§§ Konvergenz

Wir beginnen mit einem allgemeinen Konzept.

Definition

Ein Paar $\langle I, \precsim \rangle$ heißt gerichtete Menge, wenn I eine Menge ist und $\precsim$ eine reflexive und transitive Relation auf I mit der Eigenschaft dass jede endliche Teilmenge von I eine obere Schranke besitzt.

Beispiel

(i) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung ist eine gerichtete Menge.

(ii) Das Intervall $(0,1]$ mit der Relation ($\geq$ ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$)

$$x \precsim y \ :\Longleftrightarrow\ x \geq y$$

(iii) Sei $[a,b]$ ein Intervall. Die Menge aller Partitionen, d.h. aller endlichen Teilmengen von $[a,b]$ die a und b enthalten, mit der mengentheoretischen Inklusion.

(iv) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann ist $\mathcal{F}$ versehen mit der Relation

$$F_1 \precsim F_2 \ :\Longleftrightarrow\ F_1 \supseteq F_2$$

eine gerichtete Menge.

Definition

Sei X eine Menge. Ist $\langle I, \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $\varphi : I \to X$ eine Funktion, so heißt φ ein Netz in X (Synonym auch eine Moore-Smith-Folge in X).

Wir schreiben ein Netz oft auch in der gewohnten "Folgenschreibweise" als $(x_i)_{i \in I}$. Bemerke hier, dass eine Folge eigentlich ja auch eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach X ist.

Nun definieren wir Konvergenz von Netzen.

Definition

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, $\langle I, \preceq \rangle$ gerichtet, $\varphi : I \to X$ ein Netz in X, und $x \in X$. Dann heißt φ konvergent gegen x bzgl. $\mathcal{T}$, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \ \exists i_0 \in I \ \forall i \succeq i_0 . \ \varphi(i) \in U.$$

Beispiel

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Betrachte die Menge

$$I := \left\{ \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, \\ \xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \end{array} \right\}$$

mit

$$\left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right) \preceq \left((t'_k)_{k=0}^{n'}, (\xi'_k)_{k=1}^{n'} \right)$$

$$:\Leftrightarrow \max_{k=1,\dots,n} |t_k - t_{k-1}| \leq \max_{k=1,\dots,n'} |t'_k - t'_{k-1}|$$

Dann ist $\langle I, \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Um dabei die Existenz eines gemeinsamen größeren zu zeigen, betrachte eine gemeinsame Verfeinerung der entsprechenden Partitionen mit irgendwelchen Zwischenstellen.

Sei nun $S: I \to \mathbb{R}$ das Netz

$$S(i) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

für einen Index $i = \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right)$. Dann konvergiert S genau dann, wenn f Riemann integrierbar ist. Ist f Riemann integrierbar, so ist $\int_a^b f(t)\,dt$ Grenzwert von S.

Beispiel

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $\varphi : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in X (d.h. ein Netz mit der gerichteten Indexmenge $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$). Weiters sei $x \in X$. Bezeichne $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie auf X. Dann gilt:

Das Netz φ konvergiert in $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ gegen x, genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = x$ im Sinne der Theorie metrischer Räume.

Wir beweisen diese Äquivalenz. Die Konvergenz in $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ bedeutet

$$\forall U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_d}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 .\ \varphi(n) \in U$$

und die Konvergenz im Sinne metrischer Räume bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 .\ d(\varphi(n), x) < \varepsilon .$$

▷ "$\Uparrow$" ◁ Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_d}(x)$. Wähle $O \in \mathcal{T}_d$ mit $x \in O \subseteq U$, und wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $d(\varphi(n), x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\varphi(n) \in U_\varepsilon(x) \subseteq O \subseteq U \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

▷ "$\Downarrow$" ◁ Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{T}_d$, und daher $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_d}(x)$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\varphi(n) \in U_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist also $d(\varphi(n), x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Im Allgemeinen kann ein Netz φ keine, oder auch viele, Grenzwerte haben.

Beispiel

Sei X eine nichtleere Menge versehen mit der Klumpentopologie, sei $\langle I, \preceq \rangle$ gerichtet, wähle $x_0 \in X$, und betrachte das konstante Netz $\varphi(i) = x_0$, $i \in I$. Dann ist jeder Punkt $x \in X$ Grenzwert von φ. Dies gilt da $\mathcal{U}(x) = \{X\}$ für alle $x \in X$.

Lemma

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Hausdorff, so hat jedes Netz höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Wir verwenden Kontraposition. Sei $\varphi: I \to X$ ein Netz und seien x, y Grenzwerte von φ mit $x \neq y$. Seien O_x, O_y offen mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$. Wähle $i_x, i_y \in I$ sodass

$$(\forall i \succeq i_x.\ \varphi(i) \in O_x) \wedge (\forall i \succeq i_y.\ \varphi(i) \in O_y).$$

Wähle $i \in I$ mit $i \succeq i_x$ und $i \succeq i_y$. Dann ist also $\varphi(i) \in O_x \cap O_y$. Insbesondere ist $O_x \cap O_y \neq \emptyset$. $\square$

Wir kommen nun zum Analogon des Begriffes von Teilfolgen.

