Das Lemma von Urysohn

Das Lemma von Urysohn ist ein Satz der gewährleistet, dass es viele stetige reellwertige Funktionen auf einem topologischen Raum gibt.

Wir beginnen mit einer Konstruktion stetiger Funktionen, dem Höhenlinien-Lemma.

Lemma:

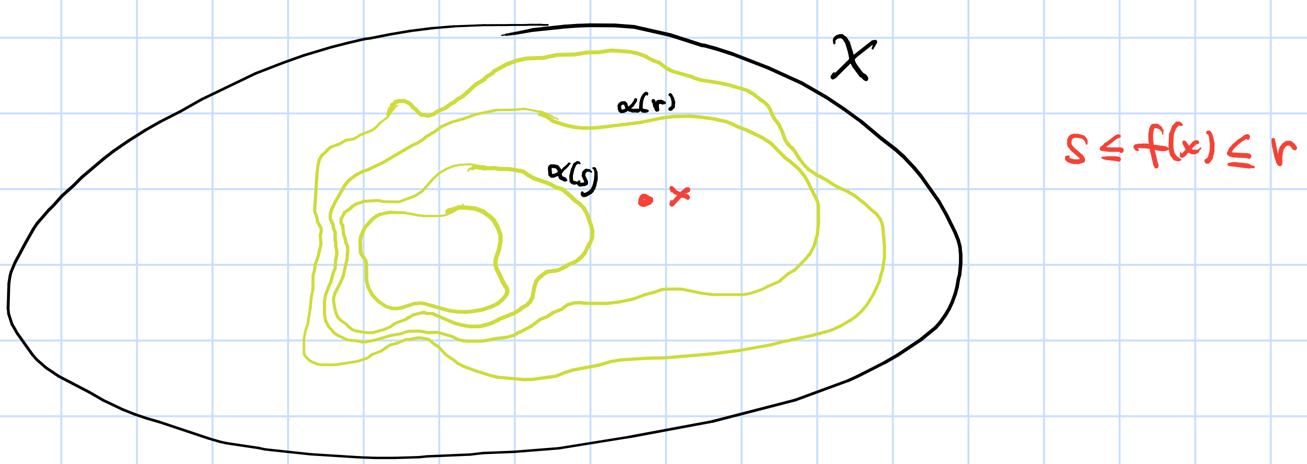
Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, $M \subseteq [0,1]$ dicht mit $\{0,1\} \subseteq M$, und $\alpha : M \to \mathcal{T}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $\alpha(0) = \emptyset$, $\alpha(1) = X$,

(ii) $\forall r, s \in M,\ r < s.\ \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$.

Definiere $f : X \to [0,1]$ als

$$f(x) := \inf \{ r \in M \mid x \in \alpha(r) \}.$$



Dann ist f stetig.

Beweis:

▷ $f^{-1}((-\infty, v))$ ist offen:

Für $v > 1$ ist $f^{-1}((-\infty,v)) = X$, für $v \leq 0$ ist $f^{-1}((-\infty,v)) = \emptyset$.
Sei $v \in (0,1]$. Dann ist

$$f^{-1}((-\infty,v)) = \{x \in X \mid \exists r \in M, r < v.\ x \in \alpha(r)\}$$
$$= \bigcup_{r<v} \alpha(r).$$

▷ $f^{-1}((v,\infty))$ ist offen:

Für $v < 0$ ist $f^{-1}((v,\infty)) = X$, für $v \geq 1$ ist $f^{-1}((v,\infty)) = \emptyset$.
Sei $v \in [0,1)$. Dann ist

$$f^{-1}((v,\infty)) = \{x \in X \mid \exists r \in M, r > v.\ x \notin \alpha(r)\}$$
$$= \bigcup_{r>v} (X \setminus \alpha(r)).$$

