Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Der Begriff der Mannigfaltigkeit verallgemeinert was man sich als "glatte Fläche" vorstellt.

Bevor wir zur Definition kommen, wollen wir noch einen topologischen Begriff formulieren.

Definition:

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann sagt man $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn $\mathcal{T}$ eine höchstens abzählbare Basis besitzt.

Explizit ausformuliert: es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ sodass sich jede Menge $O \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von gewissen Mengen aus $\mathcal{V}$ schreiben lässt.

Bemerkung:

Erfüllt $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ das 2^{te} Abzählbarkeitsaxiom, ist $Y \subseteq X$ und $\mathcal{T}|_Y$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ auf Y, so erfüllt auch $\langle Y, \mathcal{T}|_Y \rangle$ das 2^{te} Abzählbarkeitsaxiom.

Dies gilt da für $\mathcal{T}|_Y = \{ O \cap Y \mid O \in \mathcal{T} \}$ ist.

Lemma:

Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum der eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge besitzt, so erfüllt $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ das 2te Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis: Sei $D \subseteq X$ dicht und höchstens abzählbar. Dann ist die Menge

$$\mathcal{V} := \left\{ U_q(z) \,\middle|\, q > 0,\ q \in \mathbb{Q},\ z \in D \right\}$$

ebenfalls höchstens abzählbar.

Sei nun $O \in \mathcal{T}_d$ gegeben. Für $x \in O$ wähle $r_x > 0$ sodass $U_{r_x}(x) \subseteq O$. Nun wähle $z_x \in D \cap U_{r_x/2}(x)$, und

$$q_x \in \left(d(x, z_x), \tfrac{r_x}{2} \right) \cap \mathbb{Q}$$

Dann ist $U_{q_x}(z_x) \in \mathcal{V}$, und

$$x \in U_{q_x}(z_x) \subseteq U_{r_x}(x) \subseteq O.$$

Wir sehen, dass

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O} U_{q_x}(z_x) \subseteq O,$$

also $O = \bigcup_{x \in O} U_{q_x}(z_x)$. $\square$

Beispiel:

Der Raum $\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Topologie) erfüllt das 2te Abzählbarkeitsaxiom. Denn er hat die abzählbare dichte Teilmenge $\mathbb{Q}^n$.

Die in unserem Kontext interessante Eigenschaft ist das folgende Lemma von Lindelöf.

Lemma:

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum der das 2te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gilt für jede Teilmenge $M \subseteq X$ die folgende Aussage

▷ Jede offene Überdeckung von M besitzt eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung.

__Beweis:__ Wähle $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ höchstens abzählbar, sodass jede offene Menge Vereinigung von Elementen von $\mathcal{V}$ ist.

Sei nun $M \subseteq X$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ gegeben. Für $x \in M$ existiert $O_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in \mathcal{U}$, und in Folge existiert $V_x \in \mathcal{V}$ mit $x \in V_x \subseteq O_x$. Betrachte die Menge

$$\mathcal{W} := \{ V_x \mid x \in M \}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}, \bigcup \mathcal{W} \supseteq M, \forall \omega \in \mathcal{W}. \{O \in \mathcal{U} \mid \omega \subseteq O\} \neq \emptyset$$

Wähle eine Funktion $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ mit

$$\forall \omega \in \mathcal{W}. \ \omega \subseteq \varphi(\omega).$$

Dann ist $\varphi(\mathcal{W})$ eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathcal{U}$, und

$$M \subseteq \bigcup_{\omega \in \mathcal{W}} \omega \subseteq \bigcup_{\omega \in \mathcal{W}} \varphi(\omega) = \bigcup \varphi(\mathcal{W}).$$

$\square$

Nun kommen wir zur Definition des Begriffes einer C^1-Mannigfaltigkeit.

Definition:

Sei M ein topologischer Raum und $d \in \mathbb{N}$.

