Die Fouriertransformation

III. Invertierbarkeit

Es ist eine wesentliche Tatsache, dass die Fourier-transformation, in gewissem Sinne, nahezu idempotent ist.

Satz:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und sei vorausgesetzt dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \quad \text{f.ü.}$$

Beweis: Wir beginnen mit der Feststellung, dass sich die Gültigkeit der gewünschten Beziehung auf Faltungen überträgt.

$\triangleright$ $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}).\ \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \wedge \hat{\hat{g}}(x) = g(-x)$

$$\Longrightarrow \widehat{f*g} \in L^1(\mathbb{R}) \wedge \widehat{\widehat{f*g}}(x) = (f*g)(-x)$$

Zunächst ist $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

Da $\hat{f}$ beschränkt ist, folgt $\widehat{f*g} \in L^1(\mathbb{R})$. Wir berechnen mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\widehat{\widehat{f*g}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f*g}(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x}\, d\lambda(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x}\, d\lambda(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2\pi i y \xi}\, d\lambda(y) \right) \hat{g}(\xi) e^{-2\pi i \xi x}\, d\lambda(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\, e^{-2\pi i (y+x)\xi}\, d\lambda(\xi) \right) f(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{\hat{g}}(y+x)\, f(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g((-x)-y)\, f(y)\, d\lambda(y)$$

$$= (g*f)(-x) = (f*g)(-x).$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini ist hier gerechtfertigt, da

$$\left| f(y)\, e^{-2\pi i y \xi}\, \hat{g}(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x} \right| = |f(y)| \cdot |\hat{g}(\xi)|$$

$$\in L^1(d\lambda(y) \times d\lambda(\xi)).$$

▷ Wir konstruieren eine approximative Einheit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die "$\hat{k}_n \in L^1(\mathbb{R}) \wedge \hat{\hat{k}}_n(x) = k_n(-x)$" erfüllt.

Sei h der Fixpunkt von $\hat{\ }$:

$$h(x) := e^{-\pi x^2},$$

und

$$k_n(x) := n\, h(nx), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Da h gerade ist, haben wir offensichtlich

$$\forall n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}.\quad k_n(-x) = k_n(x).$$

Nun berechnen wir

$$\hat{k}_n(\xi) = n\cdot \frac{1}{n}\hat{h}\left(\frac{1}{n}\xi\right) = h\left(\frac{1}{n}\xi\right) \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$\hat{\hat{k}}_n(x) = n\cdot \hat{\hat{h}}(nx) = n\, h(nx) = k_n(x).$$

Wir sehen dass tatsächlich

$$\forall n\in\mathbb{N}.\quad \hat{k}_n \in L^1(\mathbb{R}) \wedge \hat{\hat{k}}_n(x) = k_n(-x).$$

▷ Wir machen zwei "dumme" Argumente.

Sei $f\in L^1(\mathbb{R})$. Die Abbildung "$g(x)\mapsto g(-x)$" ist isometrisch, auslöschende stetig, und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(-x) - \widehat{\widehat{f * k_n}}(x) \right\|_1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| f(-x) - (f*k_n)(-x) \right\|_1 = 0.$$

Es folgt, dass es eine Teilfolge $(\widehat{\widehat{f * k_{n_\ell}}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ gibt sodass für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\ell \to \infty} \widehat{\widehat{f * k_{n_\ell}}}(x) = f(-x) .$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ sodass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Es ist

$$\|\hat{k}_n\|_\infty = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad \lim_{n \to \infty} \hat{k}_n(\xi) = 1,$$

$$|\hat{f}(\xi)\, \hat{k}_n(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x}| \leq |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Wir erhalten, mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\widehat{f * k_n}}(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \hat{k}_n(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x} d\lambda(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-2\pi i \xi x} d\lambda(\xi) = \hat{\hat{f}}(x) .$$

Also ist $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Die Voraussetzung des Satzes, dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ liegt, ist oft erfüllt, aber oft auch nicht erfüllt.

Beispiel:

(i) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und damit insbesondere $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Ist $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, so stimmt $f(x)$ f.ü. mit einer stetigen Funktion überein (nämlich mit $\hat{\hat{f}}(-x)$). Nun gibt es viele Funktionen die nicht f.ü. gleich einer stetigen Funktion sind. Hat f z.B. eine Sprungstelle, so kann f nicht f.ü. gleich einer stetigen Funktion sein.

Wir sehen, dass z.B. $\widehat{\mathbb{1}_{[a,b]}} \notin L^1(\mathbb{R})$ ist.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz ist:

Korollar:

Die Fouriertransformation $\hat{\ } : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ ist injektiv.

Beweis: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $\widehat{f-g} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$, und wir erhalten (für fast alle $x \in \mathbb{R}$)

$$0 = \widehat{\widehat{f-g}}(x) = (f-g)(-x),$$

also $f-g=0$ f.ü.

$\square$

Korollar:

Die Fouriertransformation $\hat{}$ bildet die Schwartz-Klasse $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bijektiv auf sich ab.

Beweis: Wir wissen bereits, dass $\hat{}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und dass $\hat{}$ injektiv ist. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$. Also ist auch $g(\xi) := \hat{f}(-\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, und es folgt

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \hat{g}(x) \in \hat{}(\mathcal{S}(\mathbb{R})).$$

$\square$

Korollar:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ derart dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist $f \in C_0(\mathbb{R})$ (f.ü.).

Beweis: Es ist $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ f.ü.

$\square$