Eingebettete Mannigfaltigkeiten

Definition:

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F: M \to N$. Dann heißt F eine **Einbettung**, wenn

- F ist stetig differenzierbar,
- für je zwei Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N und jeden Punkt $a \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ ist
$$d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(a) \quad \text{injektiv},$$
- F ist ein Homöomorphismus von M auf $F(M)$ versehen mit der Spurtopologie von N.

Offenbar gilt

(i) id ist eine Einbettung,

(i') jeder Diffeomorphismus ist eine Einbettung,

(ii) Sind F, G Einbettungen, so ist auch $G \circ F$ Einbettung.

Lemma:

Seien M, N zwei Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension, und $F: M \to N$ bijektiv und eine Einbettung. Dann ist F ein Diffeomorphismus.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass F^{-1} stetig differenzierbar ist. Da wir annehmen, dass M und N gleiche Dimension haben, folgt mit dem Satz von der inversen Funktion, dass

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ F^{-1} \circ \psi$$

stetig differenzierbar ist. $\square$

Bemerkung:

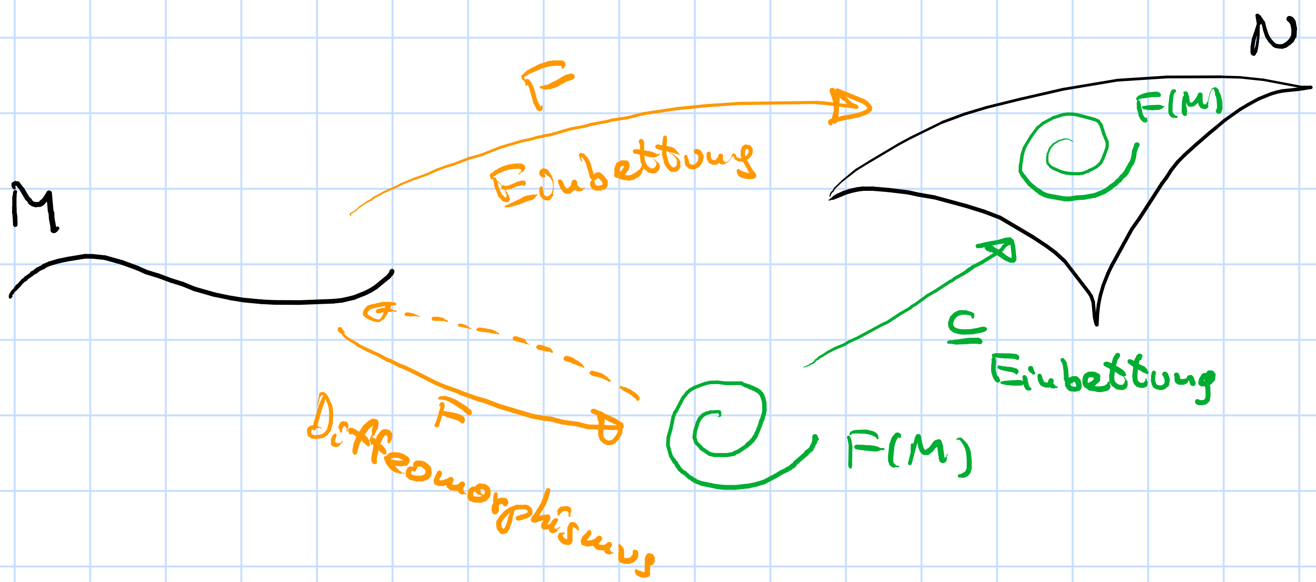
Seien M, N Mannigfaltigkeiten, und $F: M \to N$ Einbettung. Betrachte die Menge $F(M)$ als Mannigfaltigkeit mit der von F geerbten Struktur, d.h. mit der Topologie

$$\{ F(O) \mid O \subseteq M \text{ offen} \}$$

und dem Atlas

$$\{ (F(U), \varphi \circ (F|_U)^{-1}) \mid (U, \varphi) \text{ Karte von } M \}.$$

Dann ist F ein Diffeomorphismus von M auf $F(M)$, und die Inklusionsabbildung $\subseteq : F(M) \to N$ ist eine Einbettung.



