§ Kompaktheit

Definition

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt **kompakt in $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$**, wenn

$$\forall \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{T} . \left(\bigcup \mathcal{E} \supseteq K \Rightarrow \exists \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \text{ endlich} . \bigcup \mathcal{D} \supseteq K \right)$$

Beispiel

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und $K \subseteq X$ endlich. Dann ist K kompakt.

Um dies zu sehen, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{T}$ und $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$ gegeben. Für jedes $x \in K$ wähle $E_x \in \mathcal{E}$ mit $x \in E_x$. Dann ist

$$\mathcal{D} := \{ E_x \mid x \in K \}$$

eine endliche Teilmenge von $\mathcal{E}$ und $\bigcup \mathcal{D} \supseteq K$.

Lemma

Sei $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann gelten:

(i) Sei $K \subseteq X$. Dann ist K kompakt in $\langle X, \mathfrak{J}\rangle$, genau dann wenn K kompakt in $\langle K, \mathfrak{J}|_K \rangle$ ist.

(ii) Sind $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ kompakt, so ist auch $K_1 \cup \dots \cup K_n$ kompakt.

(iii) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen in $\langle K, \mathfrak{J}|_K \rangle$. Dann ist A kompakt.

(iv) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $K \cap A$ kompakt.

Beweis:

▷ von (i) ◁ Wir erinnern uns, dass

$$\mathfrak{J}|_K = \{ O \cap K \mid O \in \mathfrak{J} \}.$$

▷▷ "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{J}|_K$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$. Für $E \in \mathcal{E}$ wähle $O_E \in \mathfrak{J}$ mit $E = O_E \cap K$. Dann ist $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} O_E \supseteq K$. Wähle $E_1, \dots, E_n$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} O_{E_j} \supseteq K$. Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcup_{j=1}^{n} (O_{E_j} \cap K) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} O_{E_j}\right) \cap K = K.$$

▷▷ "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{J}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$. Dann ist $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} (E \cap K) = K$ und wir finden $E_1, \dots, E_n$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} (E_j \cap K) = K$. Damit ist auch $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \supseteq K$.

▷ von (ii) ◁ Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K_1 \cup \dots \cup K_n$. Dann ist für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ auch $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K_j$. Wähle $\mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{E}$ endlich mit $\bigcup \mathcal{D}_j \supseteq K_j$. Dann ist $\mathcal{D} := \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{E}$ endlich, und

$$\bigcup \mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \bigcup \mathcal{D}_n \supseteq K_1 \cup \dots \cup K_n .$$

▷ von (iv) ◁ Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K \cap A$. Dann ist $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cup \{X \setminus A\} \subseteq \mathcal{T}$ und $\bigcup \mathcal{E}' \supseteq K$. Also finden wir $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ sodass $E_1 \cup \dots \cup E_n \cup (X \setminus A) \supseteq K$, und damit $E_1 \cup \dots \cup E_n \supseteq K \cap A$.

▷ von (iii) ◁ Da A in $\mathcal{T}|_K$ abgeschlossen ist, finden wir $B \subseteq X$ abgeschlossen in $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ sodass $A = K \cap B$.

$\square$

Lemma

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologischer Raum. Dann gelten:

(i) $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ist Hausdorff, genau dann wenn

$$\forall K \subseteq X \text{ kompakt}, y \in X, y \notin K \ \exists O_K, O_x \in \mathcal{T} .$$
$$K \subseteq O_K, \ x \in O_x, \ O_K \cap O_x = \emptyset$$

(ii) Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K auch abgeschlossen.

