Der Satz von Stone-Weierstraß

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein kompakter topologischer Raum. Wir betrachten die Menge $C(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Man beachte hier, dass das Bild $f(X)$ von f eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und obiges Supremum daher endlich ist (und sogar angenommen wird).

Die Menge $C(X, \mathbb{R})$ ist ein linearer Raum über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$, und $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $C(X, \mathbb{R})$. Nun trägt $C(X, \mathbb{R})$ eine weitere algebraische Operation, nämlich die punktweise Multiplikation

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Diese binäre Operation $\cdot : C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$ ist bilinear, assoziativ und kommutativ, und es gibt ein Einselement (nämlich die konstante Funktion 1). Man spricht von einer kommutativen assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement.

Die Norm $\|.\|_\infty$ ist submultiplikativ, d.h.

$$\forall f,g \in C(X,\mathbb{R}).\ \|f\cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Man sagt $C(X,\mathbb{R})$ ist mit $\|.\|_\infty$ eine kommutative assoziative normierte Algebra mit Einselement.

Die Abbildung $\cdot$ stetig, denn

$$\|f\cdot g - \tilde{f}\cdot\tilde{g}\|_\infty \leq \|f-\tilde{f}\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \|\tilde{f}\|_\infty \cdot \|f-\tilde{f}\|_\infty .$$

Bemerkung:

Genau die gleichen Aussagen gelten wenn man anstelle von $\mathbb{R}$ den Skalarkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen verwendet: $C(X,\mathbb{C})$ ist eine kommutative assoziative normierte $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement.

Proposition:

Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ kompakter topologischer Raum, und $\langle \Omega, d\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Bezeichne $C(X,\Omega)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Ω, und setze für $f,g \in C(X,\Omega)$

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)).$$

Dann ist $\langle C(X,\Omega), d_\infty\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Die Tatsache dass d_∞ eine Metrik ist, ist klar.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\langle C(X,\Omega), d_\infty\rangle$.

▷ Mit Hilfe der Vollständigkeit von Ω erhalten wir einen Kandidaten für den gesuchten Grenzwert. Dazu bemerke, dass für jedes $z\in X$ die Punktauswertungsabbildung

$$\varphi_z : \begin{cases} \langle C(X,\Omega), d_\infty\rangle \to \langle \Omega, d\rangle \\ f \mapsto f(z) \end{cases}$$

kontraktiv ist: $\quad d(f(z),g(z)) \leq \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$.

Also ist, für jedes feste $z\in X$, die Folge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Ω. Sie hat daher einen Grenzwert, und wir definieren

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z\in\Omega.$$

▷ Dieser Grenzwert ist sogar gleichmäßig, denn: sei $\varepsilon>0$ gegeben und wähle $N\in\mathbb{N}$ sodass

$$\forall n,m\geq N.\ d_\infty(f_n,f_m)\leq\varepsilon.$$

Dann folgt für jedes feste $z\in X$, dass

$$\forall n,m\geq N.\ d(f_n(z),f_m(z))\leq\varepsilon,$$

und lässt man $m\to\infty$ streben damit

$$\forall n\geq N.\ d(f_n(z),f(z))\leq\varepsilon.$$

Also ist $\sup_{z \in X} d(f_n(z), f(z)) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

▷ Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodass $d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_n stetig ist, finden wir eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^X(x)$ sodass $f_n(U) \subseteq U_{\varepsilon/3}(f_n(x))$. Für $y \in U$ gilt dann

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

□

Wir kommen nun zum eigentlichen Ziel dieses Abschnitts. Dazu noch eine Definition.

Definition:

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Dann heißt $\mathcal{A}$

(i) eine Unteralgebra, wenn gilt

$$\forall f, g \in C(X, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}. \quad f+g, \lambda f, f \cdot g \in \mathcal{A}$$

(ii) punktetrennend, wenn gilt

$$\forall x, y \in X, x \neq y \ \exists f \in \mathcal{A}. \ f(x) \neq f(y).$$

(iii) nirgends verschwindend, wenn gilt

$$\forall x \in X \ \exists f \in \mathcal{A}. \ f(x) \neq 0.$$

Die analoge Terminologie wird für Teilmengen von $C(X, \mathbb{C})$ verwendet, wobei dann in (i) $\lambda \in \mathbb{C}$ sein darf.