Betrachtet man die Menge aller Mannigfaltigkeiten M die in einer festgehaltene Mannigfaltigkeit N eingebettet sind, und denkt man modulo Diffeomorphismen, so genügt es also solche Mannigfaltigkeiten M zu betrachten wo $M \subseteq N$ und $\subseteq : M \to N$ eine Einbettung ist.

Die folgende Aussage ist ein äußerst tiefliegender Satz, den wir hier NICHT BEWEISEN können – und daher auch nicht verwenden werden. Wir wollen ihn trotzdem formulieren, denn er motiviert warum wir uns im folgenden auf das Studium spezieller Mannigfaltigkeiten einschränken.

Satz (Whitney): --- ohne Beweis

Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung von M in den $\mathbb{R}^{2d}$ (betrachtet als $2d$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{(\mathbb{R}^{2d}, id)\}$).

Definition:

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann heißt M eingebettete Mannigfaltigkeit, wenn es $p \in \mathbb{N}$ gibt sodaß

- $M \subseteq \mathbb{R}^p$,
- $\subseteq : M \to \mathbb{R}^p$ ist Einbettung.

Betrachtet man nur eingebettete Mannigfaltigkeiten, so hat dies den

- Vorteil, dass man das Instrumentarium des Umgebungsraumes $\mathbb{R}^p$ zur Verfügung hat,

- Nachteil, dass die konzeptuelle Klarheit der Unterscheidung von intrinsischen geometrischen Größen einerseits, und vom Umgebungsraum kommenden extrinsischen Größen andererseits, verwaschen wird.

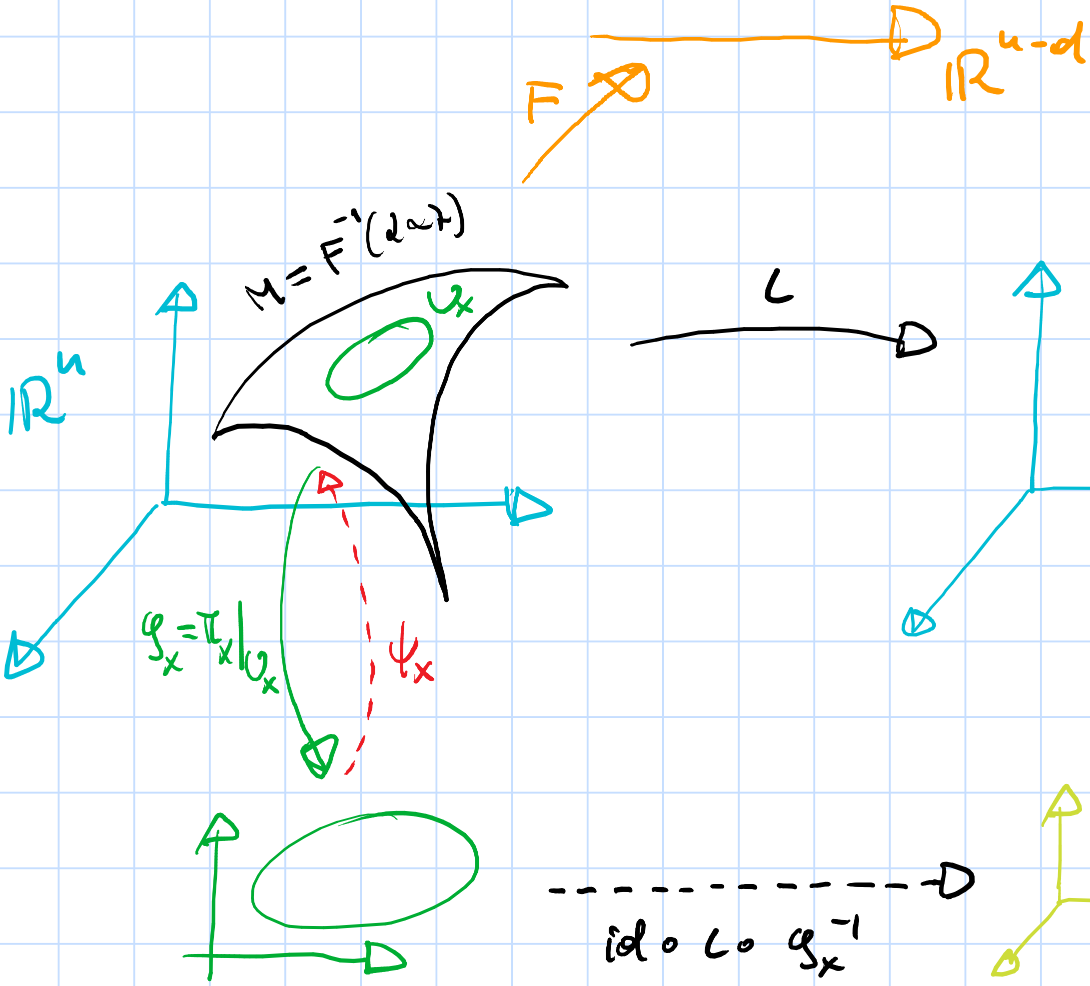
Beispiel:

