$L^1(\mathbb{R}^d)$ als Banachalgebra

Definition:

Eine Banachalgebra ist ein Tripel $\langle X, \cdot, \|.\| \rangle$, wo $\langle X, \|.\| \rangle$ ein vollständiger normierter Raum ist, und $\cdot : X \times X \to X$ eine bilineare und assoziative Abbildung ist für die

$$\forall x,y \in X. \quad \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt.

Eine Banachalgebra heißt kommutativ, wenn ihre Multiplikation $\cdot$ kommutativ ist. Ein Element $e \in X$ heißt Einselement, wenn

$$\forall x \in X. \quad e \cdot x = x \cdot e = x$$

gilt.

Beispiel:

(i) Sei K kompakter Hausdorff-Raum, und sei

$$\cdot : C(K) \times C(K) \to C(K)$$

die punktweise definierte Multiplikation, d.h.,

$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)\ ,\quad x\in K.$$

Dann ist $\langle C(K), \cdot, \|.\|_\infty \rangle$ eine kommutative Banachalgebra, und hat das Einselement 1.

(ii) Sei $n\in\mathbb{N}$, $\cdot : \mathbb{C}^{n\times n}\times\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ die Matrizenmultiplikation, und $\|.\|$ die Spaltensummennorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist $\langle \mathbb{C}^{n\times n}, \cdot, \|.\| \rangle$ eine (nicht kommutative) Banachalgebra, und hat das Einselement $I_{n\times n}$.

Wir wollen nun eine bilineare Operation $*$ am $L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren, die diesen Raum zu einer Banachalgebra macht.

Definition:

Für $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ sei $f*g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ definiert als

$$(f*g)(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,d\lambda(y) & \text{falls } y\mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion $f*g$ heißt die **Faltung** von f mit g.

Als erstes wollen wir bemerken, dass sich $f * g$ nicht ändert wenn man f und g auf Nullmengen verändert, und dass der Integrand jedenfalls eine meßbare Funktion ist.

Satz:

(i) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann tritt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ der erste Fall in der Definition von $f * g$ ein, und es gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\langle L^1(\mathbb{R}^d), *, \|.\|_1 \rangle$ ist eine kommutative Banachalgebra.

Beweis:

▷ Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gegeben. Als Hintereinanderausführung meßbarer Funktionen, ist die Funktion $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}^d$ jedenfalls meßbar.

Nach dem Satz von Fubini, und da das Lebesgue Maß translationsinvariant ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)\, g(y)| \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)\, g(y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, d\lambda(x) \right) |g(y)| \, d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, d\lambda(x) \right) |g(y)| \, d\lambda(y)$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty$$

Daher muss der Integrand im ersten Integral fast überall endlich sein. Es hält also in der Definition von $f * g$ fast überall der erste Fall ein.

Weiter sehen wir, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)| \, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) g(y)| \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

gilt. Insbesondere gehört $f * g$ zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.

▷ Wegen der Linearität des Integrals ist die Abbildung $*: L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ bilinear. Sie ist auch kommutativ: sei $x \in \mathbb{R}^d$ so dass beide Funktionen $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ und $y \mapsto g(x-y)\,f(y)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegen. Dann gilt, da λ translationsinvariant ist,

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,d\lambda(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,g(x-z)\,d\lambda(z) = (g*f)(x).$$

Für den Beweis der Assoziativität behandle zunächst $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $f, g, h \geq 0$. Dann gilt, wieder für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\big[(f*g)*h\big](x) \overset{\text{f.ü.}}{=} \big[h*(f*g)\big](x) \overset{\text{f.ü.}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-z)\,g(z)\,d\lambda(z) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)\,g(z-x+y)\,d\lambda(z) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(z-x+y)\,h(x-y)\,d\lambda(y) \right) d\lambda(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(z-y)\, h(y)\, d\lambda(y) \right) f(x-z)\, d\lambda(z)$$

$$\overset{f.J.}{=} \left[f * (g * h) \right](x) .$$

Sind nun $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ beliebig, so zerlege man jede dieser Funktionen in Real- und Imaginärteil und diese dann in Positiv- und Negativteil, und verwende dann $*$ bilinear ist.

$\square$

Man kann zeigen, dass $\langle L^1(\mathbb{R}^d), *, \|.\|_1 \rangle$ kein Einselement besitzt. Jedoch gibt es Elemente die sich fast wie ein Einselement verhalten.

Wir machen eine allgemeine Definition.