Satz (Stone-Weierstraß):

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Ist $\mathcal{A}$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$, so ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.

Wir präsentieren den Beweis in mehreren Schritten.

Lemma:

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine nirgends verschwindende Unteralgebra.

(i) $\exists f \in \mathcal{A} . \inf_{x \in X} f(x) > 0 \wedge \|f\|_\infty = 1$.

(ii) $1 \in \mathrm{Clos}_{\|.\|_\infty} \mathcal{A}$.

Beweis:

▷ Beweis von (i):

Für $z \in X$ wähle $f_z \in \mathcal{A}$ mit $f_z(z) = 1$. Dann ist

$$X = \bigcup_{z \in X} \{ x \in X \mid f_z(x) > 1/2 \},$$

und wir finden endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_N \in X$ sodass

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} \{ x \in X \mid f_{z_j}(x) > 1/2 \}.$$

Die Funktion $f_0 := \sum_{j=1}^{N} f_{z_j}^2$ liegt in $\mathcal{A}$ und es gilt

$f_0(x) \geq \frac{1}{4}$ für alle $x \in X$, da für jedes x mindestens ein $f_{z_j}(x)$ größer gleich $1/2$ ist. Setze nun $f := \frac{1}{\|f_0\|_\infty} f_0$.

▷ Beweis von (ii):

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 = (1-t) \sum_{n=0}^{N} t^n + t^{N+1}.$$

Substituiert man $t = 1-s$, so erhält man also

$$1 = s \sum_{n=0}^{N} (1-s)^n + (1-s)^{N+1}.$$

Wähle $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{A}$ sodass $\forall x \in X$. $\delta \leq f(x) \leq 1$.

Die Funktionen

$$g_N := f \cdot \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n$$

gehört zu $\mathcal{A}$ und es gilt für alle $x \in X$

$$1 - g_N(x) = (1-f(x))^{N+1} \in [0, (1-\delta)^{N+1}].$$

Wir sehen, dass $\lim_{N\to\infty} \|1 - g_N\|_\infty = 0$.

$\square$

Korollar:

Der Satz von Stone-Weierstraß ist äquivalent zum folgenden Satz:

▷ Sei X kompakt und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \rangle$.

Beweis: Wenn Stone-Weierstraß gilt, so folgt klarerweise der genannte Satz. Gelte umgekehrt der genannte Satz, und sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende nirgends verschwindende Unteralgebra. Dann ist die lineare Hülle

$$\mathcal{B} := \operatorname{span}(\mathcal{A} \cup \{1\})$$

eine punktetrennende Unteralgebra, die 1 enthält. Nach dem letzten Lemma ist $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Clos}_{\|\cdot\|_\infty} \mathcal{A}$, und nach dem gerade vorausgesetzten Satz ist $\operatorname{Clos}_{\|\cdot\|_\infty} \mathcal{B} = C(X, \mathbb{R})$.

