# Der Satz von Tychonoff

Kompaktheit ist eine sehr starke Eigenschaft. Es ist daher interessant Sätze zu haben die es erlauben zu zeigen dass gewisse Räume oder Mengen tatsächlich kompakt sind.

## Satz (Tychonoff)

Sei $I$ eine Menge und seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume. Dabei sei vorausgesetzt, dass $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Bezeichne $X := \prod_{i \in I} X_i$, und sei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf $X$. Dann sind äquivalent:

(i) $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ist kompakt.

(ii) Für jedes $i \in I$ ist $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$ kompakt.

### Beweis:

$\triangleright$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\triangleleft$ Diese Implikation ist klar, denn die kanonische Projektion $\pi_j : X \to X_j$ ist $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}_j$-stetig und surjektiv.

$\triangleright$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\triangleleft$ Diese Implikation ist der tiefliegende Teil des Satzes. Wir verwenden die Charakterisierung der Kompaktheit durch Netze. Sei uns $\langle J, \preceq \rangle$ gerichtet und $\varphi : J \to X$ gegeben. Ziel ist ein konvergentes Teilnetz zu konstruieren. Die Voraussetzung (ii) gewährleistet, dass man für jede einzelne Komponente $i \in I$ ein an dieser Komponente konvergentes Teilnetz findet, und damit (leicht) auch für jede endliche Teilmenge von $I$ ein Teilnetz, dass für alle Komponenten dieser endlichen Teilmenge konvergiert. Um Existenz eines ! an jeder Komponente ! konvergierenden Teilnetzes zu zeigen, benutzt man ein typisches "Lemma von Zorn" - Argument.

**DD eine halbgeordnete Menge :**

Behandle die Menge

$$\mathcal{M} := \Big\{ (D, g) \in \mathcal{P}I \times \prod_{i \in D} X_i \ \Big| \ \exists \text{ Teilnetz } g' \text{ von } g \ \forall i \in D.\ g(i) \text{ ist Grenzwert von } \pi_i \circ g' \Big\}$$

versehen mit der Ordnungsrelation

$$(D, g) \leq (D', g') \ :\Longleftrightarrow \ D \subseteq D' \wedge \forall i \in D.\ g(i) = g'(i) .$$

**DD die Voraussetzungen des Lemma von Zorn :**

① $\mathcal{M} \neq \emptyset$ : Es ist $X \neq \emptyset$, und für jedes $g \in X$ gilt $(\emptyset, g) \in \mathcal{M}$.

## ② Jede totalgeordnete Teilmenge hat obere Schranke:

Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ totalgeordnet und nichtleer. Setze

$$\hat{D} := \bigcup_{(D,g)\in\mathcal{N}} D ,$$

und definiere ein Element $\hat{g} \in X$ durch

- Für $i \in \hat{D}$ wähle $(D,g) \in \mathcal{N}$ mit $i \in D$, und setze $\hat{g}(i) := g(i)$,
- Für $i \in I \setminus \hat{D}$ wähle $x_i \in X_i$ und setze $\hat{g}(i) := x_i$.

Man beachte die folgende Eigenschaft: Ist $i \in \hat{D}$ und $(D', g') \in \mathcal{N}$ mit $i \in D'$, so folgt $\hat{g}(i) = g'(i)$. Denn, ist $(D,g)$ wie in der Definition von $\hat{g}(i)$, so gilt $(D,g) \leq (D',g')$ oder $(D',g') \leq (D,g)$. In beiden Fällen haben wir $g(i) = g'(i)$.

Für das so konstruierte Paar $(\hat{D}, \hat{g}) \in \mathcal{P}I \times \prod_{i\in\hat{D}} X_i$ gilt also

$$\forall (D,g) \in \mathcal{N}.\ D \subseteq \hat{D} \wedge \left( \forall i \in D.\ g(i) = \hat{g}(i) \right)$$

Wir müssen zeigen, dass $(\hat{D}, \hat{g}) \in \mathcal{M}$. Dazu sei $\hat{J}$ die Menge aller Paare $(j, \prod_{i\in I} U_i) \in J \times \mathcal{P}X$ wobei $U_i \in \mathcal{U}(\hat{g}(i))$ ist und die Menge

$$\{ i \in I \mid U_i \neq X_i \}$$

eine endliche Teilmenge von $\hat{D}$ ist. Weiters sei

$$\Big(j, \prod_{i\in I} U_i\Big) \preceq \Big(j', \prod_{i\in I} U_i'\Big) :\iff$$
$$j \preceq j' \wedge \forall i\in I.\ U_i \supseteq U_i'.$$

Damit wird $\hat{J}$ eine gerichtete Menge. Dass $\preceq$ reflexiv und transitiv ist, ist klar. Sind $(j, \prod_{i\in I} U_i)$ und $(j', \prod_{i\in I} U_i')$ in $\hat{J}$, wähle $j_0 \in J$ mit $j_0 \succeq j, j'$ und betrachte

$$\Big(j_0, \prod_{i\in I} (U_i \cap U_i')\Big).$$

Dieses Paar liegt in $\hat{J}$ und ist eine obere Schranke für die beiden gegebenen Paare.

