Sie hat Pole 2-ter Ordnun g in den Gitterpunkten und ist sonst analytisch. Es gilt $\wp(z) = \wp(-z)$. Ihre Abbildung*

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^3}$$

*ist elliptisch zum Gitter $L$. Sie hat Pole 3-ter Ordnung in den Gitterpunkten und ist sonst analytisch. Es gilt $\wp'(z) = -\wp'(-z)$.*

*Beweis.* Die Funktion $\wp'(z)$ ist elliptisch, da $L$ eine Gruppe ist. Sei $w_0$ einer der beiden Basiselemente von $L$. Es gilt

$$(\wp(z + w_0) - \wp(z) = K = \text{konstant}\,,$$

denn die Ableitung ist 0. Es ist $-\frac{1}{2}w_0 \notin L$, also ist $\wp, \wp'$ dort analytisch und wir dürfen einsetzen:

$$K = \wp(-\frac{1}{2}w_0 + w_0) - \wp(-\frac{1}{2}w_0) = \wp(\frac{1}{2}w_0) - \wp(-\frac{1}{2}w_0) = 0$$

da $\wp$ offensichtlich gerade ist.

❑

Wir bestimmen die Laurent-Reihe von $\wp(z)$ um 0:

LEIII.5

**3.1.9 Lemma.** *Sei $G_n := \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-n}$, $n = 3, 4, \ldots$. Dann gilt in einer punktierten Kreisscheibe um 0*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} z^{2n}\,.$$

*Beweis.* Da $\wp(z)$ gerade ist, hat die Laurent-Reihe die Gestalt $\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$. Aus der Definition von $\wp(z)$ folgt $a_0 = 0$. Für $n > 1$ gilt

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \sum_{w \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-w)^{n+2}}\,,$$

also ist

$$a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (2n+1) \sum_{w \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{w^{2(n+1)}}$$

❑

Die Reihen $G_n$ heißen Eisenstein-Reihen. Offensichtlich ist $G_{2n+1} = 0$.

## 3.2 Die Liouvillenschen Sätze

THIII.6

**3.2.1 Satz.** *(1-ter Liouvillescher Satz) Eine elliptische Funktion ohne Polstelle ist konstant.*

*Beweis.* Ist $f$ analytisch auf einer abg. Gerundmasche, so insbesondere dort beschränkt. Also ist $f$ überall beschränkt und daher konstant.

❑

THIII.7

**3.2.2 Satz.** *(2-ter Liouvillescher Satz) Eine elliptische Funktion hat nur endlich viele Pole undulo L (d.h. auf dem Torus C/L) und die Summe aller Residnen (auf $\mathbb{C}/L$) verschwindet.*

*Beweis.* Betrachte eine verschobene Grundmasche

$$\mathcal{F}_a := \{a + z | z = t_1 w_1 + t_2 w_2, o \leq t_1, t_2 \leq !\}\,,$$

so dass am Rand keine Pole sind. Das ist möglich, denn die Polstellenmenge von $f$ ist diskret. Integriert man längs $\partial\mathcal{F}_a$, so folgt

$$\int\limits_{\partial\mathcal{F}_a} f(z)dz = \sum_{\substack{z_i \in \mathcal{F}_a \\ z_i Pd}} \operatorname{Re} i(f, z_i)\,.$$

Die Summation rechts erfolgt genau über ein vollständiges Vetretersystem modulo $L$. Die Integrale über gegenüberliegende Seiten von $\partial\mathcal{F}_a$ heben sich auf, denn $f$ ist periodisch und die Orientierung ist umgekehrt. Also ist das Integral 0.

❑

Wir bezeichnen im folgenden mit $b - Ord\ f$ für $b \in \mathbb{C}$ die Anzahl der $b$-Stellen von $f$ auf $\mathbb{C}/L$ wobei jede ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird. Analog ist $\infty - Ord\ f$ die Anzahl der Polstellen auf $\mathbb{C}/L$ mit Vielfachheit.

THIII.8

**3.2.3 Satz.** *(3.ter Liouvillescher Satz) Eine nichtkonstante elliptische nimmt auf $\mathbb{C}/L$ jeden Wert gleich oft an, d.h. die Zahl $b - Ord\ f$, $b \in \mathbb{C}u\{\infty\}$, hängt von $b$ ab.*

*Beweis.* Mit $f$ ist auch $f'$ elliptisch und daher auf $\frac{f'}{f}$. Nach dem 2-ten Liouvilleschen Satz und dem Satz von logarithmischen Residuma folgt

$$d - Ord\ f - \infty - Ord\ f = \int\limits_{\partial\mathcal{F}_a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0\,.$$

❑

Die nach dem 3-ten Liouvilleschen Satz wohldefinierte Konstante $b - Ord\ f$ nennt man die Ordnung von $f$.

REi

*3.2.4 Bemerkung.* Es gibt keine elliptische Funktionen der Ordnung 1. Die $\wp$-Funktion hat Ordnung 2, ihre Ableitung hat Ordnung 3.

Ein Punkt $b \in \mathbb{C}$ heißt Verzweigungspunkt von $f$, falls es im Urbild $f^{-1}|b| = \{a \in \mathbb{C}/L | f(a) = b\}$ eine mehrfache $b$-Stelle gibt, d.h. falls für ein $a \in f^{-1}(b)$ : $f'(a) = 0$. Der Punkt $\infty$ heißt Verzweigungspunkt, falls es einen mehrfachen Pol gibt. Wir betrachten zum Beispiel das Abbildungsverhalten von $\wp(z)$.

THIII.9

**3.2.5 Satz.** *Es gilt:*

(*i*) *Die Funktion* $\wp'(z)$ *hat auf* $\mathbb{C}/L$ *genau drei Nullstellen, nämlich* $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$. *Diese sind einfach.*

(*ii*) *Die Funtion* $\wp(z)$ *hat genau vier Verzweigungspunkte, nämlich*

$$\infty, e_1 = \wp(\frac{w_1}{2}), e_2 = \wp(\frac{w_2}{2}), e_\exists = \wp(\frac{w_1+w_2}{2}).$$

(*iii*) *Es gilt* $\wp(z) = \wp(w)$ *genau dann, wenn*

$$z \equiv w \text{ mod } L \text{ oder } z \equiv -w \text{ mod } L.$$

*Beweis.*
`ad`(*i*): Ist $a$ einer der angegebenen Werte, so ist $2a \in L$ aber $a \notin L$. Es folgt

$$\wp'(a) = \wp'(a-2a) = \wp'(-a) = -\wp'(a),$$

also $\wp'(a) = 0$. Da $\wp'$ Ordnung 3 hat, sind das alle Nullstellen und sind einfach.

`ad`(*ii*): Klar, da $\wp$ einen zweifachen Pol in den Gitterpunkten hat.

`ad`(*iii*): Sei $w$ fest, dann ist $\wp(z) - \wp(w)$ eine elliptische Funktion der Ordnung 2, hat also 2 Nullstellen. Diese sind offensichtlich $z = w$ und $z = -w$.

❑

Die Menge $K(L)$ aller elliptischen Funktionen zum Gitter $L$ ist offenbar ein Körper der $\mathbb{C}$ (als die konstanten Funktionen) enthält. Ist $f$ eine nichtkonstante elliptische Funktion, so wird jeder Wert angenommen. Also ist die Abbildung $R \in \mathbb{C}(x) \mapsto R(f) \in K(L)$ injektiv. Sie ist klarerweise homomorph, also ein Isomorphismus von $\mathbb{C}(x)$ auf den Teilkörper $\mathbb{C}(f)$ der rationalen Funktionen in $f$ von $K(L)$.

THIII.10

**3.2.6 Satz.** *Es gilt* $K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\wp'$.

*Beweis.*
·) Wir betrachten zunächst eine gerade Funktion $f \in K(L)$, die ausserhalb von $L$ analytisch ist. Ist sie nicht konstant, muß sie in 0 einen Pol gerader Ordnung $2n$ haben:

$$f(z) = a_{-2n}z^{-2n} + a_{-2n+2}z^{-2n+2} + \dots .$$

Die Funktion

$$g(z) := f(z) - a_{2n}\wp^n$$

ist wieder gerade, elliptisch und analytisch außerhalb von $L$. Sie hat bei Null einen Pol der Ordnung $2n-2$. Verfährt man so weiter, so folgt

$$f(z) = c_{-2n}\wp^n + c_{-2n+2}\wp^{n-1} + \dots + c_0,$$

für gewisse $c_j$.

·) Sei nun $f \in K(L)$ gerade und seien $a_1, \ldots, a_m$ ein vollständiges Vertretersystem der Pole die nicht in $L$ liegen. Dann ist für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g(z) := f(z) \prod_{i=1}^{m} (\wp(z) - \wp(a_i))^N$$

eine gerade elliptische Funktion, die Pole nur in $L$ hat. Mit dem obirgen schliess en wir $f \in \mathbb{C}(\wp)$.

·) Ist $f \in K(L)$ ungerade, so ist $\frac{f}{\wp'}$ gerade und es folgt $f \in \wp'\mathbb{C}(\wp)$. Da man jede Funktion $f$ als Summe einer geraden und einer ungeraden schreiben kann:

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)),$$

folgt die Behauptung.

❑

Das im Beweis von Satz 3.2.6 verwendete Verfahren ist konstruktiv. Als Beispiel zeigen wir:

LEIII.11

**3.2.7 Lemma.** *(Differentialgleichung für $\wp(z)$) Es gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

*mit*

$$g_2 = 60G_4 = 60 \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-4}, g_3 = |40G_6 = |40 \sum_{w \in L\setminus\{0\}} w^{-6}.$$

*Beweis.* Die Funktion $\wp'(z)^2$ ist gerade und hat Pole nur in $L$, muß sich also als Polynom in $\wp(z)$ schreiben lassen. Es ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \ldots,$$

also folgt

$$\wp'(z) = -2\frac{1}{z^{\exists}} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \ldots,$$

$$\wp(z)^2 = \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \ldots,$$

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + \ldots,$$

$$\wp'(z)^2 = 4\frac{1}{z^6} - 24G_4\frac{1}{z^2} - 80G_6 + \ldots.$$

Daher gilt

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60\wp(z) - 140G_6,$$

denn die Differenz der beiden Ausdrücke ist elliptisch ohne Pole und 0 bei 0.

❑

## 3.3 Das Abel'sche Theorem

Wir konstruieren elliptische Funktionen mit vorgegebenen Null- und Polstellen.

THIII.12

**3.3.1 Satz.** *(Abel) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, so daß kein $a_j$ kongruent modulo $L$ einem $b_j$ ist (einzelne $a_i b_j$ können schon mehrfach auftreten). Dann existiert eine elliptische Funktion mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ und den Polstellen $b_1, \ldots, b_n$ genau dann, wenn*

$$a_1, + \ldots + a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n \mod L$$

*ist.*

Zum Beweis benötigen wir noch ein Lemma:

LEIII.13

**3.3.2 Lemma.** *Sei $L$ ein Gitter, dann existiert eine in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(*i*) *Ist $w \in L$, so gilt $\sigma(z+w) = e^{az+b}\sigma(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit gewissen (von $w$ aber nicht von $z$ abhängigen) komplexen Zahlen $a, b$.*

(*ii*) *$\sigma$ hat eine Nullstelle $z_0$ erster Ordnung und jede weitere Nullstelle ist $\equiv z_0$* mod *$L$.*

*Beweis.*
·) oBdA können wir das Gitter $L$ als $L_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ mit $\tau \in \mathbb{C}^+$ annehmen. Denn hat $L$ die erzeugenden $w_1, w_2$ und sei das Vorzeichen von $\tau = \pm\frac{w_2}{w_1}$ so gewählt, daß $\tau \in \mathbb{C}^+$ liegt, dann ist $f(z) \mapsto f(w_1 z)$ eine Bejektion von $K(L)$ auf $K(L_\tau$.

·) Wir betrachten die sog.Thetareihe:

$$\vartheta(\tau, z) := \sum_{n=\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau + 2nz)},$$

und zeigen zunächst, daß sie in ganz $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Sei $\tau = u + iv, v > 0$, und $z = x + iy$ dann ist

$$\left| e^{i\pi(n^2\tau+2nz)} \right| = e^{-\pi(n^2 v + 2ny)}.$$

Variert $z$ in einem Kompaktum, so ist insbesondere $y$ beschränkt, also gilt für alle bis auf endlich viele $n$:

$$n^2 v + 2ny \geq \frac{1}{2} n^2 v.$$

Es folgt

$$\left| e^{i\pi(n^2 v+2nz)} \right| \leq e^{-\frac{\pi}{2} v n^2},$$

und da $v > 0$ ist $e^{-\frac{\pi}{2}v} < 1$. Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{pi}{2}v}\right)^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{\pi}{2}v}\right)^{n^2}$$

konvergiert, denn sie ist Teilreihen einer geometrischen Reihe.

·) Wir betrachten das Transformationsverhalten von $\vartheta(\tau, z)$. Offensichtlich gilt $\vartheta(\tau, z) = \vartheta(\tau, z + 1)$. Weiters ist

$$\vartheta(\tau, z + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau+2n\tau+2n\tau+2nz)} = e^{-i\pi\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n+1)^2\tau+2nz)}$$

Da mit $n$ auch $n + 1$ alle ganzen Zahlen durchläuft folgt

$$\vartheta( z + au) = e^{-i\pi(\tau+2z)}\vartheta(\tau, z)\,.$$

Durch mehrfache Anwendung dieser beiden Formeln erhalten wir für beliebiges $w \in L_\tau$ die Transformationsformel $(i)$.

·) Sei $\mathcal{F}_a$ eine verschobene Grundmasche, so daß auf $\partial\mathcal{F}_a$ keine Nullstellen von $\vartheta$ liegen. Da $\vartheta$ die Periode 1 hat heben sich im Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{F}_a} \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz$$

die Beiträge der rechten und linken Kante auf. Da $g|z| = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}$ die logarithmische Ableitung von $\vartheta$ ist, folgt wegen der obigen Transformationsformel

$$g(z + \tau) - g(z) = -2\pi i\,,$$

also

$$\int_a^{a+1} g(z)dz + \int_{a+1+\tau}^{a+\tau} g(z)dz = \int_a^{a+1} (g(z) - g(z + \tau))dz = 2\pi i\,,$$

also ist $\frac{1}{2\pi i}\int -\partial\mathcal{F}_a \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz = 1$. Nach dem Satz von logarithmischen Residnum hat $\vartheta$ daher genau eine Nullstelle $z_0$ in $\mathcal{F}_a$ (und diese ist einfach). Wegen der Transformationsregel $(i)$ ist jede weitere Nullstelle zu $z_0$ kongruent modulo $L$.

$\square$

REj

*3.3.3 Bemerkung.* Die Nullstelle von $\vartheta(\tau, z)$ in der Grundmasche ist $\frac{1+\tau}{2}$. Denn in der Reihe für $\vartheta(\tau, z)$ heben sich für $z = \frac{1-\tau}{2}$ die Summanden zu $n \geq 0$ und $-n - 1$ gegenseitig auf:

$$e^{i\pi}((-n-1)^2\tau + 2(-n-1)\frac{1+\tau}{2}) = e^{i\pi(n^2\tau+2n\frac{1+\tau}{2}-(2n+1))} =$$

$$= -e^{i\pi(n^2\tau+2n\frac{1+\tau}{2})}\,.$$

*Beweis. (Satz 3.3.1)*
·) Seien zuerst $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$ gegeben mit $a_1 + \ldots, +a_n \equiv b_1 + \ldots + b_n$. Indem man z.B. $a_1$ durch einen modulo $L$ kongruenten Punkt ersetzt, kann man oBdA sogar " $=$ " statt " $\equiv$ " voraussetzen. Sei $\sigma$ wie in Lemma 3.3.2, und

$$f(z) := \frac{\prod_{j=1}^{n} \sigma(z_o + z - a_j)}{\prod_{j=1}^{n} \sigma(z_0 + z - b_j)}\,.$$

Offenbar hat $f$ die gewünschten Null- und Polstellen. Weiters ist

$$f(z+w) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} e^{a(z_0+z-a_j)+b}}{\prod\limits_{j=1}^{n} e^{a(z_0+z-b_j)+b}} \, f(z) = f(z)\,,$$

da $\sum a_j = \sum b_j$ ist, d.h. $f$ ist elliptisch zum Gitter $L$.

$\cdot$) Sei nun umgekehrt $f$ eine elliptische Funktion mit den Nullstellen $a_j$ und Polstellen $b_j$ (d.h. vollständiges Vertretersystem modulo $L$). Betrachte eine verschobene Grundmasche $\mathcal{F}_a$, die 0 nicht 0 enthält und auf deren Rand $f$ keine Null- oder Polstellen hat. oBdA können wir $a_j, b_j \in \dot{F}_a$ annehmen.

Es gilt nach dem Residuensatz

$$a_1 + \ldots + a_n - b_1 \ldots b_n = \frac{1}{2\pi_i} \int\limits_{\partial \mathcal{F}_a} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz\,.$$

Setzt man $g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$, so ist für $w \in L$

$$g(z) - g(z+w) = -w\frac{f'(z)}{f(z)}\,,$$

also erhält man für das obige Integral durch zusammenfassen gegenüberliegenden Seiten:

$$-\frac{w_2}{2\pi_i} \int\limits_{a}^{a+w_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{w_1}{2\pi_i} \int\limits_{a}^{a+w_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\,.$$

Da $f(z)$ auf der Strecke $[a, a+w_1]$ keine Null- oder Polstellen hat, gilt dieser auch in einer gewissen Umgebung. Dort ist dann $f(z) = e^{h(z)}$ mit einer analytischen Funktion $h$. Wegen $h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ folgt

$$\int\limits_{a}^{a+w_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = h(a+w_1) - h(a)\,.$$

Da $f$ die Periode $w_1$ hat ist die rechte Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi_i$. Analog behandelt man das zweite Integral und wir schließen $a_1 + \ldots + a_n - b_1 \ldots b_n \in L$.

❑

Wir wollen noch elliptische Funktionen zu vorgegeben Hauptteilen konstruieren.

THIII.14

**3.3.4 Satz.** *Seien $b_1, \ldots, b_n$ paarweise inkongruent modulo $L$, $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}$, $a_{\nu,j} \in \mathbb{C}$ für $j = 1, \ldots, n; \nu = 1, \ldots, l_j, a_{l_j} \neq 0$. Dann gibt es eine elliptische Funktion deren Pole in $b_j$ liegen und die dort die Hauptteile*

$$\sum_{\nu=1}^{l_j} a_{\nu,j} \frac{1}{(z-b_j)}\nu$$

*hat genau dann, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_{\nu,j} = 0$ ist.*

*Beweis.*
·) Gibt es eine solche Funktion, so ist nach dem 2-ten Liouvillschen Satz $\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = 0$.

·) Durch Linearkombinationen von verschobenen $\wp$-Funktionen bzw. ihrer Ableitungen erhält man die Hauptteile bis auf jene Terme mit $\frac{1}{z}$. Sei $g(z) = \frac{\vartheta'(\tau z)}{\vartheta(\tau z)}$. Dann gilt (wie im Beweis von Lemma 3.3.2 gezeigt wurde) $g(z+\tau)-g(z) = -2\pi i$. Es folgt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} g(z-b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} g(z-b_j+\tau)\,,$$

d.h. $\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} g(z-b_j)$ ist elliptisch zum Glück $t_\tau$. Offensichtlich erhält man aus dieser Funktion eine elliptische Funktion zum Gitter $L$ mit den vorgegebenen Residuen.

❑

## 3.4 Das Additionstheorem der $\wp$-Funktion

THIII.15

**3.4.1 Satz.** *Es gilt:*

(i) *(Geometrische Form des Additionstheorems) Sei $u, v, u, +v \notin L$, dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix} = 0$$

(ii) *(Analytische Form des Additionstheorems) Sei $u, v, u \pm v \notin L$, dann gilt*

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} ig)^2 - \wp(u) - \wp(v)\,.$$

(iii) *(Verdoppelungsformel) Sei $2u \notin L$, dann gilt*

$$\wp(2u) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\Big)^2 - 2\wp(u) =$$

$$= \frac{\wp(u)^2 + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_\exists \wp(u)}{4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_\exists}$$

*Beweis.*
`ad`(*i*)**:** Wegen $u, v, u \pm v \notin L$ folgt aus Satz 3.2.5(*iii*) daß $\wp(u) \neq (v)$ (Der Fall $u - v \in L$ ist klar). Betrachte die elliptische Funktion

$$\mathbf{f}(z) := \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(u) & \wp'(u) \\ 1 & \wp(v) & \wp'(v) \end{pmatrix}.$$

Diese hat die Gestalt $f(z) = A + B\wp(z) + C\wp'(z)$ mit $C \neq 0$, hat daher in den Gitterpunkten Pole der Ordnung 3. Sonst ist sie analytisch, d.h. ihre Ordnung ist 3. Offensichtlich ist $f(u) = f(v) = 0$, nach dem Abelschen Theorem muß die dritte Nullstelle bei $-(u+v)$ liegen.

`ad` $(ii)$: Betrachte die drei Punkte

$$\begin{array}{rcll} (x_1, y_1) & = & (\wp(u), & \wp'(u)), \\ (x_2, y_2) & = & (\wp(v), & p'(v)), \\ (x_3, y_3) & = & (\wp(u+v), & -\wp'(u+v)) \end{array}$$

Wegen $(i)$ liegen diese Punkte auf einer Geraden. Wir können oBdA annehmen, daß$x_1, x_2, x_3$ paarweise verschieben sind. Denn: $x_1 \neq x_2$ nach $VS$ und wäre z.B. $x_2 = x_3$ so gilt $u + v \equiv -v \mod L$ d.h. $u + 2v \in L$. Durch kleine Störung von $v$ wird diese Bedingung gestört. Hat man dort das Additionstheorem, so folgt es mit Stetigkeit auch für die ursprünglichen Werte $u, v$.