Sei $r > v$. Da M dicht ist gibt es $r' \in (v,r)$. Für ein solches r' gilt

$$\alpha(r) \supseteq \overline{\alpha(r')} \supseteq \alpha(r'),$$

und wir schließen dass

$$\bigcap_{r>v} \alpha(r) = \bigcap_{r>v} \overline{\alpha(r)}.$$

Geht man zu den Komplementen über, folgt also

$$f^{-1}((v,\infty)) = \bigcup_{r>v} (X \setminus \overline{\alpha(r)}).$$

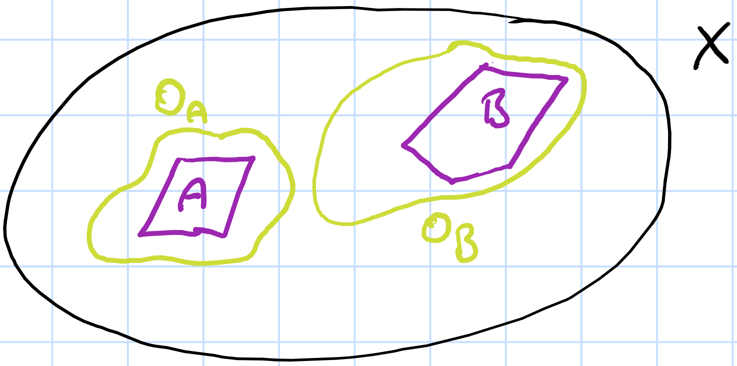
▷ Die euklidische Topologie ist die von allen Halbstrahlen erzeugte Topologie, und es folgt dass f stetig ist. $\square$

Dass man Funktionen α wie im Höhenlinien-Lemma tatsächlich findet, wird durch ein Trennungsaxiom gewährleistet.

Definition:

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Man sagt $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ erfüllt das Trennungsaxiom (T_4), wenn gilt:

$$\forall A, B \subseteq X \text{ abgeschlossen}, \ A \cap B = \emptyset \ \exists O_A, O_B \in \mathcal{T}.$$
$$A \subseteq O_A, \ B \subseteq O_B, \ A \cap B = \emptyset.$$



Satz (Lemma von Urysohn):

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum der (T_4) erfüllt, und seien A, B disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Dann gibt es eine stetige Funktion $f: X \to [0,1]$ mit

$$f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\}.$$

Zum Beweis konstruieren wir eine geeignete Funktion α.

Lemma:

Erfülle $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ das Trennungsaxiom (T_4), und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Sei

$$M := \left\{ \frac{j}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N} \right\} \cap [0,1].$$

Dann ist M dicht in $[0,1]$ und $\{0,1\} \subseteq M$.

Es existiert eine Funktion $\alpha : M \to \mathcal{T}$ mit den Eigenschaften

(i) $\alpha(0) = \emptyset$, $\alpha(1) = X$,

(ii) $\forall r, s \in M,\ r < s.\ \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$,

(iii) $\forall r \in M \setminus \{0,1\}.\ A \subseteq \alpha(r),\ \overline{\alpha(r)} \subseteq X \setminus B$

Beweis: Wir verfahren induktiv nach der Potenz des Nenners der gekürzten Darstellung von $r \in M$.

▷ $n = 0$: Setze $\alpha(0) := \emptyset$, $\alpha(1) := X$.

▷ $n = 1$: Wähle O_A, O_B offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$, und setze $\alpha(\frac{1}{2}) := O_A$. Dann gilt

$$A \subseteq \alpha(\tfrac{1}{2}) \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B,$$

und damit $\overline{\alpha(\frac{1}{2})} \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B$.

▷ $n \mapsto n+1$: Sei angenommen wir haben bereits

$$\alpha : \underbrace{\left\{ \frac{j}{2^n} \;\middle|\; j = 0, \dots, 2^n \right\}}_{=: M_n} \to \mathcal{T}$$

konstruiert, so dass

(a) $\alpha(0) = \emptyset$, $\alpha(1) = X$,

(b) $\forall r, s \in M_n, r < s.\ \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$,

(c) $\forall r \in M_n \setminus \{0,1\}.\ A \subseteq \alpha(r),\ \overline{\alpha(r)} \subseteq X \setminus B$.

Wir definieren $\alpha(r)$ für $r \in M_{n+1} \setminus M_n$, d.h. für $r = \frac{2j+1}{2^{n+1}}$ wobei $j = 0, \ldots, 2^n - 1$.