Beweis:

▷ von (i) ◁ Die Implikation "⇐" ist klar, da endliche Mengen kompakt sind. Für "⇒" wähle zu jedem $x \in K$ Mengen $W_x, V_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in W_x$, $y \in V_x$, $W_x \cap V_x = \emptyset$. Offenbar gilt $\bigcup_{x \in K} W_x \supseteq K$. Wähle $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} \supseteq K$. Setze

$$O_K := \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}, \quad O_y := \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j},$$

dann gilt $K \subseteq O_K$, $y \in O_y$, es sind O_K und O_y offen, und

$$O_K \cap O_y = \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} \cap \bigcap_{l=1}^{n} V_{x_l} =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{n} \left(W_{x_j} \cap \bigcap_{l=1}^{n} V_{x_l} \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(W_{x_j} \cap V_{x_j} \right) = \emptyset.$$

▷ von (ii) ◁ Zu jedem $y \in X \setminus K$ wähle $W_y, O_y \in \mathcal{T}$ mit $K \subseteq W_y$, $y \in O_y$, und $W_y \cap O_y = \emptyset$. Dann gilt

$$X \setminus K \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus K} O_y \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus K} (X \setminus W_y) =$$

$$= X \setminus \bigcap_{y \in X \setminus K} W_y \subseteq X \setminus K.$$

Also ist $X \setminus K = \bigcup_{y \in X \setminus K} O_y$ und daher offen. □

Lemma

Seien $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ und $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ topologische Räume, und $f: X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\forall K \subseteq X.\ K \text{ kompakt} \Rightarrow f(K) \text{ kompakt}$$

Beweis: Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq f(K)$. Dann ist

$$\mathcal{E}' := \{ f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{E} \} \subseteq \mathfrak{T}$$

und $\bigcup \mathcal{E}' \supseteq K$. Wähle $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{E}'$ endlich mit $\bigcup \mathcal{D}' \supseteq K$, und wähle für jedes $D' \in \mathcal{D}'$ ein $E_{D'} \in \mathcal{E}$ mit $D' = f^{-1}(E_{D'})$. Die Menge

$$\mathcal{D} := \{ E_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}' \}$$

ist eine endliche Teilmenge von $\mathcal{E}$, und es gilt

$$f(K) \subseteq f\Big(\bigcup_{D' \in \mathcal{D}'} D'\Big) = \bigcup_{D' \in \mathcal{D}'} f(D') \subseteq \bigcup_{D' \in \mathcal{D}'} E_{D'}.$$

$\square$

Korollar

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ kompakt und $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ Hausdorff. Ist $f: X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A auch kompakt in X, und daher $f(A)$ kompakt in Y. Da Y Hausdorff ist, ist $f(A)$ auch abgeschlossen. Nun gilt, da f bijektiv ist,

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A).$$

$\square$

Wir kommen nun zu zwei wesentlichen Charakterisierungen von Kompaktheit. Dazu benötigen wir noch einen Begriff.

Definition

Sei X eine Menge, und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}X$. Wir sagen $\mathcal{A}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn

$$\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ endlich}. \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset.$$

Satz

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i) K ist kompakt.

(ii) Jede Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}K$ deren Elemente abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}|_K$ sind, und die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, erfüllt

$$\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset .$$

(iii) Jedes Netz in K hat ein in $\langle K, \mathcal{T}|_K \rangle$ konvergentes Teilnetz.

Beweis: Da K als Teilmenge von $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakt ist, genau dann wenn es als Teilmenge von $\langle K, \mathcal{T}|_K \rangle$ kompakt ist, genügt es den Fall $K = X$ zu betrachten.

▷ (i) ⇒ (ii) ◁ Wir verwenden Kontraposition.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}X$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft und $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{E} := \{ X \setminus A \mid A \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{T},$$

und es gilt $\bigcup \mathcal{E} = X$. Ist $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ endlich, so gilt

$$X \setminus \bigcup \mathcal{D} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} (X \setminus D) \neq \emptyset .$$

▷(ii)⇒▷(iii) ◁ Sei $\langle I, \precsim \rangle$ gerichtet und $\varphi: I \to X$ ein Netz.

