Schritt 1, Fall $z \in G$

Schreibe $z = (\zeta_j)_{j=1}^n$, und wähle $\varepsilon > 0$ sodass der abgeschlossene Quader

$$Q := \prod_{j=1}^n [\zeta_j - \varepsilon, \zeta_j + \varepsilon] \subseteq G .$$

Sei f eine Funktion die den Voraussetzungen des Satzes genügt und zusätzlich

$$\operatorname{supp} f \subseteq \prod_{j=1}^n (\zeta_j - \varepsilon, \zeta_j + \varepsilon)$$

erfüllt. Dann ist $f|_{\partial^o G} = 0$ und daher trivialerweise

$$\int_{\partial^o G} f(y) \cdot (\Lambda(y)^T \omega) \, d\mu(y) = 0 .$$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und betrachte das Integral

$$\int_G [df(x)] e_j \, d\lambda(x) .$$

Nach der Voraussetzung an $\operatorname{supp} f$ und mit dem Satz von Fubini erhalten wir $\left(x = (\xi_j)_{j=1}^n\right)$

$$\int_G [df(x)] e_j \, d\lambda(x) = \int_Q \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x) \, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{n-1}} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(z + t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n)\, d\lambda(t_j) \right) d\lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Da f am Rand von Q gleich Null ist, haben wir

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(z + t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n)\, d\lambda(t_j) =$$

$$= f(z + t_1 e_1 + \ldots + t_{j-1} e_{j-1} + \varepsilon e_j + t_{j+1} e_{j+1} + \ldots + t_n e_n)$$

$$- f(z + t_1 e_1 + \ldots + t_{j-1} e_{j-1} - \varepsilon e_j + t_{j+1} e_{j+1} + \ldots + t_n e_n)$$

$$= 0.$$

Die behauptete Formel gilt also für $w \in \{e_1, \ldots, e_n\}$. Jedes Element des $\mathbb{R}^n$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ schreiben, und da die behauptete Formel linear in w ist, folgt die Gültigkeit für alle $w \in \mathbb{R}^n$.

Schritt 1, Fall $z \in \partial^\circ S$

Wir benötigen eine einfache Tatsache aus der linearen Algebra.

Lemma:

Sei $n \geq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$. Setze $a_j := A e_j$ (e_j ist wieder der j-te kanonische Basisvektor), und definiere

$$B := (a_1 \,|\, a_2 \,|\, \dots \,|\, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)},$$

$$\Gamma := A^{-T} e_n .$$

Dann gilt

$$\det(B^T B) = (\det A)^2 \, \|\Gamma\|^2 .$$

Beweis: Für eine Matrix M bezeichnen wir mit $M_{(i,j)}$ jene Matrix die entsteht wenn man aus M die i-te Zeile und j-te Spalte streicht.

Nach der Cramerschen Regel ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[\left((-1)^{i+j} \det A_{(i,j)} \right)_{i,j=1}^{n} \right]^T ,$$

und daher

$$\Gamma = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+n} \det A_{(i,n)} \right)_{i=1}^{n} .$$

Betrachte nun die Matrix die entsteht, wenn man in A die letzte Spalte durch Γ ersetzt:

$$C = \left(a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_{n-1} \mid \Gamma \right) = \left(B \mid \Gamma \right).$$

Berechnet man $\det C$ indem man nach der letzten Spalte entwickelt, so erhält man $\left(\Gamma = (\Gamma_i)_{i=1}^{n} \right)$

$$\det C = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \cdot (-1)^{i+n} \det C_{(i,n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \cdot \underbrace{(-1)^{i+n} \det A_{(i,n)}}_{= \det A \cdot \Gamma_i}$$

