Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition:

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.

(i) Der **Durchmesser** von M ist die Zahl

$$d(M) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in M\}.$$

(ii) M heißt **beschränkt**, wenn $d(M) < \infty$.

(iii) M heißt **total beschränkt**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M_1, \dots, M_n \subseteq X. \; d(M_1), \dots, d(M_n) \leq \varepsilon \wedge M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M_j$$

Zwei einfache Eigenschaften sind:

Lemma:

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt:

(i) M ist total beschränkt, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_1, \dots, x_n \in X. \; M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)$$

(ii) Ist M total beschränkt, so ist M auch beschränkt.

Beweis:

▷ von (i): Einerseits gilt $d(U_\varepsilon(x)) \leq 2\varepsilon$.
Andererseits gilt für eine Teilmenge M dass

$$\forall \delta > 0\ \forall x \in M.\ M \subseteq U_{d(M)+\delta}(x)$$

▷ von (ii): Ist $M = \emptyset$, so ist M beschränkt. Sei $M \neq \emptyset$.
Wähle $x \in M$ und $M_1, \dots, M_n \subseteq X$ mit $d(M_j) \leq 1$ und $M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M_j$. O.b.d.A. seien alle M_j nichtleer. Wähle $x_j \in M_j$ und setze

$$R := \max\{d(x_j, x_i) \mid i,j = 1, \dots, n\} + 2.$$

Sind $x, y \in M$ wähle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in M_i$ und $y \in M_j$.
Dann gilt

$$d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq R + 2$$

$\square$

Satz:

Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) K ist kompakt bezüglich der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$.

(ii) Jede Folge in K hat eine gegen einen Punkt aus K konvergente Teilfolge.

(iii) K ist total beschränkt und, mit der von d induzierten Metrik $d|_{K \times K}$, vollständig.

Wir werden die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) zeigen. Jede dieser Implikationen beinhaltet unterschiedliche Argumentationsweisen.

▷ Beweis von (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varphi: \mathbb{N} \to K$ eine Folge in K. existiert ein Teilnetz $\varphi \circ \iota: I \to K$ welches gegen einen Punkt $x \in K$ konvergiert. Wir müssen eine konvergente Teilfolge konstruieren.

Dies beruht auf einer allgemeinen Tatsache, nämlich dass jeder Punkt eines metrischen Raumes eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, d.h. dass gilt

$$\forall x \in X\ \exists\, \mathcal{W}(x) \subseteq \mathcal{U}(x) \text{ höchstens abzählbar}$$

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x)\ \ \exists\, W \in \mathcal{W}(x).\ \ W \subseteq U$$

Zum Beispiel wähle man die Familie der Kugeln

$$\mathcal{W}(x) := \{ U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Ist nämlich $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es $O \in \mathcal{T}_d$ mit $x \in O \subseteq U$, und daher $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O$ und schließlich $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ und daher $U_{1/n}(x) \subseteq O \subseteq U$.

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $\varkappa: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

▷ Wähle $i \in I$ mit $(\varphi \circ \iota)(i) \in U_1(x)$, und setze $\varkappa(1) := \iota(i)$.

▷ Seien $\varkappa(1), \dots, \varkappa(n)$ bereits konstruiert. Wähle $i_0 \in I$ sodass $(\varphi \circ \iota)(i) \in U_{\frac{1}{n+1}}(x)$ für alle $i \succcurlyeq i_0$, wähle $i_1 \in I$ sodass $\iota(i) \geqslant \varkappa(n)+1$ für alle $i \succcurlyeq i_1$, wähle $j \in I$ sodass $j \succcurlyeq i_0, i_1$, und setze $\varkappa(n+1) := \iota(j)$.

Die Teilfolge $\varphi \circ x$ konvergiert nun tatsächlich gegen x bzgl. $\mathcal{T}_d$. Denn ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben, so wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_{1/n_0}(x) \subseteq U$. Dann gilt nach der Konstruktion von x für alle $n \geq n_0$

$$\varphi(x(n)) \in U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U_{\frac{1}{n_0}}(x) \subseteq U .$$

□

▷ Beweis von (ii) ⇒ (iii): Wir verwenden Kontraposition.

