Der Satz von Arzela - Ascoli

Auch in diesem Abschnitt wollen wir einen Satz zeigen, der es erlaubt auf Kompaktheit zu schliessen. Nämlich für Teilmengen des vollständigen normierten Raumes

$$\langle C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \rangle$$

mit X kompakten topologischen Raum.

Das wesentliche Werkzeug für den Beweis dieses Satzes ist das folgende einfache Lemma.

Lemma:

Sei $\langle \Omega, d \rangle$ ein metrischer Raum. Sei vorausgesetzt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \langle \tilde{\Omega}, \tilde{d} \rangle \text{ metrischer Raum}, \; \Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}.$$
$$\Phi(\Omega) \text{ ist total beschränkt} \; \wedge$$
$$\forall x, y \in \Omega . \; \tilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \delta \Rightarrow d(x, y) \leq \varepsilon$$

Dann ist $\langle \Omega, d \rangle$ total beschränkt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\langle \tilde{\Omega}, \tilde{d} \rangle$, δ, Φ wie in der Voraussetzung, und wähle $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n \subseteq \tilde{\Omega}$ mit

$$\tilde{d}(\tilde{A}_1), \dots, d(\tilde{A}_n) \leq \delta, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j \supseteq \Phi(\Omega).$$

Dann gilt

$$d\left(\Phi^{-1}(\tilde{A}_j)\right) \leq \varepsilon, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \Phi^{-1}(\tilde{A}_j) = \Omega.$$

$\square$

Definition:

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$. Dann heißt $\mathcal{F}$

(i) punktweise beschränkt, wenn

$$\forall x \in X. \quad \sup \{ |f(x)| \mid f \in \mathcal{F} \} < \infty.$$

(ii) gleichgradig stetig, wenn

$$\forall x \in X, \varepsilon > 0 \; \exists U \in \mathcal{U}^X(x) \; \forall f \in \mathcal{F} \; \forall y \in U. \; |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Satz (Arzela-Ascoli):

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist total beschränkt (bzgl. der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik).

(ii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis:

▷ (i) ⇒ (ii): Da $\mathcal{F}$ total beschränkt ist, ist $\mathcal{F}$ auch beschränkt d.h. $\sup\{\|f\|_\infty \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$. Nun gilt

$$\forall x \in X.\ \sup\{|f(x)| \mid f \in \mathcal{F}\} \leq \sup\{\|f\|_\infty \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ gegeben. Wähle $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$d_\infty(\mathcal{F}_j) \leq \varepsilon/3 \ \wedge \ \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}.$$

O.b.d.A. seien $\mathcal{F}_j \neq \emptyset$. Wähle $f_j \in \mathcal{F}_j$ und $U_j \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$\forall y \in U_j.\ |f_j(y) - f_j(x)| \leq \varepsilon/3.$$

Setze $U := U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist $U \in \mathcal{U}(x)$. Für $f \in \mathcal{F}$ wähle $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $f \in \mathcal{F}_j$, und schätze ab

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - f_j\|_\infty + \varepsilon/3 + \|f_j - f\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

▷ (ii) ⇒ (i): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes $x \in X$ wähle $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in U_x.\ |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da X kompakt ist, finden wir endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n$ sodass $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} = X$.
Sei nun $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\Phi(f) := (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Da $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, ist $\Phi(\mathcal{F})$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Heine-Borel ist $\overline{\Phi(\mathcal{F})}$ kompakt. Daher ist $\overline{\Phi(\mathcal{F})}$, und insbesondere auch $\Phi(\mathcal{F})$, total beschränkt.

Seien $f, g \in \mathcal{F}$ mit $\|\Phi(f) - \Phi(g)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Für $x \in X$ wähle $j \in \{1, \dots, n\}$ sodass $x \in U_{x_j}$. Dann gilt

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aus dem obigen Lemma folgt nun dass $\mathcal{F}$ total beschränkt ist.

$\square$

G. Ascoli hat diesen Satz für Lipschitz-stetige Funktionen gezeigt, die obige allgemeine Variante stammt von C. Arzelà.

Definition:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in (0, 1]$, und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion f Lipschitz stetig mit Exponent α, wenn gilt

$$\exists L > 0 \ \forall x, y \in [a,b]. \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha$$

Wir bezeichnen die Menge aller Funktionen die Lipschitz stetig mit Exponent α auf $[a,b]$ sind mit $Lip_\alpha(a,b)$, und setzen

$$\|f\|_{Lip,\alpha} := \inf \left\{ L > 0 \,\middle|\, \forall x, y \in [a,b]. \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha \right\}$$

für $f \in Lip_\alpha(a,b)$.