$$= \det A \cdot \| \Gamma \|^2 .$$

Nun berechnen wir $\det C$ auf eine andere Weise, nämlich vermöge der Beziehung

$$(\det C)^2 = \det C^T \cdot \det C = \det (C^T C).$$

Es ist, für $j = 1, \ldots, n-1$,

$$\Gamma^T a_j = e_n^T A^{-1} \cdot A e_j = 0,$$

und damit $\Gamma^T B = 0$. Wir erhalten

$$C^T C = \left(\begin{array}{c} B^T \\ \hdashline \Gamma^T \end{array}\right) \cdot \left(B \,\vdots\, \Gamma\right) = \begin{pmatrix} B^T B & B^T \Gamma \\ \Gamma^T B & \Gamma^T \Gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & \Gamma^T \Gamma \end{pmatrix},$$

und damit

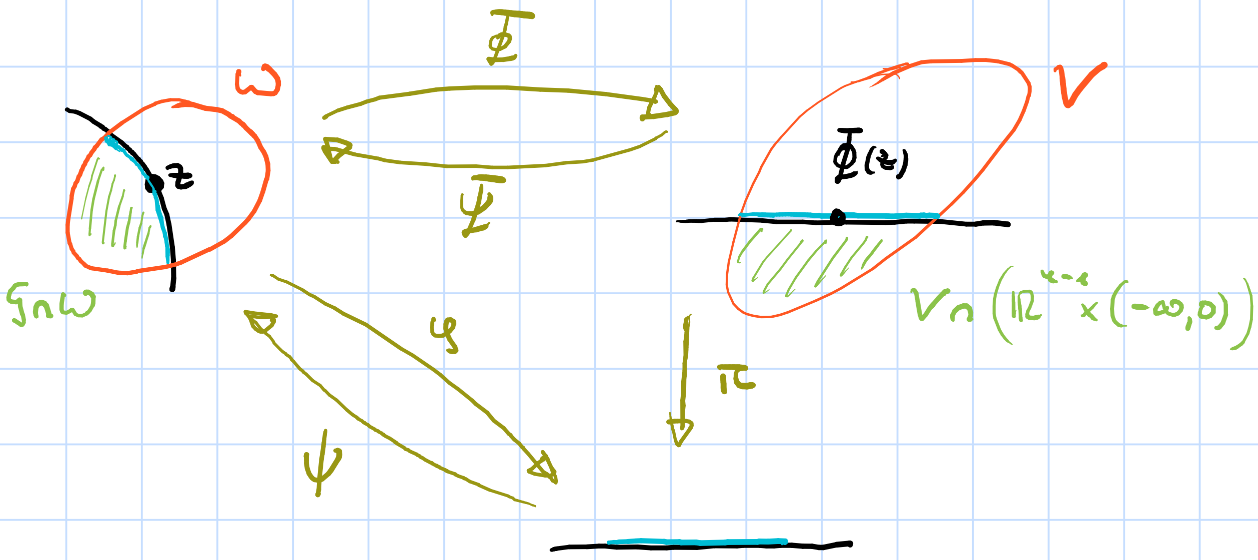
$$\det(C^T C) = \det(B^T B) \cdot \|\Gamma\|^2 .$$

Zusammen folgt also

$$(\det A)^2 \, \|\Gamma\|^4 = \det(B^T B) \cdot \|\Gamma\|^2 .$$

$\square$

Wir kommen nun zum Beweis der Gleichheit der Integrale lokal bei einem Punkt aus $\partial^0 S$. Sei also $z \in \partial^0 S$ gegeben. Wähle eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $z \in U$. Die Notationen $\omega, V, \Phi, \psi, \Psi$ seien wie üblich.



Weiters sei $\nu : \partial^\circ G \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale.

Aufgrund der Linearität in ω der gewünschten Beziehung von Integralen genügt es Beziehung für alle $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{ran} d\psi(g(z))$ nachzuweisen. Sei ein solcher Vektor ω festgehalten.

Die äußere Normale kann mit Hilfe der Diffeomorphismus Ψ ausgedrückt werden, und das Integral über $W \cap G$ mittels Φ zu einem Integral über $V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0))$ transformiert werden. Es stellt sich heraus, dass man, um gut rechnen zu können, besser einen in Abhängigkeit von ω leicht modifizierten Diffeomorphismus verwendet.

▷ Konstruktion eines "geschickten" Diffeomorphismus $\tilde{\Phi}$.

