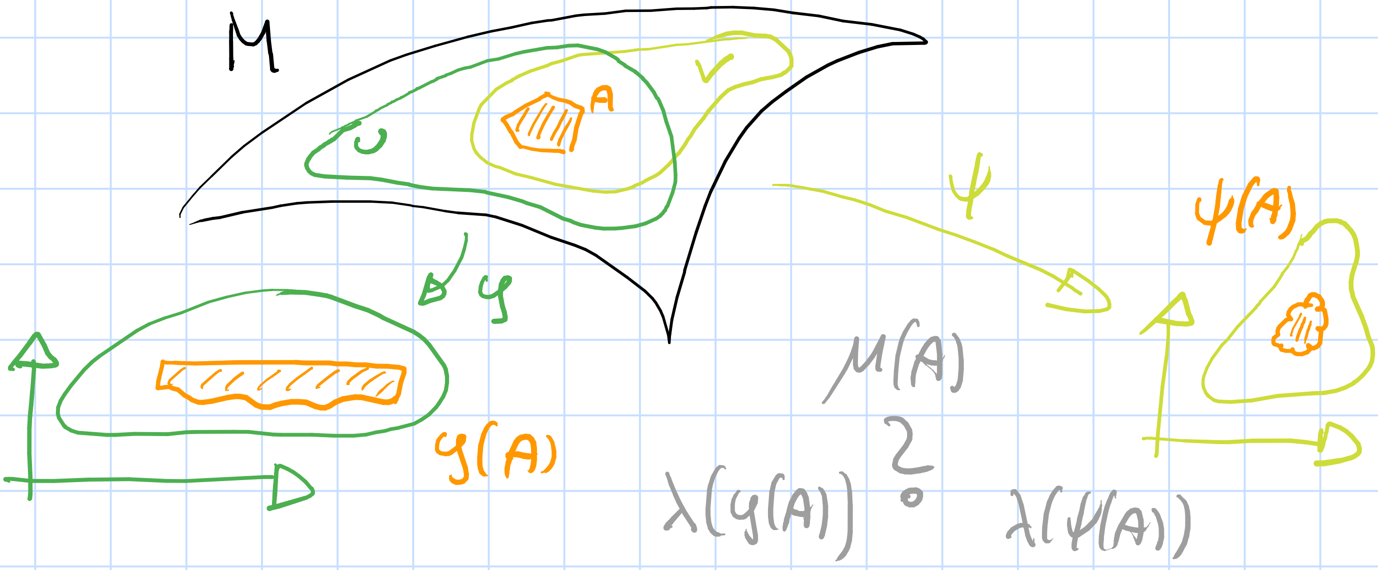
Das Oberflächenmaß

Wir wollen auf einer Mannigfaltigkeit ein Maß definieren, dass dem anschaulichen Begriff der Oberfläche Sinn gibt.

Die Idee ist dabei (wie immer in der Theorie der Mannigfaltigkeiten), dass man sich mittels der Karten in den euklidischen Raum zurückzieht wo man einen natürlichen Inhaltsbegriff hat – nämlich das Lebesgue Maß. Natürlich muß man dabei aufpassen, dass die „Größe der Oberfläche" eines Stückes der Mannigfaltigkeit nicht davon abhängt mittels welcher speziellen Karte man es berechnet. Wie immer in der Theorie der Mannigfaltigkeiten kann ein Begriff nur dann eine wahre geometrische Größe sein, wenn er unabhängig von der Wahl der Karte ist.



Die entscheidende Erkenntnis ist, dass man, mit Hilfe der Transformationsformel, eine geometrische Invariante wie folgt findet.

Lemma:

Sei $d \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Seien weiters (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j) zwei Karten von M mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, und sei A eine Borelmenge von M mit $A \subseteq U_{ij}$. Schließlich bezeichne $\psi_i := \varphi_i^{-1}$ und $\psi_j := \varphi_j^{-1}$. Dann gilt

$$\int_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det\left(d\psi_i^T \cdot d\psi_i\right)}\, d\lambda = \int_{\varphi_j(A)} \sqrt{\det\left(d\psi_j^T \cdot d\psi_j\right)}\, d\lambda .$$

