Der Satz von Luzin

Auf einem topologischen Raum hat man a. natürliche Weise eine σ-Algebra gegeben.

Definition:

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ topologischer Raum. Die kleinste σ-Algebra die $\mathfrak{T}$ umfasst heißt die Borel-σ-Algebra, und ihre Elemente heißen Borelmengen. Ein positives Maß das auf der Borel-σ-Algebra definiert ist, und jeder kompakten Menge endliches Maß zuweist, heißt Borelmaß.

Ein Borelmaß μ heißt regulär, wenn für jede Borelmenge A gilt dass

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(O) \mid O \text{ offen}, \; O \supseteq A \}$$

$$= \inf \{ \mu(K) \mid K \text{ kompakt}, \; K \subseteq A \}.$$

Satz (N.N. Luzin):

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ kompakt und (T_2), und μ ein reguläres Borelmaß auf X. Dann gilt

$$\forall f : X \to \mathbb{R} \text{ Borel-meßbar} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists g \in C(X, \mathbb{R}). \quad \mu(\{ x \in X \mid f(x) \neq g(x) \}) < \varepsilon$$

Beweis:

▷ Wir betrachten die Binärdarstellung reeller Zahlen:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$t = \lfloor t \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n(t) \cdot \frac{1}{2^n}$$

wobei $\lfloor t \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq t$ bezeichnet und

$$\Lambda_n = \mathbb{1}_{B_n} \text{ mit } B_n := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \frac{j+1}{2^{n-1}}\right).$$

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ lässt sich also darstellen als

$$f(x) = \lfloor f(x) \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda_n \circ f)(x) \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{f^{-1}([j,j+1))}(x) \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{f^{-1}(B_n)}(x) \cdot \frac{1}{2^n}$$

Beachte hier, dass in der ersten Summe genau ein Summand verschieden von Null ist.

▷ Sei $f: X \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar und $\varepsilon > 0$ gegeben:

Es ist $\mu(X) < \infty$ und $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)) = \emptyset$.
Also gilt

$$\lim_{N \to \infty} \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1))\right) = 0.$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1))\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Als nächstes wähle Mengen O_j und K_j sodass

$$O_j \text{ offen}, K_j \text{ kompakt}, \quad K_j \subseteq f^{-1}([j,j+1)) \subseteq O_j,$$
$$\mu(O_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2N+1}$$

Schließlich wähle Mengen $\tilde{O}_n$ und $\tilde{K}_n$ sodass

$$\tilde{O}_n \text{ offen}, \tilde{K}_n \text{ kompakt}, \quad \tilde{K}_n \subseteq f^{-1}(B_n) \subseteq \tilde{O}_n,$$
$$\mu(\tilde{O}_n \setminus \tilde{K}_n) < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^n}.$$

Das Lemma von Urysohn gibt uns nun stetige Funktionen g_j und $\tilde{g}_n$ mit $0 \leq g_j \leq 1$, $0 \leq \tilde{g}_n \leq 1$, und

$$g_j(x) = \mathbb{1}_{f^{-1}([j,j+1))}(x) \text{ für } x \in K_j \cup (X \setminus O_j),$$
$$\tilde{g}_n(x) = \mathbb{1}_{f^{-1}(B_n)}(x) \quad \text{für } x \in \tilde{K}_n \cup (X \setminus \tilde{O}_n).$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=-N}^{N} g_j(x) \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(x) \cdot \frac{1}{2^n}$$

für alle $x \in X$ die nicht in der Ausnahmemenge

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)) \cup \bigcup_{j=-N}^{N} (O_j \setminus K_j) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{O}_n \setminus \tilde{K}_n)$$

liegen. Das Maß dieser Ausnahmemenge ist

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=-N}^{N} \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Schlussendlich bemerke dass wegen $\|\tilde{g}_n\|_\infty \leq 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \cdot \frac{1}{2^n}$ gleichmäßig konvergiert, und die Funktion

$$\sum_{j=-N}^{N} g_j \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \cdot \frac{1}{2^n}$$

daher stetig ist.

$\square$

Als eine Anwendung zeigen wir, dass stetige Funktionen in L^p-Räumen dicht sind. Dabei beschränken wir uns auf den Fall von Maßen auf der Borel-σ-Algebra des $\mathbb{R}^d$ die jeder kompakten Menge ein endliches Maß zuordnen (solche heißen auch Lebesgue-Stieltjes Maße).

