Der Satz von Kolmogoroff-Riesz

Dieser Satz gibt ein Kompaktheitskriterium für Teilmengen der $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ (wobei der L^p-Raum bezüglich dem n-dimensionalen Lebesgue-Maß λ gebildet ist). Da $L^p(\mathbb{R}^n)$ ein vollständiger normierter Raum ist, geht es also – genauso wie beim Satz von Arzelà-Ascoli im $C(X, \mathbb{R})$ – darum totale Beschränktheit zu charakterisieren.

Wir verwenden die folgende, auch in anderem Kontext wesentliche, Begriffsbildung.

Definition:

Sei $y \in \mathbb{R}^n$. Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit T_y die Translation um y

$$(T_y f)(x) := f(x+y).$$

Es ist also $T_y: \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$. Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}) \\ y \longmapsto T_y \end{cases}$$

erfüllt die Rechenregeln

$$T_{(y_1+y_2)}(f) = (T_{y_1} \circ T_{y_2})(f), \quad T_0 = \mathrm{id},$$

ist also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe des $\mathbb{R}^n$ in die Permutationsgruppe auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$; man spricht auch von der Translationsgruppe.

Die Translationsgruppe hat auch topologische Eigenschaften.

Lemma:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^n$

$$T_y f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ und } \|T_y f\|_p = \|f\|_p .$$

(ii) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\lim_{y \to 0} \|T_y f - f\|_p = 0 .$$

Beweis:

D von (i): Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant. Also haben wir, für alle $c \geq 0$,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |(T_y f)(x)| > c\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > c\}) .$$

Daher ist $\|T_y f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Wieder gilt, für $1 \leq p < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_y f)(x)|^p \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y)|^p \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p \, d\lambda(z) .$$

Daher ist $\|T_y f\|_p = \|f\|_p$.

▷ von (ii): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

▷▷ Behandle zuerst den Fall dass $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

Wähle $R > 0$, sodass $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_R(0)$. Die Einschränkung f ist auf der kompakten Menge $\overline{U_{R+2}(0)}$ stetig, und daher dort sogar gleichmäßig stetig. Wähle $\delta \in (0,1)$, sodass

$$x, z \in \overline{U_{R+2}(0)} \wedge \|x - z\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon \cdot \lambda(U_{R+1}(0))^{-1/p}.$$

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| < \delta$. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_{R+1}(0)$ gilt $x+y, x \notin \overline{U_R(0)}$, und damit $f(x+y) = f(x) = 0$. Für $x \in U_{R+1}(0)$ gilt $x+y, x \in \overline{U_{R+2}(0)}$. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, d\lambda(x) = \int_{U_{R+1}(0)} |f(x+y) - f(x)|^p \, d\lambda(x)$$

$$\leq \lambda(U_{R+1}(0)) \cdot \sup_{x \in U_{R+1}(0)} |f(x+y) - f(x)|^p < \varepsilon^p$$

▷▷ Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Wähle $g \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$, und wähle $\delta > 0$ mit $\|T_y g - g\|_p < \varepsilon$ für $\|y\| < \delta$. Dann ist

$$\|T_y f - f\|_p \leq \underbrace{\|T_y f - T_y g\|_p}_{= \|T_y(f-g)\|_p = \|f-g\|_p} + \|T_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

$\square$

Wir kommen nun zum Satz von Kolmogoroff-Riesz.

Satz:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, und $\mathcal{F} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{F}$ total beschränkt, genau dann wenn

(i) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 \; \forall f \in \mathcal{F}. \; \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f \|_p < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{F}. \; \sup\limits_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p < \varepsilon$

Bemerkung:

Vertauscht man in den Eigenschaften (i) bzw. (ii) den Existenzquantor mit dem Allquantor "$\forall f \in \mathcal{F}$", so erhält man wahre Aussagen. Denn jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ erfüllt nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} |f|^p \, d\lambda = 0,$$

und nach dem vorigen Lemma

$$\lim_{y \to 0} \| T_y f - f \|_p = 0.$$

Die Bedeutung von (i) und (ii) ist also, dass diese Limiten gleichmäßig für alle $f \in \mathcal{F}$ sind.