Die Punkte $(x_i, y_i)$ sind also verschiedene Punkte der Geraden

$$y = mx + b, m = \frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)} \, .$$

Wegen der Differentialgleichung von $\wp$ (Lemma 3.2.7) sind $x_1, x_2, x_3$ Nullstellen des Polynomes

$$4X^3 - g_2 X - g_3 - (mX + b)^2 \, .$$

Da sie paarweise verschieden sind gibt es keine weiteren, also folgt durch Vergleich des Koeffizienten von $X^2$:

$$X_1 + X_2 + X_3 = \frac{m^2}{4} \, ,$$

das Gewünschte.

`ad` $(iii)$: Für das erste Gleichheitszeichen halte $w$ fest und lasse $z \to w$ streben im Additionstheorem. Das zweite " = " folgt aus der Differentialgleichung denn $\wp'(z)^2 = 4\wp^3_{(z)} - g_2\wp(z) - g_3$, $2\wp``) = 12\wp^2_{(z)} - g2$.

❑ REJ

*3.4.2 Bemerkung.* (Warum "Geometrische Form") Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{C}/L & \longrightarrow & P^2\,\mathbb{C} & & -(\text{2-dimensionaler projektiver Raum}) \\ z & \longmapsto & [1, \wp(z), \ \wp'(z)] & , & z \notin L, \\ & & [0, 0, 1] & , & z \in L \end{cases}$$

ist eine Bijektion von $\mathbb{C}/L$ auf die ebene algebraische Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$ mit der Gleichung (Differentialgleichung von $\wp$)

$$z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3 \, .$$

Die Gruppenoperation von $\mathbb{C}/L$ üb erträgt sich auf die Kurve $\tilde{X}(g_2, g_3)$. Das Additionstheorem besagt nun:

Seien $a, b, c \in \tilde{X}(g_2, g_3)$, $a + b + c = 0$. Dann liegen $a, b, c$ auf einer Geraden.

Es gilt sogar auch die Umkehrung: Eine Gerade hat mit $\tilde{X}(g_2, g_3)$ drei Schrittpunkte und diese haben Summe 0. Das heißt die Addition auf $\tilde{X}(g_2, g_3)$ ist in eindeutiger Weise durch die geometrische Lage bestimmt.

Es gilt für eine beliebige elliptische Funktion $f$ ein Analogon zum Additionstheorem von $\wp$.

THIII.16

**3.4.3 Satz.** *Sei $f \in K(L)$, dann gibt es ein von $=$ verschiedenes Polynom $P$ in 3 Unbestimmten mit komplexen Koeffizienten, so daß*

$$P(f(z), f(w), f(z+w)) \equiv 0$$

*gilt.*

Der Beweis dieser Aussage erfolgt unter Verwendung Körpertheoretischer Methoden. Dazu erinnern wir:
Sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ heißen algebraisch abhängig (über $k$), wenn es ein nichtvertschwindendes Polynom $Pk[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so daß $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$ gilt. Wir werden die folgenden Tatsachen benützen (für einen Beweis siehe z.B ...):

LEIII.17

**3.4.4 Lemma.** *(i) Ist $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$, $K_2$ algebraisch über $K_1$ und $K_3$ algebraisch über $K_2$, so ist $K_3$ algebraisch über $K_1$.*

*(ii) $k \subseteq K$, und es existieren $n$ Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ so daß $K$ algebraisch über $k(a_1, \ldots, a_n)$ ist. Dann sind je $n+1$ Elemente von $K$ algebraisch abhängig über $k$.*

Wir kommen zum
*Beweis. (Satz 3.4.3)* Die folgenden überlegungen spielen alle in Körper $\omega$ der meromorphen Funktionen in 2 Variablen. Abstrakt kann dieser auch wie folgt erhalten werden: Die Menge aller Funktionen $g : \mathbb{C}x\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die in beiden Variablen (gleichzeitig) stetig und jeder einzelnen Variablen analytisch sind ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement. $\omega$ ist sein Quotientenkörper.

Betrachte den Körper $K := \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), p'(z), \wp'(w))$. Dieser ist algebraisch über $\mathbb{C}(\wp(z), \wp(w))$, denn $\wp'(z)$ genügt einer Gleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{C}(\wp(z), \wp(w)$ und $\wp'(w)$ einer mit Koeffizienten in $\mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), \wp'(z)(Lemma 3.4.4(i))$. Wegen dem Additionstheorem in der analytischen Form ist $\wp(z+w) \in K$, wegen der geometrischen Form ist $\wp'(z+w) \in K$. Wegen Satz 3.2.6 ist $f(z), f(w), f(z+w) \in K$. Lemma 3.4.4$(ii)$ angewandt auf $\mathbb{C} \subseteq K$ und die Elemente $a_1 = \wp(z), a_2 = \wp(w)$ zeigt die Behauptung.

❑

# Kapitel 4

# Werteverteilung

## 4.1 Werteverteilung. Die Sätze von Bloch, Schottky und Picard

## 4.2 1. Satz von Bloch

Ist $G$ ein Gebiet und $f$ analytisch in $g$, so ist $f(G)$ wieder offen, enthält also insbesondere gewisse Kreisscheiben. Wir untersuchen die Größe solcher Scheiben. Diese hängt klarerweise von $f$ ab:z.B. $f(z) = \epsilon z$ im Einheitskreis.

LEIV.1

**4.2.1 Lemma.** *Es gilt:*

(i) *Sei $G$ beschränkt, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_G : G \to \mathbb{C}$ offen. Ist $a \in G$, so daß $s := \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$ ist, dann enthält $f(G)$ die Scheibe $K_s(f(a))$.*

(ii) *Sei $f$ analytisch in $\overline{V}$, $V = K_r(a)$, $f$ nicht konstant und $\sup_{z \in V} f'(z)| \leq 2|f'(a)|$. Dann gilt mit $\mathbb{R} := (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)|$*

$$B_R(f(a)) \subseteq f(V)\,.$$

*Beweis.*
`ad(`$i$`):` $\partial(f(G))$ ist kompakt $\Rightarrow \exists w_* \in \partial(f(G)]$: $d(\partial(f(G)), f(a)) = |w_* - f(a)|$. Da $\overline{G}$ kompakt ist, gibt es eine Folge $z_n \in G$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_*,\ \lim_{n\to\infty} z_n = z \in \overline{G}\,.$$

Da $f|G$ offen ist, folgt $z_* \in \partial G$, also ist $|w_* - f(a)| \geq s$. Es folgt $K_s(f(a)) \subseteq f(G)$.

`ad(`$ii$`):` o.B.d.A. sei $a = f(a) = 0$. Setze $A(z) := f(z) - f'(0)z$, dann gilt

$$A(z) = \int\limits_{[0,z]} (f'(\zeta) - f'(0) d\zeta Rightarrow|(z)| \leq \int\limits_0^1 |f'(zt) - f'(0)||z|dt\,.$$

Für $v \in V$ gilt (Chauchy'sache Integralformel)

$$f'(v) - f'(0) = \frac{v}{2\pi i} \oint\limits_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - v)} d\zeta \Rightarrow |f'(v) - f'(0)| \geq \frac{|v|}{r - |v|} \sup_{\zeta \in \partial V} |f'(\zeta)| \,.$$

Es folgt

$$|A(z)| \leq \int\limits_0^1 \frac{|zt| \sup_{\zeta \in \overline{V}} |f'(\zeta)|}{r - |zt|} |z| dt \leq \frac{|z|^2}{r - |z|} \sup_{\zeta \in \overline{V}} |f'(\zeta)| \cdot \int\limits_0^1 t dt \,.$$

Sei nun $0 < g < r$, dann gilt für $|z| = g$:

$$|f(z) - f'(0)z| \geq |f'(0)|g - |f(z)| \,,$$

also folgt wegen $\sup_{\zeta \in \overline{V}} |f'(\zeta)| \leq 2|f'(0)|$

$$|f(z)| \geq |f'(0)|(g - \frac{g^2}{r - g}) \,.$$

Die Funktion rechts nimmt für $g* := (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})r$ das Maximum $(3 - 2\sqrt{2})r$ an, d.h. für $|z| = g*$ gilt

$$|f(z)| \geq (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)| \,.$$

Mit $G := K_{g*}(0)$ folgt die Behauptung aus $(i)$.

❑

THIV.2

**4.2.2 Satz.** *Sei $f$ analytisch in $\overline{\mathbb{D}}$ und nicht konstant. Die, in $\overline{\mathbb{D}}$ stetige Funktion $|f'(z)|(1 - |z|)$ nehme im Punkt $p \in \mathbb{D}$ ihr Maximum $M$ an. Dann enthält $f(\mathbb{D})$ die Scheibe $K_R(f(p))$ mit $R = (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M(> \frac{1}{12}|f'(0)|)$.*

*Beweis.* Setze $t := \frac{1}{2}(1 - |p|)$, dann ist $K_t(p) \subseteq \mathbb{D}$ und es gilt $M = 2t|f'(p)|$ und $1 - |z| \geq t$ für $z \in K_t(p)$. Wegen $|f'(z)|(1 - |z|) \leq 2t|f'(p)|$ gilt $|f'(z)| \leq 2|f'(p)|$ für $z \in K_t(p)$. Lemma 4.2.1$(ii)$, zeigt $K_R(f(p)) \subseteq f(K_t(p)) \subseteq f(\mathbb{D})$ mit $R = (3 - 2\sqrt{2})t|f'(p)|$.

❑

COIV.3

**4.2.3 Korollar.** *Es gilt:*

$(i)$ *(Satz von Bloch) Sei $f$ analytisch in $\overline{\mathbb{D}}$, $f'(0) = 1$. Dann enthält $f(\mathbb{D})$ Scheiben vom Radius $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.*

$(ii)$ *Ist $f$ analytisch in $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f'(c) \neq 0$ für ein $c \in G$, so enthält $f(G)$ Scheiben von jedem Radius $(\frac{3}{2} - \sqrt{2})s|f'(c)|$ mit $0 < s < d(c, \partial G)$.*

*Beweis.* $(i)$ folgt unmittelbar aus Satz 4.2.2. $ad(ii)$: oBdA sei $c = 0$. Dann ist $\overline{K_s(0)} \subseteq G$, also $g(z) := \frac{f(sz)}{sf'(0)}$ analytisch in $\tilde{D}$ und $g'(0) = 1$. Die Behauptung folgt, denn

$$f(K_s(0)) = s|f'(0)|g(\mathbb{D}) \,.$$

❑

REk

*4.2.4 Bemerkung.* Es gilt $\frac{3}{2}-\sqrt{2}\cong 0,0858$. Diese Konstante kann wesentlich verbessert werden, z.B. zu $\frac{\sqrt{3}}{4}\cong 0,43301$. Der optimale Wert der Konstanten ist nicht bekannt. Die Aussage des Satzes von Bloch ist nicht richtig wenn man zusätzlich den Mittelpunkt der in $f(G)$ enthaltenen Scheiben festlegt. Z.B. nimmt die Funktion $f_n(z) := \frac{e^{nz}-1}{n}$ den Wert $-\frac{1}{n}$ nicht an, hat aber immer $f_n'(0)=1$. Das Interessante am Satz von Bloch ist, daß für eine große Klasse von Funktionen ($\{f$analytischen $\overline{D}, f'(0)=1\}$) eine universelle Aussage gemacht wird.

COIV.4

**4.2.5 Korollar.** *Sei $\beta > 0$ eine Konstante, für die der Satz von Bloch gilt (z.B.$\beta = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$). Sei $G$ ein Gebiet und $g$ analytisch in $G$ so daß $g(G)$ keine Scheibe vom Radius 1 enthält. Ist $\gamma$ ein Weg in $G$ von $b$ nach $w$ der Länge $l(\gamma)$, so gilt*

$$|g(w)| \leq |g(b)| + l(\gamma)\frac{1}{\beta d(\gamma,\partial G)}\,.$$

*Beweis.* Wegen Korollar 4.2.3($iii$), gilt $|g'(\zeta)| \leq \frac{1}{\beta d(\zeta,\partial G)}$ für $\zeta \in G$. Es folgt die Behauptung wegen

$$g(w)-g(b) = \int_\gamma g'(\zeta)d\zeta \text{und}|\int_\gamma g'(\zeta)d\zeta| \leq l(\gamma)\frac{1}{\beta d(\gamma,\partial G)}\,.$$

❑

## 4.3 2. Satz von Schottky

Dieser Satz gibt wieder eine Aussage über eine große Klasse von Funktionen, nämlich üb er

$$S(r) := \{f \text{ analytisch in}\overline{\mathbb{D}}, |f(0)| \leq r, 0, 1 \notin f(\mathbb{D})\}$$

zunächst geben wir eine Darstellung von Funktionen an, welche die Werte 0 und 1 auslassen.

LEIV.5

**4.3.1 Lemma.** *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und sei $f$ analytisch in $G$, $0 \notin f(G)$, $1 \notin f(G)$. Dann gibt es eine in $G$ analytische Funktion $g$, so daß*

$$f = -e^{i\pi\ cosh(2g)}$$

*gilt. Es gilt*

$$g(G) \cap \{\pm\log(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}) + \frac{1}{2}n\pi i | m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset\,,$$

*insbesondere enthält $g(G)$ keine Scheibe vom Radius 1. Sei $\geq 2$, sodaß $\frac{1}{r} \leq |f(0)| \leq r$. Dann gibt es eine Konstante $M(r)$ die nicht von $f$ abbhängt (!), so daß sich $g$ so wählen läßt, daß $|g(0)| \leq M(r)$.*

*Beweis.*

·) Da $f$ den Wert 0 nicht annimmt definiert jeder Zweig des Logorythmus eine analytische Funktion in $g$. Sei also

$$f = e^{2\pi ih} .$$

Da $f$ den Wert 1 nicht annimmt, nimmt $h$ keine Werte aus $\mathbb{Z}$ an, insbesondere kann man aus $h$ und $h-1$ Quadratwurzeln ziehen:

$$u^2 = h, u^2 = h - 1 .$$

Dann gilt $(u-v)(u+v) = 1$, also gibt es eine analytische Funktion $g$ mit

$$u - v = e^g .$$

Es folgt $u + v = e^{-g}$ und damit

$$1 + \ cosh 2g = 1 + \frac{1}{2}(e^{2g} + e^{-2g}) = \frac{1}{2}(e^g + e^{-g})^2 = 2u^2 = 2h ,$$

also

$$f = e^{2\pi ih} = e^{\pi i(1- \ cosh(2g))} =_e^{\pi i \ cosh(2g)} .$$

·) Angenommen es gibt Zahlen $p, q$ und $w \in G$, so daß

$$g(w) = \pm \log(\sqrt{p} + \sqrt{p-1}) + \frac{1}{2}q\pi i .$$

Dann folgt

$$e^{g(w)} = i^q(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})^{\pm 1} = i^q(\sqrt{p} \pm \sqrt{q-1}) .$$

Dann wäre $e^{-g(w)} = i^{-q}(\sqrt{p} \pm \sqrt{p-1})$ und damit

$$2 \ cosh(2g(w)) = (-1)^q[(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})^2 + (\sqrt{p} - \sqrt{p-1})^2] = 2(-1)^q(2p-1) .$$

Es folgt der Widerspruch

$$f(w) = -e^{\pi i \ cosh(2g)} = -e^{\pi i(-1)^q(2p-1)} = 1 .$$

Diese Annahmepunkte bilden ein Rechtecksgitter mit Höhe $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$ und der Länge

$$\log(\sqrt{m+1} + \sqrt{m}) - \log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}) \log \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}} \leq$$

$$\leq \log(1 + \sqrt{2}) < 1 .$$

Es gibt also zu jeder Zahl $b \in \mathbb{C}$ einen Gitterpunkt $a$ mit $|Re\ b - Re\ a| < \frac{1}{2}$ und $|Im\ b - Im\ a|\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Es folgt $|b - a| < \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = 1$, also enthält $g(G)$ keine Scheibe mit Radius 1.

·) Wir benützen die Freiheiten in der Wahl von $g$. Zunächst wähle $h$ so daß $|Re\ h(0)| \leq \frac{1}{2}$. Setze $P(r) = max\{\frac{|log\ x|}{2\pi}, x \in [\frac{1}{r}, r3\}$, dann gilt

$$|h(0)| \leq |Re\ h(0)| + |Im\ h(0) \leq \frac{1}{2} + P(r) ,$$

wenn $|f(0)| \in [\frac{1}{r}, r]$ liegt, denn wegen $|f(z)| = e$ ist

$$2\pi |Im\ h(0) = \Big| log|f(0)| \Big| .$$

Es gilt $|u(0) \pm v(0)| \leq \sqrt{|h(0)|} + \sqrt{(h(0) - 1|}$ und $(u(0) + v(0)) = (u(0) - v(0))^1$, also folgt aus der Beschränktheit von $h(0)$ jene von $u(0) - v(0)$ nach oben und unten:

$$P_1(r) \leq |u(0) - v(0)| \leq P_2(r) .$$

Man wähle nun $g$ so daß $|Im\ g(0) \leq \pi$. Setzt man $M(r) = \pi + max\{|logx|\Big|x \in [P_1(r), P_2(r)]\}$, so folgt

$$|g(0)| \leq |Re\ g(0)| + |Im\ g(0)| \leq |log|u(0) - v(0)|\Big| + \pi \leq M(r) .$$

❑

THIV.6

**4.3.2 Satz.** *(Schottky) Sei $r > 0$ und $\ominus \in (0, 1)$. Es existiert eine Konstante $L(\ominus, r)$, so daß*

$$|f(z)| \leq L(\ominus, r), f \in S(r), |z| \leq \ominus .$$

*Beweis.* Schreibe $f$ als $f = -e^{\pi o\ cosh(2g)}$ wie im vorigen Lemma. Es gilt $d([0, z], \partial\mathbb{D}) \geq 1 - \ominus$ für $|z| \leq \ominus$ also folgt aus Korollar 4.2.5

$$|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{1}{\beta(1 - \ominus)}, |z| \leq \ominus .$$

Da die Klassen $S(r)$ mit wachsenden $r$ immer größer werden können wir oBdA $r \geq 2$annehmen, dann gibt es ein $M(r)$, so daß man für $f$ mit $\frac{1}{r} \leq |f(0)| \leq r$ stets $|g(0)| \leq M(r)$ hat. Für solche $f$ gilt

$$|f(z)| \leq e^{\pi\ cos(2M(r) + \frac{2}{\beta(1-\ominus)}} =: L_1(\ominus, r) .$$

Sei nun $f$ mit $|f(0)| < \frac{1}{r}$. Die Funktion $1 - f(z)$ läßt ebenfalls die Werte 0 und 1 aus un es gilt $(r \geq 2)$

$$\frac{1}{2} \leq |1 - f(0)2, \text{insbesondere} 1 - f \in S(2) .$$

Nach dem oben bewiesenen gilt $|1 - f(z)| \leq L_1(\ominus, 2)$. Insgesamt folgt die Behauptung mit

$$L(\ominus, r) = max\big(L_1(\ominus, r), 1 + L_1(\ominus, 2)\big) .$$

❑

## 4.4 3. Satz von Picard

Wir zeigen zuerst eine Verschärfung des Satzes von Moutel.

THIV.7

**4.4.1 Satz.** *(Fundamental Normality Test) Sei $G$ ein Gebiet und $a, b \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Werte. Die Familie*

$$\mathcal{F} = \{f \text{ analytisch in } G | a, b \notin f(G)\}$$

*ist normal in $G$.*

REl

*4.4.2 Bemerkung.* Dieser Satz ist tatsächlich stärker als der Satz von Moutel, denn eine lokal beschränkte Familie läßt offensichtlich lokal Werte aus ist also in jedem Punkt von $G$ normal. Daraus folgt aber normal in $G$

*Beweis. (Satz 4.4.1)*
·) oBdA sei $a = 0, b = 1$.

·) Sei $w \in G, r > 0$, und $\mathcal{F}_*$ eine Teilfamilie von $\mathcal{F}$ mit $|g(w)| \leq r$ für $g \in \mathcal{F}_*$. Sei $\overline{B_{2t}(w)} \subseteq G$ für ein $t > 0$. oBdA sei $w = 0, 2t = 1$. Dann gilt nach Satz 4.3.2

$$sup \, \{|g(z)| \Big| (z) \leq t, g \in \mathcal{F}_*\} \leq L(\frac{1}{2}, r) \, .$$

D.h. $\mathcal{F}_*$ ist lokal beschränkt von $w$.

·) Sei $p \in G$ festgehalten und betrachte die Familie $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} | \ |f(q)| \leq 1\}$. Die Menge

$$U = \{w \in G | \mathcal{F}_1 \text{ ist lokal beschränkt um } w\}$$

enthält nach obigem den Punkt $p$. Sie ist klarerweise offen. Wäre $U \neq G$, so gäbe es einen Punkt $weG \cap \partial U$. Wegen $w \notin U$ und dem oben bewiesenen gibt es Folge $f_n \in \mathcal{F}_1$ mit $f_n(w) \to \infty$. Es ist $g_n = \frac{1}{f_n - a(a=0)} \in$ "$\tilde{\mathcal{F}}$" und wegen $lim_{n \to \infty} g_n(w) = 0$ und dem Obigen ist die Folge $g_n$ lokal beschränkt um $w$. Also konvergiert eine gewisse Teilfolge gegen eine lokal um $w$ analytische Funktion: $g_{n_k} \to g$. Da alle $g_{n_k}$ Nullstellenfrei sind und $g(w) = 0$, folgt $g \equiv 0$. Also $lim f_{n_k} = \infty$ in einer Umgebung von $w$ insbesondere in gewissen Punkten von $U$, ein Widerspruch.