▷▷ Sei K nicht total beschränkt. Wähle $\varepsilon > 0$ sodass sich K nicht mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε überdecken lässt. Wir definieren rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K.

▷ Wähle $x_1 \in K$ beliebig (beachte hier, dass $K \neq \emptyset$).

▷ Seien $x_1, \dots, x_n$ schon konstruiert. Wähle

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j) .$$

Ist $n > m$, so haben wir also stets $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Also ist jede Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht Cauchy-Folge und daher nicht konvergent.

▷▷ Sei $\langle K, d|_{K \times K} \rangle$ nicht vollständig. Wir erinnern uns dass eine Cauchy-Folge die eine konvergente Teilfolge hat bereits selbst konvergiert (z.B. [FundamentAnalysis] Lemma 3.5.7, rudimentär auch [EN-Skript] letzter Teil im Beweis von Satz 3.22). Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K die nicht konvergiert. Dann enthält sie also keine konvergente Teilfolge.

□

Die im vorletzten Beweisteil verwendete Argumentation ist eigentlich ein allgemeines Lemma aus der Graphentheorie.

Lemma (von König):

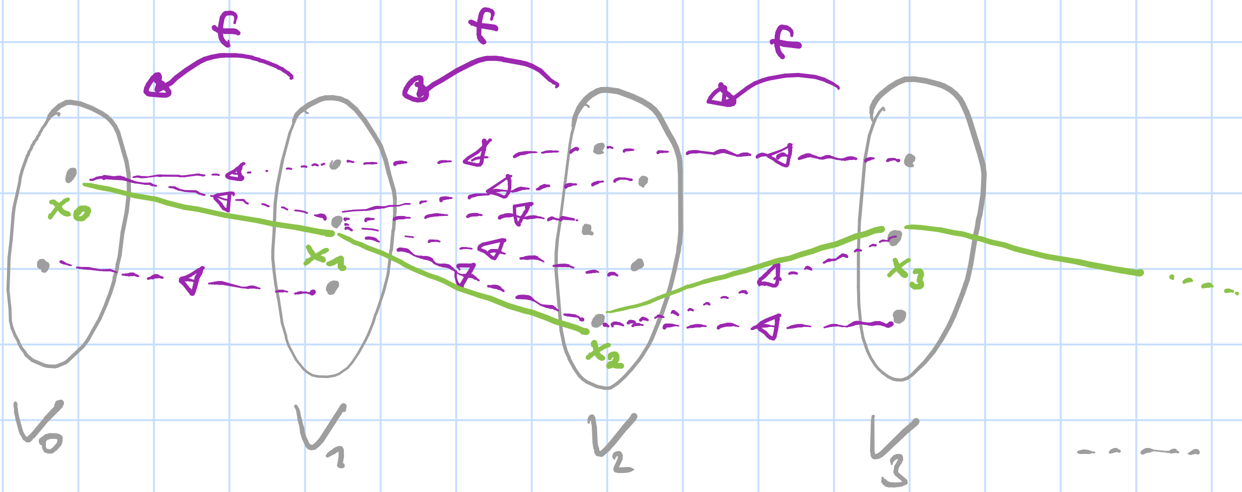
Sei $V_1, V_2, \ldots$ eine unendliche Folge nichtleerer und endlicher Mengen, und sei f eine Funktion

$$f : \dot{\bigcup_{n\geq 1}} V_n \longrightarrow \dot{\bigcup_{n\geq 0}} V_n \quad \text{(disjunkte Vereinigungen)}$$

mit der Eigenschaft dass $f(V_n) \subseteq V_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n \in V_n$ sodass

$$\forall n \geq 2.\ x_{n-1} = f(x_n).$$



Beweis: Betrachte die Menge

$$\mathcal{M} := \Big\{ (x_0, x_1, \ldots, x_N) \;\Big|\; N \in \mathbb{N},\ \forall n = 1, \ldots, N.\ x_n \in V_n \wedge x_{n-1} = f(x_n) \Big\}.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x_N \in V_N$ ist die endliche Folge

$(f^{(N)}(x), f^{(N-1)}(x), \dots, f(x), x)$ an $\mathcal{M}$, und je zwei solche Folgen sind unterschiedlich. Da $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ unendlich ist, ist also auch $\mathcal{M}$ unendlich.