Beweis: Sei φ_{ij} der Kartenwechsel $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Dann ist φ_{ij} ein Diffeomorphismus, nämlich mit $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$. Wir erhalten $\psi_j \circ \varphi_{ij} = \psi_i$, und daher

$$d\psi_i = \left[(d\psi_j) \circ \varphi_{ij}\right] \cdot d\varphi_{ij}$$

Also ist

$$\det\left(d\psi_i^T \cdot d\psi_i\right) =$$

$$= \det\left((d\varphi_{ij})^T \cdot \left[(d\psi_j) \circ \varphi_{ij}\right]^T \cdot \left[(d\psi_j) \circ \varphi_{ij}\right] \cdot (d\varphi_{ij}) \right) =$$

$$= \det(d\varphi_{ij})^T \cdot \det\left(\left[(d\psi_j)\circ\varphi_{ij}\right]^T\left[(d\psi_j\circ\varphi_{ij})\right]\right)\cdot\det(d\varphi_{ij})$$

$$= \det\left(\left[(d\psi_j)\circ\varphi_{ij}\right]^T\left[(d\psi_j)\circ\varphi_{ij}\right]\right)\cdot\left(\det(d\varphi_{ij})\right)^2.$$

Weiters haben wir $\varphi_{ij}(\varphi_i(A)) = \varphi_j(A)$. Die Transformationsformel zeigt nun

$$\int_{\varphi_j(A)} \sqrt{\det(d\psi_j^T d\psi_j)}\, d\lambda =$$

$$= \int_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det\left(\left[(d\psi_j)\circ\varphi_{ij}\right]^T\left[(d\psi_j)\circ\varphi_{ij}\right]\right)}\,|\det \varphi_{ij}|\, d\lambda$$

$$= \int_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det(d\psi_i^T d\psi_i)}\, d\lambda.$$

$\square$

Hat man nun eine beliebige Borelmenge A von M gegeben, so muss man diese geeignet zerstückeln, die "Oberfläche" der einzelnen kleinen Teile berechnen, und wieder zusammensetzen.

Die Existenz einer "geeigneten Zerstückelung" liegt daran, dass man das 2te Abzählbarkeitsaxiom hat.

Lemma:

Sei $d \leq n$, und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine höchstens abzählbare Partition $\mathcal{Q}$ von M, sodass für alle $B \in \mathcal{Q}$ gilt:

- B ist Borelmenge von M,
- es gibt eine Karte (U_B, φ_B) von M mit

$$B \subseteq U_B \quad , \quad \operatorname{Clos}_{\mathbb{R}^d} \varphi_B(B) \subseteq \varphi_B(U_B),$$

- $\operatorname{Clos}_{\mathbb{R}^d} \varphi_B(B)$ ist kompakt.
- Jede kompakte Teilmenge von M lässt sich durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{Q}$ überdecken.

Beweis: Für $x \in M$ wähle eine Karte (U_x, φ_x) von M mit $x \in U_x$. Dann wähle $r_x > 0$ sodass

$$\overline{U_{r_x}(\varphi_x(x))} \subseteq \varphi_x(U_x).$$

Die Familie

$$\left\{ \varphi_x^{-1}\left(U_{r_x}(\varphi_x(x))\right) \;\middle|\; x \in M \right\}$$

ist eine offene Überdeckung von M. Nach dem Lemma von Lindelöf finden wir $x_1, x_2, \ldots \in M$ sodass

$$M = \bigcup_{\ell = 1,2,\ldots} \varphi_{x_\ell}^{-1}\left(U_{r_{x_\ell}}(\varphi_{x_\ell}(x_\ell))\right).$$

Nun setze $\mathcal{Q} := \{ B_\ell \mid \ell = 1, 2, \ldots \}$ wobei induktiv

$$B_\ell := \varphi_{x_\ell}^{-1}\left(U_{r_{x_\ell}}(\varphi_{x_\ell}(x_\ell))\right) \setminus \bigcup_{k < \ell} B_k .$$

$\square$

Definition:

Sei $d \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Wähle eine Partition Q wie im letzten Lemma, wähle zu jedem $B \in Q$ eine Karte (U_B, φ_B) von M mit $B \subseteq U_B$, und setze $\psi_B := \varphi_B^{-1}$.

Nun definiere, für eine Borelmenge A in M,

$$\mu(A) := \sum_{B \in Q} \int_{\varphi_B(A \cap B)} \sqrt{\det(d\psi_B^T d\psi_B)}\, d\lambda \in [0, \infty]$$

Die Abbildung

$$\mu : \text{Borel-}\sigma\text{-Algebra von } M \to [0, \infty]$$

heißt das Oberflächenmaß von M.