·) Sei nun $(f_n)$ eine Folge aus $\mathcal{F}$. Hat $(f_n)$ eine Teilfolge in $\mathcal{F}_1$, so folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge aus dem vorher Bewiesenen. Liegen nun endlich viele $f_n$ im $\mathcal{F}_1$, so liegen unendlich viele $g_n = \frac{1}{f_n - a(a=0}$ in "$\tilde{\mathcal{F}_1}$". Ist die Teilfolge $g_{n_k} \to g$ so ist als Grenzwert Nullstellenfreier Funktionen $g$ entweder $\equiv 0$ oder Nullstellenfrei. Im ersten Fall gilt $f_n \to \infty$ im Zweiten $f_n \to \frac{1}{g}$.

❑

Daraus folgt eine Verschärfung des Satzes von Vitali:

COIV.8

**4.4.3 Korollar.** *(Caratheodory-Laudom) Sei $(f_n)$ Folge analytischer Funktionen im Gebiet $G$, $a \neq b, a, b \notin f_n(G)$. Es existiere $lim_{n \to \infty} f_n(w)$ für eine Menge von Punkten in $G$ die einen Häufungspunkt in $G$ hat. Dann konvergiert die Folge $(f_n)$ kompakt in $G$.*

*Beweis.* Nach Satz 4.4.1 ist die Familie $\{f_n\}$ normal in $G$, also lokal beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Vitali.

❑

THIV.9

**4.4.4 Satz.** *(Großer Satz von Picard) Sei $c \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität von $f$. Dann nimmt $f$ in jeder Umgebung von $c$ jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft als Wert an.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen das für eine in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ analytische Funktion $f$ mit $0, 1 \neq f(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ entweder $f$ oder $\frac{1}{f}$ beschränkt um 0 ist.

Die Familie $f_n(z) := f(\frac{z}{n})$ in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ analytischer Funktionen ist nach Satz 4.4.1 normal, also gibt es eine lokal beschränkte Teilfolge oder eine kompakt gegen $\infty$ Konvergenz. Insbesonders ist $|f(\frac{z}{n_k})| \leq M$ für $|z| = \frac{1}{2}$ oder $|f(\frac{z}{n_k})|^{-1} \leq M$. Aus dem Maximumsprinzip folgt das entweder $f$ oder $\frac{1}{f}$ auf allen Kreisringen $\frac{1}{n_{k+1}} \leq |z| \leq \frac{1}{n_k}$ also lokal nun 0 beschränkt ist.

❑ COIV.10

**4.4.5 Korollar.** *Es gilt:*

(*i*) *(Kleiner Satz von Picard) Jede nicht konstante ganze Funktion läßt höchstens eine komplexe Zahl als Wert aus.*

(*ii*) *Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion die drei verschiedene Werte $a, b, c \in \mathbb{C}u\{\infty\}$ ausläßt ist konstant.*

(*iii*) *(Landau) Es gilt eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ definierte Funktion $R(a)$ mit positiven Werten, so daß keine Funktion analytisch in $\overline{B_{R(a)}(0)}$ mit $f(0) = a$ und $f'(0) = 1$ existiert, welche die Werte 0 und 1 ausläßt.*

*Beweis.*
`ad`($i$): Ist $\infty$ keine wesentlich Singularität, so ist $f$ ein Polynom, nimmt also jeden Wert an. Anderenfalls, klar nach Satz 4.4.4.

`ad`($ii$): Sei $f$ in $\mathbb{C}$ meromorphe und habe $a, b, c$ nicht als Wert, $a + \infty$. Dann ist $\frac{1}{f(t)-a}$ analytisch in $\mathbb{C}$ und nimmt die Werte $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{c-a}$ nicht an. Daher nach ($i$) konstant.

`ad`($iii$): Benützen den Satz 4.3.2: Setze $R(a) := 3L(\frac{1}{2}, |a|)$. Angenommen $f(z) = a + z + \dots$ ist analytisch in $\overline{B_{R(a)}(0)}$ und läßt die Werte 0 und 1 aus. Dann läßt $g(z) := f(R(a)z) = a + R(a)z + \dots$ ebenfalls 0 und 1 aus und ist analytisch in $\mathbb{D}$. Nach Satz 4.3.2 gilt $max\{|g(z)| \Big| |z| \frac{1}{2}\} \leq \frac{1}{3}R(a)$. Wegen der Chauchy'schen Ungleichungen ist jedoch $R(a) \leq 2max\{|g(z)| \Big| |z| \frac{1}{2}\}$ ein WS!

❑ REm

*4.4.6 Bemerkung.* Der Satz von Landau ist stärker als der kleine Picard'sche Satz. Denn ist $f$ ganz und nicht konstant, so ist $f(\zeta + \frac{z}{f'(\zeta)})$ in $\overline{B_{R(a)}(0)}$ nicht von 0 und 1 verschieden ($a = f(\zeta), f'(\zeta) \neq 0$).

## 4.5 Das 1ste Fundamentaltheorem von Nevaulinna

Bisher haben wir untersucht welche Werte tatsächlich angenommen werden. Im folgenden studieren wir meromorphe Funktionen $f$ und versuchen quantitative

Aussagen zu erhalten wie oft Werte angenommen werden oder wie nahe die Werte von $f$ ihnen kommen. Eine Grundlage dieser "Theorie der Werteverteilung" ist die folgende Aussage.

THIV.11

**4.5.1 Satz.** *(Poisson-Jensen Formel) Sei $f$ meromorph in $(0 < R < \infty)\{|z| \leq R\}$. Seien $a_\mu, \mu = 1, \ldots, m$, die Nullstellen und $b_\nu, \nu = 1, \ldots, n$, die Polstellen von $f$ in $\{|z| < R\}$. Ist $z = re^{i\ominus}, 0 < r < R$, und $f(z) \neq 0, \infty$, so gilt*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\ cos(\ominus - \varphi) + r^2} d\varphi +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{r=1}^{n} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - b_\nu z}\right| .$$

*Beweis.*
·) Wir nehmen zuerst an das $f$ in $\{|z| \leq R\}$ weder Null- noch Polstellen hat. Nach dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \log f(\zeta \frac{(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z)} d\zeta = \log f(z) .$$

Setzt man $\zeta = Re^{i\varphi}$, so ist $d\zeta = iRe^{i\varphi}d\varphi$ und

$$(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z) = R(R - re^{i(\varphi-\theta)})(Re^{i\varphi} - re^{i\theta}) =$$

$$= Re^{i\varphi}(R^2 - 2r\ cos(\theta - \varphi) + r^2) ,$$

also ist

$$\log f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2r\ cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi .$$

Nimmt man die Realteile, so folgt die Behauptung in diesem Fall.

·) Betrachte den Fall, daß $f$ am Rand (endlich viele) Nullstellen bzw. Polstellen haben kann, niht jedoch im Inneren. Dann gilt mit dem gleichen Beweis wie oben die Formel

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell} \log f(\zeta) \frac{(R^2 - |z|)}{(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z)} d\zeta$$

wobei längs einer Kurve $\ell$ integriert wird, die $z$ im Inneren enthält und die Pole und Nullstellen am Rand durch kleine Kreisbögen mit Radius $\delta > 0$ umgeht:
——————-Skizze ——————

Die Gesamtlänge dieser "störenden" Bögen ist $0(\delta)$. Der Poisson-Kern ist beschränkt durch $\frac{R+r+\delta}{R-r-\delta}$ durch $\log f(\zeta)$ ist lokal um einen Pol oder eine Nullstelle ein $0(\log \delta)$. Für $\delta \to 0$ streben also die Beiträge der Bögen zum Integral gegen 0 und die Poisson-Jensen Formel folgt.

·) Sei nun $f$ beliebig. Betrachte

$$g(z) := f(z)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\frac{R(\zeta-b_\nu)}{R^2-\overline{b_\nu}\zeta}}{\prod\limits_{\mu=1}^{m}\frac{R(\zeta-a_r)}{R^2-\overline{a_r}\zeta}}\,,$$

dann ist $(g(z) \neq 0, \infty$ in $\{|z| < R\}$. Ist $|\zeta| = R = R$, $\zeta = Re^{i\varphi}$, so gilt $(|x| < R)$

$$\Big|\frac{R(\zeta - x)}{R^2 - \overline{x}\zeta}\Big| = \Big|\frac{Re^{i\varphi} - x}{R - \overline{x}e^{i\varphi}}\Big| = \Big|\frac{R - xe^{i\varphi}}{R - \overline{x}e^{i\varphi}}\Big| = 1\,,$$

also ist $|g(\zeta)| = |f(\zeta)|$ längs $|\zeta| = R$. Wendet man das bisher bewiesene auf $g(z)$ an, so folgt die Behauptung.

❑

COIV.12

**4.5.2 Korollar.** *Es gilt:*

(*i*) *(Jensensche Formel) Sei $f$ meromorph in $\{|z| \leq R\}$,*

$$f|z| = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1}z^{\lambda+1} + \dots \quad um\ 0\,.$$

*Dann gilt*

$$\log|c_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{n=1}^{m}\log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{|b_\nu|}{R} - \lambda\log R\,.$$

(*ii*) *(Poissonsche Integraldarstellung) Sei $h$ analytisch in $\{|z| \leq R\}$, dann gilt*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(Re^{i\varphi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\ cos(\theta - \varphi) + r^2}\ d\varphi\,.$$

*Beweis.*
ad $(i)$: Die Funktion $g(z) = \frac{R^\lambda f(z)}{z^\lambda}$ ist bei 0 verschieden von $0, \infty$ und hat längs $|\zeta| = R$ den gleichen Betrag wie $f$. Die Poisson-Jensen Formel zugewandt auf $g$ und $z = 0$ liefert die Behauptung.

ad $(ii)$: Anwenden auf $e^{h(z)}$.

❑

DEIV.13

**4.5.3 Definition.** Sei $f$ meromorph in $\{|z| \leq R\}$. Wir schreiben $(\log^+ x := max(\log x, 0))$

$$m_\infty(R, f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi\,,$$

$$N_\infty(R, f) := \sum_{\nu=1}^{n}\log\Big|\frac{R}{b_{nu}}\Big|\,,$$

$$T_\infty(R, f) := m_\infty(R, f) + N_\infty(R, f)\,.$$

REn

*4.5.4 Bemerkung.* Der Wert $m_\infty(R,f)$ gibt eine durchschnittliche Größe von $f$ längs $|z|=R$, $N_\infty(R,f)$ zählt die Pole (und ihre Dichte), $T_\infty|R,f)$ ist als ein Maß für die Größe von $f$ das sich zusammensetzt aus den beiden Komponenten "wie nahe bei $\infty$ ist $f$" und "wie oft wird $\infty$ angenommen". $T_\infty$ heißt die charakteristische Funktion für $f$ oder Nevaulinna-Charakteristik.

Wir vereinbaren noch die folgende Schreibweise ($a \in \mathbb{C}$):

$$m_a(R,f) := m_\infty(R, \frac{1}{f-a}), N_a(R,f) := N_\infty(R; \frac{1}{f-a}), T_a(R,f) := T_\infty(R, \frac{1}{f-a}),$$

diese Größen messen wie nahe $f$ bei $a$ ist.

LEIV.14

**4.5.5 Lemma.** *Es gilt*

$$\log^+ \left| \prod_{i=1}^k a_i \right| \leq \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i|, \log^+ \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| \leq \log^+(k\ max_{i=1,k}|a_i|) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \log^+ |a_i| + \log k\,.$$

*Daraus folgt*

$$m_\infty(R, \sum_{i=1}^k f_i(z)) \leq \sum_{i=1}^k m_\infty(R, f_i(z)) + \log k, m_\infty(R, \prod_{i=1}^k f_i(z)| \leq \sum_{i=1}^k m_\infty(R, f_i(z)),$$

$$N_\infty(R, \sum_{i=1}^k f_i|z)) \leq \sum_{i=1}^k N_\infty(R, f_i(z)), N_\infty(R, f_i(z)),$$

$$T_\infty(R, \sum_{i=1}^k f_i|z)) \leq \sum_{i=1}^k T_\infty(R, f_i(z)) + \log k, T_\infty(R, \prod_{i=1}^k f_i(z)) \leq \sum_{i=1}^k T_\infty(R, f_i(z))\,.$$

*Beweis.*
·) Ist $|\prod_{i=1}^k a_i| \geq 1$, so ist $\log^+|\prod a_i| = \log|\prod a_i| = \sum \log|a_i| \leq \sum \log^+ |a_I|$. Anderenfalls steht links 0 und die Ungleichung gilt trivialerweise. $\log^+|\sum a_i| \leq \log^+(k\ max|a_i|)$ folgt wegen der Monotonie von $\log^+$. $\log(k\ max|a_i|) = \log k + \log max|a_i|$ inpliziert die andere Ungleichung.

·) Die Aussage für $m_\infty$ folgende unmittelbar.

·) Da die Polordnung eines Produktes oder einer Summe von Funktionen höchstens gleich der Sinne der Polordnung der beiden Summanden oder Faktoren ist, folgen allgemeiner die Relationen für $N_\infty$.

·) Die Aussagen für $T_\infty$folgenden unmittelbar.

❑

THIV.15

**4.5.6 Satz.** *(Nevaulinna's 1ste fundamental Theorem) Sei $a \in \mathbb{C}$, $f$ meromorph in $\{|z| \leq R\}$, $f(0) \neq a, \infty$. Dann gilt*

$$T_a(R,f) = T_\infty(R,f) - \log|f(0)-a| + \epsilon_a(R,f)$$

*mit $|\epsilon_a|R,f)| \leq \log^+|a| + \log^2$.*

*Beweis.* Die Poisson-Jensen Formel angewandt auf $f-a$ schreibt sich als ($a_r -$ $a -$ Stellen von $f$)

$$\log|f(0)-a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\log|f(Re^{i\varphi})-a|}_{=\log^+|f-a|\pm\log^+\frac{1}{|f-a|}}\, d\varphi + \sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{a_\mu}{R}\right| - \sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{b_\mu}{R}\right| =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\varphi})-a|d\varphi}_{m_\infty(R,f-a)} \pm m_a(R,f) \pm N_a(R,f) + N_\infty(R,f) =$$

$$= T_\infty(R,f-a) - T_a(R,f)\,.$$

Wegen Lemma 4.5.5 gilt

$$T_\infty(R,f-a) \leq T_\infty(R,f) + T_\infty(R,-a) + \log 2 = T_\infty(R.f) + \log^+|a| + \log 2\,.$$

Andererseits ist

$$T_\infty(R,f) = T_\infty(R,(f-a)+a) \leq T_\infty(R,f-a) + \log^+|a| + \log 2\,,$$

und insgesamt folgt

$$|T_\infty(R,f-a) - T_\infty(R,f)| \leq \log^+|a| + \log 2\,.$$

❑ RE0

*4.5.7 Bemerkung.* Läßt man $R \to \infty$ streben, so bedeutet die obige Aussage

$$T-a(R,f) = T_\infty(R,f) + 0(1)\,.$$

Ist die Funktion $f$ in $\{|z| \leq R\}$ analytisch, so können wir die Größe von $f$ auch (natürlicher) anders messen:

$$M(r,f) := \max_{|z|=r}|f(z)| \ (= \max_{|z|\leq r}|f(z)|)$$

Ein Zusammenhang mit dem Maß durch $T_\infty$ ist:

LEIV.16

**4.5.8 Lemma.** *Sei $f$ analytisch in $\{|z| \leq R\}$, dann gilt für $0 \leq r < R$:*

$$T_\infty(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r}T_\infty(R,f)\,.$$

*Beweis.*
·) Da $f$ analytisch ist, ist $N_\infty(r,f) = 0$, also

$$T_\infty(r,f) = m_\infty(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi \leq \log^+ M(r,f)\,.$$

·) Die zweite Ungleichung ist trivial falls $M(r,f) < 1$ ist. Sei also $M(r,f) \geq 1$ und sei $z_0, |z_0| = r$, so daß $|f(z_0)| = M(r,f)$. Da $f$ keine Pole hat folgt mit der Poisson-Jensen Formel $z_0 = re^{i\theta}$)

$$\log^+ M(r,f) = \log|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(Re^{i\varphi})| \frac{R+r}{R-r} d\varphi = \frac{R+r}{R-r} m_\infty(R,f) = \frac{R+r}{R-r} T_\infty(R,f)\,.$$

❑

COIV.17

**4.5.9 Korollar.** *Sei $f$ in ganz $\mathbb{C}$ analytisch und betrachte für $k > 0$ die Werte*

$$C_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\infty(r,f)}{r^k}, C_2 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r,f)}{r^k}\,.$$

*Dann gilt $C_1 \leq C_2$ und $C_2 \leq (2k+1)e \cdot C_1$.*

*Beweis.* Die erste Beziehung folgt unmittelbar aus Lemma 4.5.8. Um die zweite Beziehung zu zeigen, setze in Lemma 4.5.8: $R = r(1 + \frac{1}{k})$. Es folgt ($\epsilon > 0$) für hinreichend großes $r$

$$\frac{1}{r^k}\log^+ M(r,f) \leq \frac{1}{r^k}\frac{R+r}{R-r}T_\infty(R,f) = k(2+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{k})^k \frac{T-\infty/R,f)}{R^k} \leq$$

$$\leq (2k+1)e \cdot (C_1 + \epsilon)\,.$$

❑

REp

*4.5.10 Bemerkung.* Wie Korollar 4.5.9 zeigt sind die Werte $C_1$ und $C_2$ stets gemeinsam $0, \infty$ oder $\in (0,\infty)$. Falls sie endlich sind können sie jedoch verschieden sein. Zum Beispiel ist für $f(z) = e^z, k = 1 : C_2 = 1$. Aber es ist

$$T_\infty(r,f) = m_\infty(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|e^{re^{i\varphi}}| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi = \frac{r}{\pi}\,,$$

also $C_1 = \frac{1}{\pi}$.

Der folgende Satz zeigt, daß $T_\infty$ nur durch $N_\infty$ ausgedrückt werden kann:

THIV.18

**4.5.11 Satz.** *Sei $f$ meromorph in $\{|z| < R\}, f(0) \notin 0,\infty,\ 0 < r < R$. Dann gilt*

$$T_\infty(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi + \log^+|f(0)|\,.$$

*Beweis.*

·) Wir wenden die Jensensche Formel an auf $g(z) := a - z, R = 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|a - e^{i\theta}|d\theta = \log|a|, |a| \geq 1\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|a - e^{i\theta}|d\theta = \log|a| - \log|a| = 0, |a| < 1\,,$$

d.h. das Ergebnis ist in beiden Fällen gleich $\log^+|a|$.

·) Jetzt wenden wir die Jenensche Formel an auf $f(z) - e^{i\varphi}$:

$$\log|f(0) - e^{i\varphi}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - e^{i\varphi}|d\theta + N_\infty(r,f) - N_{e^{i\varphi}}(r,f)\,.$$

Diese Beziehung gilt für alle bis auf höchstens ein $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir integrieren nach $\varphi$:

$$\log^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - e^{i\varphi}|d\theta\Big]d\varphi +$$

$$+N_\infty(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|f(re^{i\theta})|d\theta +$$

$$+N_\infty(r,f)\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi = T_\infty(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi\,.$$

Die Reihenfolge der Integration durfte hier vertauscht werden, da das Integral absolut konvergiert.

❑

COIV.19

**4.5.12 Korollar.** *Die Funktion $T_\infty(r,f)$ ist eine wachsende und konvexe Funktion von $\log r$, $o < r < R$. Es gilt* $(0 < r < R)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi \leq \log 2\,.$$

*Beweis.* Die Funktion $N_{e^{i\varphi}}(r,f)$ ist wachsend und konvex $\log r$, denn sind $a_1, \ldots, an(r)$ die $e^{i\varphi}$-Stellen von $f$, so ist

$$N_{e^{i\varphi}}(r,f) = \sum_{i=1}^{n(r)} \log\left|\frac{r}{a_i}\right| = n(r) - \sum_{i=1}^{u(r)} \log|a_i|\,,$$

sie hat also die Gestalt:

———-Skizze ——————-

Also ist auch $T_\infty(r,f)$ wachsend und konvex in $\log r$ (als$\int N d\varphi$).
Nach Satz 4.5.6 gilt

$$T_\infty(r,f) = m_{e^{i\varphi}}(r,f) + N_{e^{i\varphi}}(r,f) + \log|f(0) - e^{i\varphi}| + \epsilon_{e^{i\varphi}}(r,f)$$

mit $|\epsilon_{e^{i\varphi}}(r,f)| \leq \log 2$. Integriert man nach $\varphi$, so folgt mit $IV.18$

$$T_\infty(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi + (T_\infty(r,f) - \log^+|f(0)|) +$$

$$+ \log^+|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi\,,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon_{e^{i\varphi}}(r,f)d\varphi \leq \log 2\,.$$

❏

REq

*4.5.13 Bemerkung.* Der zweite Teil von $IV.19$ zeigt, daß $m$ im Durchschnitt beschränkt ist. Für große Werte $T_{e^{i\varphi}}(r,f) = N_{e^{i\varphi}} + m_{e^{i\varphi}}$ wird also im Schnitt der Summand $N_{e^{i\varphi}}$ dominieren.

## 4.6 5. Die Ahlfors-Shimizu charakteristic

Wir kommen zu ener geometrischen Deutung der Charakteristik einer meromorphen Funktion $f$. Dazu bilden wir die Ebene mittels stereographischen Projektion auf die Kugel ab mit Durchmesser 1 welche mit ihrem Südpol die Ebene im Punkt 0 berührt. Der Ausdruck

$$A(r) := \int_{|z|<r} \frac{|f'(re^{i\varphi}|^2}{(1+|f(re^{i\varphi})|^2)^2} r dr d\varphi$$

gibt dann die Gesamtfläche des Bildes von $\{|z| < r\}$ unter $f$ auf der Kugel (dividiert durch die Kugeloberfläche ) an.