(i) Ein Paar (U, φ) heißt **d-dimensionale Karte auf M**, wenn

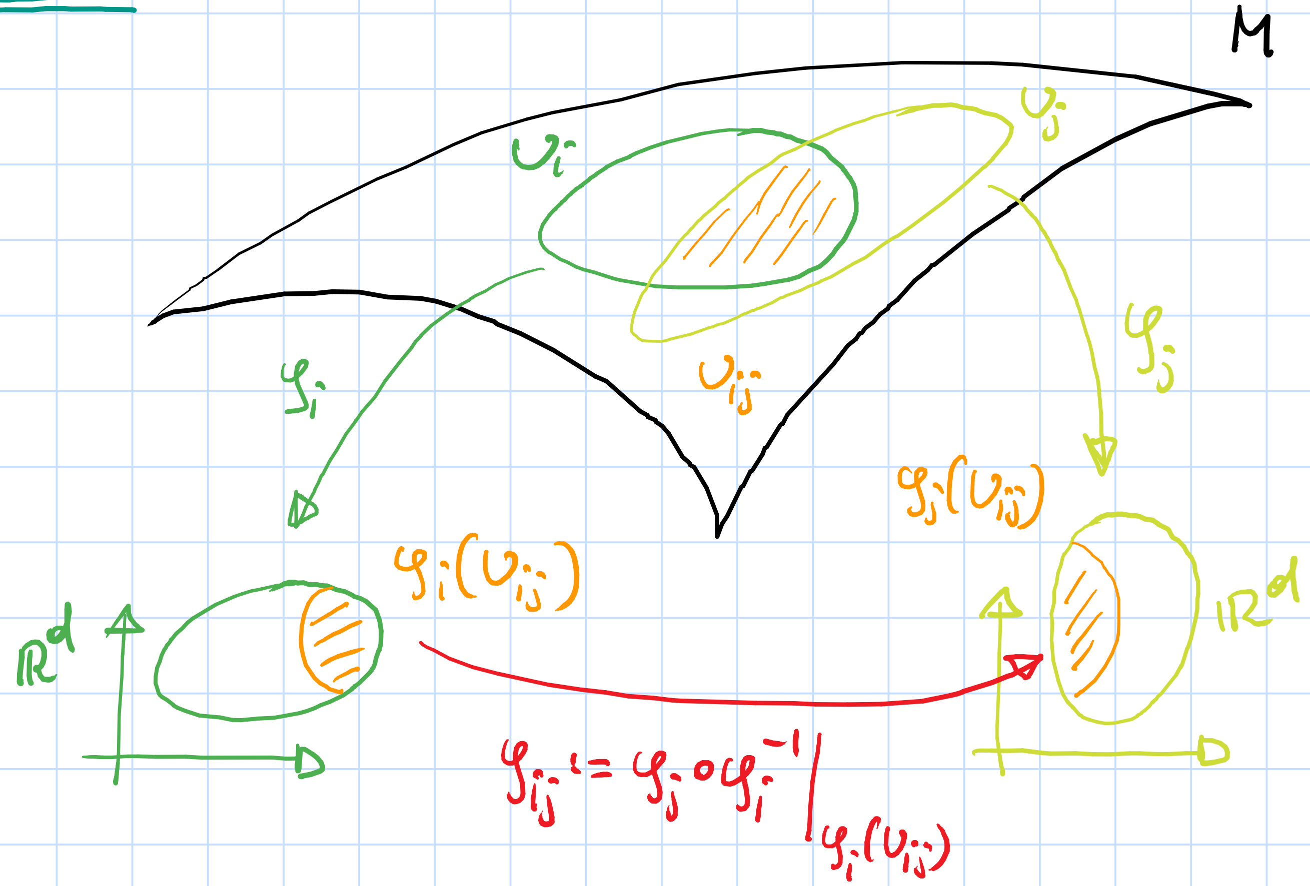
- $U \subseteq M$ offen, und $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$,
- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ offen,
- φ Homöomorphismus von U (mit der Spurtopologie von M) auf $\varphi(U)$ (mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^d$).

(ii) Eine Menge $\{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ heißt ein **d-dimensionaler C^1-Atlas von M**, wenn

- für jedes $i \in I$ ist (U_i, φ_i) eine d-dimensionale Karte auf M,
- $\bigcup_{i \in I} U_i = M$,
- für je zwei Indices $i, j \in I$ mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist der **Kartenwechsel**

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big|_{\varphi_i(U_{ij})} : \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij})$$

stetig differenzierbar.