Man erinnere sich hier, dass ψ_B stetig differenzierbar ist, und $\operatorname{rang} d\psi_B(a) = d$ für alle $a \in \varphi_B(U_B)$ gilt. Daraus folgt, dass die Matrix

$$d\psi_B(a)^T \cdot d\psi_B(a)$$

symmetrisch und positiv semidefinit ist. Also hat sie nur positive Eigenwerte, es gilt stets

$$\det(d\psi_B(a)^T d\psi_B(a)) > 0,$$

und diese Determinante hängt stetig von a ab.

Weiter hat $\varphi_B(A)$ kompakten Abschluss in $\mathbb{R}^d$ und dieser liegt ganz in $\varphi_B(U_B)$. Daher ist

$$\lambda(\varphi_B(A)) < \infty \quad , \quad \sup_{x \in \varphi_B(A)} \det\left(d\psi(x)^T d\psi(x)\right) < \infty .$$

Wir sehen, dass jeder einzelne Summand in der Definition von $\mu(A)$ endlich ist.

Um obige Definition zu rechtfertigen müssen wir zeigen, dass der Wert $\mu(A)$ unabhängig von der Wahl der Partition und der Karten ist. Um die Wahl des Namens zu rechtfertigen, sollten wir zeigen, dass μ tatsächlich ein Maß ist.

Proposition:

Der Wert der obigen Summe von Integralen ist unabhängig von der Wahl von Partition und Karten, und die Funktion μ ist ein Maß.

Beweis: Dass $\mu(A)$ wohldefiniert ist, folgt aus dem ersten Lemma. Seien nämlich Q mit (U_B, φ_B) und R mit (V_C, x_C) zwei Wahlen von Partitionen und zugehörigen Karten. Dann ist $(\psi_B := \varphi_B^{-1}, \omega_C := x_C^{-1})$

$$\sum_{B\in Q} \int_{\varphi_B(A\cap B)} \sqrt{\det(d\psi_B^T d\psi_B)}\, d\lambda =$$

$$\overset{①}{=} \sum_{B\in Q} \sum_{C\in R} \int_{\varphi_B(A\cap B\cap C)} \sqrt{\det(d\psi_B^T d\psi_B)}\, d\lambda =$$

$$\overset{②}{=} \sum_{C\in R} \sum_{B\in Q} \int_{\varphi_B(A\cap B\cap C)} \sqrt{\det(d\psi_B^T d\psi_B)}\, d\lambda =$$

$$\overset{③}{=} \sum_{C\in R} \sum_{B\in Q} \int_{\chi_C(A\cap B\cap C)} \sqrt{\det(d\omega_C^T d\omega_C)}\, d\lambda$$

$$\overset{①}{=} \sum_{C\in R} \int_{\chi_C(A\cap C)} \sqrt{\det(d\omega_C^T d\omega_C)}\, d\lambda .$$

Hier haben wir benutzt, dass

① ein Integral als Funktion des Integrationsbereiches σ-additiv ist,

② der Satz von Fubini für nichtnegative Integrand (die [illegible] „Summanden“) gilt,

③ wir das erste Lemma haben.

Die Tatsache, dass μ ein Maß ist, gilt da jede einzelne Funktion

$$A \mapsto \int_{\varphi_B(A\cap B)} \sqrt{\det(d\gamma_B^T d\gamma_B)}\, d\lambda$$

ein Maß ist, und dieses sich mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz auf die Summe überträgt.

$\square$

Im folgenden Satz stellen wir einige Eigenschaften von Oberflächenmaßen zusammen.

Satz:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, und μ ihr Oberflächenmaß. Dann gelten:

(i) Ist $O \subseteq M$ offen (in M) und nichtleer, so ist $\mu(O) > 0$.

(ii) Ist $K \subseteq M$ kompakt, so ist $\mu(K) < \infty$. Insbesondere ist μ σ-endlich.

(iii) Ist M' eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $d' < d$, und $F: M' \to M$ eine Einbettung, so ist $\mu(F(M')) = 0$.

(iv) μ ist regulär.

