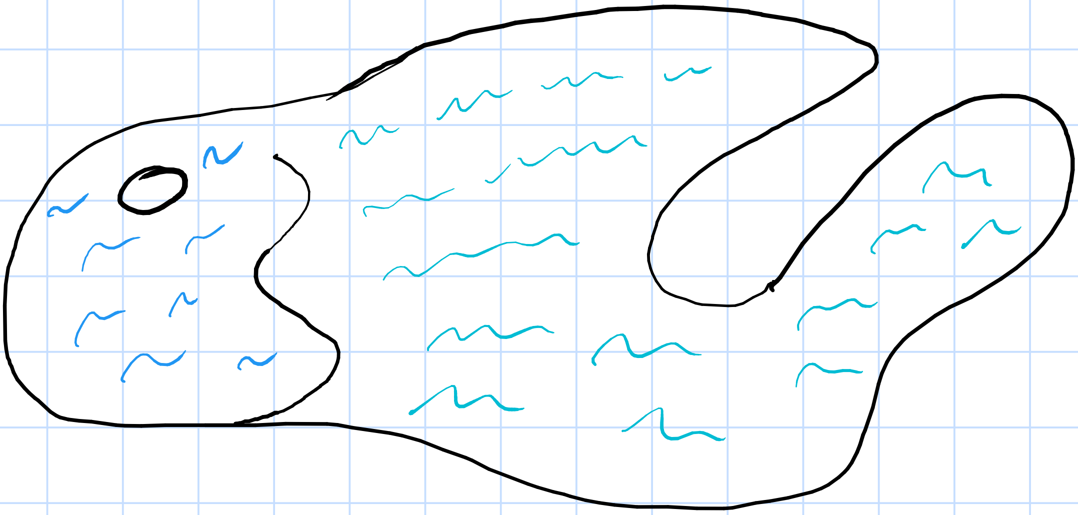
Der orientierbare Rand

Man denke an die Strömung einer Flüssigkeit in einem Schwimmbad:



Die Umwälzung des Wassers im Pool wird durch Düsen im Inneren und Abfluss über den Rand erreicht.

Entscheidend für das Verhalten des Wassers ist das Strömungsfeld (Fließgeschwindigkeit). Denn eine Quelle (Düse) bewirkt eine Änderung der Strömung. Klarerweise muss die Gesamtsumme des durch Quellen einfließenden Wassers gleich der Gesamtsumme des durch den Rand ausfließenden Wassers sein. Also ist

Integral über die Fläche der Änderung der Strömung

=

Integral über den Rand der Strömung in äußerer Richtung

Offensichtlich besteht hier Erklärungsbedarf was diese Feststellung wirklich bedeuten soll.

Als erstes eine ganz allgemeine Bezeichnung.

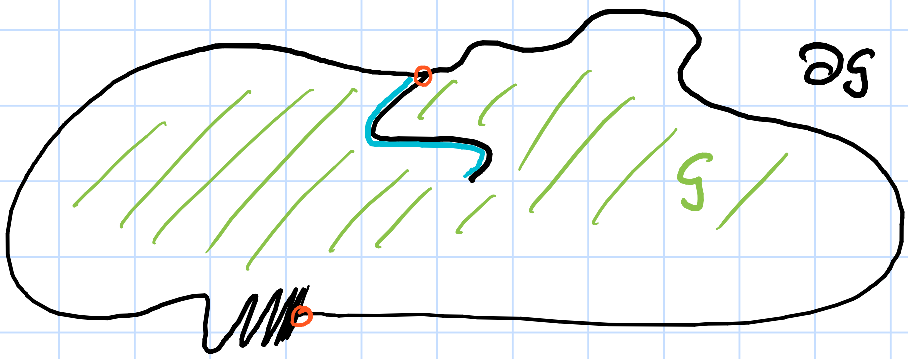
Definition:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Der Rand von A ist

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

$$= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x).\ U \cap A \neq \emptyset,\ U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

Um der oben geschriebenen "Aussage" Sinn zu geben, müssen wir uns klar machen was "über den Rand integrieren" bedeutet, und was "äußere Richtung" sein soll. Ersteres legt nahe dass man nur glatte Teile des Randes betrachten kann, zweiteres dass man nur Teile des Randes behandelt wo man entscheiden kann dass G nur auf einer Seite des Randes liegt.