DD $j = 0$: Wähle O_A, O offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A$, $X \setminus \alpha(\frac{1}{2^n}) \subseteq O$, und setze $\alpha(\frac{1}{2^{n+1}}) := O_A$. Dann ist

$$A \subseteq \alpha(\tfrac{1}{2^{n+1}}),\quad \overline{\alpha(\tfrac{1}{2^{n+1}})} \subseteq X \setminus O \subseteq \alpha(\tfrac{1}{2^n}) \subseteq X \setminus B.$$

DD $j = 2^n - 1$: Wähle O, O_B offen und disjunkt mit $\overline{\alpha(\frac{2^n-1}{2^n})} \subseteq O$, $X \setminus B \subseteq O_B$, und setze $\alpha(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}) := O$.
Dann ist

$$\overline{\alpha\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B.$$

DD $1 \leq j < 2^n - 1$: Es gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\overline{\alpha(\tfrac{j}{2^n})} \subseteq \alpha\left(\frac{j+1}{2^n}\right).$$

Wähle O_1, O_2 offen und disjunkt mit $\overline{\alpha(\frac{j}{2^n})} \subseteq O_1$ und $X \setminus \alpha(\frac{j+1}{2^n}) \subseteq O_2$, und setze

$$\alpha\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) := O_1.$$

Dann gilt

$$\overline{\alpha\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq X \setminus O_2 \subseteq \alpha\left(\frac{j+1}{2^n}\right).$$

Wir haben also α unter Beibehaltung der Eigenschaften (a), (b), (c) auf M_{n+1} fortgesetzt. $\square$

Beweis (Urysohn): Sei α wie im Lemma konstruiert, und $f: X \to [0,1]$ die stetige Funktion die von α induziert wird. Wegen

$$\forall r \in M \setminus \{0,1\}.\quad A \subseteq \alpha(r) \subseteq X \setminus B$$

ist $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$.

$\square$

Wir wollen nun zeigen, dass zwei wichtige Klassen topologischer Räume (T_4) erfüllen.

Proposition:

(i) Ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakt und Hausdorff, so ist (T_4) erfüllt.

(ii) Ist $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, und $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie, so erfüllt $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$ (T_4).

Wir haben schon gesehen, nämlich in einem Lemma in Lecture 05, dass man in Hausdorff Räumen Punkte von kompakten Mengen trennen kann. Wiederholt man das dort durchgeführte Argument, so erhält man die folgende Aussage.

Lemma:

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Hausdorff, genau dann wenn gilt:

$$\forall A, B \subseteq X \text{ kompakt},\ A \cap B = \emptyset\ \exists O_A, O_B \in \mathcal{T}.$$
$$A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset$$

Beweis: Die Implikation "$\Leftarrow$" ist trivial, da abgeschlossene Mengen kompakt sind. Für "$\Rightarrow$" seien A, B kompakt und disjunkt. Zu $y \in B$ wähle W_y, V_y offen disjunkt mit $A \subseteq W_y$, $y \in V_y$. Es ist $B \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y$, und da B kompakt ist finden wir $y_1, \dots, y_n \in B$ sodass

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j} =: O_B$$

Setze $O_A := \bigcap_{j=1}^{n} W_{y_j}$, dann ist O_A offen, $A \subseteq O_A$, und $O_A \cap O_B = \emptyset$.

$\square$

Beweis (von Proposition):

▷ von (i): Da $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakt ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge auch kompakt. Nach dem obigen Lemma kann man daher je zwei abgeschlossene Mengen mit offenen Mengen trennen.

▷ von (ii): Seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Zu jedem $x \in A$ wähle $\varepsilon_x > 0$ sodass $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq X \setminus B$, und zu $y \in B$ wähle $\delta_y > 0$ sodass $U_{\delta_y}(y) \subseteq X \setminus A$. Setze

$$O_A := \bigcup_{x \in A} U_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x), \quad O_B := \bigcup_{y \in B} U_{\frac{\delta_y}{2}}(y).$$

Dann sind O_A, O_B offen und $A \subseteq O_A$, $B \subseteq O_B$.

Angenommen es wäre $O_A \cap O_B \neq \emptyset$. Dann wähle $x \in A$, $y \in B$ mit $U_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(x) \cap U_{\frac{\delta_y}{2}}(y) \neq \emptyset$. Für diese ist

$$d(x,y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\delta_x}{2} \leq \max\{\varepsilon_x, \delta_x\}.$$

Also gilt $y \in U_{\varepsilon_x}(x)$ oder $x \in U_{\delta_y}(y)$, ein Widerspruch.

$\square$