Wir betrachten eine implizit definierte Mannigfaltigkeit. Sei also $1 \leq d < n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^{n-d}$ stetig differenzierbar sodass dF stets surjektiv ist, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei

$$M := \{ x \in D \mid F(x) = \alpha \}$$

versehen mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^n$ und dem im vorangegangenen Beispiel konstruierten Atlas.

Sei $\iota : M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung. Da M die Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$ trägt, ist ι ein Homöomorphismus von M auf $\iota(M)$. Es ist $\mathrm{id} \circ \iota \circ \varphi_x^{-1} = \psi_x$ und daher stetig differenzierbar. Also ist ι stetig differenzierbar. Weiters gilt $\mathrm{id} = \pi_x \circ \psi_x$, und daher $I = d\pi_x \cdot d\psi_x$. Also ist $d\psi_x$ stets injektiv, und daher ι eine Einbettung.



Eine eingebettete Mannigfaltigkeit hat lokal immer die Gestalt einer implizit definierten Mannigfaltigkeit.

Satz:

Sei $1 \le d < n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine eingebettete d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert für jedes $x \in M$ eine offene Menge $D_x \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F: D_x \to \mathbb{R}^{n-d}$ für die dF stets surjektiv ist, sodass

$$M \cap D_x = \{x \in D_x \mid F(x) = 0\}.$$

Diese Gleichheit macht, dass id_M ein Diffeomorphismus ist (linke Seite: offene Teilmenge von M; rechte Seite: implizite MF).

Wir zeigen sogar einen etwas spezifischeren Satz.

Satz:

Sei $1 \leq d < n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, $x \in M$, und (U, φ) eine Karte von M mit $x \in U$. Dann existieren

$$D_x \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x) \text{ offen}, \quad E_x \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}\left(\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ offen},$$