o ... nicht glatt

... es gibt kein "nach außen"

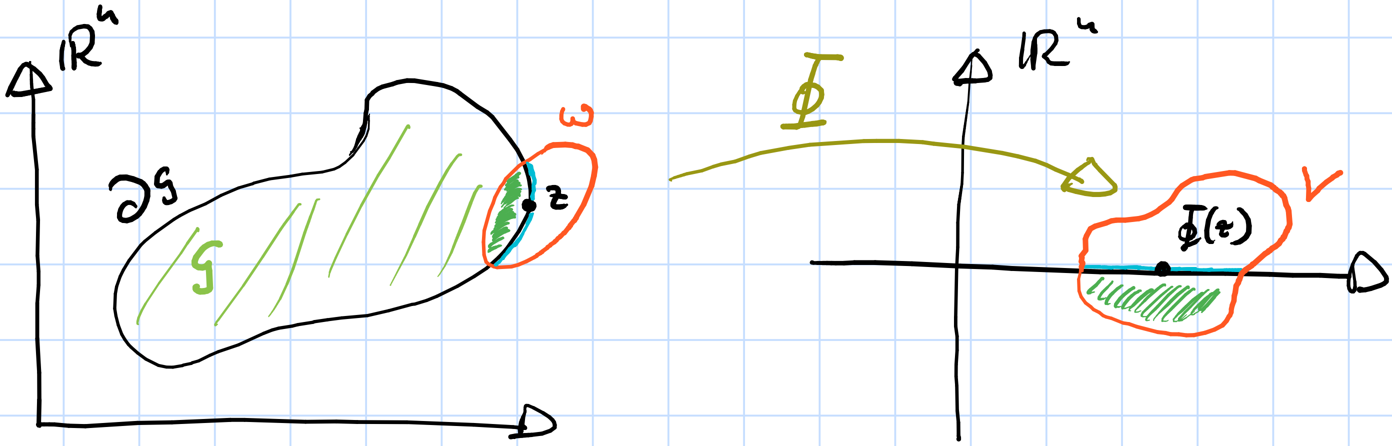
Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der orientierbare Rand von G ist die Menge aller Punkte $z \in \partial G$ sodass:

$\exists\, (\omega, \Phi)$ mit den folgenden Eigenschaften

- $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $z \in \omega$
- $\Phi : \omega \to \mathbb{R}^n$, $V := \Phi(\omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
- $\Phi : \omega \to V$ C^1-Diffeomorphismus
- $\Phi(\omega \cap \partial G) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$

  $\Phi(\omega \cap G) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0))$



Wir bezeichnen den orientierbaren Rand von G als $\partial^o G$.

Bemerke, dass für (ω, Φ) wie oben stets $\omega \cap \partial G \subseteq \partial^o G$ gilt. Der orientierbare Rand kann in natürlicher Weise zu einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden.

Satz:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Bezeichne mit $\mathcal{T}$ die Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$ auf $\partial^\circ G$, mit $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die Projektion auf die ersten $n-1$ Koordinaten, und

$$A := \left\{ \left(\omega \cap \partial^\circ G, \pi \circ \Phi|_{\omega \cap \partial^\circ G}\right) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\omega, \Phi) \text{ alle Paare mit den Eigenschaften} \\ \text{aus der Definition von } \partial^\circ G \end{array} \right\}$$

Dann gilt:

(i) $\langle \partial^\circ G, \mathcal{T}, A \rangle$ ist eine $(n-1)$-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit.

(ii) Es existiert eine eindeutige stetige Funktion $\Lambda : \partial^\circ G \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\forall (U, \varphi) \in A,\ x \in U.\ \Lambda(x) \perp \operatorname{ran} d(\varphi^{-1})(\varphi(x))$$

$$\forall x \in \partial^\circ G.\ \|\Lambda(x)\| = 1$$

$$\forall x \in \partial^\circ G\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in (0, \varepsilon).\ x + \alpha \Lambda(x) \notin G \wedge x - \alpha \Lambda(x) \in G$$

Wir bezeichnen die Funktion Λ als die äußere Normale von G.

Beweis:

▷ Bemerkung zur Definition der Karten von $\mathcal{A}$.

