Ein Integralsatz

Wir wollen nun einen Integralsatz formulieren und beweisen, der ein Integral über ξ mit einem Integral über den orientierbaren Rand verbindet.

Dieser Satz ist sehr stark, zum Beispiel hat er recht allgemeine Versionen der Integralsätze von Gauß, Green, und Stokes als Korollar.

Der Beweis des Satzes ist – sowohl methodisch als auch technisch – ziemlich aufwendig, aber auch eine sehr gute Demonstration ganz typischer Argumentationsweisen:

- wir verwenden die Freiheit der Wahl (bzw. Konstruktion) der Karte,
- wir machen ein lokal → global Argument mittels einer Zerlegung der Eins,
- wir machen ein Approximationsargument mittels einer approximativen Identität.

Um den Satz zu formulieren, brauchen wir noch eine Notation.

Definition:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir sagen A ist klein vom Grad 1, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \lambda\left(A + U_\delta(0)\right) = 0.$$

Satz:

Sei $n \geq 2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, und beschränkt. Weiters sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ mit

- f ist stetig und $f|_G$ ist stetig differenzierbar,
- $\forall j = 1, \dots, n.\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(G, \lambda)$ wobei λ das (die Einschränkung auf G des) Lebesgue Maß ist,
- $f|_{\partial^\circ G} \in L^1(\partial^\circ G, \mu)$ wobei μ das Oberflächenmaß von $\partial^\circ G$ ist,
- $(\operatorname{supp} f) \setminus (G \cup \partial^\circ G)$ ist klein vom Grad 1.

Schließlich bezeichne Λ die äußere Normale von G. Dann gilt, für alle $\omega \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_G [df(x)]\,\omega \, d\lambda(x) = \int_{\partial^\circ G} f(y) \cdot \left(\Lambda(y)^T \omega\right) d\mu(y).$$

Wir wollen als Korollar den Integralsatz von Gauß angeben. Dazu noch eine Notation:

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Schreibe $f(x) = (f_j(x))_{j=1}^n$ und $x = (\xi_j)_{j=1}^n$. Dann heißt

$$\operatorname{div} f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}$$

die **Divergenz** von f.

Satz (Gauß'scher Integralsatz):

Sei $n \geq 2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, und beschränkt. Weiters sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ mit

- ▷ f ist stetig und $f|_G$ ist stetig differenzierbar,
- ▷ $\forall i, j = 1, \dots, n .\ \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \in L^1(G, \lambda)$ wobei λ das (die Einschränkung auf G des) Lebesgue Maß ist,
- ▷ $\forall i = 1, \dots, n .\ f_i|_{\partial^o G} \in L^1(\partial^o G, \mu)$ wobei μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist,
- ▷ $(\operatorname{supp} f) \setminus (G \cup \partial^o G)$ ist klein vom Grad 1.

Schließlich bezeichne ν die äußere Normale von G.
Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T f(y)\, d\mu(y)$$

<u>Beweis:</u> Wir wenden den Integralsatz an mit der Funktion f_i und dem Vektor e_i. Dies gibt

$$\int_G \frac{\partial f_i}{\partial \xi_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_G df_i(x)\cdot e_i\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\partial^\circ G} f_i(y)\,\left(\nu(y)^T e_i\right) d\mu(y)$$

$$= \int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T\cdot\left(f_i(y)\, e_i\right) d\mu(y)$$

Summiert man über alle $i = 1,\dots,n$, folgt die Behauptung.

$\square$

Der Beweis des Integralsatzes selbst gliedert sich als:

① Wir zeigen eine lokale Version des Satzes:
Jeder Punkt $z \in S \cup \partial^\circ S$ hat eine offene Umgebung U_z sodass für jede Funktion f die zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes noch

$$\operatorname{supp} f \subseteq U_z$$

erfüllt, die Aussage des Satzes gilt.

Der Beweis dieser lokalen Version zerfällt in zwei Fälle:
▷ Fall $z \in S$. Dieser Fall ist einfach zu erledigen.
▷ Fall $z \in \partial^\circ S$. Das ist die Essenz des gesamten Beweises.

② Wir machen ein "lokal → global" Argument um zum Fall $\operatorname{supp} f \subseteq S \cup \partial^\circ S$ zu kommen.
Dabei kleben wir mit Hilfe einer glatten Zerlegung der 1 die lokalen Aussagen zusammen; ein typisches Standardargument.

③ Wir machen ein Approximationsargument um allgemeinen Fall zu kommen.
Dabei verwenden wir eine glatte approximative Identität um den Träger nach $S \cup \partial^\circ S$ hineinzuschieben; ein technisches Standardargument.