Beweis:

▷ von (i): Sei $O \subseteq M$ offen, $O \neq \emptyset$. Wähle $x \in O$, und eine Karte (U, φ) mit $x \in U$. Dann ist $\varphi(O \cap U)$ eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, und hat daher positives Lebesgue Maß. Es folgt, dass

$$\mu(O) \geq \mu(O \cap U) = \int_{\varphi(O \cap U)} \sqrt{\det\left(d\psi_A^T d\psi_A\right)}\, d\lambda > 0.$$

▷ von (ii): Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann wird K durch endlich viele der Mengen von Q überdeckt. Da jeder einzelne Summand in der Definition von $\mu(A)$ endlich ist, ist daher auch $\mu(K)$ endlich.

▷ von (iii): Sei (U, φ) eine Karte von M und (U', φ') eine Karte von M'. Sei angenommen, dass $U \cap F(U') \neq \emptyset$.

Betrachte die Menge

$$N := \varphi(U \cap F(U')) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Die Einbettung

$$\varphi \circ F \circ \left(\psi|_{F^{-1}(U) \cap U'}\right)^{-1} : \psi(F^{-1}(U) \cap U') \to N$$

ist ein Homöomorphismus. Sei Λ seine Inverse. Da $\psi(F^{-1}(U) \cap U')$ offen in $\mathbb{R}^{d'}$ ist, ist (N, Λ) eine Karte auf N, und $N \subseteq \mathbb{R}^d$ wird mit dem Atlas $\{(N, \Lambda)\}$

eine d'-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nun ist N eine eingebettete Mannigfaltigkeit, denn die Inklusionsabbildung $\iota : N \to \mathbb{R}^d$ ist homöomorph auf ihr Bild (da N die Spurtopologie trägt) und es ist

$$\iota = \left(\varphi \circ F \circ \left(\psi|_{F^{-1}(U) \cap U'}\right)^{-1}\right) \circ \rho .$$

Da F eine Einbettung ist, ist $d(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})$ stets injektiv.