Definition

Sei X eine Menge, $\langle I, \leq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $\varphi : I \to X$ ein Netz in X. Ist $\langle J, \leq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $\iota : J \to I$ eine Funktion mit

$$\forall i \in I \; \exists j_0 \in J \; \forall j \geq j_0 .\; \iota(j) \geq i$$

so heißt das Netz

$$\varphi \circ \iota : J \to X$$

ein **Teilnetz von φ**.

Bemerkung

Die Bedingung an ι in obiger Definition ist insbesondere dann erfüllt, wenn ι monoton ist und $\iota(J)$ cofinal in I.

Dabei nennen wir eine Teilmenge M von I **cofinal in I**, wenn

$$\forall i \in I \; \exists i' \in M .\; i \leq i'$$

Für fast alle Zwecke genügt es solche spezielle Teilnetze zu verwenden.

So wie man es von Folgen kennt, kann man Konvergenz eines Netzes auch mittels Teilnetzen charakterisieren.

Satz

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, $\langle I, \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge, $\varphi : I \to X$ ein Netz, und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) φ konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz welches gegen x konvergiert.

Beweis

$\triangleright$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\triangleleft$ Sei $\langle J, \preceq \rangle$ gerichtet, $\iota : J \to I$, so dass $\varphi \circ \iota : J \to X$ ein Teilnetz von φ ist. Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$. Wähle $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in U$ für alle $i \succeq i_0$, und wähle $j_0 \in J$ sodass $\iota(j) \succeq i_0$ für alle $j \succeq j_0$. Dann ist

$$(\varphi \circ \iota)(j) \in U \quad \text{für alle } j \succeq j_0 .$$

$\triangleright$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\triangleleft$ Jedes Netz ist Teilnetz von sich selbst, nämlich vermöge der identischen Abbildung (die offenbar monoton mit cofinalem Bild ist).

▷ (iii) ⇒ (i) ◁ Wir verwenden Kontraposition.

Sei vorausgesetzt, dass

$$\exists U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)\ \forall i_0 \in I\ \exists i \succeq i_0.\ y(i) \notin U.$$

Sei ein U mit dieser Eigenschaft festgehalten, und betrachte

$$J := \{ i \in I \mid y(i) \notin U \}$$

versehen mit der Einschränkung von $\preceq$. Dann ist $\langle J, \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge, denn: Reflexivität und Transitivität vererben sich klarerweise. Sei $J' \subseteq J$ endlich, dann gibt es $i_0 \in I$ welches obere Schranke von J' ist. Nach obiger Eigenschaft gibt es $j \in J$ mit $i_0 \preceq j$, und jedes solche j ist obere Schranke von J' in J.

Sei nun ι die Inklusionsabbildung

$$\iota : \begin{cases} J \longrightarrow I \\ i \longmapsto i \end{cases}$$

dann ist ι jedenfalls monoton, und nach obiger Eigenschaft auch cofinal. Betrachte das Teilnetz $y \circ \iota : J \to X$, und ein Teilnetz von diesem:

$$(y \circ \iota) \circ \varkappa : K \longrightarrow X$$

wo K gerichtet und $\varkappa : K \to J$. Die Umgebung U hat die Eigenschaft, dass

$$\forall k \in K.\ y(k) \notin U,$$

insbesondere kann x nicht Grenzwert von $(y \circ \iota) \circ \varkappa$ sein. □

Propositionen

Sei $\langle X, \mathfrak{I} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann gilt:

(i) Sei $A \subseteq X$. Dann ist A abgeschlossen, genau dann wenn gilt:

Für jedes Netz φ in X dessen Bild in A liegt, liegt auch jeder Grenzwert in A.

(ii) Sei $M \subseteq X$ und $x \in X$. Dann ist $x \in \overline{M}$, genau dann wenn gilt:

Es gibt ein Netz φ in X dessen Bild in A liegt, und so dass x Grenzwert von φ ist.

(iii) Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum und $f : X \to Y$. Dann ist f stetig, genau dann wenn gilt:

Ist φ ein Netz in X und $x \in X$ ein Grenzwert von φ, so ist $f(x)$ ein Grenzwert von $f \circ \varphi$.

Beweis:

▷ von (i) "⇒" ◁ Sei $\varphi: I \to X$ ein Netz mit $\varphi(I) \subseteq A$, und sei x ein Grenzwert von φ in $\langle X, \mathcal{T} \rangle$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$, dann finden wir $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in U$ für alle $i \succeq i_0$. Insbesondere ist $A \cap U \neq \emptyset$. Es folgt dass $x \in \overline{A} = A$.

▷ von (ii) "⇒" ◁ Für $U \in \mathcal{U}(x)$ wähle $x_U \in M \cap U$. Betrachte nun den Filter $\mathcal{U}(x)$ als gerichtete Menge, und das Netz $\varphi(U) := x_U$, $U \in \mathcal{U}(x)$.