Wir können nun die "einfache Richtung" des Beweises vom Satz von Kolmogoroff-Riesz schnell erledigen.

Beweis (total beschränkt $\Rightarrow$ (i) $\wedge$ (ii)): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wähle $f_1, \dots, f_m \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(f_j).$$

Nun wähle $\delta > 0$ sodass

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}. \ \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f_j - f_j \|_p < \varepsilon$$

und wähle $R > 0$ sodass

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}. \ \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f_j \|_p < \varepsilon$$

Ist $f \in \mathcal{F}$, so wähle $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $f \in U_\varepsilon(f_j)$. Dann gilt

$$\| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f \|_p \leq \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f_j \|_p + \| f_j - f \|_p < 2\varepsilon,$$

$$\| T_y f - f \|_p \leq \| T_y (f - f_j) \|_p + \| T_y f_j - f_j \|_p + \| f_j - f \|_p$$
$$< 3\varepsilon.$$

$\square$

Für den Beweis der Implikation "(i) ∧ (ii) ⇒ total beschränkt" benützen wir das folgende - ganz einfache - Lemma.

Lemma:

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Sei vorausgesetzt dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists B \subseteq X . \Big(\forall x \in A \; \exists y \in B . \; d(x,y) < \varepsilon \;\wedge\; B \text{ ist total beschränkt} \Big)$$

Dann ist A total beschränkt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle B mit den Eigenschaften aus der Voraussetzung für $\frac{\varepsilon}{2}$, und wähle Kugeln $U_{\varepsilon/2}(x_j)$, $j = 1, \dots, m$, mit

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\varepsilon/2}(x_j) .$$

Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\varepsilon}(x_j) .$$

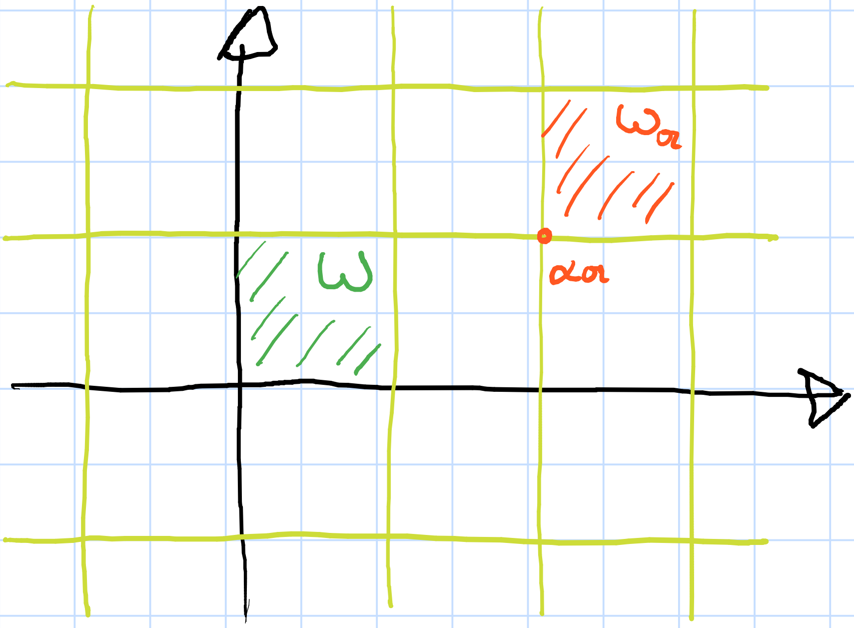
$\square$

Bemerkung: Das ist eigentlich genau das gleiche Lemma wie beim Satz von Arzela-Ascoli, nur in anderem Gewand.

Die Grundidee des Beweises ist, dass sich jede L^p-Funktion durch Treppenfunktionen beliebig gut approximieren lässt, wenn man nur die Treppen hinreichend fein wählt. Die Bedingung (i) des Satzes gewährleistet dass man mit einer kontrollierbaren Anzahl von Treppen auskommt, und die Bedingung (ii) dass man die Approximation gleichmäßig kontrollieren kann – und beides unabhängig von $f \in \mathcal{F}$.