Definition:

Sei $d \in \mathbb{N}$. Ein Paar $\langle\langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\rangle$ heißt **d-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit**, wenn

- $\langle M, \mathcal{T}\rangle$ ist topologischer Raum, der Hausdorff ist und das 2^te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt,
- $\mathcal{A}$ ist ein d-dimensionaler C^1-Atlas von M.

Wieder einmal hat man in natürlicher Weise einen Begriff von "strukturerhaltenden Abbildungen".

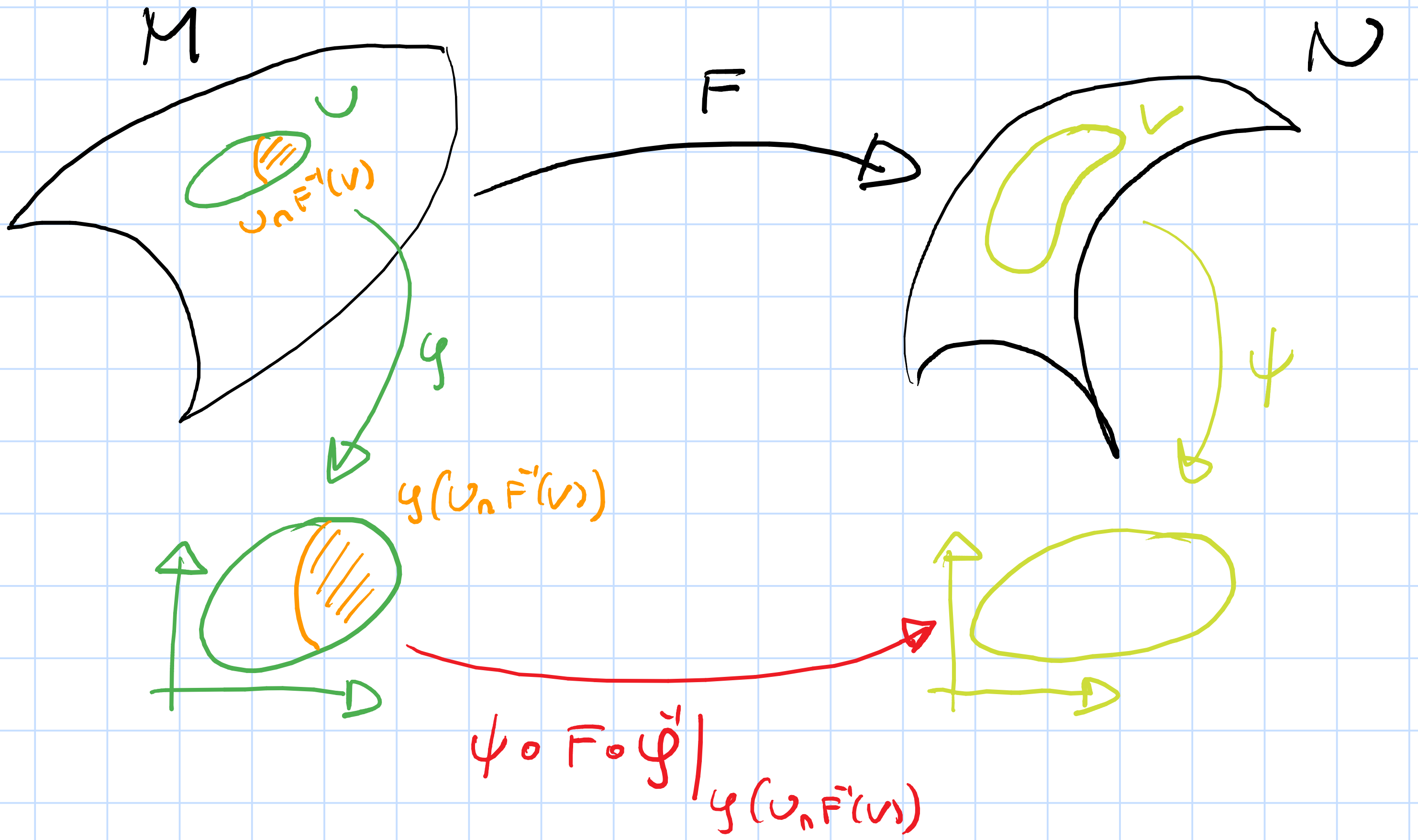
Definition:

Seien $\langle\langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\rangle$ und $\langle\langle N, \mathcal{V}\rangle, \mathcal{B}\rangle$ zwei C^1-Mannigfaltigkeiten. Eine Funktion $F: M \to N$ heißt **stetig differenzierbar**, wenn gilt

- F ist $\mathcal{T}$-$\mathcal{V}$-stetig,
- Für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ mit $F(U) \cap V \neq \emptyset$, ist die Funktion

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(U \cap F^{-1}(V))} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

stetig differenzierbar.



