Die Transformationsformel

Hat man zwei Maßräume X, Y, eine meßbare Abbildung $T: X \to Y$ und ein Maß μ auf X, so ist das Bildmaß (oder der push-forward) μ^T von μ unter T definiert als

$$\mu^T(B) := \mu(T^{-1}(B))$$

für alle meßbaren Mengen $B \subseteq Y$. Mit dieser Begriffsbildung erhält man die Transformationsformel für Integrale:

$$\int_{T^{-1}(Y)} (f \circ T)\, d\mu = \int_Y f \, d\mu^T .$$

Um diese Formel zu benutzen ist es von Interesse den push-forward tatsächlich zu berechnen.

Bemerkung (cf. [Kusolitsch, Satz 6.68]):

Sei A eine invertierbare $d \times d$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, und T die invertierbare affine Abbildung $Tx := Ax + b$. Dann ist der push-forward des d-dimensionalen Lebesgue Maßes λ_d unter der Abbildung T^{-1} gegeben als

$$\lambda_d^{T^{-1}} = |\det(A)| \cdot \lambda_d .$$

Wir zeigen nun für eine Klasse nichtlinearer Abbildungen eine dieser Formel entsprechende Tatsache. Die angesprochene Klasse sind Abbildungen die sich gut durch affine Abbildungen approximieren lassen, und auch der Beweis der Satzes wird auf dieser Approximierbarkeit beruhen.

Definition:

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und sei $T: X \to Y$. Dann heißt T ein C^1- Diffeomorphismus, wenn T bijektiv ist, und T und T^{-1} beide stetig differenzierbar sind.

Satz (Transformationsformel):

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $T: X \to Y$ ein C^1- Diffeomorphismus. Bezeichne mit λ_X und λ_Y das d-dimensionale Lebesgue Maß eingeschränkt auf X bzw. Y.

Dann ist $\lambda_Y^{T^{-1}}$ absolut stetig bezüglich λ_X, und die Radon-Nikodym Dichte ist gegeben als

$$\frac{d\lambda_Y^{T^{-1}}}{d\lambda_X} = |\det dT|,$$

wobei dT das totale Differential (die Frechet-Ableitung) von T bezeichnet.

Beweis: Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ und $T: X \to Y$ wie im Satz festgehalten. Wir verwenden, aus rein praktischen Gründen, in diesem Beweis die Maximumnorm im $\mathbb{R}^d$, das ist

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} |\alpha_j| .$$

Die $\|.\|_\infty$-Kugel mit Radius r und Mittelpunkt 0 ist der Würfel

$$Q_r := [-r, r]^d .$$

Ist $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, so ist die Abbildungsnorm bzgl. der $\|.\|_\infty$-Norm im Urbild- und Bildraum gerade die Zeilensummennorm ($A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d$ bzgl. der kanonischen Basis)

$$\left\| (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d \right\| := \max_{i=1,\dots,d} \sum_{j=1}^d |\alpha_{ij}| .$$

Es gilt also für jede lineare Abbildung

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty .$$

▷ Wir zeigen die folgende Aussage:

Sei $B \subseteq X$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $\ell(B)$, d.h. $B = [\alpha_1, \alpha_1 + \ell(B)] \times \dots \times [\alpha_d, \alpha_d + \ell(B)]$, und setze

$$\alpha(B) := \sup_{x,y \in B} \| dT(x) - dT(y) \| ,$$

$$\Lambda(B) := \sup_{x \in B} \| [dT(x)]^{-1} \| .$$

Dann gilt für jedes $y \in B$

$$T(B) \subseteq Ty - [dT(y)](y) + [dT(y)]\left(B + Q_{\ell(B)\alpha(B)\Lambda(B)}\right).$$