Wir definieren nun induktiv eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\mathcal{M}_{z_0,\dots,z_n} := \{ (x_0,\dots,x_N) \in \mathcal{M} \mid N \geq n,\ x_0 = z_0, \dots, x_n = z_n \}$$

unendlich ist.

▷ Die Menge $\mathcal{M}$ ist unendlich und V_0 ist endlich. Also gibt es $z_0 \in V_0$ sodass $\mathcal{M}_{z_0}$ unendlich ist.

▷ Seien $z_0,\dots,z_n$ schon konstruiert. Die Menge $\mathcal{M}_{z_0,\dots,z_n}$ ist unendlich und V_{n+1} ist endlich. Also gibt es $z_{n+1} \in V_{n+1}$ sodass $\mathcal{M}_{z_0,\dots,z_n,z_{n+1}}$ unendlich ist.

$\square$

▷ Beweis von (iii) $\Rightarrow$ (i) :

Ist $K = \emptyset$, so ist K kompakt. Sei also $K \neq \emptyset$.

▷▷ Wir verwenden dass K total beschränkt ist ◁◁

Wir definieren induktive Partitionen $Q_n, n \geq 1,$ von K mit den Eigenschaften dass

(i) $\forall A \in Q_n .\ d(A) \leq \frac{1}{n}$,

(ii) $\forall n \geq 2,\ A \in Q_n\ \exists!\ B \in Q_{n-1} .\ B \supseteq A$.

▷ Wähle eine endliche Überdeckung $\{A_1, \dots, A_m\}$ von K wobei $d(A_j) \leq 1$. Setze

$$B_k := A_k \setminus \bigcup_{l<k} A_l$$

und

$$Q_1 := \{ B_k \mid k \in \{1, \dots, m\},\ B_k \neq \emptyset \}.$$

▷ Sei angenommen dass Q_n bereits konstruiert ist.
Wähle eine endliche Überdeckung von K durch Mengen $A_1, \dots, A_m$ mit $d(A_j) \leq \frac{1}{n+1}$, setze

$$B_k := A_k \setminus \bigcup_{\ell < k} A_\ell, \quad k = 1, \dots, m,$$

und

$$Q_{n+1} := \{ C \cap B_k \mid C \in Q_n,\ k \in \{1, \dots, m\},\ C \cap B_k \neq \emptyset \}.$$

Die Mengen $Q_1, Q_2, \dots$ sind alle nichtleer und endlich. Für jedes $n \geq 2$ und $A \in Q_n$ gibt es ein eindeutiges $B \in Q_{n-1}$ mit $B \supseteq A$. Es ist also eine Funktion

$$f : \dot{\bigcup_{n \geq 2}} Q_n \to \dot{\bigcup_{n \geq 1}} Q_{n-1}$$

durch die Eigenschaft

$$\forall\, n \geq 2,\ A \in Q_n \,.\quad f(A) \supseteq A$$

wohldefiniert.

▷▷ Wir verwenden die Vollständigkeit ◁◁

Sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge mit $A_n \in Q_n$ und $A_{n-1} = f(A_n)$ für alle $n \geq 2$. Wir zeigen, dass

$$\exists x \in X\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 .\ A_n \subseteq U.$$

Dann wähle $x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n < m$ dass $x_n, x_m \in A_n$ und daher $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n}$. Wir sehen dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist.

