Der Satz von Sard

Ist $T : X \to Y$ stetig differenzierbar, und $x_0 \in X$ mit $\det dT(x_0) \neq 0$, so ist T zumindest auf einer gewissen Umgebung von x_0 ein C^1-Diffeomorphismus. Man kann also die Transformationsformel lokal bei Punkten wo dT invertierbar ist anwenden.

Definition:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T : X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Ein Punkt $x \in X$ heißt **kritischer Punkt von T**, wenn

$$\det dT(x) = 0 .$$

Die Menge aller kritischen Punkte von T bezeichnen wir mit C_T.

Es ist eine oft praktische Tatsache, dass man beim Transformieren von Integralen das Bild der Menge C_T immer getrost ignorieren kann (die Menge C_T selbst kann dagegen groß sein).

Satz (von Sard):

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T : X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Dann ist die Menge $T(C_T)$ Lebesgue messbar und hat Maß Null.

<u>Beweis:</u> Für den Beweis des Satzes analysieren – und modifizieren – wir den Beweis der Transformationsformel.

▷ Eine Vorbereitung:

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $\ell(B)$, und sei $L: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung mit $\ker L \neq \{0\}$. Setze

$$\delta := \dim(\ker L), \quad \varrho := \dim(\operatorname{ran} L),$$

sodaß also $\delta \geq 1$ und $\delta + \varrho = d$. Schließlich wähle eine unitäre Abbildung $U: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

$$U(\operatorname{ran} L) = \mathbb{R}^\varrho \times \{0\}^\delta.$$

Da die Zeilensummennorm einer unitären Matrix $\leq d$ ist, ist $\|U \circ L\| \leq d\|L\|$. Der Durchmesser des Würfels B ist $= \ell(B)$, und daher ist der Durchmesser der Menge $((U \circ L)(B))$ höchstens $d\|L\|\ell(B)$. Es gilt also, für beliebiges $z_B \in (U \circ L)(B)$, dass

$$(U \circ L)(B) \subseteq z_B + \left(Q^{\mathbb{R}^\varrho}_{d\|L\|\ell(B)} \times \{0\}^\delta\right)$$

▷ Sei X, T wie im Satz. Wir zeigen die folgende Aussage:

Sei $B \subseteq X$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $\ell(B)$, sei $\alpha(B)$ wie vorher und $\gamma(B) := \sup\{\|dT(x)\| : x \in B\}$. Angenommen es gibt $y \in B$ mit $\delta := \dim(\ker[dT(y)]) \geq 1$. Dann ist $T(B)$ enthalten in einer Menge mit Maß

$$\leq (2d)^d \lambda(B)\, (\gamma(B) + \alpha(B))^{d-\delta}\, \alpha(B)^\delta.$$

Die Abschätzung im ersten Schritt des Beweises der Transformationsformel hat zur folgenden Schlüssen geführt ($y \in \Theta$ beliebig):

$$T(\Theta) \subseteq Ty - [dT(y)]y + [dT(y)](\Theta) + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)}.$$

Sei nun angenommen, dass $dT(y)$ nicht invertierbar ist, und sei $\delta := \dim(\ker L)$, $\varsigma := \dim(\operatorname{ran} L)$. Wähle U unitär sodass $U(\operatorname{ran} dT(y)) = \mathbb{R}^\varsigma \times \{0\}^\delta$. Dann ist (mit $z \in [dT(y)](\Theta)$ beliebig gewählt)

$$U\left([dT(y)](\Theta) + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \left(U \circ [dT(y)]\right)(\Theta) + U\left(Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)}\right) \subseteq$$

$$\subseteq z + \left(Q^{\mathbb{R}^\varsigma}_{d\,\|dT(y)\|\,\ell(\Theta)} \times \{0\}^\delta\right) + Q_{d\cdot\alpha(\Theta)\ell(\Theta)}$$

$$\subseteq z + \left(Q^{\mathbb{R}^\varsigma}_{d\,(\gamma(\Theta)+\alpha(\Theta))\,\ell(\Theta)} \times Q^{\mathbb{R}^\delta}_{d\,\alpha(\Theta)\,\ell(\Theta)}\right).$$

Da das Lebesgue Maß translationsinvariant ist und bei unitären Transformationen gleich bleibt, ist $T(\Theta)$ enthalten in einer Menge mit Maß

$$\leq \lambda\left(Q^{\mathbb{R}^\varsigma}_{d(\gamma(\Theta)+\alpha(\Theta))\,\ell(\Theta)} \times Q^{\mathbb{R}^\delta}_{d\,\alpha(\Theta)\,\ell(\Theta)}\right) =$$

$$= (2d)^d \cdot \underbrace{\ell(\Theta)^d}_{=\lambda(\Theta)} \left(\gamma(\Theta)+\alpha(\Theta)\right)^\varsigma \alpha(\Theta)^\delta.$$

▷ Wir zeigen, dass für jeden abgeschlossenen Quader $R \subseteq X$ mit rationalen Seitenlängen die Menge $T(R \cap C_T)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Wir verwenden die gleichen äquidistanten Zerlegungen von R in Würfel $B_j^{(N)}$, $j = 1, \dots, m^{(N)}$. Dann ist

$$T(R \cap C_T) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} T(B_j^{(N)} \cap C_T) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup \left\{ B_j^{(N)} \;\middle|\; j \in \{1, \dots, m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset \right\}.$$

Nach der im letzten Schritt gezeigten Abschätzung gilt für $B_j^{(N)}$ mit $B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset$ dass (mit geeigneten $\delta_j^{(N)} \geq 1$) $T(B_j^{(N)})$ enthalten ist in einer Menge mit Maß

$$\leq (2d)^d \lambda(B_j^{(N)}) \left(\gamma(B_j^{(N)}) + \alpha(B_j^{(N)})\right)^{d - \delta_j^{(N)}} \alpha(B_j^{(N)})^{\delta_j^{(N)}}.$$

Sei nun $\varepsilon \in (0,1)$, und wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\alpha(B_j^{(N)}) < \varepsilon$ falls nur $N \geq N_0$. Weiters sehe $\gamma(R) := \sup_{x \in R} \| dT(x) \|$, sodass also $\gamma(R) \geq \gamma(B_j^{(N)})$ für alle j und N. Dann haben wir, für $N \geq N_0$,

$$\left(\gamma(B_j^{(N)}) + \alpha(B_j^{(N)})\right)^{d - \delta_j^{(N)}} \leq \left(\gamma(R) + 1\right)^d,$$

$$\alpha(B_j^{(N)})^{\delta_j^{(N)}} \leq \varepsilon.$$

Es folgt für $N \geq N_0$

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} \left\{ B_j^{(N)} \mid j \in \{1, \dots, m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T \right\} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset}}^{m^{(N)}} (2d)^d \, \lambda(B_j^{(N)}) \, (\gamma(R)+1)^d \, \varepsilon \leq$$

$$\leq (2d)^d \, \lambda(R) \, (\gamma(R)+1)^d \, \varepsilon .$$

Also hat die Menge

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcup \left\{ B_j^{(N)} \mid j \in \{1, \dots, m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset \right\} \right)$$

Maß Null. Die Menge $T(R \cap C_T)$ ist eine Teilmenge dieser Menge, und daher Lebesgue-meßbar mit Maß Null.

▷ Da X durch abzählbar viele Quader mit rationalen Seitenlängen überdeckt werden kann, folgt dass $T(C_T)$ Lebesgue-Nullmenge ist.

$\square$