Die Fouriertransformation

I. Algebraische Eigenschaften

Definition:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann definieren wir eine Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\hat{f}$ heißt die Fouriertransformierte von f, die Abbildung $\hat{\cdot} : f \mapsto \hat{f}$ die Fouriertransformation.

Man beachte hier, dass $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$, und daher $f(x)\, e^{-2\pi i x \xi} \in L^1(\mathbb{R})$.

Wir bezeichnen im folgenden

$$C_0(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ stetig}, \lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0 \right\}.$$

Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und der punktweisen Multiplikation wird $C_0(\mathbb{R})$ eine kommutative Banachalgebra. Bemerke hier, dass $C_0(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Teilraum des vollständigen normierten Raumes $C_b(\mathbb{R})$ aller beschränkten stetigen Funktionen ist.

Man bemerke, dass $C_0(\mathbb{R})$ kein Einselement hat: Wähle eine überall positive Funktion in $C_0(\mathbb{R})$, z.B. $f(x) := e^{-x^2}$. Gilt für eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dass $f \cdot g = f$, so folgt $g(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $g \notin C_0(\mathbb{R})$.

Satz:

Die Fouriertransformation $\hat{}$ ist ein kontraktiver Algebra-Homomorphismus von $\langle L^1(\mathbb{R}), *, \|.\|_1 \rangle$ nach $\langle C_0(\mathbb{R}), \cdot, \|.\|_\infty \rangle$.

Im Beweis benützen wir eine, sehr oft nützliche, Tatsache. Wir formulieren sie gleich etwas allgemeiner.

Lemma:

Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß am $\mathbb{R}^d$, und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{span}\left\{ \mathbb{1}_R \;\middle|\; R = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j] \text{ mit } -\infty < a_j < b_j < \infty \right\}$$

dicht in $L^p(\mu)$.

Dies folgt eigentlich sehr maßtheoretisch, da die Hüllung der halb-offenen Rechtecke die σ-Algebra der Borelmengen erzeugt. Wir geben hier einen alternativen Beweis, der allerdings den Satz von Lusin verwendet (und daher eigentlich ein "unnötiger Umweg" ist).

<u>Beweis (vom Lemma):</u> Wir wissen schon, dass

$C_{00}(\mathbb{R})$ in $L^p(\mu)$ dicht ist. Es genügt also zu zeigen, dass $C_{00}(\mathbb{R})$ im Abschluss der linearen Hülle der Funktionen $1\!\!1_R$ liegt.

Sei $f \in C_{00}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $R > 0$ sodass $\operatorname{supp} f \subseteq (-R,R)^d$. Wähle $\delta > 0$ sodass

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^d .\ \|x-y\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{2R}{N} < \delta$, und überdecke $(-R,R)^d$ mit Maschen des Gitters mit Seitenlänge $\frac{2R}{N}$:

$$(-R,R)^d \subseteq \bigcup_{\substack{(j_1,\dots,j_d) \in \mathbb{Z}^d \\ -N \le j_e < N}} \left[\frac{2R}{N} \cdot \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_d \end{pmatrix} + \left(0, \frac{2R}{N}\right]^d \right]$$

Liegen x und y in einer Masche des Gitters, so gilt $\|x-y\|_\infty \le \frac{2R}{N} < \delta$, und daher $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Wir sehen, dass

$$\Bigg\| f - \underbrace{\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_d)\in\mathbb{Z}^d \\ -N\le i_\ell<N}} f\left(\frac{2R}{N}\begin{pmatrix} i_1\\ \vdots \\ i_d\end{pmatrix}\right)\cdot \mathbb{1}_{\frac{2R}{N}\begin{pmatrix}i_1\\ \vdots\\ i_d\end{pmatrix}+\left(0,\frac{2R}{N}\right]^d}}_{=:\, g} \Bigg\|_\infty < \varepsilon.$$

Es folgt

$$\|f-g\|^p_{L^p(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f-g|^p \, d\mu \le \mu\left((-R,R]^d\right)\cdot \varepsilon^p.$$