Wir betrachten ein Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit Maschenweite α, d.h. wir schreiben

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^n} \left(\alpha a + [0,\alpha)^n\right).$$



Wir bezeichnen $\omega_a := \alpha a + [0,\alpha)^n$ für $a \in \mathbb{Z}^n$.

$\omega := [0,\alpha)^n$ heißt die Grundmasche des Gitters.

Für eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha > 0$ definieren wir eine Funktion $\Phi_\alpha f$ als (ω_a sind die Maschen des Gitters mit Maschenweite α)

$$(\Phi_\alpha f)(x) := \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{1}_{\omega_a}(x) \cdot \left(\frac{1}{\lambda(\omega_a)} \int_{\omega_a} f(y)\, d\lambda(y) \right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Beachte hier, dass $f|_{\omega_a}$ integrierbar ist da $f \in L^p$, und dass ω_a endliches Maß hat (es ist $\lambda(\omega_a) = \alpha^n$).

Punkt (ii) des folgenden Lemmas zeigt die erste Stelle wo die Eigenschaft (ii) des Satzes eingesetzt werden kann.

Wir bezeichnen mit Q_r die Einheitskugel bezüglich der Norm $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$, d.h. $Q_r := [-r, r]^n$.

Lemma:

Sei $\alpha > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\Phi_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge \|\Phi_\alpha f\|_p \leq \|f\|_p$

(ii) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\|f - \Phi_\alpha f\|_p \leq 2^{n/p} \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \|T_y f - f\|_p$

Beweis: Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Da $p \geq 1$ ist, ist die Funktion x^p konvex, und wir können die Jensen'sche Ungleichung mit dieser Funktion verwenden.

D von (i):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha f(x)|^p \, d\lambda(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \underbrace{|\Phi_\alpha f(x)|^p}_{\text{konstant auf } \omega_a} d\lambda(x) =$$

$$= \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \lambda(\omega_a) \cdot \left| \frac{1}{\lambda(\omega_a)} \int_{\omega_a} f(y) \, d\lambda(y) \right|^p \leq$$

$$\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \lambda(\omega_a) \cdot \left(\int_{\omega_a} |f(y)| \frac{d\lambda(y)}{\lambda(\omega_a)} \right)^p \leq$$

(Jensen)

$$\leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \lambda(\omega_a)\cdot \int_{\omega_a} |f(y)|^p \frac{d\lambda(y)}{\lambda(\omega_a)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, d\lambda(y).$$

D von (ii):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - \Phi_\alpha f(x) \right|^p d\lambda(x) = \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \left| f(x) - \frac{1}{\lambda(\omega_a)} \int_{\omega_a} f(z)\, d\lambda(z) \right|^p d\lambda(x)$$

$$= \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \left| \int_{\omega_a} (f(x) - f(z)) \frac{d\lambda(z)}{\lambda(\omega_a)} \right|^p d\lambda(x)$$

$$\leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \left(\int_{\omega_a} |f(x) - f(z)| \frac{d\lambda(z)}{\lambda(\omega_a)} \right)^p d\lambda(x)$$

(Jensen)

$$\leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \left(\int_{\omega_a} |f(x) - f(z)|^p \frac{d\lambda(z)}{\lambda(\omega_a)} \right) d\lambda(x)$$

$$= \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} \int_{\omega_a - x} |f(x) - f(x+y)|^p \frac{d\lambda(y)}{\lambda(\omega_a)} \, d\lambda(x)$$

$(\omega_a - \omega_a = Q_\alpha)$

$$\leq 1/\alpha^n \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_\alpha} \int_{Q_\alpha} |f(x) - (T_y f)(x)|^p \, d\lambda(y)\, d\lambda(x)$$

(Fubini)

$$= 1/\alpha^n \int_{Q_\alpha} \left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{\omega_a} |f(x) - (T_y f)(x)|^p \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} \int_{Q_\alpha} \| f - T_y f \|_p^p \, d\lambda(y) \le \underbrace{\frac{\lambda(Q_\alpha)}{\alpha^n}}_{=2^n} \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \| f - T_y f \|_p^p .$$

$\square$

Das nächste Lemma zeigt die zweite Stelle wo die Eigenschaft (ii) vom Satz arbeitet. Mit Hilfe dieser Aussage werden wir dann die Eigenschaft (i) des Satzes erreichen können.