Wir definieren eine Abbildung

$$\mathring{\Psi} : \big(V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) + \operatorname{span}\{e_n\} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\mathring{\Psi}\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\Big) := \Psi\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i\Big) + \xi_n \omega .$$

Dann gilt offenbar

$$\mathring{\Psi}\big|_{V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})} = \Psi\big|_{V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})} = \psi \circ \pi$$

insbesondere $\mathring{\Psi}(\Phi(z)) = z$. Wir sehen weiters, dass

$$d\mathring{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right) = \left(d\psi\left(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i e_i\right) \;\middle|\; \omega \right)$$

(beachte hier, dass e_i auf der linken Seite in $\mathbb{R}^n$ ist und auf der rechten Seite in $\mathbb{R}^{n-1}$, ohne dass notationell unterschieden wird).

Da $\omega \notin$ Bild $d\psi(\varphi(z))$ und da $d\psi$ injektiv ist, folgt dass $d\mathring{\Psi}(\Phi(z))$ invertierbar ist. Nach dem Satz von der inversen Funktion gibt es offene Mengen $\mathring{\omega}, \mathring{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $z \in \mathring{\omega}$, $\Phi(z) \in \mathring{V}$, sodass $\mathring{\Psi}|_{\mathring{V}}$ ein Diffeomorphismus von $\mathring{V}$ auf $\mathring{\omega}$ ist. ObdA sei dabei $\mathring{V} \subseteq V$.

Wir zeigen nun, dass

$$\mathring{\Psi}(\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})) = \partial^\circ S \cap \Psi(\mathring{V}).$$

Die Inklusion "$\subseteq$" gilt, da $\mathring{\Psi}$ auf $\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ mit Ψ übereinstimmt. Sei $x \in \partial^\circ S \cap \Psi(\mathring{V})$. Dann ist $\Phi(x) \in \mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$, und es gilt

$$\mathring{\Psi}(\Phi(x)) = \Psi(\Phi(x)) = x.$$

Wähle nun $r > 0$ und $\varrho > 0$ sodass die Menge

$$\tilde{V} := U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(z)) \times (-\varrho, \varrho)$$

die folgenden Eigenschaften hat:

$$\tilde{V} \subseteq \mathring{V}, \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}) \subseteq \Psi(\mathring{V})$$

Dies ist möglich, da $\mathring{V}$ eine Umgebung von $\Phi(z)$ und $\Psi(\mathring{V})$ eine Umgebung von z ist.

Bezeichne weiters $\tilde{\omega} := \mathring{\Phi}(\tilde{V})$.

Klarerweise gilt

$$\mathring{\Phi}\big(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) \subseteq \tilde{\omega} \cap \partial^\circ G$$

Sei nun $t \in \tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ und sei indirekt angenommen, dass $\mathring{\Phi}(t) \in \partial^\circ G$. Dann ist

$$\mathring{\Phi}(t) \in \partial^\circ G \cap \mathring{\Phi}(\tilde{V}) \subseteq \partial^\circ G \cap \Phi(\mathring{V}) =$$
$$= \mathring{\Phi}\big(\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big)$$

Da $\mathring{\Phi}|_{\mathring{V}}$ injektiv ist, folgt $t \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, ein Widerspruch. Wir schließen, dass

$$\mathring{\Phi}\big(\tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) \subseteq \tilde{\omega} \setminus \partial^\circ G.$$

Gemeinsam erhalten wir, dass in beiden Inklusionen Gleichheit gelten muss, d.h.,

$$\mathring{\Phi}\big(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) = \tilde{\omega} \cap \partial^\circ G,$$
$$\mathring{\Phi}\big(\tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) = \tilde{\omega} \setminus \partial^\circ G.$$

Betrachte nun die Menge

$$\tilde{V}_+ := \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)) = U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(g(z)) \times (0,\rho).$$

Wir zeigen

$$\mathring{\Phi}(\tilde{V}_+) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \mathring{\Phi}(\tilde{V}_+) \subseteq G.$$