Als nächstes konstruieren wir $\hat{c}: \hat{J} \to J$. Dazu sei $(j, \prod_{i\in I} U_i) \in \hat{J}$ gegeben. Bezeichne

$$L := \{ i\in I \mid U_i \neq X_i \}.$$

Für jedes $l \in L$ finden wir $(D_l, g_l) \in \mathcal{N}$ mit $l \in D_l$. Sei

$$(D, g) := \max\{ (D_l, g_l) \mid l \in L \},$$

und $K$ gerichtet, $x: K \to J$, sodass $y \circ x$ ein Teilnetz ist mit

$$\forall i \in D.\ g(i) \text{ ist Grenzwert von } \pi_i \circ (y \circ x)$$

Nun gilt $L \subseteq D$, wir finden also für jedes $l \in D$ ein $k_l \in K$ mit

$$\forall k \succeq k_l.\ [\pi_l \circ (y \circ x)](k) \in U_l$$

Weiter finden wir $k' \in K$ sodass

$$\forall k \succcurlyeq k' . \quad x(k) \succcurlyeq j .$$

Wähle nun eine obere Schranke $k$ der Menge

$$\{k'\} \cup \{k_\ell \mid \ell \in L\},$$

und setze

$$\hat{\iota}\left(j, \prod_{i\in I} U_i\right) := x(k).$$

Dann gilt $\hat{\iota}\left(j, \prod_{i\in I} U_i\right) \succcurlyeq j$ und

$$\forall \ell \in I. \left(\pi_\ell \circ \varphi \circ \hat{\iota}\right)\left(j, \prod_{i\in I} U_i\right) \in U_\ell .$$

Es ist $\varphi \circ \hat{\iota}$ ein Teilnetz von $\varphi$, denn: ist $j \in J$, und $\left(j', \prod_{i\in I} U_i'\right) \succcurlyeq \left(j, \prod_{i\in I} X_i\right)$, so gilt

$$j \preccurlyeq j' \preccurlyeq \hat{\iota}\left(j', \prod_{i\in I} U_i\right) .$$

Für jedes $\ell \in \hat{D}$ ist $\hat{g}(\ell)$ Grenzwert von $\varphi \circ \hat{\iota}$, denn: Sei $\ell \in \hat{D}$ und $W_\ell \in \mathcal{U}(\hat{g}(\ell))$. Wähle $j_0 \in J$ und setze

$$V_i := \begin{cases} W_\ell, & i = \ell \\ X_i, & i \in I \setminus \{\ell\} \end{cases}$$

Dann ist $\left(j_0, \prod_{i\in I} V_i\right) \in \hat{J}$, und für alle

$$\left(j, \prod_{i\in I} U_i\right) \in \hat{J} \text{ mit } \left(j, \prod_{i\in I} U_i\right) \succcurlyeq \left(j_0, \prod_{i\in I} V_i\right)$$

$$(\pi_e \circ \varphi \circ \iota)(j, \prod_{i \in I} \varphi_i) \in U_e \subseteq V_e = W_e .$$

**▷▷ Konklusio des Lemma von Zorn:**

Die halbgeordnete Menge $M$ besitzt maximale Elemente.

**▷▷ Für jedes maximale Element $(D,g)$ ist $D = I$:**

Wir verwenden Kontraposition. Sei $(D,g) \in M$ mit $D \neq I$. Wähle $e \in I \setminus D$ und ein Teilnetz

$$J' \xrightarrow{\iota} J \xrightarrow{\varphi} X$$

sodass für alle $i \in D$ der Punkt $g(i)$ Grenzwert von $\pi_i \circ \varphi \circ \iota$ ist.

Da $X_e$ kompakt ist finden wir für das Netz $\pi_e \circ \varphi \circ \iota : J' \to X_e$ ein konvergentes Teilnetz, d.h.

$$K \xrightarrow{\kappa} J' \xrightarrow{\pi_e \circ \varphi \circ \iota} X_e$$

mit einem Grenzwert $x_e \in X_e$. Setze nun

$$D' := D \cup \{e\}, \qquad g'(i) := \begin{cases} g(i), & i \in I \setminus \{e\} \\ x_e, & i = e \end{cases}$$

Nun ist $\varphi \circ (\iota \circ \kappa)$ ein Teilnetz von $\varphi$, und es gilt

$$\forall i \in D'. \; g'(i) \text{ Grenzwert von } \pi_i \circ \varphi \circ (\iota \circ \kappa)$$