Sei $y \in B$. Die Funktion $F(x) := T(x) - [dT(y)](x)$ ist stetig differenzierbar, und $dF(x) = dT(x) - dT(y)$. Damit erhalten wir, für jedes $x \in B$,

$$\| Tx - (Ty + [dT(y)](x-y)) \|_\infty =$$

$$= \| F(x) - F(y) \|_\infty \leq \sup_{t \in \operatorname{conv}\{x,y\}} \| dF(t) \| \cdot \| x-y \|_\infty$$

$$\leq \alpha(B) \cdot \ell(B).$$

Dies zeigt, dass

$$T(B) \subseteq \left(Ty - [dT(y)]y + [dT(y)](B) \right) + Q_{\alpha(B)\ell(B)}.$$

Nun gilt, für jedes $r > 0$,

$$Q_r = [dT(y)] \left([dT(y)]^{-1} (Q_r) \right) \subseteq$$

$$\subseteq [dT(y)] \left(Q_{r \cdot \| [dT(y)]^{-1} \|} \right) \subseteq [dT(y)] \left(Q_{r \Delta(B)} \right).$$

Es folgt

$$T(B) \subseteq Ty - [dT(y)](y) + [dT(y)] \left(B + Q_{\alpha(B)\ell(B)\Delta(B)} \right).$$

▷ Wir zeigen die folgende Aussage:

Seien B, $\ell(B)$, $\alpha(B)$, $\Delta(B)$ wie im vorigen Schritt. Dann gilt

$$\lambda(T(B)) \leq \int_B |\det dT| \, d\lambda \cdot (1 + 2\alpha(B)\Delta(B))^d.$$

Das Lebesgue Maß ist translationsinvariant, also erhalten wir aus der im vorigen Schritt gezeigten Inklusion für jedes $y \in \Theta$

$$\lambda(T(\Theta)) = \lambda\Big([dT(y)]\big(\Theta + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)\Delta(\Theta)}\big)\Big)$$

$$= \big|\det[dT(y)]\big| \cdot \lambda\big(\Theta + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)\Delta(\Theta)}\big).$$

Nun ist $\Theta + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)\Delta(\Theta)}$ ein Würfel mit Seitenlänge $\ell(\Theta) + 2\alpha(\Theta)\ell(\Theta)\Delta(\Theta)$, und daher

$$\lambda\big(\Theta + Q_{\alpha(\Theta)\ell(\Theta)\Delta(\Theta)}\big) = \ell(\Theta)^d (1 + 2\alpha(\Theta)\Delta(\Theta))^d =$$

$$= \lambda(\Theta) \cdot (1 + 2\alpha(\Theta)\Delta(\Theta))^d.$$

Jetzt machen wir eine Wahl für y. Nämlich sei $y \in \Theta$ so dass

$$\big|\det[dT(y)]\big| = \min_{x \in \Theta} \big|\det[dT(x)]\big|.$$

Dann gilt

$$\big|\det[dT(y)]\big| \cdot \lambda(\Theta) \leq \int_\Theta |\det dT| \, d\lambda,$$

und wir erhalten die behauptete Abschätzung.

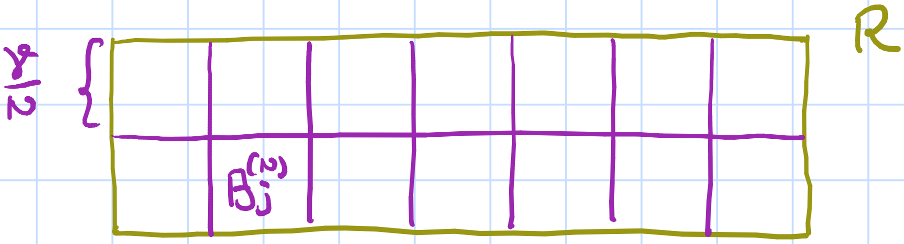
▷ Die im letzten Schritt bewiesene Abschätzung zeigt, dass für sehr kleine Würfel Θ eine Ungleichung der im Satz behaupteten Gleichung für die Radon-Nikodym Dichte schon fast gilt. Beachte, dass $\alpha(\Theta)$ mit Θ klein wird.