$$\Phi : D_x \to E_x$$

sodass

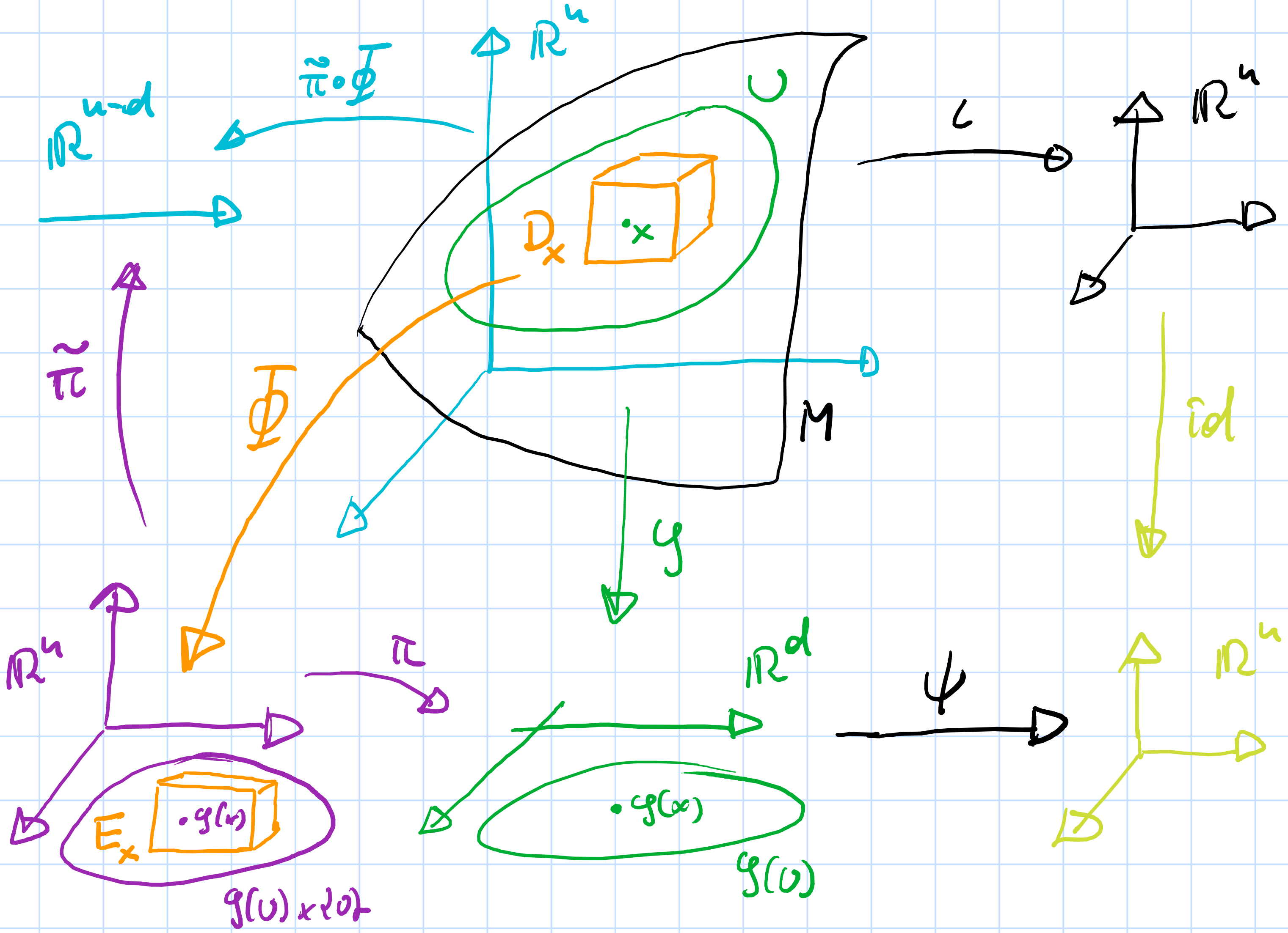
(i) Φ ist Diffeomorphismus von D_x auf E_x,

(ii) $M \cap D_x \subseteq U$,

(iii) $\pi \circ \Phi\big|_{D_x \cap M} = \varphi\big|_{D_x \cap M}$ wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ die Projektion auf die ersten d Koordinaten ist,

(iv) $M \cap D_x = (\tilde{\pi} \circ \Phi)^{-1}(\{0\})$ wobei $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ die Projektion auf die letzten $n-d$ Koordinaten ist.

<u>Beweis:</u> Das Setting der Sachen ist wie folgt skizziert:



Dabei ist $\iota: M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung, und $\psi := \mathrm{id}\circ\iota\circ\varphi^{-1}$.

Da ι eine Einbettung ist, wissen wir dass $d\psi(\varphi(x))$ injektiv ist. Bezeichne die Spalten von $d\psi(\varphi(x))$ als $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$d\psi(\varphi(x)) = (a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_d) \qquad [n\times d\text{-Matrix}]$$

Dann sind $a_1, \dots, a_d$ linear unabhängig. Wähle Vektoren

$a_{d+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und definiere

$$\Psi : \begin{cases} \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^n \\ (x_e)_{e=1}^n \mapsto \psi\left((x_e)_{e=1}^d\right) + \sum_{e=d+1}^n x_e a_e \end{cases}$$

Dann ist Ψ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\forall y \in U. \quad \Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \psi(\varphi(y)) = y.$$

Weiters haben wir

$$d\Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_d \,\vdots\, a_{d+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n\right) \quad [n \times n\text{-Matrix}]$$

und diese Matrix ist invertierbar.

Nach dem Satz von der inversen Funktion gibt es $V \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}\left(\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ offen, $V \subseteq \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d}$, $W \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x)$ offen, sodass $\Psi|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf W ist.

Die gesuchte Funktion Φ ergibt nun sich $(\Psi|_V)^{-1}$. Wir müssen nur noch ihren Definitionsbereich geeignet einschränken um die gewünschten Eigenschaften zu erhalten.