Wir zeigen, dass x Grenzwert von φ ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}(x)$ gegeben. Ist $V \subseteq U$, so gilt

$$\varphi(V) = x_V \in M \cap V \subseteq U.$$

▷ von (i) "⇐" ◁ Sei $x \in \overline{A}$. Nach dem bereits bewiesenen existiert ein Netz mit Bild in A und Grenzwert x. Es folgt $x \in A$.

▷ von (ii) "⇐" ◁ Sei φ ein Netz mit Bild in M und Grenzwert x. Dann ist das Bild von φ auch in der abgeschlossenen Menge $\overline{M}$, und nach dem bereits bewiesenen folgt $x \in \overline{M}$.

▷ von (iii) "⇐" ◁ Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen, sei φ ein Netz in X mit Bild in $f^{-1}(A)$, und sei $x \in X$ ein Grenzwert von φ. Dann ist $f \circ \varphi$ ein Netz in Y mit Bild in A und $f(x)$ ist ein Grenzwert von $f \circ \varphi$. Nun gilt $(f \circ \varphi)(I) \subseteq A$, und daher auch $f(x) \in A$. D.h. $x \in f^{-1}(A)$.

▷ von (iii) "⇒" ◁ Sei $\varphi : I \to X$ ein Netz in X, und sei $x \in X$ Grenzwert von φ. Weiters sei $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $V \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(x)$ mit $f(V) \subseteq U$ und $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in V$ für alle $i \succsim i_0$. Dann ist auch $(f \circ \varphi)(i) \in U$ für alle $i \succsim i_0$.

$\square$

Als Beispiel behandeln wir näher was Konvergenz in initialen Topologien bedeutet.

Lemma

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, $f_i : X \to Y_i$ Funktionen, und bezeichne $\mathcal{T}_{ini}$ die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i. Weiters sei $\langle J, \lesssim \rangle$ gerichtet, $\varphi : J \to X$ ein Netz in X, und $x \in X$.

Dann ist x ein Grenzwert von φ bzgl. $\mathcal{T}_{ini}$, genau dann wenn für jedes $i \in I$ der Punkt $f_i(x) \in Y_i$ Grenzwert des Netzes $f_i \circ \varphi$ bzgl. $\mathcal{V}_i$ ist.

Beweis: Wir erinnern uns, dass die initiale Topologie die von $\{ f_i^{-1}(O_i) \mid i \in I, O_i \in \mathcal{V}_i \}$ erzeugte Topologie ist. Also ist jedes Element von $\mathcal{T}_{ini}$ eine Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen $f_i^{-1}(O_i)$.

Für jedes $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_{ini}}(x)$ existieren also $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, $O_1 \in \mathcal{V}_{i_1}, \ldots, O_n \in \mathcal{V}_{i_n}$, sodass

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(O_k) \subseteq U.$$

▷ "⇐" ◁ Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{J}_{ini}}(x)$, und wähle einen endlichen Durchschnitt wie oben. Wähle $j_k \in J$, $k=1,\dots,n$, sodass

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\ \forall j \succsim j_k.\ (f_{i_k} \circ \varphi)(j) \in O_k$$

Wähle nun eine obere Schranke $j_0 \in J$ der endlichen Menge $\{j_1,\dots,j_n\}$. Dann ist $\varphi(j) \in U$ für alle $j \succsim j_0$.

▷ "⇒" ◁ Sei $i \in I$ und $V_i \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}_i}(f_i(x))$. Wähle $O_i \in \mathcal{V}_i$ mit $f_i(x) \in O_i \subseteq V_i$. Dann ist

$$x \in f_i^{-1}(O_i) \text{ und } f_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{U}^{\mathcal{J}_{ini}}(x).$$

Wähle $j_0 \in J$ sodass $\varphi(j) \in f_i^{-1}(O_i)$ für alle $j \succsim j_0$. Dann ist auch $(f_i \circ \varphi)(j) \in V_i$ für alle $j \succsim j_0$.

$\square$

Beispiel

Sei Ω eine Menge und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum. Betrachte die Menge

$$X := Y^{\Omega}$$

aller Abbildungen von Ω nach Y. Wir versehen X mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bzgl. der Punktauswertungen

$$\pi_\omega : \begin{cases} Y^\Omega \longrightarrow Y \\ f \longmapsto f(\omega) \end{cases}, \quad \omega \in \Omega.$$

Sei nun $\langle I, \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz von Funktionen $f_i \in Y^\Omega$. Weiter sei $f \in Y^\Omega$.

Dann ist f Grenzwert von $(f_i)_{i\in I}$ bzgl. $\mathcal{T}$, genau dann wenn

$$\forall \omega \in \Omega. \quad f(\omega) \text{ ist Grenzwert von } (f_i(\omega))_{i\in I} \text{ bzgl. } \mathcal{V}_i.$$

Die Topologie $\mathcal{T}$ heißt die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Y^Ω.