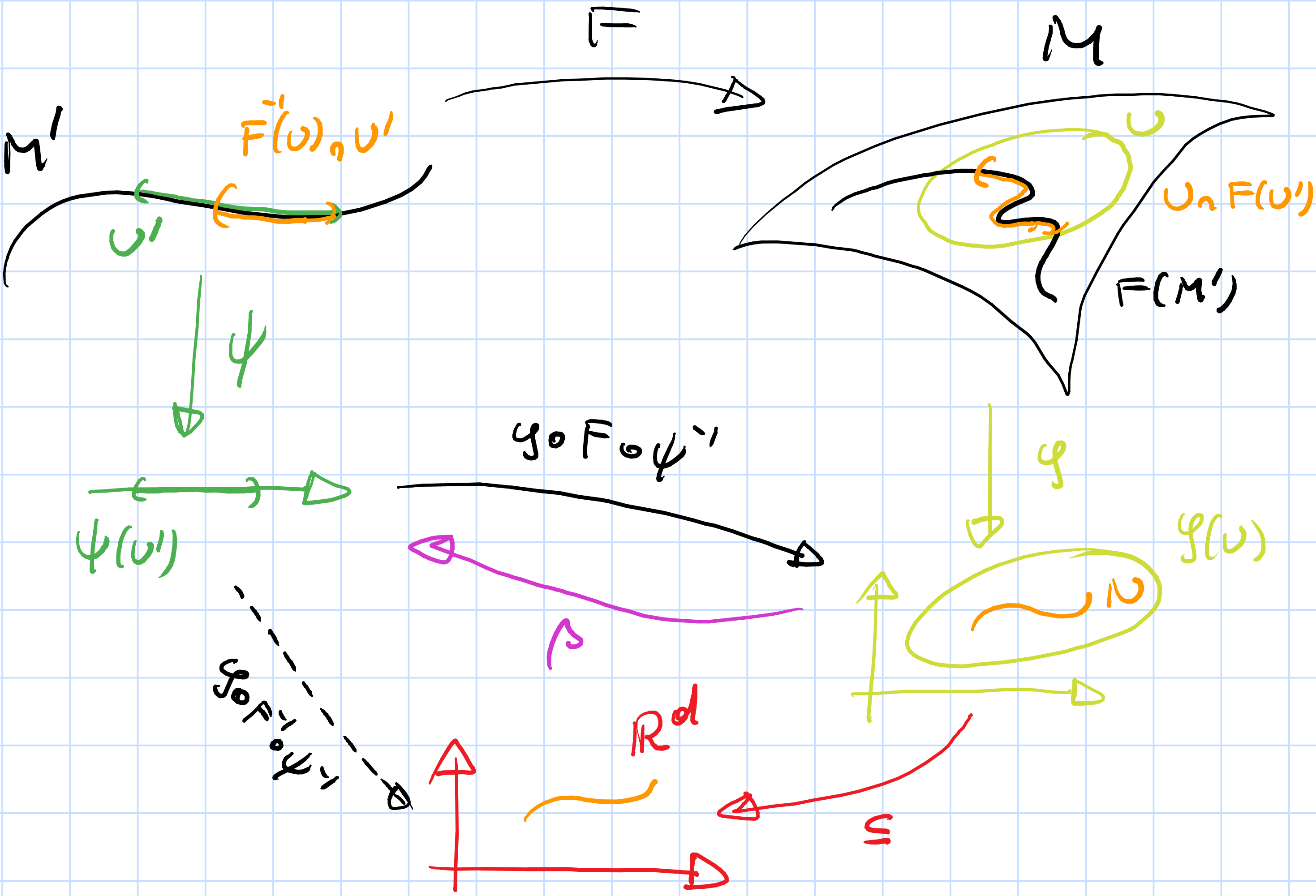
Wir schließen, wegen $d' < d$, dass

$$\lambda(N) = 0 .$$

Also ist auch $\mu(U \cap F(U')) = 0$.

Da sowohl M als auch M' durch höchstens abzählbar viele Karten überdeckt werden kann, folgt dass

$$\mu(F(M')) = 0.$$



D von (iv): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und wähle $\varepsilon_B > 0$, $B \in Q$, mit

$$\sum_{B \in Q} \varepsilon_B = \varepsilon .$$

Die Menge $\varphi_B(A \cap B)$ ist eine Borelmenge in $\mathbb{R}^d$, und $\lambda(\varphi_B(A \cap B)) < \infty$. Wähle $K_B, O_B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$K_B \text{ kompakt}, \quad K_B \subseteq \varphi_B(A \cap B),$$
$$O_B \text{ offen}, \quad \varphi_B(A \cap B) \subseteq O_B \subseteq \varphi_B(B),$$
$$\lambda(O_B \setminus K_B) < \varepsilon_B \cdot \left[\sup_{x \in \varphi_B(B)} \sqrt{\det(d\varphi_B^T d\varphi_B)} \right]^{-1}$$

Dann gilt für jede endliche Teilmenge Q' von Q, dass

$$\sum_{B \in Q'} \int_{O_B} \sqrt{\det(d\varphi_B^T d\varphi_B)}\, d\lambda \le$$

$$\le \sum_{B \in Q'} \int_{\varphi_B(A \cap B)} \sqrt{\det(d\varphi_B^T d\varphi_B)}\, d\lambda + \underbrace{\sum_{B \in Q} \varepsilon_B}_{\le \varepsilon}$$

$$\sum_{B \in Q'} \int_{K_B} \sqrt{\det(d\varphi_B^T d\varphi_B)}\, d\lambda \geq$$

$$\geq \sum_{B \in Q'} \int_{\varphi_B(A \cap B)} \sqrt{\det(d\varphi_B^T d\varphi_B)}\, d\lambda - \underbrace{\sum_{B \in Q'} \varepsilon_B}_{\le \varepsilon}$$

Setze

$$O := \bigcup_{B \in Q} \varphi_B^{-1}(O_B), \quad K := \bigcup_{B \in Q'} \varphi_B^{-1}(K_B).$$

Dann ist O offen mit $O \supseteq A$, und K kompakt mit $K \subseteq A$.

Ist $\mu(A) < \infty$, so ist

$$\mu(O) = \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ \text{endlich}}} \mu\Big(\bigcup_{B \in Q'} \varphi_B^{-1}(O_B)\Big) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ \text{endlich}}} \mu\Big(A \cap \bigcup_{B \in Q'} B\Big) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, sehen wir dass

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(O) \mid A \subseteq O \text{ offen} \}.$$

Weiter gilt

$$\mu(K) \geq \mu\Big(A \cap \bigcup_{B \in Q'} B\Big) - \varepsilon$$

und daher

$$\mu(A) = \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ \text{endlich}}} \mu\Big(A \cap \bigcup_{B \in Q'} B\Big) =$$

$$= \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt} \}.$$

$\square$

Bemerkung:

Die Regularität des Borelmaßes μ folgt eigentlich aus einem allgemeineren Resultat aus rein topologischen Grund. Das zeigen wir in dieser Vorlesung aber nicht.