Lemma:

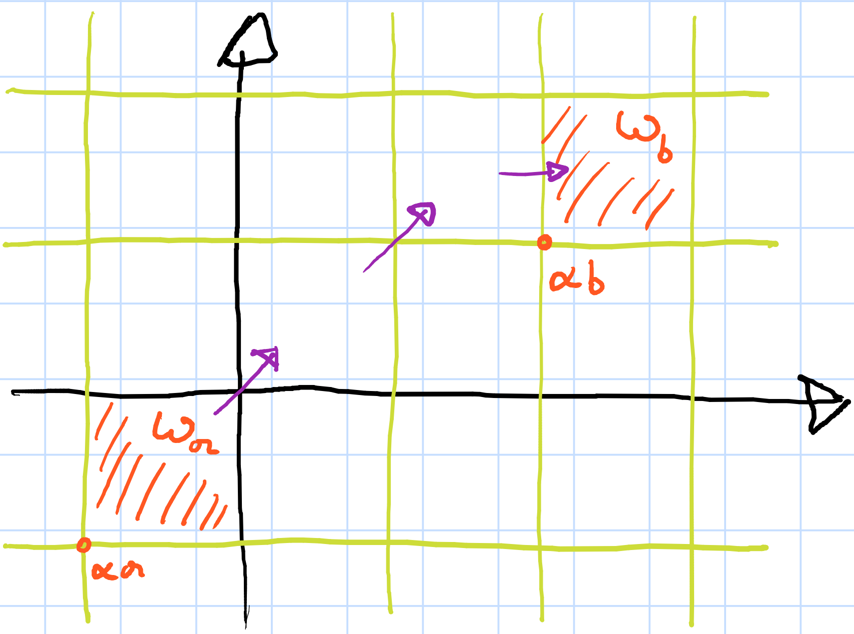
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\Big| \| 1\!\!1_{\omega_a} f \|_p - \| 1\!\!1_{\omega_b} f \|_p \Big| \le \| a - b \|_\infty \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \| T_y f - f \|_p .$$

Beweis: Schreibe die Differenz $a-b$ als Summe

$$a - b = c_1 + \dots + c_m$$

mit $c_j \in \mathbb{Z}^n$, $\| c_j \|_\infty = 1$, und $m = \| a - b \|_\infty$.



So eine Darstellung von $a-b$ ist stets möglich: man ziehe wie ein König am Schachbrett. Formal wähle man c_j induktiv so dass die $\|.\|_\infty$-Norm in jedem Schritt kleiner wird.

Wir schreiben $T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f$ als Teleskopsumme an:

$$T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f = T_{\alpha b}\left(f - T_{\alpha(a-b)} f\right) =$$

$$= T_{\alpha b}\left(\sum_{\ell=0}^{m-1} T_{\alpha(c_1+\dots+c_\ell)}\left(f - T_{\alpha c_{\ell+1}} f\right)\right).$$

Da Translationen linear und isometrisch sind, folgt

$$\| T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f \|_p \le \sum_{\ell=0}^{m-1} \| f - T_{\alpha c_{\ell+1}} f \|_p \le$$

$$\le \| a-b \|_\infty \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \| T_y f - f \|_p .$$

Nun gilt, für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$,

$$T_{\alpha a}\left(\mathbb{1}_{\omega_a} f\right) = \mathbb{1}_\omega \cdot T_{\alpha a} f$$

denn beide Seiten berechnen sich als

$$\begin{cases} f(\alpha a + x) & , \ x \in \omega, \\ 0 & , \ x \notin \omega. \end{cases}$$

Wir erhalten damit

$$\left| \| \mathbb{1}_{\omega_b} f \|_p - \| \mathbb{1}_{\omega_a} f \|_p \right| = \left| \| T_{\alpha b}(\mathbb{1}_{\omega_b} f) \|_p - \| T_{\alpha a}(\mathbb{1}_{\omega_a} f) \|_p \right|$$

$$\le \| T_{\alpha b}(\mathbb{1}_{\omega_b} f) - T_{\alpha a}(\mathbb{1}_{\omega_a} f) \|_p = \| \mathbb{1}_\omega (T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f) \|_p$$

$$\le \| T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f \|_p$$

$\square$

Wir haben nun das nötige Werkzeug für den Beweis des Satzes.

