§ Topologische Räume und stetige Funktionen

Definition

Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{T}$ eine **Topologie auf X**, wenn

(i) $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T}$

(ii) $\forall\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} .\ \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$

(iii) $\forall\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ endlich $.\ \bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{T}$

Wir verwenden auch die folgende

Notationen

- Sei X eine Menge. Wir bezeichnen die Menge aller Topologien auf X mit $\mathbb{T}(X)$.
- Ist X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt das Paar $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein **topologischer Raum**.
- Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die bzgl. $\mathcal{T}$ **offenen Mengen**.

So wie vorhin jede mathematische Struktur, kommen auch topologische Räume gemeinsam mit einem Begriff von "strukturerhaltenden Abbildungen".

Definition

Seien $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ topologische Räume, und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig**, wenn

$$\forall O \in \mathcal{V}.\ f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$$

Muss man sich spezifischer ausdrücken, so sagt man auch f ist **$\mathcal{T}$-$\mathcal{V}$-stetig**.

Lemma:

(i) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann ist die Funktion id_X $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-stetig.

(ii) Seien $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$, $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ topologische Räume und $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Ist f $\mathcal{T}$-$\mathcal{V}$-stetig und g $\mathcal{V}$-$\mathcal{W}$-stetig, so ist die Komposition $g \circ f$ $\mathcal{T}$-$\mathcal{W}$-stetig.

Beweis:

▷ von (i) ◁ Sei $O \in \mathcal{T}$, dann ist $\mathrm{id}_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}$.

▷ von (ii) ◁ Sei $O \in \mathcal{W}$. Dann ist $g^{-1}(O) \in \mathcal{V}$, und daher $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$. Nun gilt

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)).$$

$\square$

Definition

Seien $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ topologische Räume und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f ein **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig.

Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Die Relation auf (der Klasse aller) topologischen Räume

$$\langle X, \mathcal{T} \rangle \sim \langle Y, \mathcal{V} \rangle :\Leftrightarrow \langle X, \mathcal{T} \rangle \text{ und } \langle Y, \mathcal{V} \rangle \text{ homöomorph}$$

ist offenbar reflexiv (id_X), symmetrisch (f und f^{-1}), und transitiv ($g \circ f$).

Beispiel

Sei X eine Menge.

(i) $\mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie auf X. Sie heißt die diskrete Topologie.

(ii) $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X. Sie heißt die Klumpentopologie.

(iii) Die Menge

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist eine Topologie auf X. Sie heißt die cofinite Topologie.

Die erforderlichen Eigenschaften (aus der Definition einer Topologie) sind in (i) und (ii) trivialerweise erfüllt, und für (iii) bemerke dass ein endlicher Durchschnitt von Mengen mit endlichem Komplement wieder endliches Komplement hat:

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus O_i).$$

Beispiel

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, d.h. X ist eine Menge und d ist eine Metrik auf X. Dann definieren wir

$$\mathcal{T}_d := \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O \; \exists r > 0 . \; U_r(x) \subseteq O \},$$

wobei $U_r(x)$ die Kugel

$$U_r(x) := \{ y \in X \mid d(y,x) < r \}$$

bezeichnet.

Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_d$ eine Topologie auf X ist. Die Mengen $\emptyset$ und X liegen offensichtlich in $\mathcal{T}_d$. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_d$. Für $x \in \bigcup \mathcal{S}$ wähle $O \in \mathcal{S}$ mit $x \in O$. Wegen $O \in \mathcal{T}_d$ finden wir $r > 0$ mit $U_r(x) \subseteq S \subseteq \bigcup \mathcal{S}$. Sei schließlich $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_d$ endlich. Für $x \in \bigcap \mathcal{S}$ und $S \in \mathcal{S}$ wähle $r(S) > 0$ mit $x \in U_{r(S)}(x) \subseteq S$. Da $\mathcal{S}$ endlich ist, ist

$$r := \min \{ r(S) \mid S \in \mathcal{S} \} > 0.$$

Offensichtlich ist $U_r(x) \subseteq \bigcap \mathcal{S}$.

Wir bezeichnen $\mathcal{T}_d$ auch als die von d induzierte Topologie auf X.

Vermöge der Konstruktion im obigen Beispiel hat man also eine Zuordnung die jedem metrischen Raum einen topologischen Raum zuweist:

$$\langle X, d\rangle \longmapsto \langle X, \mathcal{T}_d\rangle$$

Man kann also metrische Räume als eine Teilklasse topologischer Räume auffassen.

Tatsächlich ist dies eine ziemlich spezielle Teilklasse; in metrischen Räume gelten viel mehr Eigenschaften als in allgemeinen topologischen Räumen, und es treten in vielerlei Kontext topologische Räume auf die nicht in dieser Weise von einer Metrik induziert werden. Dazu drei Beispiele

- ▷ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (siehe später),
- ▷ die w^*-Topologie auf einem unendlich-dimensionalen Banachraum (siehe Funa 1),
- ▷ die Zariski-Topologie am Spektrum eines kommutativen Ringes (siehe – vielleicht – Algebra).

Diese Objekte zu definieren, oder zu untersuchen, ist zum jetzigen Zeitpunkt nicht möglich.

Zwei triviale Beispiele von Topologien die nicht von einer Metrik induziert werden, sind die Klumpentopologie auf einer Menge X mit $|X| \geq 2$, sowie die cofinite Topologie auf einer Menge X mit $|X| = \infty$. Dies liegt ganz einfach daran, dass Topologien die von einer Metrik kommen immer relativ viele offene Mengen haben.