Sei dann indirekt angenommen, dass es $t_1, t_2 \in \tilde{V}_+$ gibt mit

$$\mathring{\Psi}(t_1) \in \mathcal{G}, \quad \mathring{\Psi}(t_2) \notin \mathcal{G}.$$

Betrachte den stetigen Weg (die Verbindungsstrecke von t_1 und t_2)

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \tilde{V}_+ \\ p \longmapsto p\, t_1 + (1-p)\, t_2 \end{cases}$$

und den stetigen Weg

$$\delta : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathring{V} \\ p \longmapsto \left(\Phi \circ \mathring{\Psi} \circ \gamma\right)(p) \end{cases}$$

Wegen $\mathring{\Psi}(\gamma(0)) \notin \mathcal{G}$ und $\mathring{\Psi}(\gamma(1)) \in \mathcal{G}$, gilt

$$e_n^T\, \delta(0) > 0 \quad , \quad e_n^T\, \delta(1) < 0.$$

Also existiert $p \in (0,1)$ mit $e_n^T\, \delta(p) = 0$. Für ein solches p haben wir

$$\mathring{\Psi}\left(\delta(p)\right) = \Psi\left(\delta(p)\right) = \Psi\left(\Phi\left(\mathring{\Psi}(\gamma(p))\right)\right)$$
$$= \mathring{\Psi}\left(\gamma(p)\right)$$

Wieder wegen der Injektivität von $\Psi|_{\mathring{V}}$ folgt

$$\tilde{V}_+ \ni \gamma(p) = \delta(p) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

ein Widerspruch.

In genau der gleichen Weise erhalten wir für die Menge

$$\tilde{V}_- := \tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)\right) = U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(z)) \times (-\delta, 0)$$

dass

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) \subseteq G.$$

Die Menge $\mathring{\Psi}(\tilde{V})$ ist eine Umgebung von z, und z ist im Rand von G. Also ist

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}) \cap G \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{G}) \neq \emptyset.$$

Es gilt also

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}_+) = \tilde{\omega} \cap G \quad \vee \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) = \tilde{\omega} \cap G.$$

Im zweiten Fall setze $\tilde{\Psi} := \mathring{\Psi}|_{\tilde{V}}$, im ersten Fall machen wir noch eine Spiegelung und definieren

$$\tilde{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) := \mathring{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i e_i - \xi_n e_n\right),$$

$$\text{für} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \tilde{V}.$$

Bezeichnet man nun $\tilde{\Phi} := \tilde{\Psi}^{-1}$, so ist $\tilde{\Phi}$ ein Diffeomorphismus von $\tilde{\omega}$ auf $\tilde{V}$ und das Paar $(\tilde{\omega}, \tilde{\Phi})$ erfüllt alle notwendigen Eigenschaften um eine Karte von $\partial^o G$ zu induzieren. Offenbar ist diese Karte nichts anderes als

$$\left(\tilde{\omega} \cap \partial^o G,\ \varphi|_{\tilde{\omega} \cap \partial^o G}\right).$$

▷ Nachrechnen der Integralbeziehung für $\operatorname{supp} f \subseteq \tilde{\omega}$.

Sei nun f entsprechend der Voraussetzungen des Satzes, und sei zusätzlich $\operatorname{supp} f \subseteq \tilde{\omega}$. Dann gilt:

$$\int_{\partial^0 S} f(y) \left(\Lambda(y)^T \omega\right) d\mu(y) = \int_{\partial^0 S \cap \tilde{\omega}} f(y) \left(\Lambda(y)^T \omega\right) d\mu(y) =$$

$$= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(z))} (f \circ \psi)(t) \left(\Lambda(\psi(t))^T \omega\right) \sqrt{\det d\psi(t)^T d\psi(t)}\, d\lambda(t)$$

Wir verwenden das Lemma mit der Matrix

$$A := d\tilde{\Psi}(\pi^T(t)) = \left(d\psi(t) \,\middle|\, \omega \right)$$

Dann ist, mit der Notation des Lemmas,

$$\Gamma = A^{-T} e_n = d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))^{-T} e_n = d\tilde{\Phi}\left(\tilde{\Psi}(\pi^T(t))\right)^T e_n$$

$$= d\tilde{\Phi}(\psi(t))^T e_n ,$$

also $\Lambda(\psi(t)) = \dfrac{\Gamma}{\|\Gamma\|}$. Weiters ist $B = d\psi(t)$, und es gilt

$$\Gamma^T \omega = e_n^T \, d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))^{-1} \cdot d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))\, e_n = 1 .$$

