Die Fouriertransformation

II. Differenzierbarkeit

Die Fouriertransformation erfüllt auch Rechenregeln bezüglich differenzieren. Wir formulieren diese wieder mit Hilfe von Operatoren. Bezeichne

$$D : \begin{cases} C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}) \\ \quad f \longmapsto f' \end{cases}$$

und sei $D[L^1]$ die Einschränkung von D auf

$$\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \},$$

sowie analog $D[C_0]$ die Einschränkung von D auf

$$\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f, f' \in C_0(\mathbb{R}) \}.$$

Es tritt in diesem Kontext auch der Multiplikationsoperator mit der unbeschränkten Funktion x auf: $M_x[L^1]$ ist die Einschränkung von M_x auf

$$\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \mid x f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

und $M_x[C_0]$ die Einschränkung auf

$$\{ f \in C_0(\mathbb{R}) \mid x f(x) \in C_0(\mathbb{R}) \}.$$

Proposition:

(i) Sei $f \in \operatorname{dom} M_x[L^1]$. Dann ist $\hat{f} \in \operatorname{dom} D[C_0]$, und es gilt

$$\left(D[C_0] \circ \hat{\cdot}\right) f = -2\pi i \left(\hat{\cdot} \circ M_x[L^1]\right) f.$$

(ii) Sei $f \in \operatorname{dom} D[L^1]$. Dann ist $\hat{f} \in \operatorname{dom} M_\xi[C_0]$, und es gilt

$$\left(\hat{\cdot} \circ D[L^1]\right) f = 2\pi i \left(M_\xi[C_0] \circ \hat{\cdot}\right) f.$$

Beweis:

▷ von (i): Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ sodass $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Betrachte die Funktion

$$F(x,\xi) := f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi) = -2\pi i \cdot x f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi},$$

also

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi) \right| \leq 2\pi \cdot |x f(x)|.$$

Wir haben also eine von ξ unabhängige integrierbare Majorante, und schließen dass das Parameterintegral $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)\, d\lambda(x)$ differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{d\xi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)\, d\lambda(x)}_{=\hat{f}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi)\, d\lambda(x).$$

Also ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = -2\pi i \cdot \widehat{M_x[L^1]f}\,(\xi).$$

Insbesondere ist $\frac{d}{d\xi}\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, und wir sehen auch, dass tatsächlich $\hat{f} \in \operatorname{dom} D[C_0]$ gilt.

D von (ii): Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ sodass $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Wir zeigen als erstes, dass $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0$. Da f stetig differenzierbar ist haben wir, für $x > 0$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\, dy = f(0) + \int_{[0,x]} f'(y)\, d\lambda(y).$$

Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz, beachte dass $f' \in L^1(\mathbb{R})$, folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_{[0,\infty)} f'(y)\, d\lambda(y).$$

Da $f \in L^1(\mathbb{R})$, kann $|f|$ keinen von 0 verschiedenen

Lemmas haben, und wir schließen dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Berechnet man analog dass für $x < 0$

$$f(x) = f(0) - \int_x^0 f'(y)\,dy = f(0) - \int_{[x,0]} f'(y)\,d\lambda(y),$$

und daher

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(0) - \int_{(-\infty,0]} f'(y)\,d\lambda(y),$$

so sieht man dass auch $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ gelten muss.

Jetzt berechnen wir mittels partieller Integration

$$\widehat{D[L^1]f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} f'(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left(f(x) e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{x=-T}^{T} - \int_{-T}^{T} f(x)\,(-2\pi i \xi)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx \right)$$

$$= 2\pi i \xi \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

$$= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} d\lambda(x) = 2\pi i \cdot \xi \hat{f}(\xi).$$

$\square$

Wendet man die Proposition induktiv an, so erhält man die folgenden beiden Aussagen:

Korollar:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ist $f(x), x f(x), \dots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, so ist $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ und

$$(\hat{f})^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \, \widehat{x^n f(x)}(\xi)$$

(ii) Ist $f \in C^n(\mathbb{R})$ und $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, so ist

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i)^n \xi^n \hat{f}(\xi).$$

Beweis:

$\triangleright$ von (i): Wir machen Induktion nach n.