Definition

Ein topologischer Raum $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ heißt **Hausdorff**, man sagt auch er **erfüllt das Trennungsaxiom (T2)**, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists\, O_x, O_y \in \mathcal{T}.$$

$$x \in O_x,\ y \in O_y,\quad O_x \cap O_y = \emptyset.$$

Lemma

Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Dann gilt

(i) Jede Kugel $U_r(x)$ mit $x \in X$, $r > 0$, ist offen in $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$.

(ii) $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$ ist Hausdorff.

Beweis:

▷ von (i) ◁ Sei $x \in X$, $r > 0$, und $y \in U_r(x)$. Setze $\delta := \frac{1}{2}(r - d(y,x))$. Dann ist $\delta > 0$. Für

$z \in U_\delta(y)$ gilt

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(y,x) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(r - d(y,x)) + d(y,x) = \tfrac{1}{2}(r + d(y,x)) < r.$$

Wir sehen, dass

$$U_\delta(z) \subseteq U_r(x).$$

Es folgt, dass tatsächlich $U_r(x) \in \mathcal{T}_d$.

▷ von (ii) ◁ Seien $x,y \in X$, $x \neq y$. Setze $r := \frac{1}{3} d(x,y)$. Dann ist $r > 0$. Für $u \in U_r(x)$ und $v \in U_r(y)$ gilt

$$3r = d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y)$$
$$\leq 2r + d(u,v),$$

und damit $d(u,v) \geq r > 0$. Also haben wir $U_r(x) \cap U_r(y) = \emptyset$.

$\square$

Sei X eine Menge. Dann ist $\mathbb{T}(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}X)$. Die Potenzmenge einer Menge ist in natürlicher Weise halbgeordnet, nämlich mit der mengentheoretischen Inklusion. Damit ist auch $\mathbb{T}(X)$, als Teilmenge einer Potenzmenge, in natürlicher Weise halbgeordnet.

Definition

Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}, \mathcal{V} \in \mathbb{T}(X)$. Wir sagen $\mathcal{T}$ ist **feiner** als $\mathcal{V}$, wenn $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{V}$, und sagen $\mathcal{T}$ ist **gröber** als $\mathcal{V}$, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$.

Lemma

Sei X eine Menge. Für die halbgeordnete Menge $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$ gilt:

(i) Es gibt ein größtes und ein kleinstes Element.

(ii) Jede Teilmenge hat ein Infimum.

Beweis:

▷ größte Element ◁ Die halbgeordnete Menge $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}X), \subseteq \rangle$ hat ein größtes Element, nämlich $\mathcal{P}X$. Dieses gehört zu $\mathbb{T}(X)$ (die diskrete Topologie), und ist damit das größte Element von $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$.

▷ kleinste Element ◁ Die Klumpentopologie $\{\emptyset, X\}$ ist das kleinste Element von $\mathbb{T}(X)$, da jede Topologie $\emptyset$ und X enthalten muss.

▷ Infimum ◁ Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{T}(X)$. In der halbgeordneten Menge $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}X), \subseteq \rangle$ existieren stets Infima, nämlich ist $\bigcap \mathcal{S}$ das Infimum von $\mathcal{S}$. Wir zeigen nun, dass $\bigcap \mathcal{S}$ wieder eine Topologie ist; damit ist es dann auch das Infimum von $\mathcal{S}$ in $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$.

Die Mengen $\emptyset, X$ gehören zu jedem Element von $\mathcal{S}$, also auch zu $\bigcap \mathcal{S}$. Sei $\mathcal{S}' \subseteq \bigcap \mathcal{S}$. Dann gilt für alle $\mathcal{J} \in \mathcal{S}$ dass $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{J}$, und damit auch $\bigcup \mathcal{S}' \in \mathcal{J}$. Es folgt $\bigcup \mathcal{S}' \in \bigcap \mathcal{S}$. Sei $\mathcal{S}' \subseteq \bigcap \mathcal{S}$ endlich. Dann gilt für alle $\mathcal{J} \in \mathcal{S}$ dass $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{J}$, und damit auch $\bigcap \mathcal{S}' \in \mathcal{J}$. Es folgt $\bigcap \mathcal{S}' \in \bigcap \mathcal{S}$.

$\square$

Bemerkung

Sei $\langle A, \leq \rangle$ eine halbgeordnete Menge. Dann gilt: Hat $\langle A, \leq \rangle$ ein größtes Element und hat jede Teilmenge ein Infimum, so hat auch jede Teilmenge ein Supremum.

Denn: ist $B \subseteq A$, so ist

$$\inf \{ a \in A \mid \forall b \in B.\ b \leq a \}$$

das Supremum von B.

Insbesondere hat also jede Menge $\mathcal{S}$ von Topologien auf einer Menge X in $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$ ein Supremum. Dieses Supremum ist aber im allgemeinen verschieden von dem Supremum von $\mathcal{S}$ in $\langle P(PX), \subseteq \rangle$, welches gleich $\bigcup \mathcal{S}$ ist.

Zum Beispiel betrachte $X = \{x, y, z\}$ und

$$\mathfrak{T}_1 := \{ O \subseteq X \mid x \in O \} \cup \{\emptyset\},$$

$$\mathfrak{T}_2 := \{ O \subseteq X \mid z \in O \} \cup \{\emptyset\}.$$

Dann sind $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ Topologien auf X, ihre Vereinigung aber nicht, denn

$$\{x,y\} \in \mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2, \quad \{y,z\} \in \mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2$$

aber

$$\{x,y\} \cap \{y,z\} = \{y\} \notin \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2.$$