Also ist $(D', g') \in M$. Weiters haben wir offenbar

$$(D', g') \succcurlyeq (D, g) \quad \text{und} \quad (D', g') \neq (D, g). \qquad \square$$

## Bemerkung

Der Beweis des Satzes von Tychonoff beruht auf dem Auswahlaxiom (in Form des Lemmas von Zorn). Tatsächlich kann man zeigen, dass der Satz von Tychonoff äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

---

## Beispiel

Hat man eine endliche Folge reeller Zahlen, $a_1, \dots, a_N$, so kann man in natürlicher Weise die Zahl

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a_j$$

als den Mittelwert von $a_1, \dots, a_N$ verstehen. Kann man auch unendlichen Folgen

$$\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

einen "vernünftigen Mittelwert" zuordnen?

Dazu muss man zunächst überlegen was man von einem "vernünftigen Mittelwert" erwartet. Betrachte

$$\mathbb{B} := \left\{ a = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \;\middle|\; \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty \right\}.$$

Wir nennen $\mu : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ ein invariantes Mittel, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\forall a \in \mathbb{B}.\quad \inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \le \mu(a) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$,

(ii) $\mu$ ist linear,

(iii) Bezeichnet $S: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ den Rechts-Shift

$$S(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (\alpha_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

so gilt $\forall a \in \mathbb{B}.\ \mu(Sa) = \mu(a)$.

(iv) Ist $a \in \mathbb{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und gilt $\alpha_n = \alpha$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{Z}$, so ist $\mu(a) = \alpha$.

▷ Wir zeigen dass ein invariantes Mittel existiert ◁

Dazu betrachte für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\mu_N : \begin{cases} \mathbb{B} \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{|n|\le N} \alpha_n \end{cases}$$

Das sind keine invarianten Mittel, haben aber doch für "gewisse" Folgen "fast" die gewünschten Eigenschaften.

Was jedenfalls gilt ist

$$\forall N \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{B}.\quad \inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \le \mu_N(a) \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n,$$

$\forall N \in \mathbb{N}.\ \mu_N$ ist linear.

Betrachte nun die Funktionen $\mu_N : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ als Elemente des Produktraumes

$$X := \prod_{a \in \mathbb{B}} \mathbb{R},$$

und sei $X$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ wo jeder Faktor die euklidische Topologie trägt. Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen $f_i : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ konvergiert also bzgl. $\mathcal{T}$ gegen ein $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$, genau dann wenn für alle $a \in \mathbb{B}$ gilt dass $f_i(a)$ gegen $f(a)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Die erste der oben genannten Eigenschaften der $\mu_N$ besagt nun dass

$$\mu_N \in \prod_{a\in\mathbb{B}} [\inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n],$$

und wir wollen Teilmenge von $X$ mit $K$ bezeichnen.

Nach Tychonoff ist $K$ kompakt. Also hat die Folge $\varphi : \mathbb{N} \to K$, $\varphi(N) := \mu_N$, ein Teilnetz

$$I \xrightarrow{\iota} \mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \prod_{a\in\mathbb{B}} [\inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n]$$

welches in $X$ einen Grenzwert hat.

Sei $\mu \in K$ ein in dieser Weise erhaltenes Element. Dann ist $\mu : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft (i). Da die Vektorraumoperationen von $\mathbb{R}$ stetig bzgl. der euklidischen Topologie sind, ist $\mu$ linear (beachte hier dass $X$ Hausdorff ist, und daher Grenzwerte eindeutig sind)

$$\mu(\alpha a + \beta b) = \lim_{i\in I} \mu_{\iota(i)}(\alpha a + \beta b) =$$

$$= \lim_{i\in I} \left[\alpha \mu_{\iota(i)}(a) + \beta \mu_{\iota(i)}(b)\right] =$$

$$= \alpha \lim_{i\in I}\left[\mu_{\iota(i)}(a)\right] + \beta \lim_{i \in I}\left[\mu_{\iota(i)}(b)\right] =$$

$$= \alpha\, \mu(a) + \beta\, \mu(b).$$

Als nächstes gilt

$$\mu(\delta a) - \mu(a) = \lim_{i\in I}\left[\mu_{\iota(i)}(\delta a) - \mu_{\iota(i)}(a)\right] =$$

$$= \lim_{i \in I} \frac{1}{2\iota(i)+1}\left(\alpha_{-\iota(i)-1} - \alpha_{\iota(i)}\right) = 0.$$

Ist schließlich $a \in B$ mit $\alpha_n = \alpha$ für alle $|n| \geq n_0$, so gilt

$$\mu(a) = \lim_{i\in I} \mu_{\iota(i)}(a) =$$

$$= \lim_{i\in I} \frac{1}{2\iota(i)+1}\left(2(\iota(i)-n_0)\cdot\alpha + \sum_{|n|\leq n_0} \alpha_n\right) = \alpha.$$