Wir erhalten dass

$$\left(\Lambda(\psi(t))^T\omega\right)\sqrt{\det d\psi(t)^T d\psi(t)} =$$

$$= \frac{1}{\|\Gamma\|}\sqrt{\det A^T A} = |\det A| = |\det d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))|$$

Setzt man dies ein, so folgt also

$$\int_{\partial_0 S} f(y)\,\left(\Lambda(y)^T\omega\right)\,d\mu(y) =$$

$$= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z))} f(\tilde{\Psi}(\pi^T(t)))\;|\det d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))|\,d\lambda(t)$$

Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz schließt man nun, dass dieses Integral weiter gleich ist

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z))} (f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)-\varepsilon e_n)\;|\det d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))|\,d\lambda(t)$$

Da $\operatorname{supp}(f\circ\tilde{\Psi}) \subseteq U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z))\times(-s,0]$ und $f\circ\tilde{\Psi}$ stetig differenzierbar ist, haben wir

$$(f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)-\varepsilon e_n) = (f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)-\varepsilon e_n) - (f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)-s e_n)$$

$$= \int_{-s}^{-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\zeta}(f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)+\zeta e_n)\,d\zeta\,.$$

Jetzt verwenden wir den Satz von Fubini, und erhalten dass das Integral von oben weiter gleich ist

$$= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z)) \times (-\rho, -\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial s}(f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)+se_n)\,\left|\det d\tilde{\Psi}(\pi^T(t))\right|\,d\lambda(t)\times d\lambda(s)$$

$$= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z)) \times (-\rho, -\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial s}(f\circ\tilde{\Psi})(\pi^T(t)+se_n)\,\left|\det d\tilde{\Psi}(\pi^T(t)+se_n)\right|\,d\lambda(t)\times d\lambda(s)$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial s}(f\circ\tilde{\Psi}) = d(f\circ\tilde{\Psi})e_n = \left[(df)\circ\tilde{\Psi}\right]\cdot d\tilde{\Psi}\cdot e_n$$
$$= \left[(df)\circ\tilde{\Psi}\right]\omega$$

Die Transformationsformel gibt dass das obige Integral weiter gleich ist

$$= \int_{\tilde{\Psi}\left(U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z))\times(-\rho,-\varepsilon)\right)} df(x)\cdot\omega \; d\lambda(x)$$

Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz erhält man

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\tilde{\Psi}\left(U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}(y(z))\times(-\rho,-\varepsilon)\right)} df(x)\cdot\omega\, d\lambda(x) = \int_{\underbrace{\tilde{\Psi}(\tilde{V}_-)}_{=\tilde{\omega}\cap S}} df(x)\cdot\omega\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_S df(x)\cdot\omega\, d\lambda(x).$$

Schritt 2

Wir beweisen in diesem Schritt, dass es glatte Zerlegungen der 1 gibt.

Lemma:

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i=1,\dots,N$, mit

- $\forall i \in \{1,\dots,N\}, x \in \mathbb{R}^n.\ 0 \leq f_i(x) \leq 1$
- $\forall x \in K.\ \sum_{j=1}^{N} f_j(x) = 1$
- $\forall i \in \{1,\dots,N\}.\ \operatorname{supp} f_i$ kompakt $\wedge$
  $\exists W_i \in \mathcal{W}.\ \operatorname{supp} f_i \subseteq W_i$

Beweis: Sei $z \in K$. Wähle $W_z \in \mathcal{W}$ mit $z \in W_z$ und $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subseteq W_z$. Nun wähle $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$g \geq 0, \quad \operatorname{supp} g \subseteq U_{\frac{1}{4}\delta}(0), \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, d\lambda(x) = 1,$$

und setze

$$f_z(x) := \left(\mathbb{1}_{U_{\frac{1}{2}\delta}(z)} * g\right)(x) = \int_{U_{\frac{1}{4}\delta}(0)} \mathbb{1}_{U_{\frac{1}{2}\delta}(z)}(x-y)\, g(y)\, d\lambda(y)$$