Da U offen in M ist, gibt es $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U = M \cap O$. Setze nun

$$D_x := W \cap O, \quad E_x := (\Psi|_V)^{-1}(D_x),$$

$$\Phi := (\Psi|_V)^{-1}\big|_{D_x}.$$

Dann ist $D_x \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x)$ offen, $E_x \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und Φ ein Diffeomorphismus von D_x auf E_x. Weiters gilt $M \cap D_x \subseteq M \cap O = U$.

Sei nun $y \in M \cap D_x$. Dann ist, wie oben schon festgestellt,

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = y$$

und daher

$$\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(y)$$

d.h. $(\pi \circ \Phi)(y) = \varphi(y)$ und $(\tilde{\pi} \circ \Phi)(y) = 0$.

Schließlich sei $y \in D_x$ mit $(\tilde{\pi} \circ \Phi)(y) = 0$ gegeben. Dann ist also

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem gewissen } a \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen $\operatorname{ran} \Phi \subseteq \operatorname{dom} \Psi = \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d}$, finden wir $z \in U$ sodass $a = \varphi(z)$. Es folgt

$$y = \Psi(\Phi(y)) = \Psi\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \psi(\varphi(z)) = z,$$

insbesondere ist $y \in U \subseteq M$.

$\square$

Der als erster formulierte Satz folgt tatsächlich mit Hilfe des gerade bewiesenen. Zunächst ist

$$d(\tilde{\pi}\circ\Phi) = \tilde{\pi}\cdot d\Phi$$

stets surjektiv, also die Darstellung "$M\cap D_x = (\tilde{\pi}\circ\Phi)^{-1}(\{0\})$" eine lokale Darstellung der Menge M als implizite Mannigfaltigkeit.

Um zu sehen, dass die Gleichheit sogar als Gleichheit von Mannigfaltigkeiten besteht, bemerke dass einerseits jede offene Teilmenge einer eingebetteten Mannigfaltigkeit selbst auch eingebettete Mannigfaltigkeit ist (der Atlas ist für $\{(U\cap D_x, \varphi|_{D_x}) \mid (U,\varphi)$ Karte von $M\}$) und dass wir andererseits gezeigt haben dass eine implizit definierte Mannigfaltigkeit (mit den Karten aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen) eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist.

Und nun gilt das folgende Lemma.

Lemma:

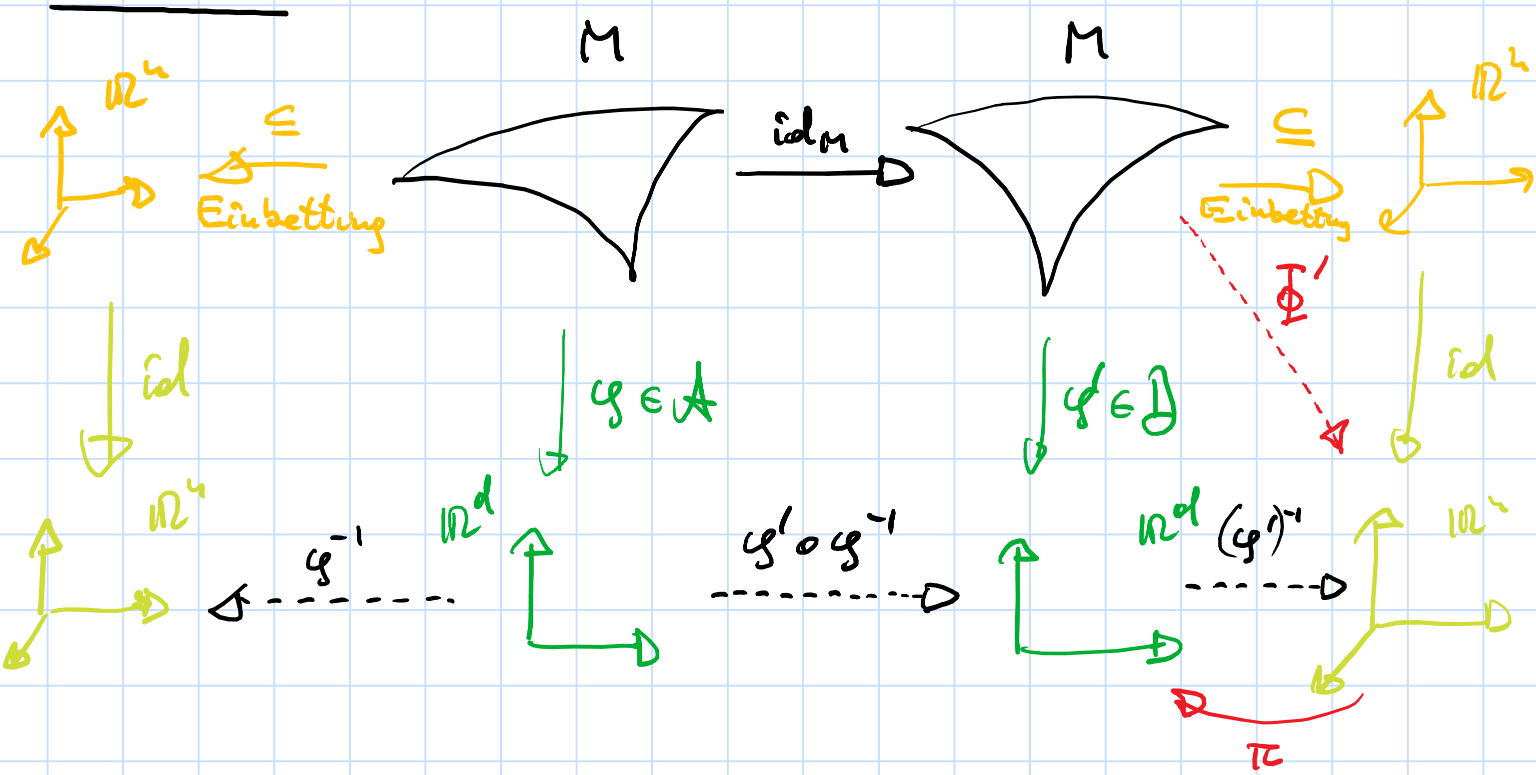
Sei $M\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{T}$ die Spurtopologie auf M vom $\mathbb{R}^n$, und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Atlanten auf $\langle M,\mathfrak{T}\rangle$ sodass die Inklusionsabbildung $\subseteq: M\to\mathbb{R}^n$ für beide eine Einbettung ist

