§ Konstruktion von Topologien

Eine Topologie ist eine Familie von Teilmengen der Grundmenge X mit gewissen Eigenschaften. Hat man nun irgendeine Familie von Teilmengen von X, so stellt sich die Frage: Gibt es eine Topologie die alle diese Elemente enthält, aber nicht unnötig viele andere?

Topologische Räume kommen automatisch mit stetigen Funktionen. Hat man eine Menge X und Funktionen von dieser in topologische Räume, gibt es eine Topologie auf X die alle dieser Funktionen stetig macht, aber nicht unnötig viele andere?

Die Antwort auf beide Fragen ist "ja".

Proposition

Sei X eine Menge.

(i) Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}X$. Dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodass $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$

(ii) Sei I eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i : X \to Y_i$ Funktionen. Dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodass jedes f_i $\mathcal{T}$-$\mathcal{V}_i$-stetig ist.

Wir geben zwei Beweise für diese Aussage. Zuerst ein Existenzbeweis als Korollar der Existenz von Infima.

<u>Beweis (#1):</u>

▷ von (i) ◁ Die Menge

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{V} \in \mathbb{T}(X) \mid \mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}\}$$

enthält $\mathcal{P}X$. Sie ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen. Damit hat $\inf \mathcal{S}$ die gewünschte Eigenschaft.

▷ von (ii) ◁ Die Menge

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{V} \in \mathbb{T}(X) \mid \forall i \in I.\ f_i \text{ ist } \mathcal{V}\text{-}\mathcal{V}_i\text{-stetig}\}$$

enthält $\mathcal{P}X$ und ist unter Durchschnitten abgeschlossen. Denn ist $O \in \mathcal{V}_i$, dann ist für alle $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$ liegt Urbild $f_i^{-1}(O)$ in $\mathcal{V}$, und damit ist $f_i^{-1}(O) \in \bigcap \mathcal{S}$. Wir sehen wieder, dass $\inf \mathcal{S}$ die gewünschte Eigenschaft hat.

$\square$

Definitionen

Sei X eine Menge.

(i) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}X$, so heißt die gröbste Topologie die $\mathcal{S}$ umfasst die **von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie**.

(ii) Sind I Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i : X \to Y_i$ Funktionen, so heißt die gröbste Topologie die alle f_i stetig macht die **initiale Topologie bezgl. der f_i**.

Beweis #1 gibt eine abstrakte Beschreibung der gewollten Objekte von aussen. Unser zweiter Beweis gibt eine konkrete Beschreibung von innen.

Beweis (#2):

▷ von (i) ◁ Setze

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, X\} \cup \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{ij} \;\middle|\; I \text{ Menge}, n_i \in \mathbb{N}, O_{ij} \in \mathcal{S} \right\}.$$

Offensichtlich muss jede Topologie die $\mathcal{S}$ umfasst auch $\mathcal{T}$ umfassen.

Wir zeigen, dass $\mathfrak{T}$ selbst schon eine Topologie ist. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Definition einer Topologie sind klar. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{T}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathfrak{T}, \quad k=1,\dots,m.$$

Nun gilt

$$\bigcap_{k=1}^{m} \bigcup_{i\in I_k} \left[\bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk}\right] =$$

$$= \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in I_1\times\dots\times I_k} \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1}\right] \cap \dots \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n_{i_k k}} O_{i_k j k}\right] \right)$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$, gehört also zu $\mathfrak{T}$.

▷ von (ii) ◁ Sehe

$$\mathfrak{T} := \{\emptyset, X\} \cup \left\{ \bigcup_{l\in L} \bigcap_{j\in J_l} f_j^{-1}(O_{l_j}) \;\middle|\; L \text{ Menge},\ J_l \subseteq I \text{ endlich},\ O_{l_j} \in \mathcal{V}_j \right\}$$

Jede Topologie die alle f_j stetig macht, muss die von der Menge

$$\mathcal{S} := \{ f_j^{-1}(O_j) \mid j \in I,\ O_j \in \mathcal{V}_j \}$$

erzeugte Topologie umfassen. Wir zeigen, dass die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie $\mathfrak{T}'$ gleich $\mathfrak{T}$ ist. Dabei ist $\mathfrak{T}' \supseteq \mathfrak{T}$ klar.