$\square$

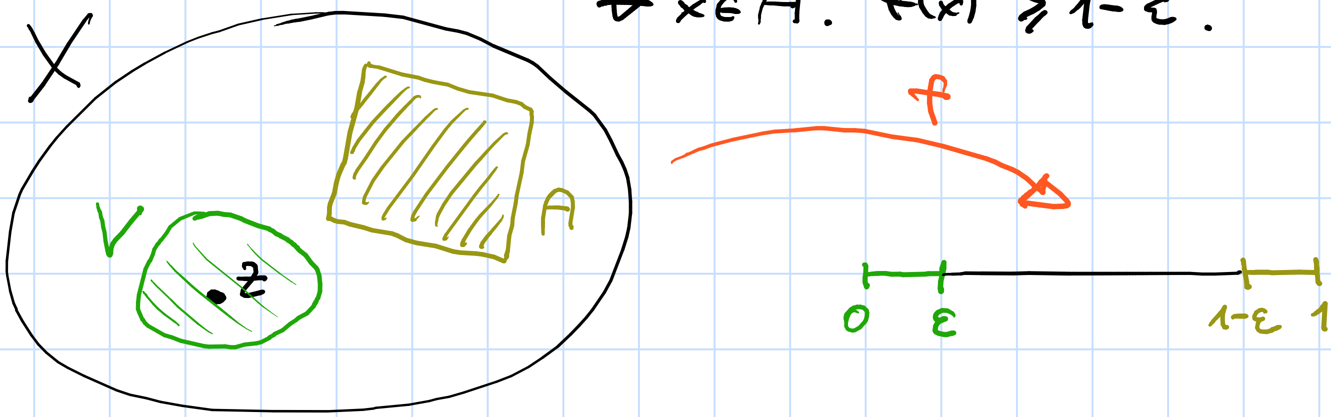
Das nächste Lemma beinhaltet das wesentliche Argument.

Lemma:

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, sei $z \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $z \notin A$.

Dann existiert eine offene Umgebung V von z mit $V \cap A = \emptyset$ und der folgenden Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists f \in \mathcal{A}. \; \forall x \in X. \; 0 \leq f(x) \leq 1,$$
$$\forall x \in V. \; f(x) \leq \varepsilon,$$
$$\forall x \in A. \; f(x) \geq 1 - \varepsilon.$$



Beweis :

▷ Wir konstruieren eine Funktion $h \in \mathcal{A}$, $\delta \in (0,1]$, und $V \in \mathcal{U}(z)$ mit:

$$\forall x \in V.\ h(x) < \delta/3 \text{ und } \forall x \in A.\ h(x) \geq \delta.$$

Für $y \in X \setminus O$ wähle $g_y \in \mathcal{A}$ mit $g_y(y) \neq 0$ und $g_y(z) = 0$, und setze $h_y := \|g_y\|^{-2} \cdot g_y^2$. Dann gilt

$$h_y \in \mathcal{A},\quad h_y(y) > 0,\quad h_y(z) = 0,\quad \forall x \in X.\ 0 \leq h_y(x) \leq 1$$

Setze $O_y := \{x \in X \mid h_y(x) > 0\}$, dann ist O_y offen und $y \in O_y$. Also haben wir $A \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus O} O_y$. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X ist auch A kompakt, und daher finden wir $y_1, \dots, y_N \in A$ sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O_{y_j}.$$

Setze nun

$$h := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} h_{y_j}.$$

Dann ist

$$h \in \mathcal{A},\quad \forall x \in A.\ h(x) > 0,\quad h(z) = 0,\quad \forall x \in X.\ 0 \leq h(x) \leq 1.$$

Die Menge $h(A)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und enthält daher das Infimum. Wir sehen, dass

$$\delta := \inf_{x \in X \setminus O} h(x) = \min_{x \in X \setminus O} h(x) \in (0, 1]$$

Sei $V := \{x \in X \mid h(x) < \delta/3\}$, dann ist V offen und $z \in V$ (also auch $V \in \mathcal{U}(z)$), sowie $V \cap A = \emptyset$.

▷ Wir „dehnen" h um die gewünschte Funktion f zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ zu erhalten.

Sei dann k jene natürliche Zahl mit $k-1 \le \frac{1}{\delta} < k$, und betrachte die Funktionen

$$p_n := \left[1-h^n\right]^{k^n}, \quad n = 1,2,\dots .$$

Dann gilt

$$p_n \in \mathcal{A}, \quad p_n(z) = 1, \quad \forall x \in X.\ 0 \le p_n(x) \le 1 .$$

Für $x \in V$ ist $-h(x)^n > -\left(\frac{\delta}{3}\right)^n > -1$, und die Bernoullische Ungleichung gibt

$$p_n(x) = \left(1-h(x)^n\right)^{k^n} \geq 1 + k^n \cdot \left(-h(x)^n\right) > 1 - \left(\frac{k\delta}{3}\right)^n .$$

Nun gilt $k\delta \le 1+\delta \le 2$, und daher $1-\left(\frac{k\delta}{3}\right)^n \to 1$.
Es folgt, dass $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 1$ gleichmäßig für $x \in V$.