Definition:

Sei $\langle X, \cdot, \|.\| \rangle$ eine Banachalgebra. Eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $k_n \in X$ heißt eine **approximative Einheit** von $\langle X, \cdot, \|.\| \rangle$, wenn

$$\forall x \in X. \quad \lim_{n \to \infty} \| x - x \cdot k_n \| = 0 \;\wedge$$

$$\lim_{n \to \infty} \| x - k_n \cdot x \| = 0$$

Proposition:

Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

(i) $\forall n \in \mathbb{N} .\quad k_n \geq 0 \;\wedge\; \|k_n\|_1 = 1$

(ii) $\forall r > 0 .\quad \lim\limits_{n\to\infty} \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_r(0)} k_n \|_1 = 0$

Dann ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

▷ Fall $f \in C_{00}(\mathbb{R}^d)$: Wähle $R > 0$ sodass $\operatorname{supp} f \subseteq U_R(0)$. Die Funktion f ist, als stetige Funktion mit kompaktem Träger, gleichmäßig stetig. Wähle $\delta \in (0, 1]$ sodass

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d .\quad \|x - y\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Schließlich wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall n \geq N .\quad \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n \|_1 < \varepsilon .$$

Aus Voraussetzung (i) erhalten wir, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, k_n(y)\, d\lambda(y) ,$$

und damit

$$\| f - f * k_n \|_1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) k_n(y) \, d\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) k_n(y) \, d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Bigg(|f(x)| \cdot \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n(y) \, d\lambda(y) + \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} f(x-y) k_n(y) \, d\lambda(y) \right|$$

$$+ \int_{U_\delta(0)} | f(x) - f(x-y) | \; k_n(y) \, d\lambda(y) \Bigg) \, d\lambda(x)$$

Wir schätzen die drei Summanden einzeln ab:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n(y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) =$$

$$= \|f\|_1 \cdot \| 1\!\!1_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n \|_1 < \|f\|_1 \cdot \varepsilon \, ,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} f(x-y) k_n(y) \, d\lambda(y) \right| d\lambda(x) =$$

$$= \| f * 1\!\!1_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n \|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \| 1\!\!1_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n \|_1$$

$$< \|f\|_1 \cdot \varepsilon .$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{U_\delta(0)} |f(x) - f(x-y)| \, k_n(y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{U_{R+1}(0)} \int_{U_\delta(0)} |f(x) - f(x-y)| \, k_n(y) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x)$$

$$\leq \varepsilon \cdot \lambda(U_{R+1}(0)) \cdot \int_{U_\delta(0)} k_n(y) \, d\lambda(y) \leq \varepsilon \, \lambda(U_{R+1}(0)).$$

D $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ beliebig: Wir verwenden nun dass $C_{00}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $g \in C_{00}(\mathbb{R}^d)$ sodass $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\|g - g * k_n\|_1 < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann ist

$$\|f - f * k_n\|_1 \leq \underbrace{\|f - g\|_1}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|g - g * k_n\|_1}_{< \varepsilon} +$$

$$+ \underbrace{\|g * k_n - f * k_n\|_1}_{\leq \|g - f\|_1 \cdot \|k_n\|_1 < \varepsilon} < 3\varepsilon .$$

$\square$

Mit Hilfe dieser Proposition können wir jetzt zeigen, dass es (viele) approximative Einheiten von $L^1(\mathbb{R}^d)$ gibt.

Beispiel:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, und setze

$$k_n(x) := \frac{1}{\|f\|_1} n^d |f(nx)|, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit.

Um dies zu beweisen, rechnen wir die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Proposition nach.

▷ $k_n \geq 0$: Dies ist offensichtlich.

▷ $\|k_n\|_1 = 1$: Die lineare Transformation $x \mapsto \frac{x}{n}$ hat Determinante $\frac{1}{n^d}$, und es folgt

$$\|k_n\|_1 = \frac{1}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^d} n^d |f(nx)| \, d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, d\lambda(x) = 1$$

$\triangleright \lim_{n\to\infty} \| 1\!\!1_{\mathbb{R}^d\setminus U_r(0)} k_n \|_1 = 0$: Wir verwenden wieder die lineare Transformation $x \mapsto \frac{x}{n}$, und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus U_r(0)} n^d \, |f(nx)| \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus U_{nr}(0)} |f(x)| \, d\lambda(x).$$

Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz strebt dieses Integral für $n\to\infty$ gegen 0.