Diese Beobachtung benutzen wir um die folgende Aussage zu zeigen:

Sei $R \subseteq X$ ein abgeschlossener Quader mit rationalen Seitenlängen. Dann gilt

$$\lambda(T(R)) \leq \int_R |\det dT| \, d\lambda .$$

Wähle $\gamma > 0$ sodass alle Seiten von R ganzzahlige Vielfache von γ sind, und unterteile für $N \in \mathbb{N}$ den Quader R äquidistant in Würfel mit Seitenlänge $\frac{\gamma}{N}$:



Bezeichne die so erhaltenen Würfel als $B_1^{(N)}, \dots, B_{m^{(N)}}^{(N)}$.
Dann gilt also

$$\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} B_j^{(N)} = R \,, \qquad \mathring{B}_j^{(N)} \cap \mathring{B}_i^{(N)} = \emptyset \text{ falls } j \neq i .$$

Es gilt, für alle N und j,

$$\beta(B_j^{(N)}) \leq \sup_{x \in R} \| [dT(x)]^{-1} \| .$$

Die Funktion $x \mapsto [dT(x)]^{-1}$ ist stetig, und daher ist die rechte Seite endlich. Die Funktion dT ist stetig, und auf R daher gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall\, N \geq N_0 ,\ j \in \{1, .., m^{(N)}\} .\ 2\alpha(B_j^{(N)})\, \beta(B_j^{(N)}) < \varepsilon .$$

Da der Rand eines Würfels eine λ-Nullmenge ist, erhalten wir nun, für alle $N \geq N_0$,

$$\lambda(T(R)) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} T(B_j^{(N)})\right) \leq \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \lambda(T(B_j^{(N)}))$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \int_{B_j^{(N)}} |\det dT| \, d\lambda \cdot (1+\varepsilon)^d$$

$$= \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \int_{\mathring{B}_j^{(N)}} |\det dT| \, d\lambda \cdot (1+\varepsilon)^d = \int_{\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} \mathring{B}_j^{(N)}} |\det dT| \, d\lambda \cdot (1+\varepsilon)^d$$

$$\leq \int_R |\det dT| \, d\lambda \cdot (1+\varepsilon)^d .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die behauptete Ungleichung.

▷ Der Rest des Beweises ist nur mehr reine Routine.

▷▷ Sei μ das Maß

$$\mu(A) := \int_A |\det dT| \, d\lambda .$$

Dann gilt also für alle abgeschlossenen Rechtecke $R \subseteq X$ dass $\lambda^{T^{-1}}(R) \leq \mu(R)$. Da diese Rechtecke die σ-Algebra der Borelmengen erzeugen, folgt $\lambda^{T^{-1}}(A) \leq \mu(A)$ für alle Borelmengen $A \subseteq X$. Insbesondere ist

$$\lambda^{T^{-1}} \ll \mu \quad \text{und} \quad \frac{d\lambda^{T^{-1}}}{d\mu} \leq 1 .$$

Wegen $\mu \ll \lambda$ mit $\frac{d\mu}{d\lambda} = |\det dT|$ folgt nun

$$\lambda^{T^{-1}} \ll \lambda \quad \text{und} \quad \frac{d\lambda^{T^{-1}}}{d\lambda} \leq |\det dT|.$$

▷▷ Die obige Erkenntnis kann natürlich auch mit dem C^1-Diffeomorphismus $T^{-1}: Y \to X$ angewendet werden. Benutzt man die Kettenregel

$$\left([dT] \circ T^{-1} \right) \cdot d(T^{-1}) = \mathrm{id},$$

so erhält man für alle Borelmengen $A \subseteq X$

$$\lambda(T(A)) \leq \int_A |\det dT| \, d\lambda = \int_{T^{-1}(T(A))} |\det dT| \circ T^{-1} \circ T \, d\lambda$$

$$= \int_{T(A)} |\det dT| \circ T^{-1} \, d\lambda^T$$

$$\leq \int_{T(A)} \left(|\det dT| \circ T^{-1} \right) \cdot |\det d(T^{-1})| \, d\lambda$$

$$= \int_{T(A)} 1 \cdot d\lambda = \lambda(T(A)).$$

Also gilt

$$\lambda(T(A)) = \int_A |\det dT| \, d\lambda,$$

sprich $\frac{d\lambda^{T^{-1}}}{d\lambda} = |\det dT|$.

$\square$