LEIV.20

**4.6.1 Lemma.** *Es gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}\, d\varphi + N_\infty(r,f) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt + \log\sqrt{1+|f(0)|^2}\,.$$

*Ist* 0 *ein Pol von* $f$*, so wird der zweite Summand rechts durch* $\log|c_\lambda|$ *ersetzt (vgl.Korollar 4.5.2).*

*Beweis.* Setze $u(w) = \log(1+|w|^2)$, dann gilt

$$\triangle_w u = \frac{4}{(1+|w|^2)^2}\,.$$

Jetzt betrachte $v(z) := u(f(z))$,, dann ist $v$ stetig außer bei den Polen von $f$ und es gilt

$$(\triangle_z v)(t) = (\triangle_w u)(z) \cdot |f'(z)|^2\,.$$

Wir wenden jetzt die Green'sche Formel $\int\limits_{\ell} \frac{\partial v}{\partial n} ds = -\int\limits_{G} \triangle v \; d\sigma$ an im Gebiet $G = \{|z| < r\}$ ohne Kreise von Radius $\delta^G$ um die Polstellen $b_k$ von $f$, und lassen anschließend $\delta \to 0$ streben. Lokal um einen Pol schreibt sich $v(z)$ als

$$v(z) = 2\alpha_k \log\left|\frac{1}{z-b_k}\right| + \text{ stetige Funktion}$$

wobei $\alpha_k$ die Vielfachheit des Poles bezeichnet. Es folgt (mit $n_\infty(r,f) = \sharp\{$ Pole von $f$ in $|z| < r$ mit Vielfachheit $\}$)

$$r\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})d\varphi + 4\pi n_\infty(r,f) = 4\int\limits_{|z|<r} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{1+|f(re^{i\varphi})|^2)^2} r dr d\varphi\,.$$

Sei zunächst 0 kein Pol von $f$ und $r_0$ so klein, daß kein Pol im Kreis ($|z| \le r_0$ liegt. Dividiert man die obige Beziehung durch $4\pi r$ und integriert von $r_0$ bis $r$, so folgt

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{n_\infty(t,f)}{z}dt = \int\limits_{r_0}^{r}\frac{A(t)}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(r_0 e^{i\varphi})d\varphi\,.$$

Läßt man $r_0 \to 0$ streben, sind setzt die Definition von $v$ ein, so folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi}|^2}d\varphi + \int\limits_0^{r}\frac{n_\infty(t,f)}{t}dt = \int\limits_0^{r}\frac{A(t)}{t}dt +$$

$$+\log\sqrt{1+|f(0)|^2}\,.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt, denn (vgl. Lemma **??**)

$$\int\limits_0^{r}\frac{n_\infty(t,f)}{t}dt = N_\infty(r,f)\,.$$

Ist 0 ein Pol so folgt die Behauptung analog wir bei Korollar 4.5.2

❑

DED

**4.6.2 Definition.** ie Größe

$$\tilde{T}(r,f) = \int\limits_0^{r}\frac{A(t)}{t}dt$$

heißt Ahlfors-Shimizu charakteristic von $f$.

Das Integral

$$\tilde{m}_\infty(r,f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\sqrt{1+|f(re^{i\varphi})|^2}d\varphi$$

mißt die durchschnittliche Entfernung von $f(z)$ zu $\infty$, denn

$$k(w,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}$$

ist gerade der chordale Abstand von $w$ und $\infty$ auf der Kugel.

COIV.21

**4.6.3 Korollar.** *Es gilt*

$$|\tilde{m}_\infty(r,f) - m_\infty(r,f)| \leq \frac{1}{2}\log 2$$

$$|\tilde{T}(r,f) - T_\infty(r,f)| \leq \frac{1}{2}\log 2 + \log\sqrt{1+|f(0)|^2}$$

*Beweis.* Folgt unmittelbar aus Lemma 4.6.1 und der Beziehung $\log^+|w| \leq \log\sqrt{1+|w|^2} \leq \log^+|w| + \frac{1}{2}\log 2$.

❑

Es liegt nahe ein Analogon zum 1sten Fundamentalsatz, daß also die Charakteristik nicht von "a" abhängt zu suchen. Dann setzen wir

$$\hat{m}_a(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\frac{1}{k(f(re^{i\varphi}),a}d\varphi - \log\frac{1}{k(f(0),a)},$$

wo $k$ wieder der chordale Abstand

$$k(w,a) = \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|a|^2}}, w,a \in \mathbb{C},$$

ist.

THIV.22

**4.6.4 Satz.** *Es gilt*

$$\hat{m}_a(r,f) * N_a(r,f) = \tilde{T}(r,f).$$

*Beweis.* Wir führen eine Drehung der Kugel durch, welche den Punkt $a$ in den Nordpol bringt:

$$w_1 = \frac{1+\bar{a}w}{w-a}.$$

Klarerweise gilt $k(w_1,\infty) = k(w,a)$ und

$$N_a(r,f) = N_\infty(r, w_1(f)).$$

Die Fläche $A(r)$ bleibt bei dieser Transformation $f \mapsto w_1(f)$ invariant. Die Formel aus Lemma 4.6.1 angewandt auf $g^z w_1(f)$ zeigt man

$$\tilde{T}(r) = \hat{m}_\infty(r,g) * N_\infty(r,g) = \hat{m}_a(r,f) + N_a(r,f).$$

❑

## 4.7 6. Funktionen von beschränkter Charakteristik

Ist $f$ meromorph im Kreis $|z| < R \leq \infty$, so existiert wegen Korollar 4.5.12 stets der Limes

$$\lim_{r \nearrow \mathbb{R}} T_\infty(r, f) =: T_\infty(R, f) \leq \infty\,.$$

Wir untersuchen jetzt Funktionen mit $T_\infty(R, f) < \infty$. Zunächst gilt

THVI.23

**4.7.1 Satz.** *Sei $f$ in ganz $\mathbb{C}$ meromorph und sei*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T_\infty(r, f)}{\log r} = 0\,.$$

*Dann ist $f$ konstant*

*Beweis.* Wegen Korollar 4.6.3 gilt ebenfalls $\liminf_{r\to\infty} \frac{\tilde{T}(r,f)}{\log r} = 0$. Die Fläche $A(r)$ ist offenbar stets positiv und wachsend, es gilt falls $f$ nicht konstant also für $r_0$ fest und $r > r_0$

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t} dt < \int_{r_0}^r \frac{A(t)}{t} dt > A(r_0) ln \frac{r}{r_0}\,,$$

und damit

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\tilde{T}(r, f)}{\log r} > A(r_0) > 0\,.$$

❑

Wir können uns bei der Untersuchung von Funktionen mit beschränkter Charakteristik also auf einen endlichen Kreis, oBdA $\{|z| < 1\}$, beschränken. Sei $z_0$ fest, so daß $f(z_0) \neq 0, \infty$, dann besagt die Poisson-Jensen Formel ($z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}, a_\mu$ Nullstellen von $f, b_\gamma$ Polstellen von $f$)

$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(ge^{i\vartheta})| \frac{g^2 - r_0^2}{g^2 - 2gr_0\cos(\varphi_0 - \vartheta) + r_0^2} d\vartheta +$$

$$+ \sum_{|a_\mu|<g} \log\left|\frac{g(z_0 - q_\mu}{g^2 - \overline{a}_\mu z_0}\right| - \sum_{|b_r|<g} \log\left|\frac{g(z_0 - b_\nu)}{g^2 - \overline{b_\nu} z_0}\right|.$$

Wir setzen

$$U_g(re^{i\varphi}, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+|f(ge^{i\vartheta})| \frac{g^2 - r^2}{g^2 - 2gr\cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\vartheta, r < g\,,$$

$$V_g(z, f) = -\sum_{|b_\nu|<g} \log\left|\frac{g(z - b_\nu)}{g^2 - \overline{b_\nu} z}\right|,$$

$$W_g(z, f) = U_g(z, f) + V_g(z, f)\,.$$

Dann gilt

$$\log|f(z)| = W_g(z,f) - W_g(z,\frac{1}{f}), |z| < g\,.$$

Die Größe $W_g(z,f)$ ist nichtnegativ und harmonisch in $|z| < g$, außer in den Polstellen von $f$, für $z = 0$ ist $W_g(0,f) = T_\infty(g,f)$.

LEIV.24

**4.7.2 Lemma.** *Der Ausdruck $W_g(z_0,f)$ ist eine wachsende Funktion von $g$.*

*Beweis.* Sei $r, \in (r_0, g)$. Da $W_g \geq 0$ ist, gilt

$$\log^+|f(z)| \leq W_g(z,f), |z| = r\,,$$

also ist

$$U_r(z_0,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log^+|re^{i\vartheta}|\frac{r^2 - r_0^2}{r^2 - 2rr_0\cos(\vartheta - \varphi_0) + r_0^2}d\vartheta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_g(re^{i\vartheta},f)\frac{r^2 - r_0^2}{r^2 - 2rr_0\cos(\vartheta - \varphi_0) + r_0^2}d\vartheta\,.$$

Der Ausdruck $V_r(z,f)$ hat für $|z| < r$ die gleichen Pole wie $W_g$ und ist auf $|z| = r$ gleich Null. Also kann man in obiger Formel $W_g$ durch $W_g - V_r$ ersetzen, diese Funktion ist harmonisch in $|z| < r$. Wegen der Poisson'schen Integralformel gilt also

$$U_r(z_0,f) \leq W_g(z_0,f) - V_r(z_0,f)\,,$$

d.h. $W_r(z_0,f) \leq W_g(z_0,f)$.

❑

Wir zitieren (ohne Beweis) das folgende Lemma. Es folgt jedoch relativ unmittelbar aus der Poisson'schen Integralformel.

LEIV.25

**4.7.3 Lemma.** *Es sei $u$ eine in einem zusammenhängenden Bereich $D$ harmonisch nichtnegative Funktion. Ist $z_0 \in D$ und $B \subseteq D, B$ komplett, so existiert eine nur von $z_0, B, D$ jedoch nicht von $z$ abhängige Zahl $k, 0 < k < 1$, so daß gilt*

$$ku(z_0) \leq u(z) \leq \frac{1}{k}u(z_0), z \in nB\,.$$

THIV.26

**4.7.4 Satz.** *Sei $f$ meromorph in $\{|z| < 1\}$. Dann ist $f$ von beschränkter Charakteristik genau dann, wenn sich $f$ schreiben läßt als $f = \frac{p}{q}$ mit zwei in $\{|z| < 1\}$ analystischen und beschränkten Funktionen.*

*Beweis.*
·) Sei zuerst $T_\infty(1,f) < \infty$. Da $W_g(z,f)$ monoton ist, existiert

$$\lim_{g \nearrow 1} W_g(z,f) = W(z,f) \leq \infty\,.$$

für $z = 0$ ist $W_g(0,f) = T_\infty(g,f)$, also nach VS! $W(0,f)$ endlich. Wegen Lemma 4.7.3 konvergiert $W_g$ lokal gleichmäßig auf $\{|z| < 1\} \setminus \{b_\nu\}$ gegen $W$, daher ist $W$ dort nichtnegativ harmonisch. Analog findet man $W(z, \frac{1}{f})$ und es gilt dann

$$\log|f(z)| = W(z,f) - W(z,\frac{1}{f}), |z| < 1, z \neq a_\mu, b_\nu\,.$$

Seien $\tilde{W}(z,f)$ und $\tilde{W}(z,\frac{1}{f})$ zu $W(z,f)$ und $W(z,\frac{1}{f})$ konjungierte harmonische Funktion, dann folgt mit geeigneter Wahl der Konstanten

$$\log f(z) = \Big[W(z,f) * i\tilde{W}(z,f)\Big] - \Big[W(z,\frac{1}{f}) + i\tilde{W}(z,\frac{1}{f})\Big] .$$

Setzt man

$$p(z) = e^{-\Big[W(z,\frac{1}{f}) + i\tilde{W}(z,\frac{1}{f})\Big]} ,$$
$$q(z) = e^{-\Big[W(z,f) + i\tilde{W}(z,\frac{1}{f})\Big]} ,$$

so folgt $f = \frac{p}{q}$ und $p,q$ sind in $\{|z| < 1\}$ analytisch (Singularitäten von $W$ werden Nullstellen) und beschränkt durch 1.

$\cdot$) Sei nun umgekehrt $f = \frac{p}{q}$; $|p|,|q| \leq 1$. Es gilt

$$\log^+ |f(z)| \leq \log^+ |\frac{1}{q(z)}| ,$$

also auch $U_g(z,f) \leq U_g(z_0,\frac{1}{q(z)})$. Da die Funktion $q$ in jedem Pol von $f$ eine Nullstelle mindestens gleicher Ordnung haben muß, gilt auch

$$V_g(z_0,f) \leq V_g(z_0,\frac{1}{q(z)}) .$$

Es folgt

$$W_g(z_0,f) \leq W_g(z_0,\frac{1}{q}) = W_g(z_0,q) + \log |\frac{1}{q(z_0)}| ,$$

also, da $W_g(z,q)$ wegen $|q| \leq 1$ identisch verschwindet,

$$W_g(z_0,f) \leq \log \left|\frac{1}{q(z_0)}\right| .$$

ist $q(0) \neq 0$, so folgt bereits

$$T_\infty(r,f) = W_r(0,f) \leq \log \left|\frac{1}{q(0)}\right| ,$$

also $T_\infty(1,f) < \infty$. Andernfalls dividiert man $f$ durch eine geeignete Potenz von $z$, wobei sich $T_\infty(r,f)$ nur um ein für $r \to 1$ beschränktes Glied ändert.

❑

# Kapitel 5

# Hilberträume analytischer Funktionen

## 5.1 Funktionen mit nichtnegativen Realteil

Wir beginnen mit einer Konstruktion von analytischen Funktionen aus Randwerten.

LEV.1

**5.1.1 Lemma.** (*a*) *Sei $h(\theta)$ eine stetige reelle $2\pi$-periodische Funktion. Dann ist die Funktion*

$$g(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}(\theta)d\theta$$

*analytisch in $\{|z|<1\}$, $Reg(z)$ stetig in $\{|z|\leq 1\}$ und $Reg(e^{i\theta}) = h(\theta)$.*

(*b*) *Sei $h(t)$ eine stetige reelle Funktion, $h(t)\geq 0$, und*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}dt < \infty\,.$$

*Dann ist die Funktion*

$$g(z) := \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\frac{h(t)}{1+t^2}dt$$

*analytisch in $\mathbb{C}^+$, $Reg(z)$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}\geq 0$, und $Reg(t) = h(t)$.*

*Beweis.*
$\cdot$) Wir zeigen zuerst, daß beide Funktionen

$$P(z,\theta) := \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}, |z|<1, Q(z,t) := \frac{1}{i}\frac{1-ztz}{t-z}, Imz>0\,,$$

die Eigenschaften haben

$(i)ReP(z,\theta)\geq 0|z|<1ReQ(z,\theta)\geq 0, Imz>0$

$(ii)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ReP(z,\theta)d\theta = 1, \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Re\theta(z,t)\frac{dt}{1+t^2} = 1.$

$(iii)\lim_{|z|\nearrow 1} ReP(z,\theta) = 0$, gleichmäßig für $\theta \in [0,2\pi] \setminus (\theta_0 + \delta)md2\pi : \theta_0 = arg z$. $\lim_{Imz\searrow 0} ReQ(z,t_0) = 0$, gleichmäßig für $t \in \mathbb{R} \setminus (x-\delta, x+\delta), x = Re z$.

Für $P(z,\theta)$ gilt

$$Re\, P(z,\theta) = \frac{1}{2\pi} Re\Big(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(ze^{-it})^n\Big) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,,$$

also folgt $(i)-(iii)$. Für $Q$ gilt analog

$$Re\, Q(z,\theta) = \frac{y(1+t^2)}{t-x)^2+y^2}, z = x + 1y\,,$$

also folgt $(i)-(iii)$.

$\cdot$) Jetzt zeigen wir das $Re\, g(z)$ stetig in der jeweiligen Menge ist. Zum Beispiel betrachte den ersten Fall (der zweite geht analog). Sei $\theta_0 \in [0,2\pi)$, da $h$ stetig ist gibt es eine Umgebung $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ und $2\pi$, so daß ab $|h(\theta)-h(\theta_0)| < \epsilon$. Es folgt

$$Re\, g(z)_{-h(\theta_0)} - = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Re\, P(z,\theta)h(\theta)d\theta - h(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(h(\theta)-h(\theta_0)\Big)\cdot$$

$$\cdot Re\, P(z,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0+\epsilon}\Big(h(\theta)-h(\theta_0)\Big)Re\ P(z,\theta)d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(0,2\pi]\setminus(\theta_0-\epsilon,\theta_0+\epsilon)} (h(\theta)-h(\theta_0))Re\ P(z,\theta)d\theta\,,$$

Für $z \to \theta_0$ strebt der zweite Summand wegen $(iii)$ gegen Null, der erste ist Betragsgemäß $< \epsilon$ wegen $(i)$ und $(ii)$. Es folgt

$$\lim_{z\to\theta_0} Re\ g(z) = h(\theta_0)\,,$$

alle anderen Behauptungen sind klar.

Der folgende Satz ersetzt das Maximumprinzip, wenn man in $\mathbb{C}^+$ arbeitet.

❏

THV.2

**5.1.2 Satz.** *(Phragmen-Lindelöf) Sei $f$ analytisch in $\mathbb{C}^+, |f|$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}$, und*

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta = 0\,.$$

*Ist $|f(z)| \le 1$ für $z \in \mathbb{R}$, dann auch für $z \in \mathbb{C}^+$.*

*Beweis.* Wir setzen in Lemma 5.1.1(a): $h(\theta) = \log^+ |f(e^{i\theta}|$ für $0 \leq \theta \leq \pi$, und setzen $h$ zu einer ungeraden stetigen $2\pi$-periodischen Funktion fort. Das geht, denn $h(0) = h(\pi) = 0$ weil nach VS: $|f(1)|, |f(-1)| \leq 1$ ist. Dann ist $g(z)$ gegeben durch

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} h(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta} - z} h(\theta) d\theta\,,$$

also

$$Reg(z) = \frac{1 - (z)^2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{h(\theta)}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta - \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{h(\theta)}{|e^{-i\theta} - z|^2} d\theta =$$

$$= \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{4Imz \cdot sin\theta}{|e^{i\theta} - z|^2 |e^{-i\theta} - z|^2} h(\theta) d\theta\,.$$

Insbesondere ist $Reg(z) = 0$ für $|z| < 1$, $z \in \mathbb{R}$. Nach unserer Wahl von $h(\theta)$ folgt $|f(z)e^{-g(z)}| \leq 1$ längs des oberen Halbkreises, längs der Strecke $[-1, 1]$ gilt diese Bezielung auch weil nach VS! $|f(z)|$ dort $\leq 1$ ist. Nach dem Maximumprinzip folgt $|f|z)e^{-g(z)}| \leq 1$ im Halbkreis $\{|z| < 1, Imz > 0\}$, explizit:

$$log|f|z)| \leq \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{2Imzlog^+|f(e^{i\theta})|sin\theta}{|e^{i\theta} - z|^2 |e^{-i\theta} - z|^2} d\theta, |z| < 1, Imz > 0\,.$$

Für $r > 0$ wenden wir dieselbe Überlegung auf $f(rz)$ an. Dann folgt

$$log|f|z)| \leq \frac{r^2 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{4rImzlog^+|f(re^{i\theta})|sin\theta}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{-i\theta} - z|^2} d\theta, |z| < r, Imz > 0\,.$$

Sei nun $0 < \epsilon < 1$ und $r$ so groß, daß $|z| < \epsilon r$, so gilt

$$|re^{i\theta} - z| \geq r(1 - |\frac{z}{r}|) \geq r(1 - \epsilon)\,.$$

Es folgt

$$log|f(z)| \leq \frac{2Imz}{\pi} (1 - \epsilon)^{-4} liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int\limits_0^\pi log^+|f(re^{i\theta})| sin\theta d\theta = 0\,,$$

also $|f(z)| \leq 1$.

❑

Aus diesem Satz erhalten wir eine Umkehrung von Lemma 5.1.1,(b).

THV.3

**5.1.3 Satz.** *Sei $f$ analytisch in $\mathbb{C}^+$, $Ref$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}$ und $\geq 0$. Dann gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Ref(t)}{1 - t^2} dt < \infty$$

*und für gewisse Zahlen* $p \leq 0$, $C \in \mathbb{R}$

$$f(z) = -ipz + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} \frac{Ref(t)}{1-t^2} dt + iC\,.$$

*Es ist* $p = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y} Ref(iy)$.

*Beweis.*
·) Wir zeigen zuerst $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Ref(\in)}{1+t^2} dt < \infty$. Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $h$. Eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $0 \leq h(f) \leq Ref(t)$ und $h(t) = Ref(t)$ für $t \in [a,b]$. Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2} dt \leq \pi \cdot sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\,,$$

also existiert nach Lemma 5.1.1(b) eine Funktion $g(z)$ mit $Reg(t) = h(t)$. Die Funktion $e^{g(z)-f(z)}$ ist längs $\mathbb{R}$ wegen $h(t) \leq Ref(t)$ durch 1 beschränkt. Wegen $Ref(z) \geq 0$ und $(z = x + iy)$

$$Reg(z) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \leq sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\,,$$

folgt $|e^{g(z)-f(z)}| \leq e^{sup_{t \in \mathbb{R}}} h(t)$. Insbesondere ist die VS vom Satz von Phragmen-Lindelöf erfüllt, und es folgt $Reg(z) \leq Ref(z)$ in ganz $\mathbb{C}^+$, d.h. insbesondere

$$Ref(i) \geq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2} dt \geq \frac{1}{\pi} \int\limits_{a}^{b} \frac{Ref(t)}{1+t^2} dt\,.$$

Da $a < b$ beliebig waren folgt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Ref(t)}{1+t^2} dt < \infty$.