Für die umgekehrte Inklusion beachte dass Urbilder mit Durchschnitten verträglich sind. Da gilt

$$\bigcap_{l=1}^{n} f_{j_l}^{-1}(O_l) = \bigcap_{j\in\{j_1,\dots,j_n\}} \bigcap_{\substack{l=1,\dots,n\\ j_l=j}} f_j^{-1}(O_l)$$

$$= \bigcap_{j\in\{j_1,\dots,j_n\}} f_j^{-1}\Bigg(\underbrace{\bigcap_{\substack{l=1,\dots,n\\ j_l=j}} O_l}_{\in \mathcal{V}_j} \Bigg).$$

□

Bemerkung

Sei X eine Menge, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum, und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann ist die initiale Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{f\}$ gegeben als

$$\{ f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{V} \}.$$

Dies folgt, da Urbildfunktionen mit Vereinigungen und Durchschnitten verträglich sind, und daher die angeschriebene Menge eine Topologie ist.

Beispiel

Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum, sei $X \subseteq Y$ und bezeichne

$$\iota : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

die Inklusionsabbildung. Die initiale Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{\iota\}$ heißt die Spurtopologie von $\mathcal{V}$ auf X, und wir schreiben $\mathcal{V}|_X$. Explizit gilt:

$$\mathcal{V}|_X = \{ O \cap X \mid O \in \mathcal{V} \}.$$

Beispiel

Sei $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Betrachte das direkte Produkt $X := \prod_{i \in I} X_i$, mit den kanonischen Projektionen

$$\pi_j : \begin{cases} \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i\in I} \longmapsto x_j \end{cases}$$

Die initiale Topologie auf X bzgl. der Familie $\{\pi_j \mid j \in I\}$ heißt die Produkttopologie auf X, und wir schreiben $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

Sie ist gegeben als die Menge aller Vereinigungen von Mengen der Gestalt $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{T}_i$ wobei für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt dass $O_i = X_i$ ist.

Es ist eine wesentliche Tatsache, dass sich initiale Topologien durch eine universelle Eigenschaft beschreiben lassen.

Satz

Sei X eine Menge, seien $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, und seien $f_i : X \to Y_i$ Funktionen. Bezeichne $\mathcal{T}_{ini}$ die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{ini}$

(ii) $\forall \langle Z, \mathcal{W} \rangle$ topologischer Raum, $g: Z \to X$.

$$\left(g \ \mathcal{W}-\mathfrak{J}-\text{stetig} \iff \forall i \in I.\ f_i \circ g \ \mathcal{W}-\mathcal{V}_i-\text{stetig} \right)$$

Beweis:

▷ (i) ⇒ (ii) ◁

▷▷ "⇒": Die Funktionen f_i sind alle $\mathfrak{J}_{ini}-\mathcal{V}_i$-stetig. Ist $g: \mathcal{W}-\mathfrak{J}_{ini}$-stetig, so folgt dass alle $f_i \circ g$ $\mathcal{W}-\mathcal{V}_i$-stetig sind.

▷▷ "⇐": Betrachte eine Menge der Gestalt $f_i^{-1}(O_i)$ mit $O_i \in \mathcal{V}_i$. Es ist

$$g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{W}.$$

Urbilder sind mit Mengenoperationen verträglich, also haben wir damit auch

$$g^{-1}\left(\bigcup_{\ell \in L} \bigcap_{j=1}^{n_\ell} f_{i_{\ell j}}^{-1}(O_{\ell j}) \right) =$$

$$= \bigcup_{\ell \in L} \bigcap_{j=1}^{n_\ell} g^{-1}\left(f_{i_{\ell j}}^{-1}(O_{\ell j})\right) \in \mathcal{W}.$$

▷ (ii) ⇒ (i) ◁

▷▷ $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_{ini}$: Betrachte das Diagramm

$$\langle X, \mathfrak{T}_{ini}\rangle \xrightarrow{id_X} \langle X, \mathfrak{T}\rangle \xrightarrow{f_i} \langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle \quad (i \in I)$$

Alle $f_i \circ id_X$ sind $\mathfrak{T}_{ini}$–$\mathcal{V}_i$–stetig, also ist id_X $\mathfrak{T}_{ini}$–$\mathfrak{T}$–stetig.