Wir schließen, dass f im Abschluss der genannten linearen Hülle von Indikatorfunktionen ist. $\square$

Beweis (von Satz):

▷ Wir zeigen die Rechenregeln: Dass die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ linear ist, ist klar wegen der Linearität des Integrals. Um die Homomorphieeigenschaft bezüglich der entsprechenden Multiplikationen zu zeigen, seien $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ gegeben. Da die Funktion

$$(x,y) \mapsto f(x-y)\,g(y)$$

integrierbar bezüglich dem Produktmaß $d\lambda(x)\times d\lambda(y)$ ist, gilt der Satz von Fubini

$$\widehat{f*g}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\, d\lambda(y)\right) e^{-2\pi i x\xi}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x) \right) g(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-2\pi i (x-y)\xi}\, d\lambda(x) \right) g(y)\, e^{-2\pi i y \xi}\, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)\, e^{-2\pi i z \xi}\, d\lambda(z) \right) g(y)\, e^{-2\pi i y \xi}\, d\lambda(y)$$

$$= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

▷ Wir zeigen $\forall f \in L^1(\mathbb{R}).\ \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}) \wedge \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$:

Wegen $|f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}| = |f(x)|$ hat der Integrand im Integral $\hat{f}(\xi)$ eine von ξ unabhängige integrierbare Majorante. Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to \xi_0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\xi \to \xi_0} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi_0}\, d\lambda(x) = \hat{f}(\xi_0).$$

Also ist $\hat{f}$ stetig für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$. Weiter gilt

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, d\lambda(x) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2\pi i x \xi}| \, d\lambda(x) = \|f\|_1 .$$

Also ist $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

D Wir zeigen $\forall f \in L^1(\mathbb{R}).\ \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$:

Wir zeigen die Limesbeziehung $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ für Funktionen sehr einfacher Gestalt: sei $-\infty < a < b < \infty$, dann gilt (für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$\widehat{\mathbb{1}_{[a,b]}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) e^{-2\pi i x \xi} \, d\lambda(x) =$$

$$= \int_a^b e^{-2\pi i x \xi} \, dx = \frac{e^{-2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi} .$$

Nun gilt offensichtlich

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{\mathbb{1}_{[a,b]}}(\xi) = 0 .$$

Da die Fouriertransformation linear ist und $C_0(\mathbb{R})$

ein linearer Teilraum von $C_b(\mathbb{R})$ ist, folgt

$$\hat{\cdot}\left(\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{[a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}\right) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

Da $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ kontraktiv ist, ist $\hat{\cdot}$ insbesondere stetig. Also folgt, da $C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist,

$$\hat{\cdot}\left(\overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{[a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}}^{L^1(\mathbb{R})}\right) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

Wegen dem vorangegangenen Lemma ist

$$\overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{[a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}}^{L^1(\mathbb{R})} = L^1(\mathbb{R}).$$

$\square$

Auf den Räumen $L^1(\mathbb{R})$ bzw. $C_0(\mathbb{R})$ hat man natürlich noch andere Operationen ausser der Algebra-Struktur. Z.B. die Konjugation oder Translation.

Wir zeigen als nächstes, dass die Fouriertransformation entsprechenden Rechenregeln genügt. Wir beginnen mit Konjugation und Skalierung.

Proposition:

(i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und setze $g(x) := \overline{f(x)}$. Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$, und es gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}.\ \hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

(ii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und setze $g(x) := f(rx)$. Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \frac{1}{|r|} \|f\|_1$, und es gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}.\ \hat{g}(\xi) = \frac{1}{|r|} \hat{f}\left(\frac{1}{r}\xi\right).$$

Beweis:

(i) Es gilt (die Determinante von $x \mapsto -x$ hat Betrag 1)