<u>Beweis ((i) ∧ (ii) ⟹ total beschränkt):</u> Wir gehen darauf los das allererste Lemma anzuwenden. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben.

▷ Konstruktion einer "approximierenden Menge":

Wähle $R > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F}. \int_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} |f|^p \, d\lambda \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

wähle $\delta > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F}. \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-\frac{n}{p}}$$

wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{R}{\delta} < N.$$

Nun seien W_a, $a \in \mathbb{Z}^n$, die Maschen des Gitters mit Maschenweite δ, und setze

$$V := \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \leq N}} W_a, \quad \mathcal{G} := \{ \mathbb{1}_V \Phi_\delta f \mid f \in \mathcal{F} \}.$$

▷ Nachweis der nötigen Eigenschaften von $\mathcal{G}$; Teil 1:

Da V eine Vereinigung von ganzen Maschen des Gitters ist, gilt stets $1\!\!1_V \Phi_\delta f = \Phi_\delta 1\!\!1_V f$. Weiters gewährleistet die Wahl von N, dass $U_R(0) \subseteq V$. Wir erhalten, für jedes $f \in \mathcal{F}$,

$$\| f - 1\!\!1_V \Phi_\delta f \|_p \leq \| f - \Phi_\delta f \|_p + \underbrace{\| \Phi_\delta f - 1\!\!1_V \Phi_\delta f \|_p}_{= \Phi_\delta (f - 1\!\!1_V f)}$$

$$\leq 2^{n/p} \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p + \| f - 1\!\!1_V f \|_p < \varepsilon .$$

▷ Nachweis der nötigen Eigenschaften von $\mathcal{G}$; Teil 2:

Da V die disjunkte Vereinigung der Maschen ω_a, $\|a\|_\infty \leq N$, ist, haben wir

$$1\!\!1_V = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \leq N}} 1\!\!1_{\omega_a},$$

wobei an jeder Stelle höchstens ein Summand verschieden von Null ist. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} | 1\!\!1_V \Phi_\delta f |^p \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \leq N}} 1\!\!1_{\omega_a} \Phi_\delta f \Big|^p d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \leq N}} | 1\!\!1_{\omega_a} \Phi_\delta f |^p \, d\lambda = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \leq N}} \int_{\mathbb{R}^n} | 1\!\!1_{\omega_a} \Phi_\delta f |^p \, d\lambda .$$

Also gilt

$$\| 1\!\!1_V \Phi_\delta f \|_p = \Big\| \Big(\| \underbrace{1\!\!1_{\omega_a} \Phi_\delta f}_{= \Phi_\delta 1\!\!1_{\omega_a} f} \|_p \Big)_{\|a\|_\infty \leq N} \Big\|_p .$$

im $L^p(\mathbb{R}^n)$ im $L^p(\mathbb{R}^n)$ im $\mathbb{R}^{n(2N+1)}$

Wähle nun $b \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|b\|_\infty = N+1$. Dann gilt $\omega_b \cap U_R(0) = \emptyset$, und daher

$$\forall f \in \mathcal{F}. \; \| 1\!\!1_{\omega_b} f \|_p < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Es folgt, dass für alle $a \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|a\|_\infty \leq N$

$$\| 1\!\!1_{\omega_a} f \|_p \leq \| 1\!\!1_{\omega_b} f \|_p + \|a - b\|_\infty \cdot \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (2N+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} 2^{-\frac{n}{p}} .$$

Wir sehen, dass die Menge

$$\Big\{ \Big(\| 1\!\!1_{\omega_a} \Phi_\delta f \|_p \Big)_{\|a\|_\infty \leq N} \in \mathbb{R}^{n(2N+1)} \;\Big|\; f \in \mathcal{F} \Big\}$$

beschränkt ist. Daher ist sie auch total beschränkt.

Die Menge $\mathcal{G}$ ist also ε-benachbart zu einer total beschränkten Menge, und daher selbst total beschränkt.

$\square$