·) Wir können also Lemma 5.1.1(b) mit $h(t) = Ref(t)$ anwenden und erhalten eine Funktion $g(z)$ mit $Reg(t) = Ref(t)$. Wegen der obigen Überlegung erhalten wir $(-\infty < a < b < \infty)$

$$Ref(z) \geq \frac{y}{\pi} \int\limits_{a}^{b} \frac{Ref(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt\,,$$

also auch $Ref(z) \geq Reg(z)$. Die Funktion $f(z) - g(z)$ ist also analytisch in $\mathbb{C}^+$, $Re(f-g)(z) \geq 0$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}$ und $= 0$ längs $\mathbb{R}$.

·) Sei $F$ eine in $\mathbb{C}^+$ analytische Funktion $ReF$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}$, mit $ReF(t) = 0$ längs $\mathbb{R}$. Wir zeigen $F(z) = -ipz + iC$ mit $p \geq 0$ und $C \in \mathbb{R}$. Setze $h(\theta) = ReF(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und setze wie im Beweis von Satz 5.1.2, $h$ ungerade $2\pi$ -periodisch fort. Dann gilt nach der dortigen Rechnung für die Funktion $\mathbb{G}(z)$ aus Lemma 5.1.1(a) ($r$ hinreichend groß)

$$Re\mathbb{G}(z) = \frac{r^2 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{4rImzReF(re^{itheta})sin\theta}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{-i\theta} - z|^2} d\theta\,.$$

Da nach der Wahl von $h$ auf der Halbkreislinie $Re\mathbb{G}(z) = ReF(z)$ ist und auf der Strecke $[-r, r]$ beide $= 0$ sind schließen wir auch den Satz von der Gebietstreue, daß $Re\mathbb{G}(z) = ReF(z)$ im ganzen Halbkreis gilt. Es folgt also

$$\frac{1}{Imz} ReF(z) = lim_{r\to\infty} 2\frac{r^2 - |z|^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{rReF(re^{i\theta})sind\theta}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{i\theta} - z|^2} d\theta =$$

$$= lim_{r\to\infty} \frac{2}{\pi} r^3 \int_0^\pi \frac{ReF(re^{i\theta})sin\theta}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{i\theta} - z|^2} .$$

Wegen

$$\frac{1}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{-i\theta} - z|^2} - \frac{1}{|re^{i\theta} - w|^2 |re^{-i\theta} - w|^2} = \frac{1}{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{-i\theta} - z|^2}$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{|re^{i\theta} - z|^2 |re^{i\theta} - z|^2}{|re^{i\theta} - w|^2 |re^{i\theta} - w|}^2\right)}_{\to 0 glm \ \ \text{in}\theta \ \ \text{für}\, r\to\infty}$$

hängt das Integralauf der rechten Seite nicht von $z$ ab. Es gilt also $ReF(z) = pImz$ und natürlich $p \geq 0$. Es folgt $F(z) = -ipz + iC$ mit $X \mathbb{E} \mathbb{R}$.

·) Wegen dem "monotone convergence theorem" gilt $lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ref(t)}{t^2+y^2} dt =$ 0, und es folgt $p = lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} Ref(iy)$.

❑

RED

*5.1.4 Bemerkung.* ie meisten der in folgenden angegebenen Sätze gelten allgemeiner. Wir werden öfters Voraussetzungen annehmen die technischer Natur sind aber eigentlich unnötig. Für eine allgemeine Ausführung vgl.[de Brange].

## 5.2 Funktionen von beschränktem Typ

LEV.5

**5.2.1 Lemma.** *Sei $(zn) \in \mathbb{C}^+$ eine Folge mit $(zn = xn + iyn)$*

$$\sum \frac{yn}{xn^2 + yn^2} < \infty .$$

*Dann ist das Produkt (Blaschke Produkt für $\mathbb{C}^+$)*

$$\prod \frac{1 - \frac{z}{zn}}{1 - \frac{z}{zn}} = B(z)$$

*lokal gleichmäßig konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \{(\overline{zn})\}$. In $\mathbb{C}^+$ gilt $|B(z)| \leq 1$ und es ist $B(z)B(\overline{z}) = 1$.*

*Beweis.* Sei $g(z) = inf_{n\in\mathbb{N}} |\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{zn}}|$, dann gilt

$$|\frac{1 - \frac{z}{zn}}{1 - \frac{z}{\overline{zn}}} - 1| = |\frac{1}{\overline{zn} - \frac{1}{zn}} \frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{zn}}| \leq \frac{2Imzn}{g(z)|zn|^2} .$$

Wegen $1+x \le^x$, also $1+|\frac{1-\frac{z}{zn}}{1-\frac{z}{\overline{zn}}}-1| \le e^{\frac{2}{g(z)}\frac{yn}{xn^2+yn^2}}$ und der Beziehung $1+|ab-1| \le (1+|a-1|)(1+|b-1|)$ für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$1 + |\prod^N \frac{1-\frac{z}{zn}}{1-\frac{z}{\overline{zn}}} - 1| \le e^{\frac{2}{g(z)} \sum^N \frac{yn^2}{xn^2+yn^2}}$$

also

$$|\prod^N \frac{1-\frac{z}{zn}}{1-\frac{z}{\overline{zn}}}| \le e^{\frac{2}{g(2)} \sum^N \frac{yn^2}{xn^2+yn^2}}$$

in jedem Fall. Für $N < M$ folgt

$$|\prod^N \frac{1-\frac{z}{zn}}{1-z\overline{zn}} - \prod^M \frac{1-\frac{z}{zn}}{1-z\overline{zn}}| = |\prod^N \cdot |\prod^M -1| \le$$

$$\le e^{\frac{2}{g(z)} \sum^N \frac{yn^2}{xn^2+yn^2}} - e^{\frac{2}{g(z)} \sum^M \frac{yn^2}{xn^2+yn^2}} .$$

Das Produkt $B(z)$ ist also in der Menge $\{g(z) > 0\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Die anderen Aussagen sind klar.

❑

Sei $F(z)$ analytisch in $\mathbb{C}^+$. $F$ heißt von beschränktem Typ (in$\mathbb{C}^+$), wenn $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit beschränkten analytischen Funktionen $P$ und $Q$. Klarerweise sind Summe und Produkt von Funktionen von beschränktem Typ wieder solche. Beispiele für Funktionen von beschränktem Typ sind (neben beschränkten Funktionen) Polynome oder Funktionen mit nichtnegativem Realteil.

LEV.6

**5.2.2 Lemma.** *Sei $F$ von beschränktem Typ in $\mathbb{C}^+$ und seien die Nullstellen $zn$ von $F$ so, daß $0$ nicht Häufungspunkt von $\{zn\}$ ist. Dann ist die Blaschke Bedingung*

$$\sum \frac{yn}{x_n^2 + y_n^2} < \infty$$

*erfüllt. Es gilt $F(z) = B(z)G(z)$ mit einer Funktion $G$ von beschränktem Typ ohne Nullstellen.*

*Beweis.* Ist die Blaschke Bedingung gezeigt, sind wir fertig. Da $F$ von beschränktem Typ ist, gibt es eine beschränkte Funktion $Q(z)$, sodaß $Q(z)F(z)$ analytisch und bechränkt durch 1 in $\mathbb{C}^+$ ist. Definiere induktiv $F_1 = F$,

$$F_{n+1}(z) = F_n(z) \frac{1-\frac{z}{z_n}}{1-\frac{z}{\overline{z_n}}} ,$$

dann ist $F_n$ stets analytisch in $\mathbb{C}^+$. Wir zeigen das $|QF_n| \le 1$ ist. Für $n = 1$ nach VS richtig. Angenommen richtig für $n$, dann ist zunächst $QF_n$ beschränkt in $\mathbb{C}^+$ da $(QF_n)(z_n) = 0$ ist. Auf der Geraden $y = h > 0$ gilt

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1-\frac{x+ih}{z_n}}{1-\frac{x+ih}{\overline{z_n}}} \right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left\{ 1 + \frac{4hy_n}{(x-x_n)^2 + (h-y_n)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{4hy_n}{(h-y_n)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{h+y_n}{|h-y_n|} .$$

Nach dem Satz von Phragmen-Lindelöf gilt die gleiche Schranke für $QF_{n+1}$ in der Halbebene $\{Imz \geq h\}$. Da $h$ beliebig war folgt $|QF_{n+1}| \leq 1$ in $\mathbb{C}^+$. Explizit folgt $> Q(z)F(z)| \leq \left|\prod^n \frac{1-\frac{1}{z_n}}{1-\frac{z}{z_n}}\right|$ in ganz $\mathbb{C}^+$, also auch

$$-log|Q(z)F(z)| \geq \sum^n \log\left|\frac{1-\frac{z}{zk}}{1-\frac{z}{zk}}\right| = \frac{1}{2}\sum^n log\Big(1+\frac{4yy_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\Big)\,,$$

und damit

$$\sum^\infty log\Big(1+\frac{4yy_k}{(x-x_n)^2+(y-y_k)^2}\Big) \leq -2log|Q(z)F(z)|\,.$$

Für kleine Werte von $x$ verhält sich $log(1+x)$ wie $x$, also ist

$$\sum^\infty \frac{yy_k}{x_k^2+(y-y_k)^2} < \infty\,,$$

und da 0 nicht Häufungspunkt von $z_n's$ ist, folgt

$$\sum^\infty \frac{y_k}{x_k^2+y_k^2} < \infty\,.$$

❑

THV.7

**5.2.3 Satz.** *Nevaulinna Sei $F$ analytisch und von beschränktem Typ in $\mathbb{C}^+$. Sei zusätzlich angenommen, daß die Nullstellen in $\mathbb{C}^+$ von $F$ keinen endlichen Häufungspunkt haben, und dass $F = \frac{P}{Q}$ mit $P, Q$ beschränkt und $|P|, |Q|$ stetig in $\overline{\mathbb{C}^+}, F0$ längs $\mathbb{R}$. Dann ist für $z \in \mathbb{C}^+$*

$$F(z) = B(z)e^{-ihz}e^{G(z)}$$

*mit*

$$G(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\frac{\log|F(t)|}{1+t^2}dt + iC\,.$$

*Beweis.* Da die Nullstellen $z_n$ keinen endlichen Häufungspunkt haben, ist das Blaschke Produkt $B(z)$ sogar auf $\overline{\mathbb{C}^+}$ analytisch, wir können also $F = B\cdot\frac{P_1}{Q_1}$ schreiben, wo $P_1, Q_1$ keine Nullstellen haben und immer noch $|P_1|, |Q_1|$ stetig auf $\overline{\mathbb{C}^+}$ ist und $|P_1|, |Q_1| \leq 1$. Setze $U = -\log P_1(z), V = -\log Q_1(z)$, dann ist $U, V$ analytisch in $\mathbb{C}^+, ReU, ReV \geq 0$ und stetig auf $C^+$. Es gilt also die Darstellung

$$-\log P_1(z) = -ipz + \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\frac{-\log|P_1(t)|}{1+t^2}dt + iC_1\,,$$

$$-\log Q_1(z) = iqz + \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\frac{-\log|Q_1(z)|}{1+t^2}dt + iC_2\,.$$

Es folgt

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = e^{i(q-p)z} + \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\,\frac{\log|\frac{P_1(t)}{Q_1(t)}|}{1+t^2}dt + i(C_2 - C_1)\,,$$

also eine Darstellung der gewünschten Form.

❑

COV.8

**5.2.4 Korollar.** *Sei $F$ wie im Satz und sei*

# Kapitel 6

# Der Primzahlsatz

## 6.1 Die Riemannsche Zetafunktion

Wir wollen in diesem Kapitel den Primalsatz beweisen der eine quantitative Anwort auf die Frage nach der Anzahl der Primzahlen gibt. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen.

THVI.1

**6.1.1 Satz.** *Primzahlsatz Sei $\pi(x) := \sharp\{p \in \mathbb{P} | p \geq x\}$, dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \left( \frac{\pi(x)}{\frac{x}{logx}} \right) = 1 .$$

*Wir stellen zunächst den Zusammenhang mit sogenannten Dirichlet-Reihen her; diese sind funktionentheoretischen Methoden zugänglich.*

LEVI.2

**6.1.2 Lemma.** *Es gilt die Aussage des Primzahlsatzes*

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1 + \theta(1))$$

*genau dann, wenn*

$$\Theta(x) := \sum_{\substack{p\in\mathbb{P},\\ p\leq x}} \log p = x + \Theta(x) ,$$

*genau dann, wenn*

$$\psi(x) := \sum_{\substack{n\leq x,\\ n\in\mathbb{N}}} \wedge(n) = x + \Theta(x)$$

*wobei*

$$\wedge(n) := \begin{cases} \log p & , \quad n = p^k \ mit \ \ p \in \mathbb{P} \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

*Beweis.*
·) Wir zeigen zuerst die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen. Sei $r(x)$ definiert durch $\Theta(x) = x(1 + r(x))$. Es gilt klarerweise

$$\Theta(x) \leq \pi(x) \log x ,$$

also

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x}(1 + r(x))\,.$$

Wir brauchen auch eine Abschätzung von $\pi$ nach oben. Sei $0 < q < 1$, dann gilt wegen $\pi(x^q) \leq x^q$,

$$\theta(x) \geq \sum_{\substack{x^q \leq p \leq x,\\ p \in \mathbb{P}}} \log p \geq \geq \log x^q \cdot (\pi(x) - \pi(x^q)) \geq q \log x(\pi(x) - x^q)\,,$$

also

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log x}(1 + r(x))\frac{1}{q} + x^q\,.$$

Wir sehen speziell $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}$, dann folgt

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x}(1 + R(x))$$

mit

$$R(x) = -1 + (1 + r(x))\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)^{-1} + (\log x)x - \frac{1}{\sqrt{\log x}} = \frac{\log x}{e\sqrt{\log x}}\,\frac{y^2}{e^y} \to 0$$

Gilt nun die zweite Aussage, d.h. gilt $r(x) \to 0$, so folgt wegen der Abschätzung nach unten $\liminf_{x\to\infty}({}^{\pi(x)}/\frac{x}{\log x}) \geq 1$. Es folgt auch $R(x) \to o$, also $\limsup_{x\to\infty}({}^{\pi(x)}/\frac{x}{\log x}) \leq 1$, insgesamt die erste Aussage. Gilt umgekehrt die erste Ausage, so folgt zuerst $\limsup_{x\to\infty} r(x) \geq 0$. Es gilt aber auch $\liminf_{x\to\infty} R(x) \geq 0$ wegen der Abschätzung nach unten, damit folgt auch $\liminf_{x\to\infty} r(x) \geq 0$, insgesamt folgt die zweite Behauptung.

·) Wir zeigen sogar $\psi(x) = \theta(x) + 0((\log x)\sqrt{x})$. Die Summanden von $\psi$ die bei $\theta$ fehlen sind die $\log p$ zu $p^k, k \leq 2$. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\sharp\{(k,p) | k \geq 2, p^k \leq x\} = 0(\sqrt{x})$$

ist. Ist $p^k \leq x$, so folgt $p \leq^k \sqrt{x}$ und $k \leq \frac{\log x}{\log p} \leq \frac{\log x}{\log 2}$, also kann man obige Anzahl abschätzen durch

$$\sum_{2 \leq k \leq \frac{\log x}{\log 2}}^{k} \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sum_{3 \leq k \leq \frac{\log x}{\log 2}}^{k} \sqrt{x}\,.$$

Die hintere Summe ist höchstens $\frac{\log x}{\log 2}^3 \sqrt{x} = \theta(\sqrt{x})$.

❑

Eine Reihe der Gestalt $D(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n^{-s}$ heißt eine Dirichletreihe. Ist sie in einem Punkt $s_0$ absolut konvergent, so ist sie in der ganzen Halbebene $Res > s_0$ kompakt konvergiert und stellt daher dort eine analytische Funktion dar. Das folgt da

$$|n^{-s}| = n^{-Res}$$

ist. Es gibt Sätze, die gewisse Eigenschaften der analytischen Funktion $D(s)$ mit Eigenschaften der summatarischen Funktion $\sum_{n\leq x} a_n$ verbinden. Da wir am asymptotischen Verhalten der Funktion $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \wedge(n)$ interessiert sind liegt es nahe die Dirichletreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \wedge(n)n^{-s}$ zu betrachten. Diese ist end mit der Riemannschen Zetafunktion verwandt.

DEVI.3

**6.1.3 Definition.** Die Dirichletreihe

$$\zeta(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$$

heißt Riemannsche Zetafunktion.

LEVI.4

**6.1.4 Lemma.** *Die Dirichletreihe für $\zeta(s)$ konvergiert in der Halbebene $\{Res > 1\}$. Dort gilt die Darstellung (Eubersches Produkt)*

$$\zeta(s) \prod_{p\in\mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} ,$$

*insbesondere ist $\zeta(s) \neq 0$ in $\{Res > 1\}$. Die logarithmische Ableitung ist dort gegeben durch*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n\in\mathbb{N}} \wedge(n)n^{-s} .$$

*Beweis.* Die Konvergenzaussage ist klar.Um die Produktdarstellung und beweisen schreibe

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}, \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} (p^k)^{-s} .$$

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat folgt durch Ausmultiplizieren:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{n=0}^{\infty} (p^k)^{-s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \zeta(s) .$$

Die logarithmische Ableitung vom Endprodukt ist

$$\frac{d}{ds} \log \Big( \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} \Big) = - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{(\log p)p^{-s}}{1-p^{-s}} =$$

$$= - \sum_{p\in\mathbb{P}} (\log p) \sum_{k=1}^{\infty} (p^k)^{-s} = - \sum_{n\in\mathbb{N}} \wedge(n)n^{-s} .$$

❑

Wir benötigen in folgenden einige Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

THVI.5

**6.1.5 Satz.** *Die Funktion $(s-1)\zeta(s)$ läßt sich auf eine offene Menge, welche die abgeschlossene Halbebene $\{Res \geq 1\}$ umfasst analytisch fortsetzen. Sie hat den Wert 1 bei $s = 1$, d.h. $\zeta(s)$ hat einen Pol erster Ordnung mit Residium 1 bei $s = 1$.*

*Für jedes $m = 0, 1, 4 \ldots$ gibt es eine Konstante $C_m$, so daß$(s = \sigma + it)$*

$$|\zeta^{(m)}(s)| \leq C_m |t|, |t| \geq 1, \sigma > 1 ,$$

*gilt. Es gibt eine Konstante $\delta > 0$, so daß*

$$|\zeta(s)| \geq \delta |t|^{-4}, |t| \geq 1, \sigma > 1\,.$$

*$\zeta(s)$ hat auch auf der Geraden $Rej = 1$ keine Nullstellen.*

*Beweis.*
·) Sei $\beta(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$:

————-skizze—————-

Wir zeigen, daß das Integral

$$F(s) := \int_1^\infty t^{-s-1}\beta(t)dt$$

in der Halbebene $\{Res > 0\}$ absolut und kompakt konvergiert, daher dort eine analytische Funktion darstellt. Weiters gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - sF(s)\,,$$

dann hat $\zeta$ also bei 1 das Residium 1 und einen einfachen Pol.

Es gilt $|t^{-s-1}\beta(t)| \leq t^{-\sigma-1}$, also konvegiert das Integral kompakt in $\{Res > 0\}$. Durch partielle Integration folgt

$$\int_n^{n+1} \beta(t)\frac{d}{dt}(t^{-s})dt = \frac{1}{2}(n+1)^{-s} + n^{-s}) - \int_n^{n+1} t^{-s}dt\,,$$

denn am Interwall $(n, n+1)$ ist $\beta(t) = t - n - \frac{1}{2}$. Durch Summation

$$\sum_{n=1}^N n^{-s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N^{-s} + \int_1^N t^{-s}dt - s\int_1^N \beta(t)t^{-s-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N^{-s} + \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{s-1} - s\int_1^N \beta(t)t^{-s-1}dt\,.$$

Für $N \to \infty$ folgt in der Halbebene $\{Res > 1\}$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - sF(s)\,.$$

·) Wir zeigen die Abschätzung nach oben. Zunächst ist für $\sigma = Re \leq 2$ die Zetafunktion beschränkt:

$$|\sum n^{-s}| \leq \sum n^{-\sigma} \leq \zeta(2)\,.$$

Wegen $\zeta'(s) = \sum(-\log n)n^{-s}$, usw.. Gilt das gleiche für die Ableitungen. Wir können also $1 < \sigma \leq 2$ anordnen, und dann genügt es

$$|\zeta^{(m)}(s)| \leq C_m|s|, 1 < \sigma \leq 2, |t| \geq 1\,.$$

zu zeigen. Wegen der obgen Darstellung von $\zeta$ genügt es zu zeigen, daß jede Ableitung $F^{[m]}, m = 0, 1, 2, \ldots,$ in dem Streifen $1 < \sigma \leq 2$ beschränkt ist. Es gilt

$$F^{(m)}(s) = \int\limits_1^\infty (-\log t)^m t^{-s-1} \beta(t) dt\,,$$

für $m = 0$ folgt die Behauptung unmittelbar. Sei also $m \geq 1$: Wegen $|\log t| C'_m t^{\frac{1}{2m}}, (|t| \geq 1)$, und $|\beta(t)| < 1$ folgt

$$|F^{(m)}(s)| \leq C'_m \int\limits_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} dt < \infty\,.$$

·) Wir betrachten im folgenden die Abschätzung nach unten. Dann benötigt man einige Ungleichungen.

·) Sei $|a| = 1$. Dann gilt $Re(a^4) + 4Re(a^2) + 3 \geq 0$. Denn:

$$(a + \overline{a})^4 = a^4 + \overline{a}^4 + 4(a2 + \overline{a}^2) + 6, \text{ da } a\overline{a} = 1\,,$$

also $8(Rea)^4 = Re(a^4) + 4Re(a^2) + 3 \geq 0$.