Da g C^∞-Funktion mit kompaktem Träger ist, sind alle Ableitungen integrierbar, und daher $f_z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiters gilt offenbar $0 \leq f_z \leq 1$ und

$$f_z\big|_{U_{\frac{1}{4}\delta}(z)} = 1, \quad \operatorname{supp} f_z \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}\delta}(z)} \subseteq \omega_z .$$

Die Mengen $U_{\frac{1}{4}\delta}(z)$, $z \in K$, sind eine offene Überdeckung von K, und wir finden daher $N \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_N \in K$ sodass

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j) .$$

Die Funktion $\sum_{j=1}^{N} f_{z_j}$ ist C^∞ und ≥ 1 auf $\bigcup_{j=1}^{N} U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j)$.

Da $\operatorname{supp} f_{z_\ell} \subseteq U_{\frac{3}{4}\delta}(z_\ell)$ gilt, ist

$$f_\ell(x) := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{N} f_{z_j}(x) \right)^{-1} \cdot f_{z_\ell}(x) , & x \in \bigcup_{j=1}^{N} U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j) \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$$

eine C^∞-Funktion. Offenbar gilt

$$0 \leq f_\ell \leq 1 , \quad \operatorname{supp} f_\ell \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}\delta}(z_\ell)} \subseteq \omega_{z_\ell} ,$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} f_\ell(x) = 1 \quad \text{für } x \in \bigcup_{j=1}^{N} U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j) .$$

$\square$

Sei nun eine Funktion f gegeben die den Voraussetzungen des Satzes genügt, und zusätzlich $\operatorname{supp} f \subseteq G \cup \partial^\circ G$ erfüllt.

Zu jedem $z \in G \cup \partial^\circ G$ sei O_z eine offene Umgebung sodass der Satz für Funktionen deren Träger in O_z liegt gilt. Wähle eine glatte Zerlegung der 1 zu der offenen Überdeckung

$$\{ O_z \mid z \in G \cup \partial^\circ G \}$$

der kompakten Menge $\operatorname{supp} f$; wir bezeichnen sie als $f_1, \dots, f_N$.

Für jede der Funktionen $f \cdot f_j$, $j = 1, \dots, N$, ist die im Satz behauptete Formel richtig. Da diese Formel linear in f ist, folgt die Gültigkeit auch für

$$\sum_{j=1}^{N} f \cdot f_j = f \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j = f.$$

Schritt 3

Wähle eine Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$h \geq 0, \quad \|h\|_1 = 1, \quad \operatorname{supp} h \subseteq U_1(0),$$

und setze

$$k_\ell(x) := \ell^n \, h(\ell x), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun eine Approximation von f angepasst an die Menge

$$L := (\operatorname{supp} f) \setminus (S \cup \partial^\circ S).$$

Nämlich setze

$$f_\ell := \left(1 - \mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right) \cdot f, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$0 \leq \mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell \leq 1,$$

$$\left(\mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right)(x) = \begin{cases} 0, & x \notin L + U_{\frac{3}{\ell}}(0) \\ 1, & x \in L + U_{\frac{1}{\ell}}(0) \end{cases}$$

und daher

$$|f_\ell| \le |f|, \quad f_\ell(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin L + U_{\frac{1}{\ell}}(0) \\ 0, & x \in L + U_{\frac{1}{\ell}}(0) \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_\ell &\subseteq (\operatorname{supp} f) \cap \left(L + U_{\frac{1}{\ell}}(0)\right)^c \\ &\subseteq (\operatorname{supp} f) \cap \left((\operatorname{supp} f) \setminus (S \cup \partial^\circ S)\right)^c \\ &\subseteq S \cup \partial^\circ S . \end{aligned}$$