Die Projektion π ist gegeben durch die (Block-) Matrix

$$\pi = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

Sie hat offenbar eine Rechtsinverse. Tatsächlich ist

$$\pi \circ \pi^T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}} .$$

Die Abbildung π^T ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^{n-1}$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist daher

$$\pi\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} : \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

ein Homöomorphismus.

Aus der Definition der Karten (U, φ) an $\mathcal{A}$ als $U = W \cap \partial^{\circ} S$, $\varphi = \Phi|_U$, sieht man (mit der Notation $\psi := \varphi^{-1}$ und $\Psi := \Phi^{-1}$) dass

$$\psi = \Psi \circ \pi^T :$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, bend left, "\Phi"] & V \arrow[l, bend left, "\Psi"] \arrow[d, bend right, "\pi"'] \\ U \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, bend left, "\varphi"] & \varphi(U) \arrow[l, bend left, "\psi"] \arrow[u, bend right, "\pi^T"'] \end{tikzcd}$$

▷ Wir zeigen, dass jedes Paar $(\omega \cap \partial^\circ S, \Phi|_{\omega \cap \partial^\circ S})$ eine $(n-1)$-dimensionale Karte von $\langle \partial^\circ S, \mathcal{J} \rangle$ ist.

Dazu benutzen wir die folgende allgemeine Tatsache:
Ist $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ mit $\Phi(A) = B$, dann ist $\Phi|_A$ ein Homöomorphismus wenn A und B mit der Spurtopologie von X bzw. Y versehen sind.

Betrachte nun ein Paar $(\omega \cap \partial^\circ S, \Phi|_{\omega \cap \partial^\circ S})$. Dann gilt

▷ $\omega \cap \partial^\circ S \in \mathcal{J}$ da ω offen in $\mathbb{R}^n$ ist,

▷ $V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ da V offen in $\mathbb{R}^n$ ist,

▷ $\Phi|_{\omega \cap \partial^\circ S} : \omega \cap \partial^\circ S \to V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ist ein Homöomorphismus, da $\Phi : \omega \to V$ ein Homöomorphismus ist und $\Phi(\omega \cap \partial^\circ S) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$,

▷ $\pi(V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))$ ist offen und $\pi \circ \Phi|_{\omega \cap \partial^\circ S}$ ist ein Homöomorphismus, da $\pi|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}$ einer ist.

▷ Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Atlas ist.

Die Abbildungen π und π^T sind offenbar stetig differenzierbar. Nun gilt, für je zwei gegebene Paare (ω_1, Φ_1) und (ω_2, Φ_2), dass ((U_1, φ_1), (U_2, φ_2) die entsprechenden Karten)

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\big|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} = \pi \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \circ \pi^T\big|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$$

und wir sehen dass der Kartenwechsel stetig differenzierbar ist.

▷ Wir zeigen, dass $\subseteq : \partial^0 S \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung ist.

Da $\partial^0 S$ mit der Spurtopologie versehen ist, ist $\subseteq$ ein Homöomorphismus von $\partial^0 S$ auf $\subseteq(\partial^0 S)$. Sei (ω, Φ) gegeben und (U, φ) die zugehörige Karte. Als Atlas für $\mathbb{R}^n$ verwenden wir wie üblich $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$. Es ist

$$\begin{tikzcd}
\omega \cap \partial^0 S \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R}^n \\
\varphi(U) \arrow[u, leftarrow, "\varphi"'] \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, leftarrow, "id"']
\end{tikzcd}$$

und wir sehen dass die Abbildung $id \circ \subseteq \circ \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar ist. Weiter ist, für alle $y \in \varphi(U)$,

$$d\psi(y) = (d\Phi)(\pi^T(y)) \cdot \pi^T,$$

und wir sehen dass $d\psi(y)$ injektiv ist.

▷ Wir konstruieren eine lokale äußere Normale.

Betrachte eine Karte (U, φ) (mit zugehörigem (ω, Φ)), und definiere eine Funktion $\Gamma : U \to \mathbb{R}^n$ als

$$\Gamma(x) := [d\Phi(x)]^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in U.$$

Da $d\Phi$ invertierbar ist, ist jedenfalls $\Gamma(x) \neq 0$.

