§ Einige Begriffe in topologischen Räumen

§§. Abgeschlossene Mengen und Abschlußoperator

Definition

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen in $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$ gilt.

Proposition

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und bezeichne

$$\mathcal{A} := \{ A \subseteq X \mid A \text{ abgeschlossen} \}.$$

Das Mengensystem $\mathcal{A}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}.\ \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ endlich. $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Beweis: Es gilt $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$,

$$X \setminus \bigcap \mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} X \setminus A,$$

$$X \setminus \bigcup \mathcal{B} = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} X \setminus A.$$

$\square$

Bemerkung

Man kann (leicht) die folgende Aussage zeigen.

Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}X$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften obiger Proposition, so existiert genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, sodass

$\forall M \in \mathcal{P}X.\ M \in \mathcal{A} \iff M$ abgeschlossen in $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$

Korollar

Sei $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und sei $M \subseteq X$. Dann existiert eine kleinste abgeschlossene Menge die M umfasst.

<u>Beweis</u>: Der Durchschnitt

$$\bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abgeschlossen}, A \supseteq M\}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

$\square$

Definition

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

(i) Ist $M \subseteq X$, so heißt die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst, der Abschluss von M in $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, und wir schreiben für diese Menge

$$\mathrm{Clos}_{\langle X, \mathcal{T} \rangle} M \quad \text{oder kurz} \quad \overline{M}.$$

(ii) Die Abbildung

$$\overline{\cdot} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ M \longmapsto \overline{M} \end{cases}$$

heißt der Abschlussoperator von $\langle X, \mathcal{T} \rangle$.

Proposition

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Der Abschlußoperator von $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(ii) $\forall M \in \mathfrak{P}X.\ M \subseteq \overline{M}$

(iii) $\forall M_1, M_2 \in \mathfrak{P}X.\ \overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$

(iv) $\forall M \in \mathfrak{P}X.\ \overline{\overline{M}} = \overline{M}$

Beweis:

▷ von (i) ◁ Die Menge $\emptyset$ ist abgeschlossen.

▷ von (ii) ◁ Nach Definition umfaßt der Abschluß einer Menge diese Menge.

▷ von (iii) ◁ Die Menge $\overline{M_1 \cup M_2}$ ist eine abgeschlossene Menge. Es gilt

$$M_1 \subseteq M_1 \cup M_2 \subseteq \overline{M_1 \cup M_2},$$

und daher $\overline{M_1} \subseteq \overline{M_1 \cup M_2}$. Genauso folgt $\overline{M_2} \subseteq \overline{M_1 \cup M_2}$, und wir erhalten

$$\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \subseteq \overline{M_1 \cup M_2}.$$

Die Menge $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ ist abgeschlossen. Es gilt

$$M_1 \subseteq \overline{M_1} \subseteq \overline{M_1} \cup \overline{M_2}, \quad M_2 \subseteq \overline{M_2} \subseteq \overline{M_1} \cup \overline{M_2},$$

also $M_1 \cup M_2 \subseteq \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Damit folgt

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subseteq \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

▷ von (iv) ◁ Die Menge $\overline{M}$ ist abgeschlossen, und daher ist

$$\overline{(\overline{M})} = \overline{M}.$$

$\square$

Bemerkung

Man kann die folgende Aussage zeigen:

Sei X eine Menge. Ist $\alpha : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) – (iv) dieser Proposition, so existiert genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, sodass

$$\forall M \in \mathcal{P}X. \quad \alpha(M) = \mathrm{Clos}_{\langle X, \mathfrak{T}\rangle} M$$

Lemma

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann ist M abgeschlossen, genau dann wenn $M = \overline{M}$.

Beweis:

▷ "⟹" ◁ M selbst ist eine abgeschlossene Menge die M umfasst.

▷ "⟸" ◁ Nach Definition ist $\overline{M}$ abgeschlossen.

$\square$

Satz

Seien $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ und $\langle Y, \mathfrak{V}\rangle$ topologische Räume, und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen. $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

(iii) $\forall M \subseteq X$. $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$

Beweis:

▷ (i) ⇒ (ii) ◁ Es gilt $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$.

▷ (ii) ⇒ (iii) ◁ Es gilt $f(M) \subseteq \overline{f(M)}$, also $M \subseteq f^{-1}(\overline{f(M)})$. Damit ist auch $\overline{M} \subseteq f^{-1}(\overline{f(M)})$, also $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

▷ (iii) ⇒ (i) ◁ Sei $O \subseteq Y$ offen. Dann gilt

$$f\left(\overline{X \setminus f^{-1}(O)}\right) \subseteq \overline{f(X \setminus f^{-1}(O))} \subseteq \overline{Y \setminus O} = Y \setminus O.$$

Also ist

$$\overline{X \setminus f^{-1}(O)} \subseteq f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O),$$

und daher $X \setminus f^{-1}(O)$ abgeschlossen, gleich $f^{-1}(O)$ offen.

$\square$

Ein Begriff der im Zusammenhang mit Abgeschlossenheit auftritt ist der folgende.

Definition

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt dicht in X bzgl. $\mathfrak{T}$ wenn $\mathrm{Clos}_{\langle X,\mathfrak{T}\rangle} M = X$.

(ii) Sei $Y \subseteq X$ und $M \subseteq Y$. Dann heißt M dicht in Y bzgl. $\mathfrak{T}$, wenn $\mathrm{Clos}_{\langle Y, \mathfrak{T}|_Y\rangle} M = Y$.