▷▷ Im ersten Schritt betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \left\{ \overline{\{\varphi(j) \mid j \succsim i\}} \;\middle|\; i \in I \right\} \subseteq \mathcal{P}X$$

Dieses hat die endliche Durchschnittseigenschaft, denn: Ist $I' \subseteq I$ endlich, so gibt es eine obere Schranke i_0 von I'. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \{\varphi(j) \mid j \succsim i_0\} &\subseteq \bigcap_{i \in I'} \{\varphi(j) \mid j \succsim i\} \\ &\subseteq \bigcap_{i \in I'} \overline{\{\varphi(j) \mid j \succsim i\}}, \end{aligned}$$

und daher auch

$$\emptyset \neq \overline{\{\varphi(j) \mid j \succsim i_0\}} \subseteq \bigcap_{i \in I'} \overline{\{\varphi(j) \mid j \succsim i\}}.$$

Wähle nun

$$x \in \bigcap_{i \in I} \overline{\{\varphi(j) \mid j \succsim i\}}.$$

▷▷ Im zweiten Schritten konstruieren wir ein Teilnetz von φ welches gegen dieses Element x konvergiert.

Setze

$$J := \{(j,U) \in I \times \mathcal{U}(x) \mid \varphi(j) \in U\},$$

$$(j,U) \leq (j',U') :\Longleftrightarrow j \leq j' \wedge U \supseteq U',$$

$$\iota : \begin{cases} J \to I \\ (j,U) \mapsto j \end{cases}.$$

Dass die Relation $\leq$ auf J reflexiv und transitiv ist, ist klar. Seien $(j_1,U_1),\dots,(j_n,U_n) \in J$. Wähle $k \in I$ mit $k \geq j_\ell$, $\ell = 1,\dots,n$. Da $x \in \overline{\{\varphi(j) \mid j \geq k\}}$ ist, existiert $j \geq k$ mit $x_j \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist $(j, U_1 \cap \dots \cap U_n) \in J$, und

$$(j, U_1 \cap \dots \cap U_n) \geq (j_\ell, U_\ell), \quad \ell = 1,\dots,n.$$

Die Abbildung ι ist offensichtlich monoton. Da für jedes $j \in I$ das Paar $(j, X) \in J$ liegt, ist ι surjektiv, und hat insbesondere cofinales Bild in I. Wir haben also tatsächlich ein Teilnetz

$$\varphi \circ \iota : J \to X$$

von φ.

DD Im dritten Schritt zeigen wir, dass x Grenzwert von $\varphi \circ \iota$ ist. Dazu sei $U \in \mathcal{U}(x)$ gegeben. Da U mit jeder Menge $\{\varphi(j) \mid j \geq i\}$ nichtleeren Schnitt hat, existiert – insbesondere – $j_0 \in I$ mit $(j_0, U) \in J$. Ist $(j, V) \in J$ mit $(j, V) \succsim (j_0, U)$, so gilt

$$(\varphi \circ c)(j, V) = \varphi(j) \in V \subseteq U.$$

$\triangleright$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\triangleleft$ Wir verwenden Kontraposition. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} = X$ und $\bigcup \mathcal{D} \neq X$ für alle $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ endlich. Sei

$$I := \{ \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \mid \mathcal{D} \text{ endlich} \},$$

$$\mathcal{D} \precsim \mathcal{D}' \;:\Longleftrightarrow\; \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'.$$

Da die Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen wieder endlich ist, ist $\langle I, \precsim \rangle$ gerichtet. Sei nun $\varphi : I \to X$ eine Funktion mit

$$\forall \mathcal{D} \in I.\quad \varphi(\mathcal{D}) \in X \setminus \bigcup \mathcal{D}$$

(Auswahlaxiom). Sei $\varphi \circ c : J \to X$ ein Teilnetz von φ und sei $x \in X$. Wähle $E \in \mathcal{E}$ mit $x \in E$. Dann ist $E \in \mathfrak{U}(x)$, und es gilt

$$\forall \mathcal{D}_0 \in I.\ \mathcal{D}_0 \cup \{E\} \succsim \mathcal{D}_0 \wedge \varphi(\mathcal{D}_0 \cup \{E\}) \notin E.$$

Also ist x nicht Grenzwert von $\varphi \circ c$.

$\square$