Bemerkung:

Offenbar gilt stets

(i) id ist stetig differenzierbar

(ii) F, G stetig differenzierbar $\Rightarrow$ $G \circ F$ stetig differenzierbar

Man hat nun auch den der behandelten Strukturen entsprechend Begriff von "Isomorphie".

Definition:

Seien M, N Mannigfaltigkeiten, und $F: M \to N$. Dann heißt F ein C^1-Diffeomorphismus, wenn F bijektiv ist und F und F^{-1} beide stetig differenzierbar.

Bemerkung:

Sind M und N diffeomorph, d.h. gibt es einen Diffeomorphismus von M auf N, so müssen M und N die gleiche Dimension haben.

Das gilt, da für einen Diffeomorphismus F und je zwei Karten φ und ψ gilt dass

$$d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \cdot d(\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}) = \mathrm{id} .$$

Lemma:

Sei $\langle\langle M, \mathfrak{T}\rangle, \mathcal{A}\rangle$ eine Mannigfaltigkeit, N eine Menge, und $F: M \to N$ eine bijektive Funktion. Dann existiert eine Topologie $\mathcal{V}$ auf N und ein Atlas $\mathcal{B}$ auf N, sodass F ein Diffeomorphismus von $\langle\langle M, \mathfrak{T}\rangle, \mathcal{A}\rangle$ auf $\langle\langle N, \mathcal{V}\rangle, \mathcal{B}\rangle$ ist.

Beweis: Setze

$$\mathcal{V} := \{ F(O) \mid O \subseteq M \text{ offen} \} .$$

Das ist eine Topologie auf N (tatsächlich gleich der finalen Topologie bzgl. $\{F^{-1}\}$ und auch gleich der finalen Topologie bzgl. $\{F\}$), und F ist ein Homöomorphismus von $\langle M, \mathfrak{T}\rangle$ auf $\langle N, \mathcal{V}\rangle$.

Nun sei

$$\mathcal{B} := \{ (F(U), \varphi \circ (F|_U)^{-1}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A} \}.$$

Jedes Paar $(F(U), \varphi \circ (F|_U)^{-1})$ ist eine Karte auf M, und die Kartenmengen $F(U)$ überdecken gemeinsam ganz $F(M)$. Die Kartenwechsel dieser Karten sind gleich jenen der Karten aus $\mathcal{A}$:

$$(\psi \circ (F|_V)^{-1}) \circ (\varphi \circ (F|_U)^{-1})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1},$$

also stetig differenzierbar. Daher ist $\mathcal{B}$ ein Atlas von M.

Schließlich gilt stets

$$(\varphi \circ (F|_U)^{-1}) \circ F \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id},$$

$$\varphi \circ F^{-1} \circ (\varphi \circ (F|_U)^{-1})^{-1} = \mathrm{id},$$

also sind F und F^{-1} stetig differenzierbar.

$\square$

Bemerkung:

Man kann die gleichen Definitionen machen und dabei C^1 durch C^k, C^∞, stetig, etc. ersetzen. Dann bekommt man analoge Begriffe von C^k-Mannigfaltigkeit, C^∞-Mannigfaltigkeit, topologischer Mannigfaltigkeit, oder ähnlichem.

Die folgende Aussage ist ein äußerst tiefliegender Satz, den wir leider NICHT BEWEISEN können – und daher auch nicht verwenden werden. Er sei trotzdem formuliert um das Gesamtbild richtig darzustellen.

Satz: — — — ohne Beweis

Sei $\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{A}\rangle$ eine C^1-Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein C^∞-Atlas $\mathfrak{B}$ auf M sodass

$$\mathrm{id}:\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathcal{A}\rangle\to\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathfrak{B}\rangle$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Für je zwei solche C^∞-Atlanten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, ist

$$\mathrm{id}:\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathfrak{B}\rangle\to\langle\langle M,\mathfrak{T}\rangle,\mathfrak{B}'\rangle$$

ein C^∞-Diffeomorphismus.