$$\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{A}\rangle \xrightarrow[\text{Einbettung}]{\subseteq} \mathbb{R}^n$$

$$\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{B}\rangle \xrightarrow[\text{Einbettung}]{\subseteq} \mathbb{R}^n$$

Dann ist id_M ein Diffeomorphismus von $\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{A}\rangle$ auf $\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{B}\rangle$.

Beweis:



Nach dem bewiesenen Satz finden wir einen Diffeomorphismus Φ' mit $\varphi' = \pi \circ \Phi$ (auf geeigneten kleinen offenen Mengen).
Also ist

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$$

und π, Φ, φ^{-1} sind alle stetig differenzierbar.

Also ist $\mathrm{id}_M : \langle\langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\rangle \to \langle\langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{B}\rangle$ stetig differenzierbar. Das gleiche Argument funktioniert mit den Rollen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vertauscht.

$\square$

Als Folgerung können wir zeigen, dass eine eingebettete Mannigfaltigkeit deren Dimension kleiner als die des umgebenden Raumes ist, auch im Maßtheoretischen Sinne klein ist.

Korollar:

Sei $1 \leq d < n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine eingebettete d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist M eine Borel-Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und hat Lebesgue Maß Null.

Beweis: Jede Mannigfaltigkeit ist σ-kompakt. Da Kompaktheit in der Spurtopologie äquivalent ist mit Kompaktheit im umgebenden Raum, ist also M eine abzählbare Vereinigung von im $\mathbb{R}^n$ kompakten, und daher abgeschlossenen, Mengen. Insbesondere ist M eine Borelmenge.

Sei nun $x \in M$ festgehalten, wähle eine Karte (U, φ) von M mit $x \in U$, und D_x, E_x, Φ wie im Satz. Wir haben

$$\lambda(M \cap D_x) = \lambda\left(\Phi^{-1}\left(E_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})\right)\right) = \lambda^{\Phi}\left(E_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})\right).$$

Nach der Transformationsformel ist $\lambda^{\Phi} \ll \lambda$. Da $d < n$ ist, haben wir $\lambda(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = 0$.

Nach dem Lemma von Lindelöf können wir M mit abzählbar vielen der Mengen $M \cap D_x$ überdecken, und erhalten dass $\lambda(M) = 0$.

$\square$