▷▷ $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_{ini}$: Betrachte das Diagramm

$$\langle X, \mathfrak{T}\rangle \xrightarrow{id_X} \langle X, \mathfrak{T}\rangle \xrightarrow{f_i} \langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle \quad (i \in I)$$

Die Einbettung id_X ist $\mathfrak{T}$–$\mathfrak{T}$–stetig, also sind alle $f_i \circ id_X$ $\mathfrak{T}$–$\mathcal{V}_i$–stetig.

□

Die nächste Aussage kann man als Assoziativität der Bildung initialer Topologien verstehen.

Proposition

Seien X eine Menge, $Y_i, i \in I$, Mengen, und $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij}\rangle$, $i \in I$, $j \in J_i$, topologische Räume. Weiters seien $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, und $g_{ij} : Y_i \to Z_{ij}$, $i \in I$, $j \in J_i$, Funktionen.

Bezeichne

▷ $\mathfrak{T}_1$ die initiale Topologie auf X bzgl. der Funktionen

$$\{ f_i \circ g_{ij} \mid i \in I,\ j \in J_i \}$$

in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle$,

▷ $\mathcal{V}_i$ die initiale Topologie auf Y_i bzgl. der Funktionen

$$\{ g_{ij} \mid j \in J_i \}$$

in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle$,

▷ $\mathfrak{T}_2$ die initiale Topologie auf X bzgl.

$$\{ f_i \mid i \in I \}$$

in die topologischen Räume $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$.

Dann ist $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

$$\begin{tikzcd}
\langle X, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \rangle \arrow[r, "f_i", "(i \in I)"'] \arrow[rr, bend left, "g_{ij} \circ f_i", "(i \in I,\, j \in J_i)"'] & \langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle \arrow[r, "g_{ij}", "(j \in J_i)"'] & \langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle
\end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $\langle X', \mathcal{T}' \rangle$ ein topologischer Raum, und $h: X' \to X$ eine Funktion. Dann gilt

h ist $\mathcal{T}'$-$\mathcal{T}_1$-stetig

$\iff \forall i \in I, j \in J_i . (g_{ij} \circ f_i) \circ h$ ist $\mathcal{T}'$-$\mathcal{W}_{ij}$-stetig

$\iff \forall i \in I . (\forall j \in J_i . \, g_{ij} \circ (f_i \circ h)$ ist $\mathcal{T}'$-$\mathcal{W}_{ij}$-stetig$)$

$\iff \forall i \in I . (f_i \circ h$ ist $\mathcal{T}'$-$\mathcal{V}_i$-stetig$)$

$\iff h$ ist $\mathcal{T}'$-$\mathcal{T}_2$-stetig.

Wendet man diese Tatsache an mit $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_1 \rangle$ und $h := id_X$, so folgt $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$. Nimmt man $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_2 \rangle$ und $h := id_X$, so folgt $\mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1$.

$\square$

Mittels der Konstruktion der initialen Topologie hat man erreicht eine gegebene Familie von Funktionen mit domain X stetig zu machen. Es stellt sich die Frage, ob dies auch für Funktionen mit codomain X möglich ist. Die Antwort ist "ja".

Proposition

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, und $f_i : Y_i \to X$ Funktionen. Dann existiert eine feinste Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodass jedes f_i $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{T}$-stetig ist.

Beweis: Eine Topologie $\mathcal{W}$ auf X hat genau dann die Eigenschaft dass alle f_i $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{W}$-stetig sind, wenn

$$\mathcal{W} \subseteq \{ O \subseteq X \mid \forall i \in I.\ f_i^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i \} =: \mathcal{T}$$

Nun bemerke, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Die Mengen $\emptyset, X$ gehören offensichtlich zu $\mathcal{T}$. Da Urbilder mit Mengenoperationen verträglich sind, folgt dass $\mathcal{T}$ unter Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist.

$\square$

Definition

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, und $f_i : Y_i \to X$ Funktionen. Die feinste Topologie auf X die alle f_i stetig macht heißt die **finale Topologie bzgl. der f_i**.