Lemma

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann ist M dicht in X genau dann, wenn

$$\forall O \in \mathfrak{T} \setminus \{\emptyset\} \, . \; M \cap O \neq \emptyset .$$

Beweis: Wir zeigen beide Implikationen mit Kontraposition.

▷ "$\Rightarrow$" ◁ Sei $O \subseteq X$ offen nichtleer mit $O \cap M = \emptyset$. Dann gilt $M \subseteq X \setminus O$, und da $X \setminus O$ abgeschlossen ist also auch $\overline{M} \subseteq X \setminus O$. Nun ist $X \setminus O \subsetneq X$.

▷ "$\Leftarrow$" ◁ Setze $O := X \setminus \overline{M}$. Dann ist O offen, nichtleer, und $O \cap M \subseteq O \cap \overline{M} = \emptyset$.

□

§§ Umgebungen und Umgebungsfilter

Definition

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung von x** bzgl. $\mathcal{T}$, wenn

$$\exists O \in \mathcal{T}. \quad x \in O \subseteq U$$

Die Menge aller Umgebungen $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ von x heißt der **Umgebungsfilter von x** bzgl. $\mathcal{T}$.

An dieser Stelle erinnern wir an das mengentheoretische Konzept der Filter.

Definition

Sei X eine Menge. Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}X$ heißt **Filter**, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ endlich. $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{P}X. \; F \subseteq G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$

Proposition

Sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Dann gilt:

(i) $X \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x)$
(ii) $\forall U \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x).\ x \in U$
(iii) $\mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x)$ ist Filter
(iv) $\forall U \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x)\ \exists O \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x).$

$$O \subseteq U \wedge (\forall y \in O.\ O \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(y))$$

Beweis:

▷ von (i) ◁ Es gilt $X \in \mathfrak{T}$ und $x \in X \subseteq X$.

▷ von (ii) ◁ Es gibt eine Menge O mit $x \in O \subseteq U$, insbesondere ist $x \in U$.

▷ von (iii) ◁ Das bereits Gezeigte besagt insbesondere dass $\mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x) \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x)$. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{U}^{\mathfrak{T}}(x)$ endlich. Für jedes $G \in \mathcal{G}$ wähle $O_G \in \mathfrak{T}$ mit $x \in O_G \subseteq G$. Dann ist

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} O_G \in \mathfrak{T}, \quad x \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} O_G \subseteq \bigcap \mathcal{G}.$$

Sei $F \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(x)$ und $G \subseteq X$ mit $F \subseteq G$. Wähle $O \in \mathfrak{I}$ mit $x \in O \subseteq F$. Dann gilt auch $x \in O \subseteq G$.
$\triangleright$ von (iv) $\triangleleft$ Sei $U \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(x)$ und wähle $O \in \mathfrak{I}$ mit $x \in O \subseteq U$. Für jedes $y \in O$ gilt $y \in O \subseteq O$, also $O \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(y)$.

$\square$

Bemerkung

Man kann die folgende Aussage zeigen.

Sei X eine Menge. Ist $\mathfrak{U} : X \to PPX$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) – (iv) obiger Proposition, so existiert genau eine Topologie $\mathfrak{I}$ auf X, sodass

$$\forall x \in X.\ \mathfrak{U}(x) = \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(x)$$

Die uns bereits bekannten Begriffe lassen sich auch mit Umgebungen beschreiben.

Proposition

Sei $\langle X, \mathfrak{I} \rangle$ ein topologischer Raum.
(i) Sei $M \subseteq X$, dann gilt

$$M \text{ offen} \iff \forall x \in M.\ M \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(x)$$

(ii) Sei $M \subseteq X$ und $x \in X$, dann gilt

$$x \in \mathrm{Clos}_{\langle X, \mathfrak{I} \rangle} M \iff \forall U \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{I}}(x).\ U \cap M \neq \emptyset$$

(iii) Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum und $f: X \to Y$ eine Funktion, dann gilt

f stetig $\iff$

$$\forall x \in X, U \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x)) \; \exists V \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x).\; f(V) \subseteq U$$

Beweis:

▷ von (i) ◁

▷▷ "⟹": Für alle $x \in M$ gilt $x \in M \subseteq M$.

▷▷ "⟸": Für $x \in M$ wähle $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq M$.

Dann gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} O_x \in \mathcal{T}.$$

▷ von (ii) ◁ Wir zeigen beide Implikationen mittels Kontraposition.

▷▷ "⟸": Sei $x \notin \overline{M}$, dann ist $X \setminus \overline{M} \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ und $M \cap (X \setminus \overline{M}) = \emptyset$.

▷▷ "⟹": Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ mit $M \cap U = \emptyset$, und wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Dann ist $X \setminus O$ abgeschlossen und $x \notin X \setminus O$, $M \subseteq X \setminus O$.

▷ von (iii) ◁

▷▷ "⟹": Sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $O \in \mathcal{V}$ mit $f(x) \in O \subseteq U$. Dann ist $x \in f^{-1}(O)$ und $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, also $f^{-1}(O) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$. Es gilt $f(f^{-1}(O)) \subseteq O \subseteq U$.

▷▷ "⟸": Sei $O \in \mathcal{V}$. Für $x \in f^{-1}(O)$ ist $f(x) \in O$ und daher $O \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $V_x \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ mit $f(V_x) \subseteq O$, und $W_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in W_x \subseteq V_x$. Dann gilt $W_x \subseteq f^{-1}(O)$, und wir erhalten

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} W_x \in \mathcal{T}.$$

□