— — — — — — —

Beispiel:

Ein (triviales) Beispiel einer Mannigfaltigkeit ist durch eine offene Teilmenge M der $\mathbb{R}^d$. Nämlich ist das Paar $(M, \subseteq)$, wobei $\subseteq : M \to \mathbb{R}^d$ die Inklusionsabbildung ist, eine Karte, und $\{(M, \subseteq)\}$ ein Atlas.

Beispiel:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Oberfläche der Einheitskugel, d.h.

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 \right\}.$$

Betrachte, für $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$U_{j,+} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in M \;\middle|\; \alpha_j > 0 \right\}, \quad U_{j,-} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \in M \;\middle|\; \alpha_j < 0 \right\}.$$

Dann sind $U_{j,\pm}$ offene Teilmengen von M. Seien $\varphi_{j,\pm} : U_{j,\pm} \to \mathbb{R}^2$ die Projektionen von $U_{j,\pm}$ auf die Koordinaten die $\neq j$ sind. Z.B. also

$$\varphi_{1,-}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi_{j,\pm}$ stetig, und $\varphi_{j,\pm}(U_{j,\pm}) = \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Die Funktionen $\varphi_{j,\pm}$ sind bijektiv und ihre Inverse lässt sich explizit hinschreiben. Z.B. ist

$$\varphi_{1,-}^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind die $\varphi_{j,\pm}^{-1}$ stetig, also $\varphi_{j,\pm}$ ein Homöomorphismus.

Die Paare $(U_{j,\pm}, \varphi_{j,\pm})$ sind also Karten auf M. Die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ (U_{j,\sigma},\ \varphi_{j,\sigma}) \;\middle|\; j\in\{1,2,3\},\ \sigma\in\{+,-\} \right\}$$

ist ein Atlas. Denn zunächst gilt offenbar

$$M = \bigcup_{\substack{j\in\{1,2,3\}\\ \sigma\in\{+,-\}}} U_{j,\sigma},$$

und die Kartenwechsel lassen sich auch explizit hinschreiben. Z. B. ist

$$U_{1,-}\cap U_{2,+} = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\in M \;\middle|\; \alpha_1<0,\ \alpha_2>0 \right\},$$

$$\varphi_{1,-}(U_{1,-}\cap U_{2,+}) = \left\{ \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\in \mathbb{D} \;\middle|\; \xi>0 \right\},$$

$$(\varphi_{2,+}\circ\varphi_{1,-}^{-1})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\\ \eta\end{pmatrix}$$

Die Vorgangsweise vom letzten Beispiel lässt sich auch viel allgemeiner durchführen. Man spricht von implizit definierten Mannigfaltigkeiten.

Beispiel:

Seien $n, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq d < n$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F: D \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\forall x \in D . \quad dF(x) \text{ surjektiv.}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte das level set

$$M := \{x \in D \mid F(x) = \alpha\}.$$

Unser Ziel ist es zu zeigen dass M in ganz natürlicher Weise zu einer Mannigfaltigkeit gemacht werden kann.

▷ Die Topologie: Es ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$, und wir versehen M mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^n$.

▷ Konstruktion von Karten: Sei $x \in M$. Da $dF(x)$ surjektiv ist, finden wir $n-d$ Spalten von $dF(x)$ die linear unabhängig sind; seien jene mit Spaltenindizes

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-d} \leq n$$

solche. Bezeichne mit

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$$

die Spaltenindices der restlichen d Spalten.