Sei nun $x \in A$. Dann ist $k\,h(x) \geq k\delta > 1$, insbesondere $k\,h(x) \neq 0$. Die Bernoullische Ungleichung gibt

$$1 + k^n \cdot h(x)^n \le \left[1 + h(x)^n\right]^{k^n},$$

und wir können p_n wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{k^n h(x)^n}\left[1-h(x)^n\right]^{k^n} \cdot k^n h(x)^n \\
&\le \frac{1}{k^n h(x)^n}\left[1-h(x)^n\right]^{k^n}\left[1+k^n h(x)^n\right] \\
&\le \frac{1}{k^n h(x)^n}\left[1-h(x)^n\right]^{k^n}\left[1+h(x)^n\right]^{k^n} \\
&= \frac{1}{k^n h(x)^n}\underbrace{\left[1-h(x)^{2n}\right]^{k^n}}_{\le 1} \le \frac{1}{(k\delta)^n}.
\end{aligned}
$$

Wegen $k\delta > 1$ gilt $\frac{1}{(k\delta)^n} \to 0$, und wir sehen dass $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$ gleichmäßig für $x \in A$.

Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so erfüllt wegen der gleichmäßigen Konvergenz das Funktion $1-P_n$ für hinreichend großes n die verlangten Eigenschaften. $\square$

Dieses Lemma lässt sich leicht ein bisschen weiter verallgemeinern.

Lemma:

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $f \in \mathcal{A}$ mit

$$\forall x \in X.\ 0 \le f(x) \le 1,$$

$$\forall x \in A.\ f(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in B.\ f(x) > 1-\varepsilon.$$

Beweis: Ist $A = \emptyset$, so wähle $f = 1$. Sei im Folgenden angenommen dass $A \neq \emptyset$.

Für jeden Punkt $z \in A$ wähle eine offene Umgebung V_z von z mit $V_z \cap B = \emptyset$ und der Eigenschaft aus dem obigen Lemma. Es ist $A \subseteq \bigcup_{z \in A} V_z$, und wir finden wegen der Kompaktheit von A endlich viele Punkte $z_1, \dots, z_N \in A$ sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{z_j}.$$

Wähle nun $f_j \in \mathcal{A}$, sodass $\forall x \in X.\ 0 \leq f_j(x) \leq 1$ und

$$\forall x \in V_{z_j}.\ f_j(x) < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \forall x \in B.\ f_j(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N}.$$

Die Funktion $f := f_1 \cdot \ldots \cdot f_N$ gehört zu $\mathcal{A}$, erfüllt (oBdA sei $\varepsilon < 1$)

$$\forall x \in X.\ 0 \leq f(x) \leq 1,$$

$$f(x) < \frac{\varepsilon}{N} \leq \varepsilon \quad \text{für } x \in \bigcup_{j=1}^{N} V_{z_j} \supseteq A,$$

$$f(x) \geq \left[1 - \frac{\varepsilon}{N}\right]^N \geq 1 - N\left(\frac{\varepsilon}{N}\right) = 1 - \varepsilon \quad \text{für } x \in B.$$

$\square$

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes der äquivalent zum Satz von Stone–Weierstraß ist.

Beweis: Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, und sei $f \in C(X, \mathbb{R})$.
Wir müssen eine Funktion $g \in \mathcal{A}$ finden, die f hinreichend genau approximiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ festgehalten.