Sei x der Grenzwert von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dass $x_m \in A_m \subseteq A_n$ für $m \geq n$, und daher folgt

$$x = \lim_{m \to \infty} x_m \in \overline{A_n}.$$

Wegen $d(\overline{A_n}) = d(A_n) \leq \frac{1}{n}$ sehen wir, dass $\overline{A_n} \subseteq U_\varepsilon(x)$ falls $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

▷▷ Beweis der Kompaktheit von K ◁◁

Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}K$ eine Familie von in der Spurtopologie $\mathcal{T}_d|_K$ offenen Mengen. Setze

$$\hat{Q}_n := \{ A \in Q_n \mid \nexists O \in \mathcal{V} .\ O \supseteq A \},$$

Fall 1, $\exists n \in \mathbb{N} .\ \hat{Q}_n = \emptyset$: Ist $\hat{Q}_n = \emptyset$, so können wir zu jedem Element $A \in Q_n$ ein $O_A \in \mathcal{V}$ wählen mit $O_A \supseteq A$. Das sind endlich viele Mengen, und es gilt

$$\bigcup \{ O_A \mid A \in Q_n \} \supseteq \bigcup Q_n = K.$$

Wir haben also eine endliche Teilüberdeckung.

Fall 2, $\forall n \in \mathbb{N} .\ \hat{Q}_n \neq \emptyset$: Betrachte die Einschränkung

$$\hat{f} := f|_{\dot{\bigcup}_{n \geq 2} \hat{Q}_n}.$$

Wegen $f(A) \supseteq A$ gilt sicher $\hat{f}(\hat{Q}_n) \subseteq \hat{Q}_{n-1}$. Nach dem König Lemma finden wir eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $A_n \in \hat{Q}_n$ und $f(A_n) = A_{n-1}$ für alle $n \geq 2$. Wegen der im vorigen Schritt gezeigten Aussage (und der Definition von $\hat{Q}_n$) finden wir $x \in X$ welches in keiner Menge O aus $\mathcal{V}$ liegt, d.h.

$$\bigcup \mathcal{V} \neq K .$$

$\square$

Korollar:

Sei $\langle X, d \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum, und $M \subseteq X$. Dann ist $\overline{M}$ kompakt, genau dann wenn M total beschränkt ist.

Beweis: Aus einer endlichen Überdeckung von M

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

erhält man eine Überdeckung von $\overline{M}$, nämlich

$$\overline{M} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j} .$$

Beachte hier, dass eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Weiters gilt für jede Menge $A \subseteq X$ dass $d(A) = d(\overline{A})$. Wir sehen, dass M total beschränkt ist, genau dann wenn $\overline{M}$ total beschränkt ist.

▷ Beweis von "⇒": Ist $\overline{M}$ kompakt, so ist $\overline{M}$ auch total beschränkt, und damit insbesondere M total beschränkt.

▷ Beweis von "⇐": Ist M total beschränkt, so ist auch $\overline{M}$ total beschränkt. Nun ist $\overline{M}$ als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes selbst auch vollständig. Damit ist $\overline{M}$ kompakt. $\square$

Eine Menge deren Abschluß kompakt ist nennt man auch relativ kompakt.

Wir erhalten als Korollar auch einen Beweis des Satzes von Heine-Borel.

Korollar:

(i) Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.

(ii) (Heine-Borel): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) versehen mit der euklidischen Metrik. Ist K abgeschlossen und beschränkt, so ist K kompakt.

Beweis:

▷ Beweis von (i): Jeder metrische Raum erfüllt (T_2), denn ist $x, y \in X$, $x \neq y$, so sind die Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(y)$ mit $\varepsilon := \frac{1}{3} d(x,y)$ offen und disjunkt. Also gilt "kompakt $\Rightarrow$ abgeschlossen".

Weiter gilt, nach obigem Satz,

"kompakt $\Rightarrow$ total beschränkt $\Rightarrow$ beschränkt".

▷ Beweis von (ii): Es genügt zu zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ total beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $R \in \mathbb{N}$ sodass $K \subseteq U_R(0)$ und $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{N} \leq \varepsilon/\sqrt{2}$. Betrachte das Gitter mit Maschenweite $\frac{1}{N}$ am Würfel $[-R, R]^n$, das ist

$$G := \left\{ \left(\frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_n}{N} \right) \;\middle|\; \forall k = 1, \dots, n \,.\, j_k \in \mathbb{Z} \wedge |j_k| \leq RN \right\}.$$

Der Durchmesser einer Masche dieses Gitters ist $\frac{\sqrt{2}}{N} \leq \varepsilon$, und alle Maschen gemeinsam überdecken $[-R, R]^n$, und damit auch K.

$\square$