Offenbar ist $Lip_\alpha(a,b)$ ein linearer Raum, es gilt

$Lip_\alpha(a,b) \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$, und $\|.\|_{Lip,\alpha}$ erfüllt

$$\forall f,g \in Lip_\alpha(a,b).\ \|f+g\|_{Lip,\alpha} \le \|f\|_{Lip,\alpha} + \|g\|_{Lip,\alpha},$$

$$\forall f \in Lip_\alpha(a,b),\ \lambda \in \mathbb{R}.\ \|\lambda f\|_{Lip,\alpha} = |\lambda| \cdot \|f\|_{Lip,\alpha}.$$

Schließlich gilt $\|f\|_{Lip,\alpha} = 0$, genau dann wenn f konstant ist.

Korollar:

Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $\alpha \in (0,1]$, $L>0$, $t_0 \in [a,b]$, und $\eta_0 > 0$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{F} := \{ f \in Lip_\alpha(a,b) \mid \|f\|_{Lip,\alpha} \le L,\ |f(t_0)| \le \eta_0 \}$$

kompakt in $\langle C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.

Beweis: Die Menge $\mathcal{F}$ ist (sogar unter punktweiser Konvergenz) abgeschlossen: gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und erfüllen alle f_n dass $|f_n(x) - f_n(y)| \le L|x-y|^\alpha$, so gilt dies auch für f.

Die Menge $\mathcal{F}$ ist (sogar gleichmäßig) beschränkt: für jedes $t \in [a,b]$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|f(t)| \le |f(t) - f(t_0)| + |f(t_0)| \le L(b-a) + \eta$$

Die Menge $\mathcal{F}$ ist gleichgradig (sogar gleichmäßig) stetig: für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := (\varepsilon/L)^{1/\alpha}$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ und $x,y \in [a,b]$ dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ wenn $|x-y| < \delta$.

$\square$

Als eine Anwendung des Satzes von Arzelà-Ascoli wollen wir den Existenzsatz von Peano herleiten. Dieser zeigt lokale Existenz von Lösungen von Anfangswertproblemen erster Ordnung mit stetiger rechter Seite.

Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: [t_0,t_1] \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig, und $y_0 \in D$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Eine Lösung des Problems ist eine Funktion $y: [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n$ mit

(i) $y([t_0,t_1]) \subseteq D$,

(ii) y ist differenzierbar (an den Randpunkten einseitig differenzierbar),

(iii) y erfüllt die beiden Gleichungen $y'(t) = F(t, y(t))$, $t \in [t_0,t_1]$, und $y(t_0) = y_0$.

Man kann die Differentialgleichung auch äquivalent als Integralgleichung anschreiben, und das ist an vielfacher Hinsicht die bessere Sichtweise. Nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung ist eine Funktion Lösung des obigen Anfangswertproblems, genau dann wenn

(i) $y([t_0,t_1]) \subseteq D$,

(ii) y ist stetig,

(iii) y erfüllt die Gleichung (Integrale vektorwertiger Funktionen ist komponentenweise definiert)

$$\forall t \in [a,b]. \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds.$$

Satz (Peano):

Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, und sei $F: [t_0, t_1] \times \overline{U_R(y_0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Setze

$$J := \min\left\{ t_1, t_0 + \frac{R}{\|F\|_\infty} \right\}.$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), & t \in [t_0, J], \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

eine Lösung.

Beweis:

▷ Die Tonelli-Approximation: Sei $N \in \mathbb{N}$ und setze $\delta := (J - t_0)/N$. Wir definieren rekursiv stetige Funktionen

$$y_{N,j} : [t_0, t_0 + j\delta] \to \overline{U_R(y_0)}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

$j = 1$: Setze $y_{N,1}(t) := y_0$, $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

$j \mapsto j+1$: Setze

$$y_{N,j+1}(t) := \begin{cases} y_0, & t \in [t_0, t_0 + \delta], \\ y_0 + \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\, ds, & t \in [t_0 + \delta, t_0 + (j+1)\delta], \end{cases}$$

Klarerweise ist $y_{N,j+1}$ stetig. Weiters gilt (11.11 bezeichnet die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$)

$$\| y_{N,j+1}(t) - y_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\, ds \right\|$$

$$\le (t-\delta-t_0)\, \|F\|_\infty \le (T-t_0)\, \|F\|_\infty \le R$$

also bildet $y_{N,j+1}$ tatsächlich $[t_0, t_0+(j+1)\delta]$ nach $\overline{U_R(y_0)}$ ab.