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |\overline{f(-x)}| \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(-x)| \, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, d\lambda(x),$$

also ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$.
Weiterhin haben wir

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}\, e^{-2\pi i x \xi} \, d\lambda(x) =$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x)\, e^{2\pi i x \xi}\, d\lambda(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{2\pi i (-x)\xi}\, d\lambda(x)}$$

$$= \overline{\hat{f}(\xi)}\,.$$

(ii) Es gilt (die Determinante von $x \mapsto \frac{x}{r}$ hat Betrag $\frac{1}{|r|}$)

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(rx)|\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{|r|}\, d\lambda(x) = \frac{1}{|r|} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x),$$

also ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \frac{1}{|r|} \|f\|_1$. Weiters ist

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(rx)\, e^{-2\pi i x \xi}\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i (\frac{x}{r})\xi} \frac{1}{|r|}\, d\lambda(x) = \frac{1}{|r|} \hat{f}\left(\frac{1}{r}\xi\right).$$

$\square$

Wir kommen nun zu Translationen. In diesem Kontext ist es praktisch die Rechenregeln etwas struktureller zu formulieren.

Dazu betrachte, für $y \in \mathbb{R}$, die Abbildung

$$T_y : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f(x) \mapsto f(x+y) \end{cases}$$

Diese induziert sowohl auf $L^1(\mathbb{R})$ als auch auf $C_0(\mathbb{R})$ eine lineare und isometrische Abbildung, wir bezeichnen diese mit $T_y[L^1]$ bzw. $T_y[C_0]$. Betreffend der entsprechenden Multiplikationen gilt

$$\forall f,g \in L^1(\mathbb{R}).\ \left(T_y[L^1]f\right) * g = T_y[L^1]\left(f*g\right)$$

$$\forall f,g \in C_0(\mathbb{R}).\ \left(T_y[C_0]f\right)\cdot\left(T_y[C_0]g\right) = T_y[C_0]\left(f\cdot g\right)$$

Man spricht vom Translationsoperator im $L^1(\mathbb{R})$ bzw. $C_0(\mathbb{R})$.

Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachte die Abbildung

$$M_g : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f(x) \mapsto g(x)f(x) \end{cases}$$

Ist g beschränkt, so induziert M_g eine lineare und beschränkte Abbildung in $L^1(\mathbb{R})$ bzw. in $C_0(\mathbb{R})$. Wir bezeichnen diese als $M_g[L^1]$ bzw. $M_g[C_0]$. Gilt sogar $|g(x)|=1$, $x\in\mathbb{R}$, so sind $M_g[L^1]$ und $M_g[C_0]$ überall und bijektiv.

Proposition:

Es gilt

$$\forall y\in\mathbb{R}.\quad \hat{\cdot}\circ T_y[L^1] = M_{e^{2\pi i y\cdot\xi}}[C_0]\circ\hat{\cdot}$$

$$\forall \eta\in\mathbb{R}.\quad T_\eta[C_0]\circ\hat{\cdot} = \hat{\cdot}\circ M_{e^{-2\pi i\eta\cdot x}}[L^1]$$

Beweis: Für $f\in L^1(\mathbb{R})$, und $y\in\mathbb{R}$ bzw. $\eta\in\mathbb{R}$, sowie $\xi\in\mathbb{R}$, gilt

$$[(\hat{\cdot}\circ T_y)f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\,e^{-2\pi i x\xi}\,d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z)\,e^{-2\pi i(z-y)\xi}\,d\lambda(z)$$

$$= e^{2\pi i y\xi}\int_{\mathbb{R}} f(z)\,e^{-2\pi i z\xi}\,d\lambda(z)$$

$$= [(M_{e^{2\pi i y\xi}}[C_0]\circ\hat{\cdot})f](\xi).$$

$$\left[\left(\hat{\cdot} \circ M_{e^{-2\pi i \eta \cdot x}}[L^1]\right) f\right](\xi) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \eta x} \cdot e^{-2\pi i x \xi} \, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x (\xi + \eta)} \, d\lambda(x)$$

$$= \left[\left(T_{\eta}[C_0] \circ \hat{\cdot}\right) f\right](\xi)$$

$\square$