Nach dem in den Schritten 1 und 2 bereits bewiesenen erhalten wir also

$$\int_S [d f_\ell(x)]\, \omega \, d\lambda(x) = \int_{\partial^\circ S} f_\ell(y) \cdot \left(\Lambda(y)^T \omega\right) d\mu(y)$$

Wir müssen überlegen was passiert wenn $\ell \to \infty$ strebt. Dazu beginnen wir mit dem rechten Integral. Der Integrand ist beschränkt durch die von ℓ unabhängige und nach μ integrierbare Funktion $|f(y)| \cdot \|\omega\|$. Sei $y \in \partial^\circ S$. Wählt man (W, Φ) wie in der Definition von $\partial^\circ S$, so gilt $\overline{S} \cap W \subseteq S \cup \partial^\circ S$ da $W \cap \partial S \subseteq \partial^\circ S$ ist. Es folgt dass $L \cap W = \emptyset$, und daher finden wir $\ell_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$y \notin L + U_{\frac{1}{\ell_0}}(0) .$$

Für alle $\ell \geq \ell_0$ gilt daher $f_\ell(y) = f(y)$. Wir sehen dass, punktweise auf $\partial^0 S$,

$$\lim_{\ell \to \infty} f_\ell(\Lambda^T \omega) = f(\Lambda^T \omega).$$

Der Satz von der beschränkten Konvergenz impliziert nun

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_{\partial^0 S} f_\ell(\Lambda^T \omega)\, d\mu = \int_{\partial^0 S} f(\Lambda^T \omega)\, d\mu.$$

Um das linke Integral zu behandeln, müssen wir die partiellen Ableitungen von $f_\ell - f$ abschätzen $(x = (\xi_j)_{j=1}^n)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[f_\ell - f\right](x) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right) f\right](x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right](x) \cdot f(x) + \left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right)(x)\, \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x)$$

$$= \left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_\ell\right)(x)\, f(x) + \left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right)(x)\, \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x).$$

Das Integral über den zweiten Summanden lässt sich leicht behandeln. Zunächst ist

$$\left|\left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell\right)(x)\, \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x)\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x)\right|$$

und für $x \in S$ finden wir $l_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin L + U_{\frac{3}{l_0}}(0)$

da $L \cap S = \emptyset$, also $(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) = 0$ für alle $l \geq l_0$.

Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$\lim_{l \to \infty} \int_S \left| (\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x) \right| d\lambda(x) = 0$$

Um das Integral über den ersten Summanden abzuschätzen, bemerke dass

$$\left| \left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l \right)(x) \; f(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{L+U_{2/l}(0)}(x-y) \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(y) \right| d\lambda(y) \cdot |f(x)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x) \right| d\lambda(x) \cdot \|f\|_\infty$$

Die L^1-Norm von $\frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x)$ berechnet man mit Hilfe der Transformation $x \mapsto \frac{x}{l}$ als

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x) \right| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} l^{n+1} \left| \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} h\right](lx) \right| d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} l \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h(x) \right| d\lambda(x) = l \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h \right\|_\infty \lambda(U_1(0))$$

Nun erhält man

$$\int_S \left| \left(1\!\!1_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell \right)(x) \, f(x) \right| d\lambda(x) =$$

$$= \int_S 1\!\!1_{L+U_{\frac{3}{\ell}}(0)}(x) \cdot \left| \left(1\!\!1_{L+U_{\frac{2}{\ell}}(0)} * k_\ell \right)(x) \, f(x) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \lambda\left(L+U_{\frac{3}{\ell}}(0)\right) \cdot \ell \, \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h \right\|_\infty \lambda(U_1(0)) \cdot \|f\|_\infty$$

Da L klein vom Grad 1 ist, strebt dieser Ausdruck für $\ell \to \infty$ gegen 0.

Wir schließen, dass

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_S \left| \left(df_\ell(x) - df(x) \right) \omega \right| d\lambda(x) = 0,$$

und daher

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_S df_\ell(x) \, \omega \, d\lambda(x) = \int_S df(x) \, \omega \, d\lambda(x).$$

Der Beweis des Satzes ist damit vollständig $\square$