Analog wie bei initialen Topologien hat man eine Charakterisierung finaler Topologien mit einer universellen Abbildungseigenschaft.

Satz

Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, und $f_i : Y_i \to X$ Funktionen. Bezeichne mit $\mathcal{T}_{fin}$ die finale Topologie auf X bzgl. der f_i, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{fin}$

(ii) $\forall$ $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ topologischer Raum, $g : X \to Z$.

$$\left(g \ \mathcal{T}\text{-}\mathcal{W}\text{-stetig} \iff \forall i \in I.\ g \circ f_i \ \mathcal{V}_i\text{-}\mathcal{W}\text{-stetig} \right)$$

Beweis:

▷ (i) $\Longrightarrow$ (ii) ◁

▷▷ „$\Longrightarrow$": f_i ist $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{T}_{fin}$-stetig, und $g \circ f_i$ daher $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{W}$-stetig.

▷▷ „$\Longleftarrow$": Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt für alle $i \in I$ dass $f_i^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i$. Also ist $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{fin}$.

▷ (ii) $\Rightarrow$ (i) ◁

▷▷ $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{J}_{fin}$: Betrachte das Diagramm

$$\underset{(i \in I)}{\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle} \xrightarrow{f_i} \langle X, \mathcal{J} \rangle \xrightarrow{id_X} \langle X, \mathcal{J}_{fin} \rangle$$

Alle $id_X \circ f_i$ sind $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{J}_{fin}$-stetig, also ist id_X $\mathcal{J}$-$\mathcal{J}_{fin}$-stetig.

▷▷ $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_{fin}$: Betrachte das Diagramm

$$\underset{(i \in I)}{\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle} \xrightarrow{f_i} \langle X, \mathcal{J} \rangle \xrightarrow{id_X} \langle X, \mathcal{J} \rangle$$

Die Funktion id_X ist $\mathcal{J}$-$\mathcal{J}$-stetig, also sind alle $id_X \circ f_i$ $\mathcal{V}_i$-$\mathcal{J}$-stetig.

□

Ebenso analog zu initialen Topologien erhält man eine Assoziativitätseigenschaft.

Proposition

Betrachte eine Situation wie im folgenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij} \rangle \arrow[r, "g_{ij}", "(j \in J_i)"'] \arrow[rr, bend left, "f_i \circ g_{ij}", "(i \in I,\, j \in J_i)"'] & \langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle \arrow[r, "f_i", "(i \in I)"'] & \left\langle X, \begin{smallmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \end{smallmatrix} \right\rangle \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\mathcal{J}_1$ die finale Topl. der $f_i \circ g_{ij}$, $\mathcal{V}_i$ die finale Topl. der g_{ij}, und $\mathcal{J}_2$ die finale Topl. der f_i.
Dann gilt $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$.

Beweis: Sei $\langle X', \mathcal{J}' \rangle$ ein topologischer Raum, und $h: X \to X'$ eine Funktion. Dann gilt:

h ist $\mathcal{J}_1$-$\mathcal{J}'$-stetig

$\iff \forall i \in I, j \in J_i .\ h \circ (f_i \circ g_{ij})$ ist $\mathcal{W}_{ij}$-$\mathcal{J}'$-stetig

$\iff \forall i \in I. \left(\forall j \in J_i .\ (h \circ f_i) \circ g_{ij} \text{ ist } \mathcal{W}_{ij}\text{-}\mathcal{J}'\text{-stetig} \right)$

$\iff \forall i \in I.\ h \circ f_i$ ist $\mathcal{W}_{ij}$ - $\mathcal{V}_i$ - stetig

$\iff h$ ist $\mathcal{J}_2$-$\mathcal{J}'$-stetig

$\square$

Beispiel

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, und bezeichne

$$\pi : \begin{cases} X \longrightarrow X/_\sim \\ x \longmapsto [x]_\sim \end{cases}$$

die kanonische Projektion. Die finale Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{\pi\}$ heißt die Faktortopologie von $\mathcal{T}$ auf $X/_\sim$, und wir schreiben $\mathcal{T}/_\sim$.