▷ $\forall j \in \{1,\dots,N-1\}$. $y_{N,j+1}\big|_{[t_0, t_0+j\delta]} = y_{N,j}$:

Wir verwenden Induktion.

$j=1$: Für $t \in [t_0, t_0+\delta]$ gilt $y_{N,2}(t) = y_0 = y_{N,1}(t)$.

$j \mapsto j+1$: Ist $t \in [t_0, t_0+\delta]$, so gilt wieder $y_{N,j+1}(t) = y_0 = y_{N,j}(t)$.

Sei $t \in [t_0+\delta, t_0+j\delta]$. Dann liegt die Integrationsvariable s in der definierenden Gleichung

$$y_{N,j+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\, ds$$

stets in $[t_0, t_0+(j-1)\delta]$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $y_{N,j}(s) = y_{N,j-1}(s)$, und wir sehen dass die rechte Seite gleich $y_{N,j}(t)$ ist.

▷ $y_N := y_{N,N}$ ist "approximative Lösung": Da $y_N\big|_{[t_0, T-\delta]} = y_{N,N-1}$ ist, gilt

$$y_N(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_N(s))\, ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Für $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\pi_\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die ℓ-te Koordinate.

D $\forall N \in \mathbb{N}, \ell \in \{1, .., N\}.$ $\pi_\ell \circ y_N \in Lip_1(t_0, J) \wedge$
$\|\pi_\ell \circ y_N\|_{Lip, 1} \leq \|F\|_\infty \wedge |(\pi_\ell \circ y_N)(t_0)| \leq \|y_0\|$

Nach Definition ist $y_N(t_0) = y_0$, und damit $\|(\pi_\ell \circ y_N)(t_0)\| \leq \|y_0\|$.

Seien nun $t, t' \in [t_0, J]$, $t' \leq t$. Im Fall $t_0 + \delta \leq t'$ hat man

$$\|y_N(t) - y_N(t')\| = \left\| \int_{t'-\delta}^{t-\delta} F(s, y_{N,N-1}(s))\, ds \right\| \leq$$

$$\leq (t - t') \|F\|_\infty .$$

Ist $t' \leq t_0 + \delta \leq t$, so ist

$$\|y_N(t) - y(t')\| = \|y_N(t) - y_N(t_0 + \delta)\| \leq$$

$$\leq (t - (t_0 + \delta)) \|F\|_\infty \leq (t - t') \|F\|_\infty .$$

Schließlich ist für $t \leq t_0 + \delta$

$$\|y_N(t) - y_N(t')\| = 0 \leq (t - t') \|F\|_\infty .$$

D Anwendung von Arzelà-Ascoli: Nach (dem Korollar von) Arzelà-Ascoli ist die Menge

$$\left\{ f \in Lip_1(t_0, T) \;\middle|\; \|f\|_{Lip,1} \le \|F\|_\infty,\ |f(t_0)| \le \|y_0\| \right\}$$

kompakt in $\langle C([t_0, T], \mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.

Wähle eine Teilfolge $(\pi_1 \circ y_{N(1,j)})_{j=1}^\infty$ von $(\pi_1 \circ y_N)_{N=1}^\infty$ die gleichmäßig konvergiert. Wähle eine weitere Teilfolge $(\pi_2 \circ y_{N(2,j)})_{j=1}^\infty$ von $(\pi_2 \circ y_{N(1,j)})_{j=1}^\infty$ die gleichmäßig konvergiert. Verfährt man endlich weiter, erhält man eine Teilfolge

$$(y_{N_j})_{j=1}^\infty \quad \text{von} \quad (y_N)_{N=1}^\infty$$

sodass alle Komponentenfolgen $(\pi_\ell \circ y_{N_j})_{j=1}^\infty$ gleichmäßig konvergieren.

Bezeichne den Grenzwert dieser Teilfolge mit y.

D y ist Lösung: Da für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt dass $y_N([t_0, T]) \subseteq \overline{U_R(y_0)}$, gilt dies auch für y.

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und $t \in [t_0, T]$ gilt

$$y_{N_j}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{T} 1\!\!1_{\left[t_0,\, t - \frac{(T-t_0)}{N_j}\right]}(s) \cdot F(s, y_{N_j}(s))\, ds.$$

Der Integrand ist unabhängig von j beschränkt durch die Konstante Funktion $\|F\|_\infty$, und er konvergiert für $j \to \infty$ punktweise gegen $1\!\!1_{[t_0, t)}(s) \cdot F(s, y(s))$. Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds, \quad t \in [t_0, T].$$

$\square$