·) Sei $b_1, b_2, \ldots$ eine Folge nichtnegativer Zahlen, so daß die Reihe

$$D(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n n^{-s}, \sigma > 1\,,$$

konvergiert. Dann gilt

$$ReD(\sigma + 2it) + 4ReD(\sigma + it) + 3D(\sigma) \geq 0\,.$$

Ist $Z(s) := e^{D(s)}$, so gilt

$$|Z(\sigma + it)|^4 |Z(\sigma + 2it)| (Z|\sigma)|^3 \geq 1\,.$$

Denn: Die obige Ungleichung für $a = n^{-i\frac{t}{2}}$ zeigt

$$Re(n^{-2it}) + 4Re(n^{-it}) + 3 \geq 0\,.$$

Multiplizieren mit $b_n n^{-\sigma}$ und summieren gibt die behauptete Ungleichung. Die Ungleichung für $Z$ folgt durch exponentiieren.

·) Sei speziell

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & , \quad n = p^k \text{ mit } p \in \mathbb{P} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$D(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} p^{-ks} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \Big( -\log(1 - p^{-s}) \Big)\,,$$

also

$$e^{D(s)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s)\,.$$

Die im letzten Punkt bewiesene Ungleichung läßt sich also anwenden:

$$\Big| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \Big|^4 |\zeta(\sigma + 2it)|\ |\zeta(\sigma)(\sigma - 1)|^3 \geq \frac{1}{\sigma - 1}, \sigma > 1\,.$$

·) Angenommen $\zeta(1+it)=0$ für ein $t+0$, dann konvergiert für $\sigma \to 1+$ die linke Seite gegen $|\zeta'(1+it)|^n|\zeta(1+2it)|$, die rechte Seite gegen $\infty$.

·) Für die Abschätzung nach unten, kann man sich wieder auf $1<\sigma\leq 2$ beschränken, denn für $\sigma>2$ gilt

$$|\zeta(s)| \geq 1-|\zeta(s)-1| \geq 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}>0\,.$$

Die obige Ungleichung schreibt sich als $(s=\sigma+it)$

$$|\zeta(s)| \geq (\sigma-1)^{\frac{3}{4}}|\zeta(\sigma+2it)|^{-\frac{1}{4}}(\zeta(\sigma)(\sigma-1)^{-\frac{3}{4}}\,.$$

Die Funktion $\zeta(\sigma)(\sigma-1)$ ist auf dem Intervall $1\leq\sigma\leq 2$ stetig und hat dort keine Nullstelle, ist also nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Da $|\zeta(\sigma+it)|\leq C_0|t|$ für $|t|\geq 1$ gilt folgt

$$|\zeta(s)| \geq A(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}}, 1<\sigma\leq 2, |t|\geq 1\,.$$

Für $0<\epsilon<1$ setze man $\sigma(t)=1+\epsilon|t|^{-s}$.

<u>Fall 1</u>: $2\geq\sigma\geq\sigma(t)$ Es gilt

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq A(\epsilon|t|^{-s})^{\frac{3}{4}}|t|^{-\frac{1}{4}} = A\epsilon^{\frac{3}{4}}|t|^{-4}\,.$$

<u>Fall 2</u>: $1<\sigma\leq\sigma(t)$: Es gilt

$$\zeta(\sigma+it)=\zeta(\sigma(t)+it)=\int_{\sigma}^{\sigma(t)}\zeta'(xtit)dx\,,$$

also

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(\sigma(t)+it)| - \left|\int_{\sigma}^{\sigma(t)}\zeta'(x+it)dx\right|.$$

Wegen $|\zeta'(s)|\leq C_1|t|$ folgt

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\sigma(t)+it)| - C_1(\sigma(t)-1)|t| \geq \\ &\geq (A\epsilon^{\frac{3}{4}}-C_1\epsilon)|t|^{-4}\,.\end{aligned}$$

Wählt man $\epsilon$ klein, daß $(A-C_1\epsilon^{\frac{1}{4}}>0$ ist, folgt die Abschätzung nach unten.

❑

THVI.6

## 6.2 Ein Taubersatz

**6.2.1 Satz.** *Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge nichtnegativer reeler Zahlen, so daß die Dirichletreihe*

$$D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

*in der Halbebene $\{Res>1\}$ konvergiert. Es gelte:*

(i) *Die Funktion $(s-1)D(s)$ läßt sich auf eine offene Menge, welche die abgeschlossene Halbebene $\{Res \geq 1\}$ enthält, analytisch fortsetzen, $D(s)$ hat bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\rho$.*

(ii) *Es gelten folgende Abschätzungen: Es existieren Konstanten $C, \kappa$ mit der Eigenschaft*

$$|D(s)|, |D'(s)| \leq C|t|^{\kappa}, \sigma > 1, |t| \geq 1\,.$$

*Dann gilt*

$$\sum_{n \leq x} a_n = \rho x(1 + r(x))$$

*mit $r(x) = 0(1/N_{\sqrt{\log x}}), N = N(\kappa)$ geeignet, z.B. $N(\kappa) = 2[\kappa] + 2$.*

Wir wollen zuerst überlegen, daß dieser Satz den Primzahlsatz impliziert.
*Beweis.* (von Satz 6.1.1 mit Satz 6.2.1) Wir zeigen, daß die Reihe $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \wedge(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ die Voraussetzungen von Satz 6.2.1 erfüllt.
·) Die analytische Fortsetzbarkeit folgt aus der entsprechenden Aussage über $\zeta(s)$ und der Tatsache, daß auf $\{Res = 1\}$ keine Nullstellen sind, daher auch in einer gewissen Umgebung nicht. Da $\zeta$ bei 1 einen einfachen Pol mit Residuum 1 hat folgt $\rho = 1$. Die Abschätzung folgt aus den Abschätzungen für $\zeta$ nach unten bzw. $\zeta, \zeta', \rho''$ nach oben z.B. mit $\kappa = \delta$.

Es folgt also $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \wedge(n) = x + \nu(x)$ und mit Lemma 6.1.2 der Primzahlsatz.

❑

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir Satz 6.2.1 beweisen.

Wir betrachten nicht nur $A_0(x) = \sum_{n \leq x} a_n$, sondern auch die höheren summatarischen Funktionen

$$A_k(x) := \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} a_n (x-n)^k, k = 0, 1, 2, \leq\ .$$

Es gilt $A'_{k+1}(x) = A_k(x), A_{k+1}(x) = \int_1^x A_k(t)dt$. Sei $r_k(x)$ definiert durch

$$A_k(x) = \rho \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}(1 + r_k(x))\,.$$

LEVI.7

**6.2.2 Lemma.** *Sei $k \geq 0$. Aus*

$$r_{k+1}(x) = 0(1/N_{\sqrt{\log x}})$$

*folgt*

$$r_k(x) = 0(1/2N_{\sqrt{\log x}})\,.$$

*Beweis.* Da die Funktion $A_k(x)$ monoton wachsend ist, gilt $(c > 0)$

$$cA_k(x) \leq \int_x^{x+c} A_k(t)dt\,.$$

Wir verwenden diese Ungleichung für $c = hx, 0 < h < 1$. Es gilt

$$A_{k+1}(x+hx) - A_{k+1}(x) = \frac{\rho}{(k+2)!}\Big[(x+hx)^{k+2}(1+r_{k+1}(x+hx)) -$$

$$-x^{k+2}(1+r_{k+1}(x))\Big]\,.$$

und daher

$$1 + r_k(x) = \frac{(k+1)!}{\rho x^{k+1}} A_k(x) \le \frac{(k+1)!}{\rho x^{k+1}} \frac{1}{hx}(A_{k+1}(x+hx) - A_{k+1}(x)) =$$

$$= \frac{1}{h(k+2)}\Big[(1+h)^{k+2}(1+r_{k+1}(x+hx)) - (1+r_{k+1}(x))\Big]\,.$$

Mit

$$\epsilon(x) := \sup_{0\le\xi\le 1} |r_{k+1}(x+\xi x)|$$

gilt

$$r_k(x) \le \frac{1}{h(k+2)}\Big[(1+h)^{k+2}(1+\epsilon(x)) - (1-\epsilon(x))\Big] - 1 =$$

$$= \frac{1}{h(k+2)}\Big[((1+h)^{k+2}+1)\epsilon(x) + ((1+h)^{k+2} - (1+h(k+2)))\Big]\,.$$

Für hinreichend große $x$ ist $\epsilon(x) < 1$ und wir setzen speziell $h = h(x) = \sqrt{\epsilon(x)}, 0 < h(x) < 1$. Der erste Summand in obiger Ungleichung bis auf einen konstanten Faktor durch $\frac{\epsilon(x)}{h} = \sqrt{\epsilon(x)}$ abgeschätzt.

Der zweite Term ist ein Polynom in $h$ dessen konstanter Term verschwindet. Er kann also bis auf einen konstanten Faktor durch $h = \sqrt{\epsilon(x)}$ abgeschätzt werden. Offenbar ist $\epsilon(x) = 0(1/N_{\sqrt{\log x}})$, also gilt mit einer gewissen Konstanten

$$r_k(x) \le K\sqrt{\epsilon(x)}\,.$$

Wir müsen $r_k(x)$ auch nach unten abschätzen. Mittels

$$cA_k(x) \ge \int\limits_{x-c}^{x} A_k(t)dt = A_{k+1}(x) - A_{k+1}(x) - A_{k+1}(x-c), 0 < c < x\,,$$

erhält man genauso wie oben (mit geeignetem K)

$$r_k(x) \ge -K\sqrt{\epsilon(x)}, x \ \text{ hinreichend groß}\,.$$

Es folgt $r_n(x) = 0(\sqrt{\epsilon(x)})$, also $r_k(x) = 0(1/2N_{\sqrt{\log x}})$.

❏

·) Sei $k \in \mathbb{N}, \sigma > 1$. Dann konvergiert das Integral

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{|x^{s+k}|}{|s(s+1)\cdots(s+k)|} ds\,,$$

denn der Integrand kann durch $C\frac{1}{t^2}$ abgeschätzt werden. Auf der Geraden $Res = \sigma$ wird die Reihe $D(s)$ durch die von $t$ unabhängige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma}$ majorisiert. Also ist das Integral

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds, \sigma > 1\,,$$

absolut konvergent und es gilt

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \cdot x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^k \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(\frac{x}{n}^{s}}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds\,.$$

LEVI.8

**6.2.3 Lemma.** *Für $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)cdots(s+k)} ds = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < a \leq 1 \\ \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{\kappa})^k & , \quad a > 1 \end{cases}$$

*Beweis.* Sei

$$f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}\,.$$

$\cdot$) $0 < a \leq 1$. Wir integrieren $f$ längs

——————-. s k i z z e ——————

Es gilt $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(s)ds = 0$ und da $0 < a \leq 1$ gilt ist $|a^s|$ längs $\gamma_1$ und $\gamma_2$ durch 1 beschränkt, das Integral $\int_{\gamma_2} f(s)ds$ strebt also für $R \to \infty$ gegen 0. Es folgt

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(s)ds = 0\,.$$

$\cdot$) $1 < a$. Wir integrieren $f(s)$ längs $\gamma_1 + \tilde{\gamma}_2$. Wieder ist $a^s$ längs dieses Weges beschränkt (durch $a^\sigma$). Also gilt $\int_{\tilde{\gamma}_2} f(s)ds \to 0$ für $R \to \infty$. Der Residnensatz zeigt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1+\tilde{\gamma}_2} f(s)ds = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu a^{-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} = \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{a})^k\,.$$

❑

$\cdot$) Wir erhalten aus diesem Lemma und der Überlegung vorher:

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)} ds, k = 1, 2, \ldots, \sigma > 1\,.$$

Wir benützen diese Formel für $\sigma = 2$ und verschieben den Integrationsweg:

————————skizze ————————

Hier wird $\sigma < 1$ so gewählt, daß der gesamte neue Integrationsweg im Holomorphiegebiet von $D(s)$ liegt. Wir berechnen das Integral längs $\gamma$ mit dem

Residnensatz. Da $\frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\ldots(s+k)}$ im obigen Gebiet analytisch ist mit Ausnahme von 1 wo ein Pol erster Ordnung vorliegt gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{-\mathcal{C}} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)}ds = \frac{\rho x^{1+k}}{(k+1)!}\,,$$

wobei $\mathcal{C}$ die Kurve: "Stück von $\gamma$, dann strichliertes Stück, dann längs $Re=2$ nach unten, dann strichliertes Stück" bezeichnet. Wegen der Abschätzung $|D(s)| \le C|t|^{\kappa}, |t| \ge 1, 1 \le \sigma \le 2$, folgt bei festem $x$ längs ———:

$$\Big|\frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)}\Big| \le C_1|t|^{\kappa-k-1}\,.$$

Wir wählen im folgenden $k > \kappa+1$, dann gilt also $\le C_1|t|^{-2}$. Die Beiträge zum $\oint_{\mathcal{C}}$ der strichlierten Strecken streben also für $t\to\infty$ gegen 0. Es folgt

$$A_k(x) = \frac{\rho x^{1+k}}{(k+1)!} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k)}ds\,.$$

Im folgenden schätzen wir das Integral $\int_\gamma$ streckenweise ab. Zur Abschätzung der unendlichen Teile benützen wir:

LEVI.9

**6.2.4 Lemma.** *(Riemann-Lebesque) Sei $I=(a,b), -\infty \le a < b \le \infty$, ein Integral, $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

*(i) $f$ ist beschränkt.*

*(ii) $f$ ist stetig differenzierbar.*

*(iii) $f$ und $f'$ sind absolut integrierbar.*

*Dann ist für $x>0$ auch die Funktion $f(t)x^{it}$ absolut integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_a^b f(t)x^{it}dt = 0(1/\log x)\,.$$

*Beweis.* Wir wählen Folgen $a_n\to a, b_n\to b, a<a_n<b_n<b$. Es gilt

$$\int_a^b f(t)x^{it}dt = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(t)x^{it}dt = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{i\log x}\Big(f(t)x^{it}\Big|_{a_n}^{b} - \\ -\int\limits_{a_n}^{b_n} f'(t)x^{it}dt\Big)\,.$$

Nach Voraussetzung ist $f$ beschränkt und $f'$ absolut integrierbar, also ist

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)x^{it}dt\Big| \le K\Big|\frac{1}{\log x}\Big|\,.$$

❑

Es folgt aus der Abschätzung $|\frac{D(s)}{s(s+1)\ldots(s+k)}| \leq C_1|t|^{-2}$längs $Re = 1$, Lemma 6.2.4, und der analogen ***? Abschätzungen: $|\frac{D'(s)}{s(s+1)\ldots(s+k)}| \leq C_2|t|^{-2}$, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1+i}^{1+i\infty} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\ldots(s+k)}ds = 0(x^{k+1}/\log x)\,,$$

und analog für das Integral $\int\limits_{1-i\infty}^{1-i}$. Lemma 6.2.4 zeigt auch, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i}^{\sigma+i} \frac{D(s)x^{s+k}}{s(s+1)\ldots(s+k)}ds = 0\Big(x^{\sigma-1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\log x}\Big) \text{ also auch } 0(x^{k+1}/\log x)$$

da $\sigma > 1$.

Wir betrachten das Integral längs einer horizontalen Strecke:

$$\Big|\int\limits_{\sigma+i}^{1+i} \frac{D(s)x^{s+4}}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds\Big| \leq C_2\int\limits_{\sigma}^{1} x^{k+u}du =$$

$$= C_2\frac{x^k}{\log x}(x - x^\sigma) = 0(x^{k+1}/\log x)\,.$$

Analog behandelt man daß Integral längs $[\sigma - i, \sigma + i]$.

Wir schließen aus den obigen Abschätzungen, daß für $k > \kappa + 1$

$$A_k(x) = \frac{\rho x^{k+1}}{(k+1)!} + 0(x^{k+1}/\log x)\,,$$

d.h. daß $r_k(x)$ ein $0(1/\log x)$ ist. Mit Lemma 6.2.2 folgt für $k \leq \kappa + 1$

$$r_k(x) = 0(1/N_{k\sqrt{\log x}}), N_k = 2^{[\kappa]+2-k}\,.$$

Speziell für $k = 0$ folgt die Behauptung von Satz 6.2.1 und damit der Primzahlsatz.

# Kapitel 7

# Klassen analytischer Funktionen

## 7.1 Abschätzung nach unten

Ist $f$ holomorph im Kreis $|z| \leq r$, so bezeichne

$$\begin{array}{rcll} M_f(r) & := & \max_{|z|\leq r} |f(z)| & \Big(= \max(f|z)|\Big), \\ A_f(r) & := & \max_{|z|\leq r} Ref(z) & \Big(= \max_{|z|=r} Ref(z)\Big). \end{array}$$

Klarerweise gilt $|A_f(r)| \leq M_f(r)$. Ist $R > r$, so gilt zwischen $A_f(R)$ und $M_f(r)$ eine Ungleichung in der umgekehrten Richtung.

LEVII.1

**7.1.1 Lemma.** *Sei $f$ analytisch im Kreis $|z| \leq R, f(z) = U(z) + iv(z)$, dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{Re^{i\phi+z}}{Re^{i\phi} - z} d\phi + iv(0)\,.$$

*Beweis.* siehe RS

❑

THVII.2

**7.1.2 Satz.** *(Caratheodory) Sei $f(z)$ holomorph im Kreis $|z| \leq R$, dann gilt*

$$M_f(r) \leq \Big[A_f(R) - Ref(0)\Big] \frac{2}{R-r} + |f(0)|, r < R\,.$$

*Beweis.* Wir addieren die Gleichung aus Lemma 7.1.1 und die Beziehung

$$0 = u(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi\,,$$

und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\phi} \frac{z}{Re^{i\phi-z}} d\phi + f(0)\,.$$

❑

*Beweis.* (Lemma 7.1.1) Die Cauchysche Integralformel besagt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\phi}\frac{Re^{i\phi}}{Re^{i\phi}-z}d\phi, |z| < R\,.$$

Weiters gilt, da $\frac{R^2}{\overline{z}}$ außerhalb von $|z| \leq R$ liegt,

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\phi})\frac{Re^{i\phi}}{Re^{i\phi}} - \frac{R^2}{\overline{z}}d\phi\,.$$

Konjegiert man diese Formel, so folgt mit $\overline{Re^{i\phi}} = \frac{R^2}{Re^{i\phi}}$,

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(Re^{i\phi})}\frac{z}{Re^{i\phi}-z}d\phi\,.$$

Durch Addition zur Chauchyschen Formel folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Ref(Re^{i\phi})\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}d\phi + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} f(Re^{i\phi})d\phi\,,$$

wegen der Mittelwerteigenschaft von $\operatorname{Im} f(z)$ also die Behauptung.

❑

Sezt man hier $f(z)$ z.B. $\equiv 1$, so folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z}{Re^{i\phi}-z}d\phi = 0\,,$$

und wir sehen

$$-f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [A_f(R) - u(Re^{i\phi})]\frac{z}{Re^{i\phi}-z}d\phi - f(0)\,,$$

und daher wegen $A_f(R) - u(Re^{i\phi}) \geq 0 (r = |z|)$

$$|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r}[A_f(R) - u(0)] + |f(0)|\,.$$

COVII.3

**7.1.3 Korollar.** *Es gilt:*

*(i) Ist $f$ analytisch in $|z| \leq R$ und hat dort nichtpositiven Realteil, so ist*

$$M_f(r) \leq -\frac{2r}{R-r}Ref(0) + |f(0)|\,.$$

(*ii*) *(Ungleichung von Caratheodory für die Halbebene): Sei $f$ analytisch in $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ habe dort nichtnegativen Imaginärteil. Dann gilt für $\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1$,*

$$\frac{1}{5}|f(i)|\frac{\sin\theta}{r} \leq |f(z)| \leq 5|f(i)|\frac{r}{\sin\theta}(z = re^{i\theta})\,.$$

*Beweis.*
`ad`(*i*): Ist klar, denn im betrachteten Fall ist $A_f(R) \leq 0$.

`ad`(*ii*): Wir bilden die obere Halbebene auf den Einheitskreis ab:

$$w = \frac{z-i}{z+i}, z = -i\frac{w+1}{w-1}\,,$$

und betrachten die Funktion

$$F(w) := if\Big(-i\frac{w+1}{w-1}\Big)\,.$$

Es gilt $ReF(w) \leq 0$ im Kreis, also folgt aus (*i*)

$$|f(z)| \leq -\frac{2|z-i|}{|z+i|-|z-i|}Re(if(i)) + |f(i)|\,.$$

Es gilt für $|z| \geq 1$ stets

$$|z-i| \leq 2r|z+i| \leq 2r, |z+i|^2 - |z-i|^2 = 4r\sin\theta$$

Die letzte Beziehung geometrisch:
——— s k i z z e ———
$\Longrightarrow$

$$r^2 + 1 = |z+i|^2 - 2r\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$r^2 + 1 = |z-i|^2 - 2r\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

Wir erhalten

$$|f(z)| \leq |f(i)|\Big(1 + \frac{4r}{\sin\theta}\Big) \leq 5|f(i)|\frac{r}{\sin\theta}\,.$$

Um die andere Ungleichung zu zeigen, können wir annehmen, daß keine Nullstellen hat (da sonst $\equiv 0$) und das bereits bewiesene auf $\frac{-1}{f(z)}$ anwenden. ❑

COVII.4

**7.1.4 Korollar.** *Ist $f$ analytisch in $|z| \leq R$, hat $f$ dort keine Nullstellen und gilt $f(0) = 1$, so gilt*

$$ln|f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r}lnM_f(R), |z| \leq r < R\,.$$

*Beweis.* Wir betrachten die analytische Funktion $\log f(z)$, dann ist

$$|\log f(z)| \leq \frac{2r}{R-r}lnM_f(R), |z| \leq r < R\,.$$

Also folgt insbesondere

$$-ln|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} lnM_f(R) .$$

❑

Eine solche Abschätzung nach unten kann natürlich für Funktion mit Nullstellen nicht gelten. Wir werden zeigen, daß eine ähnliche Beziehung gilt, wenn nur (beliebig) kleine Kreise welche die Nullstellen enthalten ausgenommen werden. Dazu benötigen wir eine Abschätzung für ein Polynom nach unten.