Schreibe $x = (\xi_\ell)_{\ell=1}^{n}$, und setze

$$a := (\xi_{j_\ell})_{\ell=1}^{n-d}, \quad b := (\xi_{i_\ell})_{\ell=1}^{d}.$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen

$$V \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^{n-d}}(a), \quad W \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^{d}}(b),$$

und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to V$, sodass für die im $\mathbb{R}^n$ offene Menge

$$O := \left\{ (\eta_\ell)_{\ell=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (\eta_{j_\ell})_{\ell=1}^{n-d} \in V, \, (\eta_{i_\ell})_{\ell=1}^{d} \in W \right\}$$

gilt

$$M \cap O = \left\{ (\eta_\ell)_{\ell=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (\eta_{i_\ell})_{\ell=1}^{d} \in W, \; (\eta_{j_\ell})_{\ell=1}^{n-d} = g\left((\eta_{i_\ell})_{\ell=1}^{d} \right) \right\}.$$

Setze nun $U_x := M \cap O$

$$\pi_x : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (\eta_\ell)_{\ell=1}^{n} \longmapsto (\eta_{i_\ell})_{\ell=1}^{d} \end{cases}, \quad \varphi_x : \pi_x \big|_{U_x}.$$

Es ist U_x offen in M und $\varphi_x(U_x) = W$ offen in $\mathbb{R}^d$. Die Projektion π_x ist stetig, und damit ist auch φ_x stetig.

Die Funktion $\psi_x : W \to U_x$ die definiert ist durch

$$\left(\left[\psi_x\left((x_{i_\ell})_{\ell=1}^n\right)\right]_{i_k}\right)_{k=1}^d = (x_{i_\ell})_{\ell=1}^d ,$$

$$\left(\left[\psi_x\left((x_{i_\ell})_{\ell=1}^n\right)\right]_{j_k}\right)_{k=1}^{n-d} = g\left((x_{i_\ell})_{\ell=1}^d\right),$$

ist stetig differenzierbar, und

$$\varphi_x \circ \psi_x = \mathrm{id}_W , \quad \psi_x \circ \varphi_x = \mathrm{id}_{U_x} .$$

Also ist φ_x bijektiv mit – insbesondere – stetiger Inversen.
Wir sehen, dass jedes Paar (U_x, φ_x) eine Karte von M ist.

▷ Der Atlas: Wir betrachten die Gesamtheit aller oben konstruierten Karten

$$\mathcal{A} := \{(U_x, \varphi_x) \mid x \in M\}.$$

Zunächst gilt, wegen $x \in U_x$ für alle $x \in M$, dass

$$M = \bigcup \{U_x \mid x \in M\}$$

Seien $x, y \in M$ mit $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Der Kartenwechsel ist gegeben als

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \pi_x \circ \psi_y ,$$

und ist daher stetig differenzierbar. Wir sehen, dass $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M ist.

Jede Mannigfaltigkeit hat gewisse "gute" topologischen Eigenschaften.

Definition:

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$

(i) **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

(ii) **σ-kompakt**, wenn sich X als höchstens abzählbare Vereinigung kompakter Mengen schreiben lässt.

Lemma:

Jede Mannigfaltigkeit ist lokalkompakt.

Beweis: Sei M eine Mannigfaltigkeit, und $x \in M$. Wähle eine Karte (U, φ) von M mit $x \in U$, und wähle $r > 0$ sodass

$$\overline{U_r(\varphi(x))} \subseteq \varphi(U).$$

Nun ist $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus. Also ist

$$\varphi^{-1}\left(\overline{U_r(\varphi(x))}\right)$$

eine kompakte Umgebung von x.

$\square$

Lemma:

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein topologischer Raum der lokalkompakt ist und das 2te Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ σ-kompakt.

Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit σ-kompakt.

Beweis: Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{T}$ eine höchstens abzählbare Basis. Zu $x \in X$ wähle eine kompakte Umgebung K_x von x. Dann wähle $O_x \in \mathcal{V}$ mit $x \in O_x \subset K_x$.

Die Menge

$$\mathcal{W} := \{ O_x \mid x \in X \}$$

ist höchstens abzählbar, und für jedes $\omega \in \mathcal{W}$ ist

$$\{ K \subseteq X \mid K \text{ kompakt}, \ \omega \subseteq K \} \neq \emptyset .$$

Wähle eine Funktion

$$\varphi : \mathcal{W} \longrightarrow \{ K \subseteq X \mid K \text{ kompakt} \}$$

sodass für jedes $\omega \in \mathcal{W}$ gilt $\omega \subseteq \varphi(\omega)$. Dann ist $\varphi(\mathcal{W})$ höchstens abzählbar, und

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup \mathcal{W} \subseteq \bigcup \varphi(\mathcal{W}) \subseteq X,$$

also $X = \bigcup \varphi(\mathcal{W})$.

$\square$