▷ Wir konstruieren eine Zerlegung von X nach "Niveau-Linien" von f:

Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $N\varepsilon \geq 2\|f\|_\infty$, und setze für $j \in \mathbb{N}$

$$A_j := \{x \in X \mid f(x) + \|f\|_\infty \leq (j-1)\varepsilon\},$$

$$B_j := \{x \in X \mid f(x) + \|f\|_\infty \geq j\varepsilon\}.$$

Dann sind A_j, B_j abgeschlossen und disjunkt, und es gilt

$$\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{N+1} = X$$

$$X = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots \supseteq B_{N+1} = \emptyset$$

▷ Wir konstruieren eine Funktion $g \in \mathcal{A}$ die auf den "Niveau-Schichten" $A_j \setminus A_{j-1}$ fast die gleiche Größe wie $f + \|f\|_\infty$ hat:

Für $j = 1, \dots, N$ wähle $g_j \in \mathcal{A}$ mit

$$\forall x \in X.\ 0 \leq g_j(x) \leq 1$$

$$\forall x \in A_j.\ g_j(x) < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \forall x \in B_j.\ g_j(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

und setze

$$g := \varepsilon \sum_{j=1}^{N} g_j .$$

Dann ist $g \in \mathcal{A}$.

Sei $x \in X$ gegeben. Wähle $\ell \in \{0, \dots, N\}$ sodass $x \in A_{\ell+1} \setminus A_\ell$. Das heißt also, dass

$$(\ell-1)\varepsilon < f(x) \leq \ell\varepsilon .$$

Man sieht, dass $x \in B_j$ ist für alle $j \leq \ell-1$. Um g abzuschätzen schreiben wir

$$g(x) = \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{\ell-1} g_j(x) + g_\ell(x) + \sum_{j=\ell+1}^{N} g_j(x) \right)$$

Die leere Summe sowie g_0 verstehen wir dabei als 0. Es ist

$$(\ell-1) - \varepsilon \leq (\ell-1)\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} g_j(x) \leq \begin{cases} \ell-1, & \ell \geq 1 \\ 0, & \ell = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq g_\ell(x) \leq 1,$$

$$0 \leq \sum_{j=\ell+1}^{N} g_j(x) \leq (N-\ell)\frac{\varepsilon}{N} \leq \varepsilon,$$

und damit

$$(\ell-1)\varepsilon - \varepsilon^2 \leq g(x) \leq \ell\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Also ist $\quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon^2.$

$\square$

Als ein Beispiel für den Satz von Stone-Weierstraß erhält man den klassischen Satz von Weierstraß.

Beispiel:

Sei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Um dies zu sehen, bemerke dass die Menge $\mathcal{A}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten eine Unteralgebra von $C([a,b], \mathbb{R})$ ist, $1 \in \mathcal{A}$ gilt, und die punktetrennend ist, da $x \in \mathcal{A}$.

Betrachtet man komplexwertige Funktionen, so muss man die Voraussetzungen im Satz von Stone-Weierstraß verstärken damit der Satz richtig bleibt.

Satz (Stone-Weierstraß / komplexwertig):

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{C})$. Ist $\mathcal{A}$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$ die unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty \rangle$.

Beweis: Da $\mathcal{A}$ mit einer Funktion f auch die Konjugierte $\overline{f}$ enthält, gilt

$\forall f \in C(X,\mathbb{C}).\quad f \in \mathcal{A} \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{B} := \{ f \in \mathcal{A} \mid f(X) \subseteq \mathbb{R} \}.$$

Klarerweise ist $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(X,\mathbb{R})$. Sie ist nirgends verschwindend: zu $z \in X$ wähle $f \in \mathcal{A}$ mit $f(z) \neq 0$. Dann ist $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ oder $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$, und beide diese Funktionen gehören zu $\mathcal{B}$.
Sie ist auch punktetrennend: zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ wähle $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Also ist $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ oder $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$.

Es folgt, dass $\mathcal{B}$ in $C(X,\mathbb{R})$ dicht ist. Hat man nun $f \in C(X,\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$, so findet man $g_1, g_2 \in \mathcal{B}$ mit $\|\operatorname{Re} f - g_1\|_\infty < \varepsilon$ und $\|\operatorname{Im} f - g_2\|_\infty < \varepsilon$. Dann ist $g_1 + i g_2 \in \mathcal{A}$ und $\|f - (g_1 + i g_2)\|_\infty < 2\varepsilon$.

$\square$