Weiters bezeichnen wir, für einen topologischen Raum $\langle X, \mathcal{T}\rangle$,

$$C_{00}(X,\mathbb{R}) := \left\{ f \in C(X,\mathbb{R}) \;\middle|\; \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} \text{ kompakt} \right\}.$$

Proposition:

Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß am $\mathbb{R}^d$, und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_{00}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ dicht in $\langle L^p(\mu), \|.\|_p\rangle$.

Beweis: Sei $f \in L^p(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dabei verstehen wir, dass f ein Repräsentant der Restklasse "f.ü." ist.

▷ oBdA ist f beschränkt: Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$f_N := f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}([-N,N])}.$$

Dann gilt stets $|f_N| \leq |f|$ und f_N ist beschränkt.

Weiters ist $\lim_{N\to\infty} |f_N(x) - f(x)| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, und

$$|f_N(x) - f(x)| \in \{0, |f(x)|\},$$

insbesondere $|f_N(x) - f(x)| \leq |f(x)|$. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_N(x) - f(x)|^p \, d\mu(x) = 0 .$$

Hat man gezeigt, dass alle f_N in $\overline{C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})}^{\|.\|_p}$ liegen, so folgt also dass auch f in dieser Menge liegt.

▷ Sei $f \in L^p(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ und $\varepsilon > 0$:

Wähle $R > 0$ sodass

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_R(0)} |f|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon}{3},$$

und wähle $\delta \in (0,1)$ sodass

$$\mu\left(U_{R+\delta} \setminus \overline{U_R(0)}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot (2\|f\|_\infty)^{-p}$$

Betrachte nun die Einschränkung $f|_{\overline{U_{R+1}(0)}}$ und wähle mit Hilfe des Satzes von Lusin eine Funktion $g \in C(\overline{U_{R+1}(0)}, \mathbb{R})$ mit $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und

$$\mu\left(\{x \in \overline{U_{R+1}(0)} \mid f(x) \neq g(x)\}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot (2\|f\|_\infty)^{-p}.$$

Die entgegengesetzte Eigenschaft kann man stets erreichen

Indem man falls nötig zu der Funktion

$$\max\{-\|f\|_\infty, \min\{\|f\|_\infty, g(x)\}\}$$

übergeht.

Schließlich wähle $\chi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit

$$0 \le \chi \le 1, \quad \chi(x) = 1 \text{ für } x \in \overline{U_R(0)},$$
$$\chi(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0),$$

und definiere

$$h(x) := \begin{cases} \chi(x)\, g(x), & x \in U_{R+1}(0) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)} \end{cases}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, da $\chi(x) = 0$ falls $x \in U_{R+1}(0) \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)}$. Sie ist auch stetig, da die beiden Mengen $U_{R+1}(0)$ und $\mathbb{R}^d \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)}$ in der Fallunterscheidung offen sind (und die Einschränkungen auf diese stetig sind).

Wir zerlegen das Integral in die Summanden

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f-h|^p \, d\mu = \int_{\overline{U_R(0)}} |f-h|^p \, d\mu + \int_{U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}} |f-h|^p \, d\mu + \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f|^p \, d\mu .$$

Auf $\overline{U_R(0)}$ gilt $h(x) = g(x)$, und damit

$$\int_{\overline{U_R(0)}} |f-h|^p \, d\mu \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mu\left(\{x \in \overline{U_R(0)} \mid f(x) \neq g(x)\}\right)$$

$$< (2\|f\|_\infty)^p \cdot \frac{\varepsilon}{3} (2\|f\|_\infty)^{-p} = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Beim zweiten Summanden wird über eine kleine Menge integriert:

$$\int_{U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}} |f-h|^p \, d\mu \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mu\left(U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}\right)$$

$$< (2\|f\|_\infty)^p \cdot \frac{\varepsilon}{3} (2\|f\|_\infty)^{-p} = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Ausserhalb von $U_{R+\delta}(0)$ ist $h = 0$, und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f-h|^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Zusammengenommen folgt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f-h|^p \, d\mu < \varepsilon .$$

$\square$