LEVII.5

**7.1.5 Lemma.** *Sei $H > 0$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ (mit Vielfachheit). Dann gilt es eine Menge von Kreisen mit der Gesamtsumme ihrer Radien gleich $2H$, so daß für jeden Punkt $z$ ausserhalb diesr Kreise*

$$|z-a_1| \cdot \ldots \cdot |z-a_n| > (\frac{H}{e})^n$$

*gilt.*

*Beweis.*
·) Wir zeigen, daß es Kreise $K$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Der Radius von $K$ ist gleich

$$\frac{H}{n} \cdot \sharp\{a_k \in K, \text{ mit Vielfachheit}\} .$$

Betrachte die konvexe Hülle der Punkte $a_k$ und wähle einen Eckpunkt $a_{k_0}$. Dann gibt es Kreise mit beliebigen Radius die außer $a_{k_0}$ keinen Punkt $a_k$ enthalten. Speziell gibt es also einen solchen Kreis mit Radius

$$\frac{H}{n} \cdot \text{ Vielfachheit von } a_{k_0} .$$

Die Menge $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_n)$ aller Kreise $K$ deren Radius gleich $\frac{H}{n}$ mal der Anzahl der in $K$ enthaltenen $a_k$'s ist, ist also stets nichtleer.

·) Wir wählen in $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_n)$ einen Kreis $K_1$ mit maximalen Radius $\lambda_1 \frac{H}{n}$. Kein Kreis mit Radius $\lambda \frac{H}{n}, \lambda \geq \lambda_1$, kann mehr als $\lambda$ Punkte enthalten. Denn angenommen er würde $\lambda' > \lambda$ Punkte enthalten. Der konzentrische Kreis mit Radius $\lambda' \frac{H}{n}$ enthält dann entweder $\lambda'$ oder $\lambda'' > \lambda'$ Punte. Im ersten Fall haben wir einen Widerspruch zur Maximalität von $\lambda_1$, im zweiten Fall verfahren wir genauso wie vorher weiter. Da es nun endlich viele $a_k$'s gibt erhalten wir einmal einen Widerspruch.

Die Punkte die in $K_1$ liegen seinen oBdA $a_{n-\lambda_1+1}, \ldots, a_n$.

·) Wir wählen aus der Menge $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_{n-\lambda_1})$ einen Kreis $K_2$ mit maximalen Radius $\lambda_2 \frac{H}{n}$. Dann gilt $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Denn angenommen $\lambda_2 > \lambda_1$, dann wäre $K_2$ ein Kreis mit Radius $> \lambda_1 \frac{H}{n}$ welcher mindestens $\lambda_2$ Punkte aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ enthält, wegen dem vorigen .) also genau $\lambda_2$ Punkte. Ein Widerspruch zur Maximalität von $\lambda_1$.

Die Punkte in $K_2$ seien oBdA $a_{n-\lambda_1-\lambda_2+1}, \ldots, a_{n-\lambda_1}$. Verfährt man so weiter erhält man schließlich eine (endliche) Folge $K_1, \ldots, K_p$ mit den Radien $\lambda_1 \frac{H}{n}, \ldots, \lambda_p \frac{H}{n}$, wobei

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = n$$

ist, und so daß $K_j$ genau die Punkte $a_{n-\lambda_1---\lambda_j+1}, \ldots, a_{n-\lambda_1---\lambda_{j-1}}$ enthält, welche Punkte vom Rang $\lambda_j$ heißen.

·) Seien $C_1, \ldots, C_p$ die zu $K_1, \ldots, K_p$ konzentrischen Kreise mit doppelten Radius, und sei $z$ außerhalb dieser Kreise. Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ und $C_{z,\lambda}$ der Kreis um $z$ mit Radius $\lambda \frac{H}{n}$. Dieser Kreis schneidet die $K_j$'s mit Radius $\geq \lambda \frac{H}{n}$ nicht, also liegen in seinem Inneren nur Punkte vom Rang $< \lambda$. Würde $C_{z,\lambda}$ genau $\lambda$ der Punkte vom Rang $< \lambda$ enthalten, so hätten wir einen Widerspruch zur Maximalität des nächstkleineren $\lambda_j' s$. Würde er mehr als $\lambda$ Punkte enthalten, so hätten wir einen Widerspruch zum vorvorigen .). Also enthält $C_{z,\lambda}$ höchstens $\lambda - 1$ Punkte.

·) Seien nun die Punkte $a_k$ in der Reihenfolge ihrer wachsenden Abstände von $z$ nummeriert. Dann gilt wegen dem vorigen .)

$$|z - a_k| > k\frac{H}{n}.$$

Es folgt

$$|z - a_1| \cdot \ldots \cdot |z - a_n| > (\frac{H}{n})^n n! > (\frac{H}{e})^n,$$

wobei das letzte $>$ z.B. wegen der Stälingschen Formel $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\Theta}{2\pi n}}, 0 < \Theta < 1$, gilt.

❑

LEVII.6

**7.1.6 Lemma.** *Sei $f$ analytisch im Kreis $|z| \leq er$ und $|f(0)| = 1$. Dann gilt*

$$n_f(r) \leq lnM_f(er),$$

*wobei $n_f(r)$ die Anzahl der Nullstellen von $f$ im Kreis $|z| < r$ bezeichnet.*

*Beweis.* Wir betrachten das Integral ($f$ analytisch in $< z| \leq R$)

$$I = \int_0^R \frac{n_f(t)}{t} dt.$$

Seien $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_p < R$ jene Radien wo Nullstellen von $f$ liegen, dann gilt

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \frac{n_f(t)}{t} dt + \cdots + \int_{r_p}^{R} \frac{n_f(t)}{t} dt = n_f(r_1)(lnr_2 - lnr_1) +$$

$$+ n_f(r_2)(lnr_3 - lnr_2) + \cdots + n_f(r_p)(lnR - lnr_p) =$$

$$= -n_f(r_1)lnr_1 - (n_f(r_2) - n_f(r_1))lnr_2 - \ldots$$

$$\ldots - (n_f(r_p) - n_f(r_{p-1}))lnr_p + n_f(r_p)lnR =$$

$$= \sum ln\frac{R}{|a_\mu|}$$

wobei $a_\mu$ die Nullstellen von $f$ durchläuft. Nach der Jensen'schen Formel (Korollar 4.5.2) gilt

$$\int_0^R \frac{n_f(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ln|f(Re^{i\phi})| d\phi\,.$$

Es folgt in der Situation des Lemmas wegen $\int_r^{er} \frac{n_f(t)}{t} dt \geq n_f(r) \int_r^{er} \frac{1}{t} dt$

$$n_f(r) \leq \int_r^{er} \frac{n_f(t)}{t} dt \leq \frac{1}{r\pi} \int_0^{2\pi} ln|f(ere^{i\phi})| d\phi \leq lnM_f(er)\,.$$

❑

THVII.7

**7.1.7 Satz.** *Sei $f$ analytisch im Kreis $< z << 2eR, f(0) = 1$, und sei $\eta$ eine positive Zahl $\eta \leq \frac{3}{2}e)$. Dann gilt in $|z| \leq R$ aber außerhalb von Ausnahmekreisen mit der Gesamtsumme der Radien $< 4\mu R$ die Abschätzung*

$$ln|f(z)| > -H(\mu) lnM_f(2eR)\,,$$

*mit $H(\mu) = 2 - ln\frac{3e}{3\mu}$.*

*Beweis.* Betrachte die Funktion ($a_1, \ldots, a_n$ Nullstellen von $f(n|z| < 2R)$

$$\phi(z) = \frac{(-2R)^n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \prod_{k=1}^n \frac{2R(z - a_k)}{(2R)^2 - \overline{a_k} z}\,.$$

Es ist $\phi(0) = 1$ und

$$|\phi(2Re^{i\theta})| = \frac{(2R)^n}{|a_1 \cdot \ldots \cdot a_n|}\,.$$

Die Funktion $g(z) = \frac{f(z)}{\phi(z)}$ hat keine Nullstellen in $|z| \leq 2R$, also gilt mit Korollar 7.1.4 für $|z| \leq R$

$$ln|g(z)| \geq -2lnM_f(2eR)\,.$$

Wir schätzen jetzt $\phi$ nach unten ab. Für $< z| \leq R$ ist ($|\overline{a_k}| < 2R$)

$$\prod_{k=1}^n |(2R)^2 - \overline{a_k} z| < (6R^2)^n\,.$$

Auf das Polynom in Zähler wenden wir Lemma 7.1.5 mit $H = 2\mu R$ an, also ist außerhalb von Kreisen mit Gesamtsumme der Radien gleich $4\mu R$

$$\Big|\prod_{k=1}^n 2R(z - a_k)\Big| > \Big(\frac{2\mu R}{e}\Big)^n (2R)^n\,.$$

Es folgt mit $|a_k| \leq 2R$

$$|\phi(z)| > \frac{2R)^{2n}}{|a_1 \cdot \ldots \cdot a_n|} \Big(\frac{2\mu R}{e}\Big)^n \frac{1}{(6R^2)^n} \geq \Big(\frac{2}{3e}\mu\Big)^n\,.$$

Wegen Lemma 7.1.6 ist

$$n = n_f(2R) \leq lnM_f(2eR)\,,$$

also

$$ln|\phi(z)| > ln(\frac{2}{3e}\mu)lnM_f(2eR)\,.$$

Insgesamt folgt für $f = g \cdot \phi$:

$$ln|f(z)| > -(2 + ln\frac{3e}{2\mu})lnM_f(2eR)\,.$$

❑

## 7.2 Funktionen der Klasse A

DEE

**7.2.1 Definition.** ine ganze Funktion $f$ heißt zur Klasse A gehörig, wenn die Reihe

$$\sum \Big| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \Big| < \infty$$

ist, wobei $a_k$ die Nullstellen von $f$ durchläuft. Ist $f$ nur analytisch z.B. $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ und durchläuft $a_k$ alle Nullstellen von $f$ in dieser Halbebene, so heißt $f$ von der Klasse A in der oberen Halbebene.

Die Bedeutung dieser Bedingung liegt zum Teil auch darin,daß man die Nullstellen in einer Halbebene abspalten kann.

LEVII.8

**7.2.2 Lemma.** *Sei $a_k \in \mathbb{C}^+$ und $\sum \operatorname{Im} \frac{1}{a_k}| < \infty$. Dann ist das Produkt (Blaschke Produkt für $\mathbb{C}^+$)*

$$\prod \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \frac{z}{\overline{a_k}}} =: B(z)$$

*lokal gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C} \setminus \{\overline{a_k}\}$. In $\mathbb{C}^+$ gilt $|B(z)| \leq 1$ und es ist $B(z)\overline{B(\overline{z})} = 1$.*

*Beweis.* von page 66.

❑

Der folgende Satz gibt, ähnlich wie die Jensen'sche Formel, einen Zusammenhang zwischen der Verteilung der Nullstellen und dem Wachstum von $ln|f(z)|$.

THVII.9

**7.2.3 Satz.** *(Carleman) Sei $f$ analytisch in*

$$0 < \lambda \leq |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\,,$$

*und seien $a_k = r_k e^{i\theta_k}, k = 1, \dots, n$, ihre Nullstellen. Dann gilt*

$$\sum_{\lambda < r_k < R} \Big(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2}\Big) \sin\theta_k = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi ln|F(Re^{i\phi})| \sin\phi d\phi +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int_\lambda^R \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\Big) ln|f(x)f(-x)|dx + A_\lambda(f, R)$$

*mit*

$$A_\lambda(f,R) = -\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log f(\lambda e^{i\phi})\Big(\frac{\lambda e^{i\phi}}{R^2} - \frac{e^{-i\phi}}{\lambda}\Big)d\phi\,.$$

*Beweis.* Wir nehmen zuerst an, daß $f$ am Rand des betrachteten Gebietes keine Nullstellen hat und betrachten das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \Big(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{z^2}\Big)\log F(z)dz\,,$$

wobei $\mathfrak{C}$ der Rand von obiger Gebiet ist. Dann gilt

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_\lambda^R \Big(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{x^2}\Big)\log F(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log f(Re^{i\phi})\Big(\frac{1}{R^2} - \frac{e^{2i\phi}}{R^2}\Big)\cdot$$

$$\cdot Re^{i\phi}d\phi + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{-\lambda}\Big(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{x^2}\Big)\log f(x)d_x +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\pi^0 \log F(\lambda e^{i\phi})\Big(\frac{1}{R^2} - \frac{e^{-2i\phi}}{\lambda^2}\Big)\lambda e^{i\phi}d\phi\,.$$

Andererseits folgt durch partielle Integration

$$J = \frac{1}{2\phi i}\cdot\emptyset_{\mathfrak{C}}\Big[\Big(\frac{Z}{R^2} + \frac{1}{z}\Big)\log f(z)\Big] - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{F'(z)}{F(z)}\Big(\frac{z}{R^2} + \frac{1}{z}\Big)dz\,,$$

wobei $\emptyset_{\mathfrak{C}}[-]$ den Zuwachs der in Klammern stehenden Funktion bei Umlauf um $\mathfrak{C}$ beginnend mit $\lambda$ bedeutet.

Dieser Zuwachs ist (Satz von Rouche) gleich

$$2\pi i\cdot\Big(\frac{\lambda}{R^2} + \frac{1}{\lambda}\Big)n_f(R,\lambda)\,,$$

wobei $n_f(R,\lambda)$ die Anzahl der Nullstellen innerhalb von $\mathfrak{C}$ ist. Der zweite Summand ist gleich (Satz von logarithmischen Residium)

$$-\sum_{\lambda<r_k<R}\Big(\frac{r_k e^{i\theta_k}}{R^2} + \frac{1}{r_k e^{i\theta_k}}\Big)\,.$$

Nimmt man in der entstehenden Beziehung $\cdots = J = \cdots$ den Imaginärteil, so folgt die Behauptung.

❑

COVII.10

**7.2.4 Korollar.** *Der Fehlerterm $A_\lambda(f,R)$ ist für $R>\lambda$ beschränkt und für $R\to\infty$ hat er den Grenzwert*

$$A_\lambda(f,\infty) = \operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log F(\lambda e^{i\phi})\frac{e^{-i\phi}}{\lambda}d\phi\,.$$

*Ist $f$ analytisch bei* 0 *und* $f(0) = 1$, *so ist*

$$\lim_{\lambda\to 0} A_f(\lambda, R) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} F'(0)\,.$$

*In diesem Fall gilt also*

$$\sum_{r_k<R}\Big(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2}\Big)\sin\phi_k = \frac{1}{\pi R}\int\limits_0^{\pi} ln|f(Re^{i\phi})|\sin\phi d\phi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{R}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\Big) ln|f(x)f(-x)|dx + \frac{1}{2}\operatorname{Im} F'(0)\,.$$

*Beweis.* Klar

❑

Eine ganze Funktion heißt vom Exponentialtyp, wenn

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{lnM - f(R)}{R} < \infty$$

ist. Analog definiert man Funktionen von Exponentialtyp in einer Halbebene, z.B. durch $\limsup_{R\to\infty,\phi\in(0,\pi)}\cdots < \infty$.

Für Funktionen vom Exponentialtyp kann man ein Kriterium angeben, wann sie zur Klasse A gehören.

THVII.11

**7.2.5 Satz.** *Sei $f$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp. Dann ist $f \in A$ genau dann, wenn für ein $\lambda > 0$ die Ungleichung*

$$\int\limits_{\lambda}^{R}\frac{ln < f(x)f(-x)|}{x^2}dx < M_{f,\lambda}, R > \lambda\,,$$

*mit einer von $R$ unabhängigen Konstanten $M_{f,\lambda}$ gilt*

*Beweis.*
·) Sei zunächst die Bedingung erfüllt, wir zeigen $f \in A$. Setze

$$\psi(x) := \int\limits_{\lambda}^{x}\frac{ln|f(t)f(-t)|}{t^2}dt\,,$$

dann folgt durch partielle Integration

$$\int\limits_{\lambda}^{R}\Big(1 - \frac{x^2}{R^2}\Big)\frac{ln|f(x)f(-x)|}{x^2}dx = \frac{2}{R^2}\int\limits_{\lambda}^{R} x\psi(x)dx < M_{f,\lambda}\,,$$

der zweite Term auf der rechten Seite der Formel von Carleman ist also beschränkt. Da $f$ vom Exponentialtyp ist, ist für eine gewisse Konstante $k_{f,\lambda}$

$$ln|f(Re^{i\phi})| \leq k_{f,\lambda}\cdot R\,,$$

also ist auch der erste Term beschränkt. Nun gilt für $R$ fest und hinreichend großes $R'(r_k e^{i\theta_k}$ sind die Nullstellen in $\overline{\mathbb{C}^+}$, für $\mathbb{C}''$ dann analog)

$$\sum_{\lambda<r_k<R} \frac{\sin\theta_k}{r_k} < 2 \sum_{\lambda<r_k<R} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R'^2}\right) \sin\theta_k \leq$$

$$\leq 2 \sum_{\lambda<r_k<R'} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R'^2}\right) \sin\theta_k \leq C_{f,\lambda}\,.$$

Die vorletzte Ungleichung gilt da alle Summanden $> 0$, die letzte wegen der Formel von Carleman. Es folgt $f \in A$, denn Nullstellen mit Betrag $\leq \lambda$ gibt es nur endlich viele.

·) Sei nun $f \in A$, d.h. insbesondere $\sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} < \infty$, wobei wieder $r_k e^{i\theta_k}$ die Nullstellen von $f$ in $\overline{\mathbb{C}^+}$ sind. Wir können oBdA annehmen das $f(0) = 1$ ist, denn multiplizieren mit einer Potenz ändert nichts an der Gültigkeit der Bedingung des Satzes.

Wähle $\eta$ mit $0 < \eta < \frac{1}{64}$ und sei $R > \lambda$ gegeben. Wir werden Satz 7.1.7 an auf die Funktion $f$ analytisch im Kreis $|z| \leq 4eR$. Dann gilt für $|z| < 2R$ mit Ausnahme von Kreisen deren Gesamtsumme von Radien $< 8$
$etaR$ ist

$$ln|f(z)| > -H(\eta) ln M_f(4eR)\,.$$

Die Konstante $H(\eta)$ hängt nicht von $R$ ab. Es gilt insbesondere für $r < 2R$ mit Ausnahme von Intervallen der Gesamtlänge $< |6\eta R < \frac{R}{4}$:

$$ln|f(re^{i\theta})| > -H(\eta) ln M_f(4eR), 0 \leq \phi < r\pi\,.$$

Da $f$ von Exponentialtyp ist, gilt $ln M_f(4eR) \leq k_{f,\lambda} \cdot 4eR$. Wähle nun $r < R, |R - r| < 32\eta R < \frac{R}{2}$, so daß $r$ nicht in einem Ausnahmeinterwall liegt. Dann gilt

$$ln|f(re^{i\theta})| - H(\eta) k_{f,\lambda} 8er\,,$$

also

$$\frac{1}{\pi r} \int\limits_0^\pi ln|f(re^{i\theta})| \sin d\theta > -H(\eta) k_{f,\lambda} 8e \frac{2}{\pi}\,.$$

Weiters gilt für $x > \lambda$ stets $ln|f(x)f|(-x)| \leq 2k_{f,\lambda}x$, also

$$\frac{1}{r^2} \int\limits_\lambda^r ln|f(x)f(-x)| dx < k_{f,\lambda}\,.$$

Die Formel von Carleman besagt nun, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_\lambda^r \frac{ln|f(x)f(-x)|}{x^2} dx =$$

$$= \sum_{\lambda<r_k<r} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{r^2}\right) \sin\theta_k + \frac{1}{r^2} \int\limits_\lambda^r ln|f(x)f(-x)| dx -$$

$$-\frac{1}{\pi r}\int\limits_0^{\pi} ln|f(re^{i\phi})|\sin\phi d\phi - A_\lambda(f,r)\,.$$

Der erste Summand ist wegen $f \in A$ und $\sin\theta_k \geq 0$ nach oben beschränkt, der zweite und dritte nach den vorausgegangenen Überlegungen und der letzte wegen Korollar 7.2.4. Nun gilt

$$\int\limits_\lambda^R \frac{ln|f(x)-f(-x)|}{x^2}dx = \int\limits_\lambda^r \frac{ln|f(x)f(-x)|}{x^2}dx + \int\limits_r^R \frac{ln|f(x)f(-x)|}{x^2}dx$$

und der zweite Summand ist beschränkt durch

$$\int\limits_r^R \frac{2k_{f,\lambda}x}{x^2}dx = 2k_{f,\lambda}ln\frac{R}{r} \leq 2k_{f,\lambda}ln2\,,$$

denn nach der Wahl von $r$ ist $r > \frac{R}{2}$.

❑

COVII.12

**7.2.6 Korollar.** *Genügt eine in der Halbebene* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *analytische Funktion $f$ vom Exponentialtyp in dieser Halbebene der Bedingung des Satzes, so ist $f \in A$ in dieser Halbebene.*

*Beweis.* In dem entsprechenden Beweisteil des Satzes wurde nicht mehr benützt.

❑

REr

*7.2.7 Bemerkung.* Man kann zeigen, daß die Bedingung des Satzes äquivalent ist zur stärkeren Bedingung

$$\Big|\int\limits_0^R \frac{ln|f(x)f(-x)|}{1+x^2}dx\Big| < M_f, R > 0\,.$$

Es gilt sogar:

RERr

*7.2.8 Bemerkung.* Ist $f$ analytisch in $\mathbb{C}^+$, stetig in $\overline{\mathbb{C}^f}, \mathbb{N}$ ist von $f$ haben keinen endlichen $HP, \liminf \frac{lnM_f(R)}{R} < \infty$, dann ist äquivalent

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(x)|}{1+x^2}dx < \infty, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|f(x)||}{1+x^2}dx < \infty\,.$$

Daraus folgt dann unmittelbar, daß jede Funktion $f = \frac{g}{h}$ mit zwei in $\overline{\mathbb{C}^+}$ analytischen und dort beschränkten Funktionen dort zur Klasse A gehört. Dieses letzte Ergebnis kann man auch anders (mit Phragmen-Lindelöf) zeigen. Aus Satz 7.2.5 folgt bereits das in $\overline{\mathbb{C}^+}$ beschränkte Funktionen dort zur Klasse A gehören.