$n=1$. Dies ist die Aussage der Proposition.

$n \mapsto n+1$. Betrachte die Funktion $g(x) := x^n f(x)$. Dann ist $g(x), x g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ und die Proposition zeigt dass $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\hat{g}'(\xi) = (-2\pi i)\, \widehat{x g(x)}(\xi) = (-2\pi i)\, \widehat{x^{n+1} f(x)}(\xi)$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dass

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{x^n f(x)}(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^n}\, \hat{f}^{(n)}(\xi) .$$

▷ von (ii) : Wir machen wieder Induktion nach n.

$n=1$. Gilt nach der Propositionen.

$n \mapsto n+1$. Setze $g(x) := f^{(n)}(x)$. Dann ist $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $g, g' \in L^1(\mathbb{R})$. Die Proposition zeigt dass

$$\widehat{f^{(n+1)}}(\xi) = \widehat{g'}(\xi) = (2\pi i)\, \xi\, \hat{g}(\xi) .$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i)^n \xi^n \hat{f}(\xi).$$

$\square$

Bemerkung :

Wir stellen fest, dass :

▷ Je schneller f bei $\pm\infty$ gegen Null geht, desto glatter ist $\hat{f}$.

▷ Je glatter f ist, desto schneller geht $\hat{f}$ gegen Null .

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition:

Die **Schwartz Klasse** ist die Menge

$$S(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \in C^\infty(\mathbb{R}) \wedge \forall n,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.\ \lim_{|x| \to \infty} |x|^n f^{(m)}(x) = 0 \right\}.$$

Beispiel:

(i) Die Funktion $f(x) := e^{-x^2}$ gehört zur Schwartz-Klasse.

(ii) Bezeichne

$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}.$$

Dann ist $C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$.

Bemerkung:

Die Schwartz-Klasse hat offenbar die folgenden beiden Eigenschaften.

(i) $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$

(ii) $\forall f \in S(\mathbb{R})\ \forall n,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.\ x^n f^{(m)}(x) \in S(\mathbb{R})$.

Korollar:

Es gilt $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{\ }(S(\mathbb{R})) \subseteq S(\mathbb{R})$.

Beweis: Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann ist nach der ersten Regel $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \, \widehat{x^n f(x)}(\xi), \quad n \geq 0.$$

Mit der Produktregel sieht man, dass die Funktion $g(x) := x^n f(x)$ erfüllt, dass $g, \dots, g^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$. Nach der zweiten Regel ist

$$\xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi) = \xi^m (-2\pi i)^n \hat{g}(\xi) = (-1)^n \, \widehat{g^{(m)}}(\xi),$$

insbesondere also $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi) = 0$.

Wir sehen, dass $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. $\square$

Mit Hilfe der obigen Rechenregeln kann man auch einen Fixpunkt von $\hat{\ }$ in $S(\mathbb{R})$ bestimmen.

Beispiel:

Sei $\alpha > 0$ und $f(x) := e^{-\alpha x^2}$. Dann ist $f \in S(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi}.$$

Insbesondere ist $e^{-\pi x^2}$ eine Eigenfunktion von $\hat{\cdot}$.

Zunächst ist, durch direktes differenzieren, klar dass $f \in S(\mathbb{R})$. Um $\hat{f}$ zu bestimmen verwenden wir einen Trick. Die Funktion f erfüllt die Gleichung

$$f'(x) = -2\alpha \cdot x f(x).$$

Wendet man $\hat{\cdot}$ an, so erhält man

$$2\pi i \cdot \xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = -2\alpha \cdot \widehat{x f(x)}(\xi)$$
$$= -2\alpha \cdot (-2\pi i)^{-1} \hat{f}'(\xi).$$

Also ist

$$\hat{f}'(\xi) = -2\frac{\pi^2}{\alpha} \cdot \xi \hat{f}(\xi).$$

Weiter gilt

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} \, d\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Wir erhalten dass

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}.$$