Wir bezeichnen mit e_j den j-ten kanonischen Basisvektor

$$e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Stelle},$$

wobei wir die Länge des Vektors nicht explizit anschreiben.
Für jedes $y \in \varphi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt dann

$$\Gamma(\psi(y))^T \, d\psi(y) v = e_n^T \, d\Phi(\psi(y)) \, d\psi(y) v$$

$$= e_n^T \, d\Phi\left(\Psi(\pi^T(y))\right) d\Psi(\pi^T(y)) \, \pi^T v$$

$$= e_n^T \, d(\Phi \circ \Psi)(\pi^T(y)) \, \pi^T v = e_n^T \pi^T v = 0,$$

d.h. $\forall x \in U. \ \Gamma(x) \perp \operatorname{ran} d(\varphi^{-1})(\varphi(x))$.

Schließlich zeigen wir

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall \alpha \in (0, \varepsilon). \ x \pm \alpha \Gamma(x) \in \omega \ \wedge$$
$$e_n^T \Phi(x + \alpha \Gamma(x)) > 0 \wedge e_n^T \Phi(x - \alpha \Gamma(x)) < 0.$$

Beachte hier, dass $\forall y \in \omega. \ \ y \in \mathcal{G} \iff e_n^T \Phi(y) < 0$.

Definiere $R(x,z)$ durch die Gleichung

$$\Phi(z) = \Phi(x) + d\Phi(x)\cdot(z-x) + R(x,z).$$

Dann gilt $\lim_{z\to x} \frac{1}{\|z-x\|} R(x,z) = 0$. Nun ist, für

$\alpha \neq 0$ mit $x+\alpha\Gamma(x) \in \omega$,

$$\frac{1}{\alpha} e_n^T \Phi(x+\alpha\Gamma(x)) = \frac{1}{\alpha} e_n^T \Phi(x)$$

$$+ e_n^T d\Phi(x)\, d\Phi(x)^T e_n + e_n^T \frac{R(x, x+\alpha\Gamma(x))}{\alpha\,\|\Gamma(x)\|}$$

Der erste Summand ist Null, der zweite die von α unabhängige positive Zahl $\| d\Phi(x)^T e_n \|^2$, und der letzte Summand strebt gegen Null für $\alpha \to 0$. Wir sehen, dass für $|\alpha|$ hinreichend kleinen stets gilt

$$\operatorname{sgn} e_n^T \Phi(x+\alpha\Gamma(x)) = \operatorname{sgn} \alpha.$$

D Wir kleben die lokalen Normalen zu einer globalen äußeren Normalen zusammen.

Sei $x \in \partial S$, und seien (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten an A mit $x \in U_1 \cap U_2$. Es ist $\psi_2 = \psi_1 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$, und daher

$$d\psi_2(\varphi_2(x)) = d\psi_1(\varphi_1(x)) \cdot d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(\varphi_2(x)).$$

Da $d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ an jeder Stelle bijektiv ist, folgt dass

$$\ker d\psi_2(\varphi_2(x)) = \ker d\psi_1(\varphi_1(x))$$

Das orthogonale Komplement von $\ker \psi_1(\varphi_1(x))$ ist 1-dimensional, also erhalten wir

$$\Gamma_2(x) = \lambda\, \Gamma_1(x)$$

mit einem gewissen $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für alle hinreichend kleinen $\alpha > 0$ gilt

$$x + (\alpha\lambda)\, \Gamma_1(x) = x + \alpha\, \Gamma_2(x) \in S,$$

also muss $\lambda > 0$ sein. Wir schließen, dass

$$\frac{1}{\|\Gamma_1(x)\|}\, \Gamma_1(x) = \frac{1}{\|\Gamma_2(x)\|}\, \Gamma_2(x).$$

Es ist daher eine Funktion $\Lambda : \partial^\circ S \to \mathbb{R}^n$ durch die folgende Vorschrift wohldefiniert: für $x \in \partial^\circ S$ wähle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $x \in U$ und setze

$$\Lambda(x) := \frac{1}{\|\Gamma(x)\|} \cdot \Gamma(x).$$

Diese Funktion ist stetig, da jeder Punkt eine Umgebung besitzt, wo Λ mit einer stetigen Funktion übereinstimmt (nämlich $\frac{1}{\|\Gamma\|} \cdot \Gamma$ für $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ geeignet). Klarerweise hat sie die drei im Satz verlangten Eigenschaften und ist (wie das für die Wohldefiniertheit gemachte Argument zeigt) durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

$\square$