## 7.3 Funktionen der Klasse HB

DEE

**7.3.1 Definition.** ine ganze Funktion $w(z)$ heißt eine Funktion der KLasse HB, wenn sie keine Nullstellen in der abgeschlossenenunteren HalbebeneIm $z \leq 0$ hat und wenn

$$\left|\frac{w(z)}{w^\sharp(z)}\right| < 1, \operatorname{Im} z > 0\,,$$

ist. Hier bezeichnet $w^\sharp$ die Funktion $w^\sharp(z) := \overline{w(\overline{z})}$.

REW

*7.3.2 Bemerkung.* $w \in HB \Rightarrow w \in A$ Schreibe $w = P + iQ$ mit reellen ganzen Funktionen $P, Q$, d.h. $P = P^\sharp, Q = Q^\sharp$. Dies ist stets in eindeutiger Weise möglich mit

$$P = \frac{w + w^\sharp}{2}, Q = \frac{w - w^\sharp}{2i}\,.$$

Dann ist die Bedingung $\left|\frac{w(z)}{w^\sharp(z)}\right| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, äquivalent zu

$$\operatorname{Im} \frac{Q(z)}{P(z)} > 0, \operatorname{Im} z > 0\,.$$

Dann die Abbildung $\emptyset : z \mapsto -\frac{z-i}{z+i}$ bildet die obere Nullebene auf den Einheitskreis ab und

$$\emptyset\Big(\frac{Q}{P} = -\frac{\frac{Q}{P} - i}{\frac{Q}{P} + i} = \frac{P + iQ}{P - iQ} = \frac{w}{W^\sharp}\,.$$

LEVII.13

**7.3.3 Lemma.** *Sei $\psi$ eine reelle meromorphe Funktion. Damit $\psi$ die obere Halbebene auf sich abbildet ist notwendig und hinreichend, daß sich $\psi$ darstellen läßt als*

$$\psi(z) = c\frac{z - a_0}{z - b_0} \prod \Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big)\Big(1 - \frac{z}{b_k}\Big)^{-1}\,,$$

*mit $b_k < a_k < b_{k+1} a_k \to \infty, a_k \to -\infty$ und $a_{-1} < 0 < b_1$ und $c > 0$.*

*Beweis.*
$\cdot$) Seien zuerst $c, a_k, b_k$ gegeben. Da sich $a_k$ und $b_k$ abwechselnd ist die Reihe

$$\sum \Big(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\Big)$$

konvergent und daher konvergiert die Reihe

$$\sum \Big[1 - \frac{z}{a_k}\Big)\Big(1 - \frac{z}{b_k}\Big)^{-1} - 1\Big] = z \sum \Big(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\Big)\Big(1 - \frac{z}{b_k}\Big)^{-1}$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus 2b_k\}$. Daher ist das Produkt $\prod(1 - \frac{1}{a_n})(1 - \frac{z}{b_k})^{-1}$ auf solchen Mengen ebenfalls gleichmäßig konvergent, stellt also eine dort analytiche Funktion dar.

Es gilt für jedes $k$:

$$\arg \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \frac{z}{b_k}} = \arg(z - a_k) - \arg(z - b_k)\,,$$

d.h. dieses Argument ist gleich dem Winkel unter dem das Intervall $[b_k, a_k]$ von $z$ aus erscheint. Es ist also

$$\arg \psi(z) = \sum [\arg(z - a_k) - \arg(z - b_k)]$$

und daher $0 < \arg \psi(z) < \pi$, d.h. $\operatorname{Im} \psi(z) > 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$.

·) Sei nun $\operatorname{Im}\psi(z) > 0$ ind $\mathbb{C}^+$. Dann hat $\psi$ in $\mathbb{C}^+ u \mathbb{C}^-$ weder Nullstellen noch Pole. Es ist $0 < \arg\psi(z) < \pi$ in $\mathbb{C}^+$ und $-\pi < \arg\psi(z) < 0$ in $\mathbb{C}^-$, also ist der Betrag des Zuwachses von $\arg\psi(z)$ höchstens $2\pi$ wenn $z$ einen beliebigen Kreis durchläuft. Daher sind die Nullstellen und Pole von $\psi$ alle einfach und wechseln sich ab.

Daher konvergiert nach dem oben gezeigten das Produkt

$$\emptyset(z) = \frac{z-a_0}{z-b_0} \prod \Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big)\Big(1 - \frac{z}{b_k})^{-1}\Big)$$

gebildet mit den Nullstellen $a_k$ und Polen $b_k$ der Funktion $\psi$. Die Funktion $\emptyset$ bildet $\mathbb{C}^+$ auf sich ab. Die Funktion $\kappa = \frac{\psi}{\emptyset}$ ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen und es ist $|\arg\kappa(z)| \leq \pi$. $\log\kappa$ ist also eine ganze Funktion mit $|\operatorname{Im}\log\kappa| \leq \pi$, also konstant, d.h. $\psi = c\emptyset$ und dabei muss $c > 0$ sein, da $\operatorname{Im}\psi(z), \operatorname{Im}(z) > 0$ in $\mathbb{C}^+$.

❑

COVII.14

**7.3.4 Korollar.** *Sei $\psi$ eine ganze reelle Funktion mit* $\operatorname{Im}\psi(z) > 0$ *für* $\operatorname{Im} z > 0$. *Dann ist $\psi(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.*

*Beweis.* Folgt unmittelbar aus Lemma 7.3.3.

❑

THVII.15

**7.3.5 Satz.** *Es sei $w(z) = P(z) + iQ(z)$ mit reellen ganzen Funktionen $P$ und $Q$, und seien*

$$P(z) = Ae^{u(z)}(z-a_0) \prod \Big(1 - \frac{1}{a_k}\Big) e^{P_k(\frac{z}{a_k})},$$

$$Q(z) = Be^{v(z)}(z-b_0) \prod \Big(1 - \frac{z}{b_k}\Big) e^{P_k(\frac{z}{b_k})},$$

*u(0)=v(0)=0 ihre Zerlegungen in unendliche Produkte. Dann ist $w \in HB$ genau dann, wenn*

(*i*) *Die Nullstellen von $P$ und $Q$ wechseln einander ab.*

(*ii*) *Die ganzen reellen Funktionen $u$ und $v$ und die Exponenten $P_k(\frac{z}{a_k})$ und $P_k(\frac{z}{b_k})$ erfüllen*

$$u(z) - v(z) + \sum \Big[P_k\Big(\frac{z}{a_k}\Big) - P_k\Big(\frac{z}{b_k}\Big)\Big] = 0\,.$$

(*iii*) *Die Konstanten $A$ und $B$ haben das selbe Vorzeichen.*

*Beweis.*
·) Sei $w \in HB$. Dann bildet $\frac{Q}{P}$ die obere Halbebene auf sich ab, also wechseln sich die Nullstellen und Pole ab und sind einfach. Da $w$ und $w^\sharp$ keine gemeinsamen Nullstelen haben, haben auch $P$ und $Q$ keine, also gilt ($i$).

Aus den Darstellungen von $P$ und $Q$ erhält man mit der Funktion $\emptyset(z)$ wie im letzten Beweis

$$\Theta(z) := \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{B}{A} e^{g(z)} \emptyset(z)\,,$$

mit

$$g(z) = u(z) - v(z) + \sum \Big[ P_k\Big(\frac{z}{b_k}\Big) - P_k\Big(\frac{z}{a_k}\Big) \Big] .$$

$\emptyset$ bildet $\mathbb{C}^+$ auf sich ab, also ist

$$\Big| \arg \frac{\Theta(z)}{\emptyset(z)} \Big| \leq \pi ,$$

und daher ist

$$\log \Big( \frac{A}{B} \frac{\Theta(z)}{\emptyset(z)} \Big) = g(z) = \text{ const.} .$$

Für $z = 0$ ist $g(0) = 0$, also $g \exists 0$, d.h. es gilt $(ii)$. Da die Imaginärteile von $\Theta$ und $\emptyset$ das gleiche Vorzeichen haben ist auch $AB > 0$.

·) Sei $(i), (ii), (iii)$ erfüllt. Dann existiert das Produkt $\emptyset(z)$ und es gilt $\frac{Q(z)}{P(z)} = \emptyset(z)$ mit $c > 0$, also bildet $\frac{Q}{P}\mathbb{C}^+$ auf sich ab, und daher ist $|\frac{w(z)}{w(z)}| < 1$ in $\mathbb{C}^+$. Daher hat auch $w$ keine Nullstellen in $\mathbb{C}^-$ und da $P$ und $Q$ keine gemeinsamen reellen Nullstellen haben, so auch $W$ und $w^\sharp$ nicht. Also ist $w \in HB$.

❑

RES

*7.3.6 Bemerkung.* Die Bedingung $AB > 0$ kann man durch

$$Q'(x)P(x) - P'(x)Q(x) > 0, x \in \mathbb{R} .$$

ersehen. Denn aus $(i)$ und $(ii)$ folgt das $\frac{Q}{P}\mathbb{C}^+$ entweder auf $\mathbb{C}^+$ oder $\mathbb{C}^-$ abbildet. Welches der beiden Fälle eintritt entscheidet obiges Vorzeichen, wegen orientierungstreu.

DEZ

**7.3.7 Definition.** wei reelle ganze Funktionen $P$ und $Q$ heißen ein reelles Paar, wenn sie keine gemeinsamen Nullstellen haben und wenn keine Linearhomleination $\mu P + \nu Q$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ nichtreelle Nullstellen hat.

THVII.16

**7.3.8 Satz.** *Die ganze Funktion $w = P + iQ$ gehört genau dann zur Klasse HB, wenn $P$ und $Q$ ein reelles Paar bilden und wenn für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0 .$$

*Beweis.*
·) Wir zeigen zuerst, da $w$ unter den Bedingungen des Satzes zu HB gehört. Da $P$ und $Q$ ein reelles Paar sind nimmt $\frac{Q}{P}$ in $\mathbb{C}^+$ keine reellen Werte an, bildet also $\mathbb{C}^+$ entweder auf $\mathbb{C}^+$ oder $\mathbb{C}^-$ ab. Wegen $Q'P - P'Q > 0$ tritt der erste Fall ein. Es folgt $|\frac{w}{w^\sharp} < 1$ in $\mathbb{C}^+$. Da $P$ und $Q$ keine gemeinsamen Nullstellen haben,so auch $w$ und $w^\sharp$ nicht, also ist auch $w(z) \neq 0$ für $z \in \overline{\mathbb{C}^-}$. Insgesamt $w \in HB$.

·) Umkehrung genauso.

❑

Im folgenden benötigen wir eine Version des Maximumsprinzips für unbeschränkte Gebilde:

THVII.17

**7.3.9 Satz.** *(Phragmen-Lindlöf) Sei $f$ analytisch in der Halbebene $Rez > 0$, stetig am Rand, $|f(iy)| \leq M \forall y \in \mathbb{R}$, und $f(z) = 0(e^{r^\beta}), \beta < 1$, gleichmäßig für $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, für eine gewisse Folge $r = r_n \to \infty$. Dann gilt $|f(z)| \leq M$ für $Rez \geq 0$.*

*Beweis.* Wähle $\gamma \in (\beta, 1)$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt für $F(z) = f(z)e^{\epsilon z^\gamma}$

$$|(z)| \leq |f(z)|e^{-\epsilon^\gamma \cos \gamma\phi}.$$

Da $\gamma < 1$ ist, ist $\cos \gamma\phi > 0$ in der Halbebene $Rez > 0$, also folgt $|F(iy)| \leq |f(iy)| \leq M$. Auf dem Halbkreis $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit Radius $r_n$ wegen $\gamma > \beta$

$$|F(z)| \leq |f(z)|e^{-\epsilon r_n^\gamma} \cos \frac{\pi}{2}\gamma \to 0, n \to \infty,$$

gleichmäßig in $\phi$. Für hinreichend große $r_n$ ist nach dem Maximumsprinzip $|(z)| \leq M$ im Halbkreis, und daher in der ganzen Halbebene, da $r_n$ beliebig groß wird. Es folgt

$$|f(z)| \leq Me^{\epsilon r^\gamma},$$

und da $\epsilon$ beliebig war gilt für jedes feste $z : |f(z) \leq M$. ❑

Durch drehen und strecken erhält man die folgende Version:

COVII.18

**7.3.10 Korollar.** *Sei $f$ analytisch in einem Winkelraum der öffnung $\alpha \cdot \pi$, stetig am Rand, $|f(z)| \leq M$ am Rand, $f(z) = 0(e^{r^\beta})$ mit $\beta < \frac{1}{\alpha}$ gleichmäßig in $\phi$ im Winkelraum für $r = r_n \to \infty$. Dann ist $|f(z) \leq M$ im Winkelraum.*

*Eine ganze Funktion $f$ heißt von endlicher Ordnung, falls*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{lnln|f(Re^{i\phi})|}{lnR} < \infty$$

*ist.*

THVII.19

**7.3.11 Satz.** *Sei $w = P + iQ$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung. Besitzt $w$ Nullstellen, liegen sämtliche in der offenen oberen Halbebene und wechseln die Nullstellen von $P$ und $Q$ sich ab, so ist $w \in HB$.*

*Beweis.* Da sich die Nullstellen von $P$ und $Q$ abwechseln, konvergiert das Produkt $\emptyset(z)$ aus Lemma 7.3.3. Schreibe

$$Q(z) = e^{g(z)}\emptyset(z)P(z).$$

Sei $\rho$ die Ordnung von $w$, dann ist wegen $P = \frac{w-w^\sharp}{2i}$ die Ordnung von $P$ bzw. $Q$ höchstens $\rho$. Daher ist auch die Ordnung von $\emptyset(z)P(z)$ höchstens $\rho$("Konvergenzexponent"). Also folgt für $\epsilon > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{ln|e^{g(z)}|}{r^{\rho+\epsilon}} = \lim_{R\to\infty} \frac{ln|Q(z)|}{r^{\rho+\epsilon}} - \lim_{R\to\infty} \frac{ln|\emptyset(z)P(z)|}{r^{\rho+\epsilon}} = 0,$$

d.h. der Realteil von $g(z)$ genügt einer Abschätzung der Gestalt

$$\max_\phi Reg(Re^{i\phi}) \leq \delta R^{\rho+\epsilon}$$

für $\delta, \epsilon$ beliebig und für hinreichend großes $R$. Nach der Ungleichung von Caratheodory (Satz 7.1.2) gilt eine analoge Abschätzung für $M_f(R)$. Aus den Chauchy'schen Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe folgt nun, daß $g$ ein Polynom vom Grund höchstens $\rho$ ist: $g = a_0 z^n + \ldots + a_n, a_j \in \mathbb{R}, n \leq \rho$.

Ist $n = 0$, so folgt, daß $\frac{Q}{P}\mathbb{C}^+$ auf sich abbildet, also ist $|\frac{w}{w^\sharp} < 1$ in $\mathbb{C}^+$, und wir erhalten $w \in HB$.

Sei nun $n > 0$. Nach der Ungleichung von Caratheodory für die Halbebene (Korollar 7.1.3) folgt ($\operatorname{Im} z > 0$)

$$c_1 \frac{\sin\phi}{r} < |\emptyset(re^{i\phi})| < c_2 \frac{r}{\sin\phi} \,,$$

mit gewissen Kontrasten $c_1, c_2$. Für hinreichend großes $r$ ist weiters

$$Reg(re^{i\phi}) \approx a_0 r^h \cos n\phi \,.$$

Das zeigt, daß $e^{g(z)}\emptyset(z)$ in jedem Winkelraum aus $\mathbb{C}^+$ der keinen Strahl $\arg z = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$ enthält, wie $\frac{e^{r^h}}{r}$ wächst oder wie $e^{-r^n} r$ gegen Null strebt. Es folgt mit

$$-\frac{e^{g(z)}\emptyset(z) - i}{e^{g(z)}\emptyset + i} = -\frac{1 - \frac{i}{e^{g(z)}\emptyset(z)}}{1 + \frac{i}{e^{g(z)}\emptyset(z)}} \,,$$

daß $F$ in solchen Winkelräumen beschränkt ist.

Es bleiben die - beliebig kleinen - Winkelräume um die Strahlen $\arg z = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$ übrig. Am Rand ist $F$ bechränkt. Wir zeigen, daß die Voraussetzung von Phragmen-Lindelöf erfüllt werden kann. Zunächst gilt $|w(z)| \leq e^{r^{\rho+1}}$ für hinreichend große $r$. Sei $\mu < \frac{1}{16}$ gewählt, und $R$ fest. Nach Satz 7.1.7 gilt

$$ln|w^\sharp(z)| > -HlnM_{w^\sharp}(2eR), |z| < R \,,$$

mit Ausnahme von Kreisen deren Gesamtsumme von Radien $< 4\mu R < \frac{R}{4}$ ist. Insbesondere gibt es eine Zahl $r > \frac{R}{2}$, so daß obige Ungleichung für alle $z$ mit $|z| = r$ gilt. Es folgt (für hinreichend gross e $R$)

$$ln|w^\sharp(re^{i\phi})| > -H(2eR)^{\rho+1} \geq -H(4e)^{\rho+1} r^{\rho+1} \,.$$

Also gilt für eine gewisse Folge $r = r_n \to \infty$ und eine gewisse Konstantee $c$

$$|F(re^{i\phi})| = \left|\frac{w(re^{i\phi})}{w^\sharp(re^{i\phi})}\right| \leq e^{cr^{\rho+1}} \,.$$

Die Voraussetzung von Korollar 7.3.10 ist also für $\alpha < \frac{1}{\rho+1}$ erfüllt und wir schließen, daß $F$ in $\mathbb{C}^+$ beschränkt ist. Da längs $\mathbb{R}|F(x)| = 1$ gilt folgt durch nochmalige Anwendung von Phragmen-Lindelöf, daß $|F(z)| \leq 1$ in $\mathbb{C}^+$ (“$<$“ denn $w$ hat Nullstelle), also ist $w \in HB$.

❑

Wir kommen zu einer Produktdarstellung der Funktion aus HB. Schreibe

$$\Re F := \frac{f + f^\sharp}{2}, \Im f := \frac{f - f^\sharp}{2i} \,.$$

THVII.20

**7.3.12 Satz.** *(Krein) Eine ganze Funktion $w$ gehört genau dann zur Klasse HB, wenn sie sich darstellen läßt als*

$$w(z) = z^m e^{u(z)+i(\alpha z+\beta)} \prod \Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big) e^{\Re P_k(\frac{z}{a_k})},$$

*wobei* $\sum |\operatorname{Im} \frac{1}{a_k}| < \infty, \operatorname{Im} a_k > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ *und $u$ eine ganze reelle Funktion ist.*

*Beweis.*
·) Ist $w$ in der angegebenen Form dargestellt, so gilt

$$\frac{w(z)}{w^\sharp(z)} = e^{2i(\alpha z+\beta)}\chi(z)$$

mit

$$\chi(z) = \prod \Big(11 - \frac{z}{a_k}\Big)\Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big)^{-1},$$

welches Lemma 7.2.2 konvergiert. Es ist offensichtlich

$$\Big|\frac{w(z)}{w^\sharp(z)} < 1, z \in \mathbb{C}^+ .$$

Weiters hat klarerweise $w$ keine Nullstellen in $\overline{\mathbb{C}^-}$, also ist $w \in HB$.

·) Sei nun $w \in HB$ gegeben. Wir schreiben

$$w(z) = z^m e^{g(z)} \prod \Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big) e^{p_k(\frac{z}{a_k})} .$$

Seien $\chi_n$ und $w_n$ durch die gleichen Formeln wie $\chi$ und $w$ definiert, nur daß nur $k = 1, \ldots, n$ multipliziert wird, dann folgt

$$\frac{w_n(z)}{w_n^\sharp(z)}\chi_n^{-1}(z) = e^{2i[\Im g(z)+\sum_{k=1}^n \Im P_k(\frac{z}{a_k})]} .$$

Da die Produkte für $w$ und $\chi$ konvergieren, so auch die Reihe $\sum \Im P_k(\frac{z}{a_k})$, und zwar lokal gleichmäßig in ganz $\mathbb{C}$ (zunächst nur weg von $\{a_k\}$, aber durch Ausnahmen endlich vieler Summanden dann überall). Es folgt mit $u(z) = \Re g(z), v(z) = \Im g(z) + \sum P_k(\frac{z}{a_k})$,

$$w(z) = z^m e^{u(z)+iv(z)} \prod \Big(1 - \frac{z}{a_k}\Big) e^{\Re P_k(\frac{z}{a_n})} .$$

Die Funktion $\frac{w(z)}{w^\sharp(z)}\chi_n^{-1}(z)$ ist in $\mathbb{C}^+$ beschränkt, denn die Nullstellen von $\chi$ sind genau die von $w$. Längs $\mathbb{R}$ gilt $\Big|\frac{w(x)}{w^\sharp(x)}\chi_n^{-1}(x)\Big| = 1$, also folgt nach Phragmen-Lindlöf

$$\Big|\frac{w(z)}{w^\sharp(z)}\chi_n^{-1}(z)\Big| \leq 1, z \in \mathbb{C}^+ .$$

Hier kann man für jedes feste $z, n \to \infty$ streben lassen und erhält $|e^{iv(z)}| \leq 1$, d.h. die ganze reelle Funktion $v(z)$ bildet $\overline{\mathbb{C}^+}$ in sich ab. Nach Korollar 7.3.4 folgt $v(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$. Insgesamt haben wir die gewünschte Darstellung erhalten.

❑